

MODELOS CONSTITUTIVOS PARA O BETÃO ARMADO FENDILHADO

Barros, J. A. O. *; Figueiras, J. A. ** e Póvoas, R. H. C. F. ***

* Dept. Eng. Civil, Escola de Engenharia, Universidade do Minho

** Dept. Eng. Civil, Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto

*** Faculdade de Arquitectura, Universidade do Porto

SUMÁRIO

A resposta deformacional do betão estrutural é bastante sensível ao modelo constitutivo adoptado na simulação do comportamento pós-fendilhação deste compósito. No estado fendilhado o betão entre fendas retém ainda tensões de tracção devido fundamentalmente aos mecanismos de engrenagem mecânica associados à rugosidade existente nas faces das fendas e aos fenómenos de interacção que se estabelecem entre as armaduras e o betão envolvente. Assim, um modelo constitutivo realista para o betão armado fendilhado deverá incluir as propriedades de fractura associadas ao betão (resistência à tracção, energia de fractura e distância entre fendas) e as propriedades associadas às armaduras que atravessam a fenda, nomeadamente a percentagem, a aderência e a respectiva orientação.

No presente trabalho são apresentados alguns dos mais recentes modelos constitutivos propostos para a caracterização do comportamento do betão armado fendilhado, bem como os refinamentos introduzidos visando a obtenção de uma melhoria no respectivo desempenho. É proposto um modelo que inclui na sua formulação os principais parâmetros que governam o presente fenómeno. Os modelos seleccionados foram adaptados por forma a possibilitar a sua inclusão num modelo computacional baseado na decomposição das deformações (a deformação do betão fendilhado resulta das deformações associadas às fendas e ao betão entre fendas) e dispondo de modelos de fendas distribuídas com multifendas fixas não necessariamente ortogonais e fendas rotativas. O desempenho relativo dos modelos constitutivos apresentados e do modelo proposto é avaliado através da comparação das respostas numéricas e experimentais obtidas para um conjunto de painéis de betão armado.

ABSTRACT

The deformational response of concrete structures is very sensitive to the constitutive formulation adopted for the post-cracking behaviour. After cracking, concrete between cracks is still able to carry on some tensile stresses in direction normal to the crack, the so called tension-stiffening effect. A realistic tension-stiffening model must take into account the concrete fracture properties (tensile strength, fracture energy, crack spacing) and the properties of the reinforcement crossing the crack, namely, the reinforcement ratio, the bond characteristics and the reinforcement orientation.

Recent published tension-stiffening models were analysed and improved by introducing some modifications. A more consistent tension-stiffening model were developed and implemented in a computational code based on the strain decomposition concept, coupled with rotating and multifixed crack models. The predictions of the tension-stiffening models are compared with the results obtained on tested reinforced concrete panels. Differences between the various models as well as differences with the experimental behaviour are investigated.

1 - Introdução

Os materiais de matriz cimentícia são materiais frágeis que apresentam baixa resistência à tracção. As estruturas construídas com este tipo de material fendilham quando submetidas a acções que lhes induzem tensões de tracção superiores à que o material resiste. A fendilhação é uma das principais causas do comportamento não linear do betão. Para que não ocorra roturas frágeis, o betão é reforçado com a armadura necessária para absorver as tensões de tracção aplicadas. Quando um elemento de betão armado fendilha, as tensões no betão decrescem acentuadamente na secção da fenda, forçando a que as armaduras que atravessam a fenda absorvam quase integralmente as forças actuantes. Entre fendas desenvolve-se, num certo comprimento, tensões tangenciais na interface armadura-betão, de que resultam tensões de tracção no betão. Este fenómeno é descrito esquematicamente na figura 1 e é denominado na nomenclatura inglesa por "tension-stiffening".

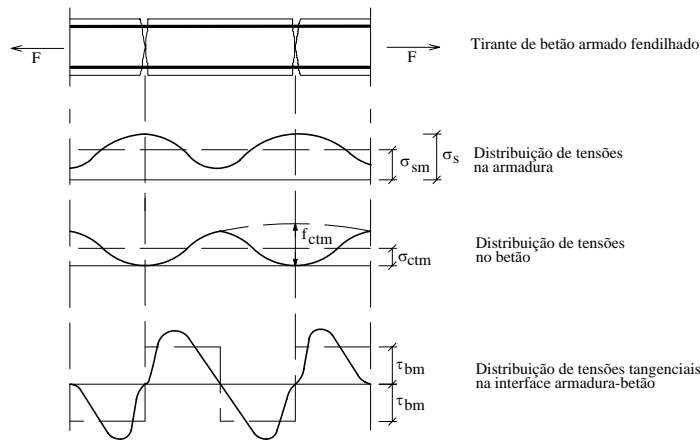


Figura 1 - Distribuição de tensões na armadura, no betão e na interface armadura-betão, num elemento de betão armado fendilhado [1].

Quando traccionado, um tirante de betão armado apresenta o comportamento genérico representado na figura 2.

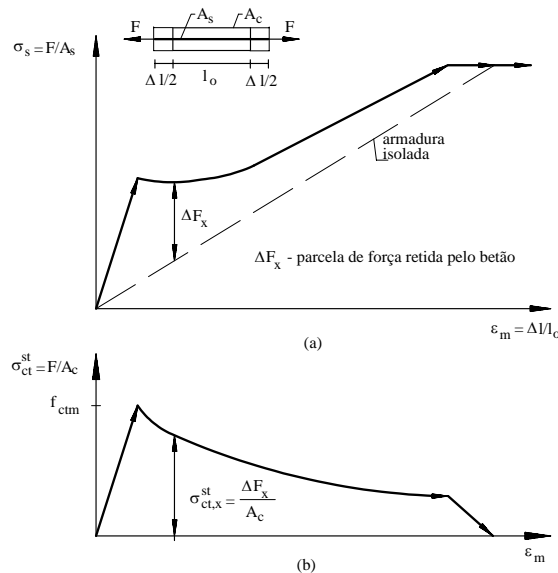


Figura 2 - Relação tensão-extensão num tirante de betão armado traccionado axialmente [2].

- a) Relação entre extensão média e força externa relativa à área de armadura.
- b) Relação extensão média-força retida pelo betão (ΔF) relativa à área de betão.

O diagrama representado na figura 2b) traduz a capacidade do betão entre fendas reter tensões de tracção. Diversos modelos de retenção de tensões de tracção têm sido propostos [3-8] verificando-se da análise do comportamento destes modelos e da resposta dos exemplos analisados com os referidos modelos que os principais factores que influenciam o fenómeno em estudo são a percentagem, estado de tensão, direcção, características da superfície e diâmetro das armaduras que atravessam a fenda. As propriedades de fractura do betão e o tipo de carregamento (monotónico ou cíclico) também interferem no presente fenómeno.

Foram analisados e revistos alguns dos modelos de retenção de tensões de tracção recentemente publicados que potenciam uma melhor simulação do comportamento do betão armado fendilhado. Alguns dos modelos analisados baseiam-se na interpretação do comportamento de um tirante de betão armado pelo que a sua aplicação foi generalizada a estruturas com camadas de armaduras diferentemente orientadas. Para tal foi introduzido o conceito de armadura equivalente [5] que se descreve na secção seguinte.

2 - Conceito de armadura equivalente

No caso geral das estruturas de betão armado, as fendas surgem com orientações que podem não ser ortogonais às armaduras. A maior parte dos modelos de simulação do comportamento à tracção do betão armado fendilhado baseiam-se na resposta de um tirante de betão armado, pelo que admitem que a armadura é ortogonal à fenda. Uma forma de adaptar a formulação destes modelos a elementos reforçados com armaduras não necessariamente ortogonais às fendas, consiste em definir as propriedades de uma armadura fictícia, ortogonal à fenda e tendo características de resistência e de rigidez consistentes com o comportamento das armaduras reais. Para tal considere-se o elemento de betão armado representado na figura 3 (para simplificar representa-se apenas uma malha ortogonal) e determine-se o acréscimo de força retida pelas armaduras que atravessam a fenda, na direcção normal ao plano da fenda [5], isto é,

$$\Delta F_{nn} = A_{c,ef} \sum_{i=1}^{nr} \rho_{ef,i} E_{sti} \Delta \varepsilon_{si} \cos^2 \theta_i \quad (1)$$

em que nr é o número de armaduras com diferentes propriedades, $A_{c,ef}$ e $\rho_{ef,i}$ são a área efectiva de betão e a percentagem efectiva de armadura definidas segundo as recomendações do modelo código do CEB-FIP 1990 [9]. E_{sti} é o módulo de elasticidade tangencial da armadura i , θ_i é o ângulo entre a direcção da fenda e a direcção da armadura i e $\Delta \varepsilon_{si}$ é o acréscimo de extensão na direcção da armadura componente i . Explicitando $\Delta \varepsilon_{si}$ em função do estado de deformação referido ao sistema local da fenda obtém-se

$$\Delta F_{nn} = A_{c,ef} E_s \Delta \varepsilon_{nn} \rho_{eq,ef} \quad (2)$$

onde

$$\rho_{eq,ef} = \sum_{i=1}^{nr} \eta_i \rho_{ef,i} \cos^2 \theta_i (\cos^2 \theta_i + m \sin^2 \theta_i + q \sin \theta_i \cos \theta_i) \quad (3)$$

é a percentagem efectiva de armadura equivalente, sendo $\Delta \varepsilon_{nn}$ a extensão na direcção normal à fenda e

$$\eta_i = \frac{E_{sti}}{E_s}, \quad m = \frac{\Delta \varepsilon_{tt}}{\Delta \varepsilon_{nn}} \quad \text{e} \quad q = \frac{\Delta \gamma_{nt}}{\Delta \varepsilon_{nn}} \quad (4)$$

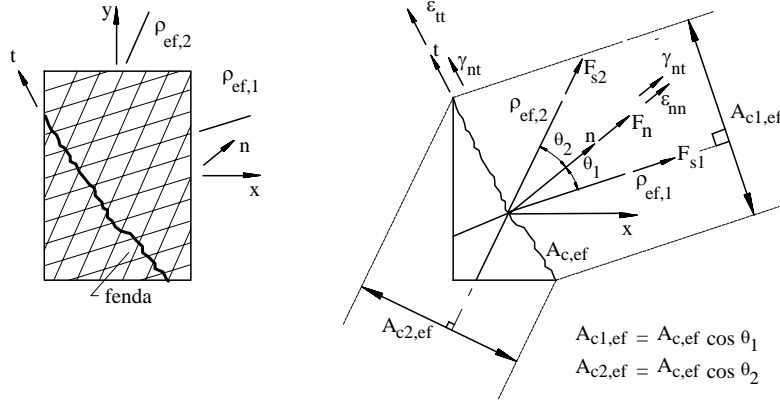


Figura 3 -Forças nas armaduras de um elemento de betão armado fendilhado.

Se no momento em que se inicia a fendilhação ocorrer a cedência da armadura equivalente é porque a percentagem de armadura é inferior à mínima, a qual vem definida pela equação

$$\rho_{eq,ef}^y = \frac{\varepsilon_{cr}}{n(\varepsilon_{seq}^y - \varepsilon_{cr})}, \quad (5)$$

onde $\varepsilon_{cr} = f_{ctm} / E_c$, $n = E_s / E_c$ e

$$\varepsilon_{seq}^y = \frac{1}{\rho_{eq,ef}^e} \sum_{i=1}^{nr} \rho_{ef,i} \varepsilon_{si}^y \cos^2 \theta_i \quad (6)$$

é a extensão de cedência da armadura equivalente, sendo $\rho_{eq,ef}^e$ a percentagem de armadura equivalente calculada segundo (3) com $\eta_i = 1$ (admite-se as armaduras em regime elástico) e ε_{si}^y é a extensão de cedência da armadura componente i . A expressão (5) foi deduzida a partir da equação que estabelece o equilíbrio entre a força absorvida pela armadura na secção da fenda e as forças absorvidas pelo betão e pela armadura na região entre fendas, quando nesta última região se atinge a extensão de fendilhação, ε_{cr} [10].

3 - Modelos implementados

De entre os modelos de retenção de tensões de tracção analisados, seleccionaram-se para serem incluídos no código computacional desenvolvido os modelos propostos por Collins *et al.* [3,11], Massicotte *et al.* [6], Link *et al.* [5], Gupta e Maestrini [7], Stevens *et al.* [4] e Cervenka *et al.* [8]. Estes modelos foram numa primeira fase introduzidos no código computacional desenvolvido e as suas "performances" foram avaliadas através da comparação dos resultados obtidos com os resultados publicados relativos a ensaios experimentais sobre placas de betão armado [10]. A análise dos resultados obtidos com os modelos seleccionados permitiu concluir da necessidade de se introduzirem algumas alterações nas respectivas formulações. Assim, numa segunda fase os aspectos mais negativos destes modelos foram contornados e algumas inovações foram introduzidas com o objectivo de melhorar o desempenho dos modelos seleccionados. Estes modelos são sumariamente descritos nesta secção.

Modelo de Collins *et al.*

Este modelo baseia-se fundamentalmente nos resultados experimentais obtidos por Vecchio e Collins sobre placas de betão reforçado com malha ortogonal e submetidas a estados de tensão multiaxial [12]. A tensão atribuída ao betão fendilhado e que é obtida por uma expressão que melhor aproxima aqueles resultados experimentais, é limitada superiormente pelo valor obtido através da equação

$$\sigma_{ct}^{st} \leq \sum_{i=1}^{nr} \rho_{ef,i} (\sigma_{si}^y - \sigma_{si}) \cos^2 \theta_i \quad (7)$$

que traduz o valor da tensão que as armaduras podem ainda absorver até à sua cedência, tensões estas projectadas para o plano da fenda e convertidas para tensões no betão. Nesta expressão σ_{si}^y e σ_{si} são respectivamente a tensão de cedência e a tensão corrente da armadura componente i .

Modelo de Stevens *et al.*

Stevens *et al.* desenvolveram um modelo [4] que evita a necessidade de se verificar as tensões residuais que as armaduras que atravessam a fenda garantem até à sua cedência (condição expressa pela equação (7)) e introduziram a influência da orientação, percentagem e diâmetro das armaduras na formulação desenvolvida. O modelo baseia-se na definição de uma função exponencial na direcção da extensão principal máxima de tracção, que traduz a capacidade de retenção de tensões de tracção do betão. Esta lei suporta-se na equação desenvolvida por Gopalaratnam e Shah [13] para betões simples. Para a adaptar ao caso do betão armado, Stevens *et al.* introduziram nessa equação um coeficiente para simular o efeito das armaduras no comportamento pós-fendilhação do betão. Tal como na maior parte dos modelos constitutivos para o betão armado, também no modelo de Stevens *et al.* as leis constitutivas são formuladas em termos de tensões e extensões médias. Assim, quando na secção da fenda se atinge a tensão de cedência do aço da armadura, esta tensão é maior que a tensão média instalada na armadura ao longo do comprimento de transferência de tensões entre a armadura e o betão envolvente. Para atender a este fenómeno, aqueles autores deduzem à tensão de cedência do aço do varão isolado, a tensão de tracção retida pelo betão entre fendas.

Modelo de Gupta e Maestrini

O modelo proposto por Gupta e Maestrini [7] foi deduzido para o caso de um tirante de betão armado, tendo o betão e o aço sido considerados em regime linear. As equações de equilíbrio e compatibilidade em que o modelo se baseia tiveram em conta, além das leis constitutivas dos materiais intervenientes, também o comportamento da interface armadura-betão através da adopção de diagramas linear e bilinear que simulam a relação entre as tensões tangenciais e o deslizamento armadura-betão. Adoptando-se algumas hipóteses simplificativas a formulação do modelo conduz a um diagrama trilinear cujos pontos característicos dependem da resistência à tracção do material, da percentagem de armadura, do coeficiente de homogeneização, do módulo de elasticidade do betão e da extensão de cedência da armadura.

Modelo de Cervenka *et al.*

O modelo proposto por Cervenka *et al.* baseia-se no princípio de que o comportamento à tracção do betão armado é governado pelas propriedades de fractura do betão simples e pelo efeito induzido pelas armaduras em termos de atribuir ao betão entre fendas capacidade para este reter tensões de tracção. O primeiro fenómeno é modelado por um diagrama linear de amolecimento, que é definido a partir da energia de fractura do material (G_f) e da largura da banda de fendilhação [16]. O segundo fenómeno é simulado através dum diagrama trilinear, na direcção da armadura, proposto pelo código modelo CEB-FIP 1990. Estes dois fenómenos actuam simultaneamente até ao esgotamento de G_f . Após o consumo de G_f , a capacidade de retenção de tensões de tracção do betão entre fendas passa a ser somente garantida pela participação das armaduras.

Modelo de Massicotte *et al.*

Segundo o modelo de Massicotte *et al.*, o comportamento do betão armado fendilhado é governado tanto pelas propriedades de fractura do betão como pelas características das armaduras. Tal como é proposto no código modelo CEB 1985, um elemento de betão armado fendilhado é considerado como sendo constituído por regiões de betão intacto entre fendas (região I) e por zonas completamente fendilhadas (região II). Equações de equilíbrio e compatibilidade determinam três pontos característicos que definem o diagrama de retenção de tensões de tracção. Estes pontos traduzem três fases distintas da evolução do processo de fendilhação: estabilização da fendilhação, cedência da armadura na região II e cedência da armadura na região I. A generalização do modelo para elementos reforçados com várias armaduras diferentemente orientadas é realizada através do conceito de armadura equivalente, conquanto se tenha admitido no cálculo da percentagem efectiva de armadura

equivalente que as armaduras componentes se encontram em regime linear, isto é $m=q=0$ (ver expressão (3)).

Modelo de Link *et al.*

Tal como no modelo de Massicotte *et al.*, no modelo proposto por Link *et al.* [5] um elemento de betão reforçado com armaduras não ortogonais à fenda é reduzido ao caso de um elemento reforçado com uma armadura equivalente, normal ao plano da fenda. O diagrama de retenção de tensões de tracção foi definido para o caso do elemento ser reforçado por duas armaduras componentes, pelo que é caracterizado por dois pontos. Um correspondente à primeira cedência na região II de uma das armaduras componentes e o outro à cedência da outra armadura na mesma região. Neste modelo admite-se que a partir do momento em que ambas as armaduras se encontram em cedência na secção da fenda, o betão entre fendas deixa de ter capacidade de retenção de tensões de tracção, independentemente da tensão atribuída ao betão no momento da cedência da segunda armadura.

A comparação entre resultados experimentais obtidos por Vecchio e Collins [12] e os obtidos numericamente com os modelos apresentados, evidenciou a necessidade de se introduzir algumas alterações por forma a melhorar o desempenho destes modelos. São as seguintes as principais alterações introduzidas na maior parte dos modelos: introdução do conceito de armadura equivalente; se esta percentagem for inferior à mínima, a capacidade de retenção de tensões de tracção é garantida somente pelas propriedades de fractura do betão; a tensão de tracção atribuída ao betão fendilhado é limitada ao valor que se obtém com a expressão (1). Alterações específicas de cada modelo são descritas em [10].

4 - Modelo proposto

Na figura 4 representa-se o diagrama de retenção de tensões de tracção que se propõe.

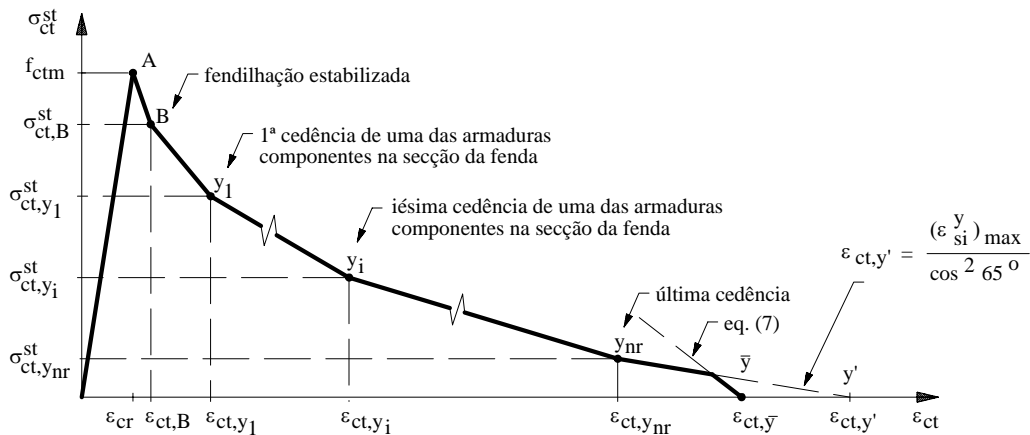


Figura 4 - Diagrama de retenção de tensões de tracção para o betão, proposto para o caso de um elemento reforçado com nr armaduras componentes.

Os pontos característicos que definem este diagrama correspondem à estabilização da fendilhação (ponto B), à ocorrência da cedência das armaduras componentes na secção da fenda (pontos Y_i com $i=1$ a nr , caso o elemento seja reforçado com n armaduras) e ao esgotamento da capacidade de retenção de tensões de tracção do betão fendilhado (ponto \bar{Y}).

Coordenadas do ponto B

Logo após a formação das primeiras fendas, a tensão no betão da zona de fendilhação decresce proporcionalmente com o módulo E_{cl}^{so} (ver figura 5) e a tensão na armadura que atravessa a fenda aumenta proporcionalmente com o respectivo módulo de elasticidade E_s .

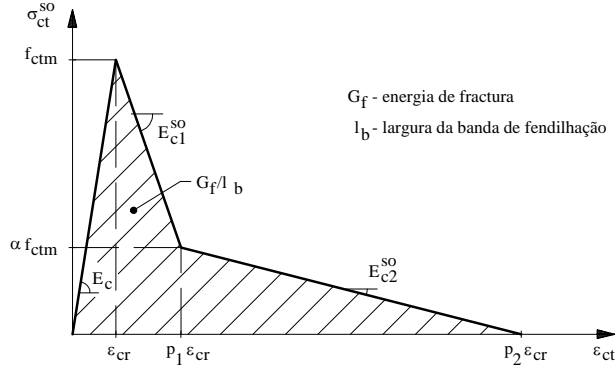


Figura 5 - Diagrama de retenção de tensões de tracção para o betão simples (não armado).

Para uma percentagem efectiva de armadura equivalente inferior a um valor denominado de percentagem estabilizadora, $\rho_{eq,ef}^{est}$, a extensão média aumenta até atingir-se um estado estabilizado de fendilhação correspondente à extensão média $\varepsilon_{ct,B}$. O $\rho_{eq,ef}^{est}$ é a mínima percentagem de armadura necessária para que no início da fendilhação e sob carga constante, a extensão na região II não ultrapasse o valor de $p_1\varepsilon_{cr}$ (ver figura 5). Estabelecendo o equilíbrio na região II entre o acréscimo de força absorvida pela armadura e o decréscimo de força libertada pelo betão, quando está aplicada a força que inicia a fendilhação, obtém-se [10]

$$\rho_{eq,ef}^{est} = \frac{1}{\zeta_1 n}, \quad (8)$$

sendo,

$$\zeta_1 = -\frac{E_c}{E_{c1}^{so}}. \quad (9)$$

Se a percentagem efectiva de armadura equivalente for superior a $\rho_{eq,ef}^{est}$, o ponto B coincidirá com o correspondente ao início da fendilhação (ponto A). Para percentagem de armadura inferior a $\rho_{eq,ef}^{est}$ a deformação do betão da região II aumenta até que a armadura sustenha a perda de carga ocorrida no betão em fase de amolecimento. Se a extensão no betão estabilizar entre os valores de $p_1\varepsilon_{cr}$ e $p_2\varepsilon_{cr}$, a extensão média na região II, no início da fendilhação, será determinada pela seguinte expressão [10]

$$\varepsilon_{II} = \varepsilon_{cr} \frac{\frac{\zeta_2}{\zeta_1} (p_1 - 1) - p_1 + \zeta_2 n \rho_{eq,ef}^e}{\zeta_2 n \rho_{eq,ef}^e - 1}, \quad (10)$$

onde,

$$\zeta_2 = -\frac{E_c}{E_{c2}^{so}}, \quad (11)$$

podendo os valores de p_1 e p_2 serem explicitados em função dos parâmetros de fractura do betão [10]. A extensão média no elemento de betão armado fendilhado é determinada pela expressão que é recomendada em [1]

$$\varepsilon_{ct,B} = (1 - \xi_{cr}) \varepsilon_{cr} + \xi_{cr} \varepsilon_{II}, \quad (12)$$

em que β_1 e β_2 simulam as propriedades da superfície das armaduras e o tipo de solitação actuante, respectivamente. A tensão no ponto B é uma média da tensão desenvolvida nas regiões I e II devidamente pesadas pelo comprimento relativo destas regiões, traduzindo-se pela expressão

$$\sigma_{ct,B}^{st} = (1 - \xi_{cr}) f_{ctm} + \xi_{cr} \sigma_{ct}^{so}, \quad (13)$$

onde σ_{ct}^{so} é a tensão normal à fenda, calculada para a extensão ε_{II} no diagrama de amolecimento (figura 5). Para uma percentagem de armadura denominada de percentagem limite, $\rho_{eq,ef}^{lim}$ a extensão do betão na região II atinge o valor de $p_2\varepsilon_{cr}$. Esta percentagem é obtida através da equação

$$\rho_{eq,ef}^{lim} = \frac{\zeta_2(p_1 - 1) - p_1 + p_2}{\zeta_1 \zeta_2 n(p_2 - 1)} \quad (14)$$

que resulta da igualdade

$$F_{s,II} = F_{sc,I}^{cr} \quad (15)$$

que estabelece o equilíbrio entre a força absorvida pela armadura equivalente na região II ($F_{s,II}$) e a soma das forças absorvidas na região I pelo betão e pelas armaduras ($F_{sc,I}^{cr}$), quando na região I se atinge a extensão $p_2 \varepsilon_{cr}$. Para $\rho_{eq,ef}^y < \rho_{eq,ef}^e < \rho_{eq,ef}^{lim}$, a extensão do betão da região II ultrapassa o valor de $p_2 \varepsilon_{cr}$, o que significa que o betão nesta região deixa de ter capacidade para reter tensões de tracção, sendo as forças suportadas pelo betão antes do início da fendilhação transferidas integralmente para as armaduras. Neste caso,

$$\varepsilon_{II} = \varepsilon_{cr} \left(1 + \frac{1}{n \rho_{eq,ef}^e} \right) \quad (16)$$

que resulta da equação (15) quando se atribui às extensões do betão e armadura na região I a extensão ε_{cr} e sendo ε_{II} a extensão na armadura na região II. As expressões (12) e (13) são ainda válidas para este caso, desde que se tenha em conta que σ_{cr}^o é agora nula e ε_{II} é obtida segundo a equação (16). Se $\rho_{eq,ef}^e < \rho_{eq,ef}^y$ o efeito devido à interacção armadura-betão é desprezável, sendo somente garantida a capacidade de retenção de tensões de tracção do betão simples (diagrama da figura 5).

Coordenadas dos pontos Y_i

Considere-se um elemento reforçado com nr armaduras que apresentam diferentes orientações e tensões de cedência e que $k-1$ armaduras já se encontram cedidas. A equação de equilíbrio, na direcção da fenda, entre a força na armadura equivalente e as forças nas armaduras componentes, quando a armadura k entra em cedência, traduz-se pela equação

$$\sigma_{seq}^{yk} \rho_{eq,ef} A_{c,ef} = \sum_{i=1}^{k-1} \sigma_{si}^y \rho_{ef,i} A_{c,ef} \cos^2 \theta_i + \sigma_{sk}^y \rho_{ef,k} A_{c,ef} \cos^2 \theta_k + \sum_{i=k+1}^{nr} \sigma_{si} \rho_{ef,i} A_{c,ef} \cos^2 \theta_i \quad (17)$$

em que a primeira parcela do lado direito da equação traduz a força instalada nas armaduras que já se encontravam cedidas, a segunda parcela representa a força absorvida pela armadura k que passou a entrar em cedência e a terceira parcela é a força retida pelas armaduras que ainda não cederam. Tendo em atenção que para as armaduras não cedidas $\sigma_{si} = \beta_{ik} \sigma_{sk}^y$, com

$$\beta_{ik} = \frac{\cos^2 \theta_i + m \sin^2 \theta_i + q \sin \theta_i \cos \theta_i}{\cos^2 \theta_j + m \sin^2 \theta_j + q \sin \theta_j \cos \theta_j} \quad (18)$$

obtém-se de (17),

$$\sigma_{seq}^{yk} = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} \sigma_{si}^y \rho_{ef,i} \cos^2 \theta_i}{\rho_{eq,ef}} + \frac{\sigma_{sk}^y}{\rho_{eq,ef}} \left(\rho_{ef,k} \cos^2 \theta_k + \sum_{i=k+1}^n \beta_{ik} \rho_{ef,i} \cos^2 \theta_i \right). \quad (19)$$

Para o caso corrente em que o número de armaduras componentes é igual a dois, a equação (19) reduz-se à relação

$$\sigma_{seq}^{y1} = \frac{\sigma_{s1}^y}{\rho_{eq,ef}^e} \left(\rho_{ef,1} \cos^2 \theta_1 + \beta_{21} \rho_{ef,2} \cos^2 \theta_2 \right) \quad (20)$$

que fornece a tensão na armadura equivalente no momento em que ocorre a primeira cedência de uma armadura componente. Como critério para estimar a ordem de cedência das armaduras toma-se a diferença entre o valor da tensão de cedência da armadura e o valor do seu estado de tensão corrente. Assim, σ_{seq}^{yk} traduz a tensão na armadura equivalente quando a armadura k entra em cedência, o que significa que a armadura $k-1$ e $k+1$ atingem previamente e posteriormente a cedência, dado que

possuem, respectivamente, menor e maior intervalo entre o valor da respectiva tensão de cedência e o valor do estado corrente de tensão. Este critério é uma estimativa do que poderá ocorrer na realidade dado que se está a prever uma certa sequência da cedência das armaduras componentes com base em estados de tensão que poderão ser alterados ao longo do carregamento. Esta aproximação pode ser ainda mais agravada quando a fenda roda e se utiliza um modelo de fendas rotativas, dado que o ângulo entre as armaduras e a fenda variará ao longo do carregamento, pelo que as previsões estimadas com (19) em determinada fase do carregamento podem não ser as que se verificam quando determinada armadura entra efectivamente em cedência. Para se poder suavizar o erro cometido com este procedimento, tanto a tensão na armadura equivalente como a percentagem efectiva de armadura equivalente vão sendo calculadas ao longo da história do carregamento. Assim, para um determinado incremento de extensão obtém-se o seguinte incremento de tensão na armadura equivalente

$$\Delta\sigma_{seq} = \frac{\sum_{i=1}^{nr} \rho_{ef,i} \eta_i \sigma_{si} \cos^2 \theta_i}{\rho_{eq,ef}} \quad (21)$$

que permite actualizar o valor real de σ_{seq} , sendo η_i a percentagem de rigidez corrente na armadura i , tal como é definida em (4), e $\rho_{eq,ef}$ designa a corrente percentagem efectiva de armadura equivalente. No momento em que η_i passa a ser menor que a unidade significa que a armadura i entrou em cedência, obtendo-se o correspondente σ_{seq}^{yi} . Os valores desta variável passam a ser tidos em conta na definição do diagrama de retenção de tensões de tracção do betão fendilhado. Note-se que, desta forma, pode ser simulado um eventual endurecimento da armadura. Quando na secção da fenda todas as armaduras estiverem cedidas tem-se

$$\sigma_{seq}^y = \sigma_{seq}^{ynr} = \frac{\sum_{i=1}^{nr} \sigma_{si}^y \rho_{ef,i} \cos^2 \theta_i}{\rho_{eq,ef}} \quad (22)$$

O diagrama de retenção de tensões de tracção que se propõe para o betão traduz-se pela expressão

$$\sigma_{ct}^{st} = f_{ctm} \left(\frac{\sigma_{seq}^{cr}}{\sigma_{seq}} \right) \beta_1 \beta_2, \quad (23)$$

onde

$$\sigma_{seq}^{cr} = \frac{f_{ctm} (1 + n \rho_{eq,ef}^e)}{\rho_{eq,ef}^e} (\beta_1 \beta_2) \quad (24)$$

é a tensão na armadura equivalente, na região II e no início da fendilhação. Substituindo (24) em (23) obtém-se

$$\sigma_{ct}^{st} = \frac{f_{ctm}^2 (1 + n \rho_{eq,ef}^e)}{\sigma_{seq} \rho_{eq,ef}^e} (\beta_1 \beta_2)^2. \quad (25)$$

Para determinar a extensão $\varepsilon_{ct,y1}$ e a correspondente tensão $\sigma_{ct,y1}^{st}$, relativas ao momento em que ocorre, pela primeira vez, a cedência de uma das armaduras componentes na secção da fenda, recorre-se à equação de equilíbrio expressa pela relação

$$\varepsilon_{ct,y1} = \frac{\sigma_{seq} \rho_{eq,ef}^e - \sigma_{ct}^{st}}{\rho_{eq,ef}^e E_s}. \quad (26)$$

Introduzindo a equação (25) em (26) e substituindo σ_{seq} por σ_{seq}^{y1} obtém-se, então,

$$\varepsilon_{ct,y1} = \frac{\sigma_{seq}^{y1}}{E_s} - \frac{f_{ctm}^2 (1 + n \rho_{eq,ef}^e)}{E_s (\rho_{eq,ef}^e)^2 \sigma_{seq}^{y1}} (\beta_1 \beta_2)^2. \quad (27)$$

Substituindo (26) em (25) e resolvendo a respectiva equação de segundo grau pode obter-se a tensão correspondente a $\varepsilon_{ct,y1}$, ou seja

$$\sigma_{ct,y1}^{st} = 0.5 \left\{ \left[\left(\rho_{eq,ef}^e E_s \varepsilon_{ct,y1} \right)^2 + 4 f_{ctm}^2 (1 + n \rho_{eq,ef}^e) (\beta_1 \beta_2)^2 \right]^{1/2} - \rho_{eq,ef}^e E_s \varepsilon_{ct,y1} \right\}. \quad (28)$$

Determine-se agora o acréscimo de extensão necessário para entrar em cedência uma outra armadura componente. Para definir uma expressão genérica admitta-se que $i-1$ armaduras componentes estão cedidas. O acréscimo de extensão necessário para que a armadura i entre em cedência é obtido através da seguinte equação de equilíbrio:

$$\sigma_{seq} \rho_{eq,ef}^{yi} A_{c,ef} = E_s \varepsilon_{ct,yi-1} \rho_{eq,ef}^{yi-1} A_{c,ef} + E_s \rho_{eq,ef}^{yi} \Delta \varepsilon_{ct,yi} A_{c,ef} + \sigma_{ct,yi}^{st} A_{c,ef}, \quad (29)$$

onde a primeira parcela do segundo membro da equação designa a força na armadura equivalente no momento da cedência da armadura $i-1$ e a segunda parcela determina o acréscimo de força que a corrente armadura equivalente consegue absorver durante o acréscimo de extensão $\Delta \varepsilon_{ct,yi}$ até a armadura i ceder. O último termo representa a tensão de tracção retida pelo betão entre fendas. Na expressão (29) $\rho_{eq,ef}^{yi}$ é a percentagem efectiva de armadura equivalente no momento em que a armadura i entra em cedência, pelo que é calculada através da equação (3) com $\eta=1$ para a armadura i e restantes armaduras não cedidas, e $\eta < 1$ para as armaduras que estão em cedência (o valor de η depende da extensão no aço e da respectiva lei constitutiva). O significado de $\rho_{eq,ef}^{yi-1}$ obtém-se por similaridade com o acabado de definir para $\rho_{eq,ef}^{yi}$.

Introduzindo (25) em (29) e substituindo na expressão resultante σ_{seq} por σ_{seq}^{yi} resulta

$$\Delta \varepsilon_{ct,yi} = \left(\sigma_{seq}^{yi} \rho_{eq,ef}^{yi} - \frac{f_{ctm}^2 (1 + n \rho_{eq,ef}^e)}{\rho_{eq,ef}^e \sigma_{seq}^{yi}} (\beta_1 \beta_2)^2 - E_s \varepsilon_{ct,yi-1} \rho_{eq,ef}^{yi-1} \right) \frac{1}{E_s \rho_{eq,ef}^{yi}}. \quad (30)$$

Para obter a tensão de tracção retida pelo betão, correspondente à cedência da armadura i , $\sigma_{ct,yi}^{st}$, substitui-se (25) em (29) e resolve-se a respectiva equação de segundo grau em termos de $\sigma_{ct,yi}^{st}$, vindo

$$\sigma_{ct,yi}^{st} = 0.5 \left\{ \left[\left(\varepsilon_{ct,yi-1} \rho_{eq,ef}^{yi-1} + \Delta \varepsilon_{ct,yi} \rho_{eq,ef}^{yi} \right)^2 E_s^2 + 4 f_{ctm}^2 (1 + n \rho_{eq,ef}^e) (\beta_1 \beta_2)^2 \right]^{1/2} - \left(\varepsilon_{ct,yi-1} \rho_{eq,ef}^{yi-1} + \Delta \varepsilon_{ct,yi} \rho_{eq,ef}^{yi} \right) E_s \right\} \quad (31)$$

Se $\rho_{eq,ef}^e$ for menor que $\rho_{eq,ef}^y$ então a armadura cede na secção da fenda no momento do início da fendilhação e, neste caso, a capacidade de retenção de tensões de tracção do betão fendilhado é somente garantida pelas propriedades de fractura do betão simples (ver diagrama da figura 5).

Para simplificar o tratamento numérico, todos os pontos característicos do diagrama de retenção de tensões de tracção são unidos por segmentos de recta.

A percentagem efectiva de armadura equivalente $\rho_{eq,ef}^{yi}$ vai diminuindo com a entrada em cedência das armaduras componentes. Analisando a expressão (30), constata-se que diminuindo $\rho_{eq,ef}^{yi}$ aumenta $\Delta \varepsilon_{ct,yi}$, o que conduz a valores excessivamente altos de $\Delta \varepsilon_{ct,yi}$ e σ_{seq}^{yi} , se $\rho_{eq,ef}^{yi}$ for demasiadamente baixo. Da expressão (31) resulta que não ocorre um decréscimo suficientemente significativo da tensão com o aumento da deformação de tracção, o que conduz a uma sobreavaliação da capacidade de retenção de tensões de tracção para o betão fendilhado. Para tentar ultrapassar esta deficiência do modelo, a tensão máxima retida pelo betão fendilhado é limitada à tensão obtida com a equação (1), podendo-se ainda, opcionalmente activar a expressão

$$f_{ctm} = f_{ctmo} \exp(-C \varepsilon_{ct}) \quad (32)$$

proposta por Gupta e Maestrini [10]. A referida expressão simula a degradação da resistência do betão à tracção que acompanha o aumento da extensão de tracção normal à fenda ε_{ct} , designando, f_{ctmo} a resistência à tracção do betão não fendilhado. Para elementos submetidos a um estado de tensão uniaxial aqueles autores propuseram para C o valor de 550, enquanto para placas submetidas a um estado de tensão multiaxial foi sugerido o valor de 50.

5- Exemplos

Para avaliar o desempenho dos modelos implementados no código computacional, foram comparadas as respostas numéricas e experimentais de alguns dos painéis ensaiados por Vecchio e Collins. Dependendo do tipo de carregamento, disposição e quantidade das armaduras, os painéis apresentaram diferentes modos de rotura. Haverá assim interesse em investigar o comportamento dos diferentes modelos de retenção de tensões de tracção na previsão da resposta dos painéis que apresentaram diferentes modos de rotura. Foram assim seleccionados os painéis PV10, PV11, PV12, PV16, PV18, PV19, PV20, PV22, PV25 e PV28, tendo presente que: os painéis PV10, PV12, PV18, PV19 e PV20 apresentaram rotura por esmagamento do betão devido a grandes deformações de corte após a cedência da armadura de menor percentagem, mas antes da cedência da armadura de maior percentagem (rotura tipo C1); os painéis PV11 e PV16 romperam por cedência de ambas as armaduras (rotura tipo SY); e os painéis PV22, PV25 e PV28 apresentaram rotura por esmagamento do betão devido a grandes deformações de corte, sem cedência de qualquer das armaduras (rotura tipo C2). O painel PV25 foi submetido a corte e compressão biaxial enquanto o painel PV28 foi submetido a corte e tracção biaxial. Os restantes painéis foram solicitados ao corte (forças tangenciais ao contorno do painel). Na caracterização material dos painéis foram adoptadas as seguintes expressões e valores:

$$E_c = 4730\sqrt{f_{ctm}} \qquad G_f = 0.1N/mm \qquad (33a)$$

$$\nu = 0.19 \qquad l_b = 75mm \qquad (33b)$$

$$E_{sI} = 0.001E_s \qquad \alpha = 1/3 \ ; \ \beta = 4/15 \qquad (33c)$$

em que E_{sI} é o módulo de elasticidade do segundo ramo da lei constitutiva da armadura ($E_s=200$ GPa). A distância média entre fendas medida nos painéis (50 a 100 mm) indica que é razoável tomar 75 mm para largura da banda de fendilhação.

Diz-se que o betão esmaga por motivo de grandes deformações de corte quando a extensão equivalente, obtida através da aplicação da superfície de cedência por esmagamento [17], excede a extensão última de compressão, ε_{cu}^c , sendo a soma das componentes extensionais de sinal negativo (compressão) e a distorção a maior componente do estado de deformação actuante.

Neste trabalho apresentam-se resultados correspondentes à aplicação do modelo de fendas rotativas (*mfr*) e modelo de fendas fixas (*mff*). Neste último modelo atribuiu-se para ângulo limite (ângulo que define o critério de abertura de nova fenda) [18] o valor de 30 graus. Dado que as direcções das tensões e extensões principais rodam menos do que 20 graus relativamente às respectivas direcções iniciais, significa que no modelo de fendas fixas as fendas permaneceram durante todo o carregamento com a orientação das respectivas tensões-extensões principais registadas no início da fendilhação (45 graus com o eixo do x). O factor de retenção de rigidez de corte associado ao *mff* foi determinado através da expressão proposta por Kolmar [19], enquanto no modelo de fendas rotativas o valor deste factor resulta da condição de coaxialidade entre as tensões e extensões principais [18]

Na figura 6 representa-se a geometria e condições de carga de um painel genérico. O painel foi discretizado num elemento de 4 nós com integração numérica 2x2 pontos de Gauss. No quadro I incluem-se os valores adoptados para a resistência à tracção e para a extensão última de compressão do betão, assim como a percentagem de armadura e os resultados mais significativos obtidos experimentalmente. No quadro II apresentam-se alguns dos resultados obtidos numericamente (índice n) e faz-se a sua comparação com os correspondentes resultados experimentais (índice e). Nos restantes modelos implementados o coeficiente de variação dos factores $\frac{(\tau_M)_e}{(\tau_M)_n}$ e $\frac{(\theta_{\sigma\varepsilon})_e}{(\theta_{\sigma\varepsilon})_n}$ variaram entre 4.4% a 8.1% e 2.7% a 7.9%, respectivamente. Por limitação de espaço representa-se graficamente apenas algumas das relações obtidas, seleccionando-se um painel por cada modo de rotura: PV10, PV11 e PV28. Na figura 7a) representa-se, para os três painéis seleccionados, a relação entre extensões de corte e tensões de corte, $\gamma-\tau$. A relação entre tensões de corte e a média dos ângulos realizados pela tensão e extensão principal máxima de tracção ($\theta_{\sigma\varepsilon}$) é incluída na figura 7b) para os painéis PV10 e PV11.

Finalmente na figura 7c) representa-se a relação entre a tensão e a extensão principal máxima de tracção para o painel PV11.

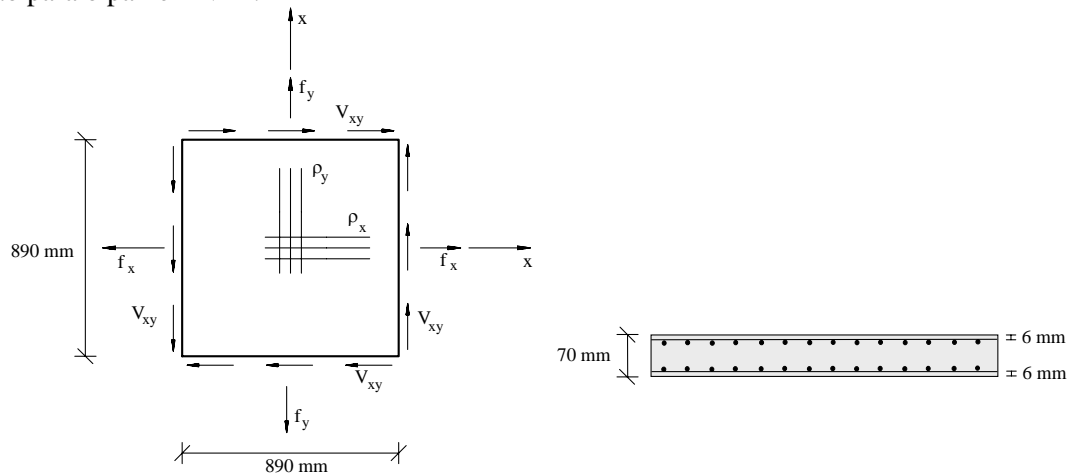


Figura 6 - Geometria e condições de carga dum painel.

Quadro I - Algumas características dos painéis analisados e resultados obtidos experimentalmente.

Painel	$f_y=f_x:V_{xy}$	Porcentagem das armaduras		f_{ctm} (Mpa)	ϵ_{cu}^c (10^{-3})	$\tau_M^{(1)}$ (Mpa)	$\theta_{\sigma\epsilon}^{(2)}$ (graus)	Tipo de rotura
		ρ_x (%)	ρ_y (%)					
PV10	0:1	0.999	1.785	1.5	3.5	3.97	38.4	C1
PV11	0:1	1.306	1.785	1.3	3.5	3.56	40.1	SY
PV12	0:1	0.446	1.785	1.5	3.5	3.13	31.9	C1
PV16	0:1	0.740	0.740	1.1	3.5	2.14	45	SY
PV18	0:1	0.315	1.785	1.9	3.5	3.04	30.3	C1
PV19	0:1	0.713	1.785	1.9	3.5	3.96	32.6	C1
PV20	0:1	0.885	1.785	1.9	2.5	4.26	35.6	C1
PV22	0:1	1.524	1.785	1.9	3.0	6.07	45	C2
PV25	-0.69:1	1.785	1.785	1.9	3.5	9.12	45	C2
PV28	0.32:1	1.785	1.785	1.9	2.5	5.80	45	C2

(1) - τ_M - tensão máxima de corte

(2) - média dos ângulos realizados pela tensão e a extensão principal de tracção no momento correspondente à tensão máxima de corte

Quadro II - Comparação entre os resultados obtidos numérica e experimentalmente.

Painel	mfr		mff		mfr		mff		Tipo de rotura	
	$(\tau_M)_n$ (Mpa)	$\frac{(\tau_M)_e}{(\tau_M)_n}$	$(\tau_M)_n$ (Mpa)	$\frac{(\tau_M)_e}{(\tau_M)_n}$	$(\theta_{\sigma\epsilon})_n$ (graus)	$\frac{(\theta_{\sigma\epsilon})_e}{(\theta_{\sigma\epsilon})_n}$	$(\theta_{\sigma\epsilon})_n$ (graus)	$\frac{(\theta_{\sigma\epsilon})_e}{(\theta_{\sigma\epsilon})_n}$	mfr	mff
PV10	3.95	1.005	4.1	0.968	37.4	1.027	37.4	1.027	C1	C1
PV11	3.62	0.983	3.67	0.970	40.6	0.988	41.5	0.966	SY	SY
PV12	3.06	1.023	3.25	0.963	30.7	1.039	31.2	1.022	C1	(N1)
PV16	2.04	1.049	2.04	1.049	45		45		SY	SY
PV18	3.47	0.876	3.55	0.856	31.8	0.953	31.8	0.953	C1	(N1)
PV19	4.18	0.947	4.16	0.952	32.0	1.019	33.6	0.970	C1	(N1)
PV20	4.49	0.949	4.53	0.940	36.1	0.986	35.3	1.008	C1	(N2)
PV22	6.12	0.992	6.12	0.992	44.2	1.018	44.2	1.018	C2	C2
PV25	8.82	1.034	8.82	1.034	45		45		C2	C2
PV28	5.68	1.021	5.68	1.021	45		45		C2	C2
Média		0.988		0.974		1.004		0.995		
$s^{(1)}$		5.25%		5.67%		3.0%		3.0%		

(1) - Coeficiente de variação

(N1) - Cedência da armadura ρ_x sem esmagamento do betão até à carga de $V_{xy}=20000N/mm$.

(N2) - Cedência da armadura ρ_x sem esmagamento do betão até à carga de $V_{xy}=12700N/mm$.

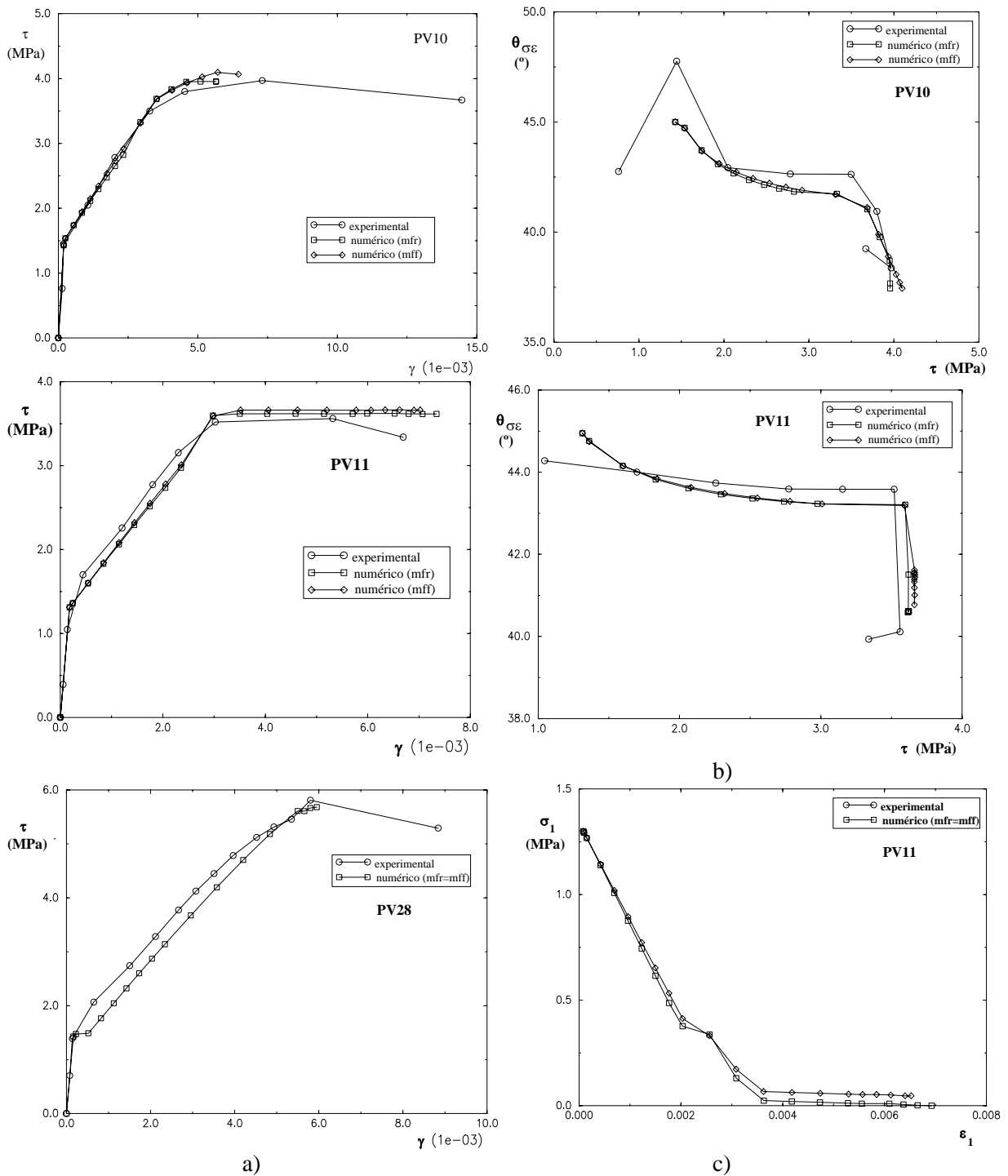


Figura 7 - Comportamento dos painéis PV10, PV11, PV28: a) relação γ - τ para os painéis PV10, PV11 e PV28; b) relação τ - $\theta_{\sigma\epsilon}$ para os painéis PV10 e PV11; c) relação ϵ_1 - σ_1 para o painel PV11.

Da análise das figuras 7 e dos resultados incluídos no quadro II conclui-se que o modelo que se propõe prevê satisfatoriamente o comportamento dos painéis analisados. Em termos médios pode-se afirmar que o *mff* previu comportamentos sensivelmente semelhantes aos obtidos com o *mfr*. Tal facto deve-se a que, comparativamente com o que ocorre com o *mfr*, com o *mff* a relação entre a tensão e a extensão principal máxima de tracção é mais rígida, mas o factor de retenção de rigidez de corte é menor. Estes dois processos quase se compensam, tendo contudo a maior rigidez do modo I de fractura do *mff* um peso mais significativo, pelo que este modelo de fendilhação estima cargas de rotura um pouco superiores. O *mfr* captou o modo de rotura de todos os painéis analisados, enquanto que nalguns painéis que apresentaram experimentalmente rotura tipo *C1*, o betão não chegou a esmagar quando

estes foram analisados segundo o *mff*. Na figura 7c verifica-se que na parte final do carregamento a capacidade de retenção de tensões de tracção do betão foi governada pela expressão (7), pelo que, se a condição expressa por esta relação não for atendida, será atribuído ao betão fendilhado excessiva capacidade de retenção de tensões de tracção.

6 - Conclusões

No presente trabalho descreve-se sucintamente alguns dos mais recentes modelos de retenção de tensões de tracção desenvolvidos para o betão armado fendilhado. Nestes modelos são introduzidas algumas alterações por forma a melhorar o seu desempenho e é proposto um modelo que inclui na sua formulação os principais parâmetros que influenciam o fenómeno em estudo. Assim, as propriedades de fractura do betão são tidas em conta por forma a se poder simular materiais com diferente capacidade de absorção de energia, como é o caso do betão simples e do betão reforçado com fibras. Os elementos de betão podem ser reforçados com qualquer número de armaduras componentes, podendo estas ter qualquer orientação e propriedades. Se o aço apresentar endurecimento, este pode ser simulado correctamente no modelo.

A qualidade dos resultados obtidos permite concluir que o modelo proposto simula com suficiente rigor o fenómeno em análise.

7 - Referências

- [1] - **CEB Manual**, "Cracking and Deformations", Printed and diffused by École Polytechnique Fédéral de Lausanne, **1985**.
- [2] - **Guenther G.**, "Verbundverhalten zwischen Stahl und Beton unter monoton steigender, schwellender und lang andauernder Belastung", Dissertation, Kassel, **1989**.
- [3] - **Vecchio, F. J. ; Collins, M. P.**, "The Modified Compression-Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear", ACI Journal, pp. 219-231, **1986**.
- [4] - **Stevens, N. J.; Uzumeri, S.M.; Collins, M.P.**, "Analytical Modelling of Reinforced Concrete Subjected to Monotonic and Reversed Loadings", Publication No. 87-1, ISBN 0-7727-7088-3, University of Toronto, January **1987**.
- [5] - **Link, R. A.; Elwi, A.E.; Scanlon, A.**, "Biaxial Tension Stiffening due to Generally Oriented Reinforced Layers", ASCE, Jour. of Eng. Mechanics, Vol. 115, No. 8, pp. 1647-1662, 1989.
- [6] - **Massicote, B.; Elwi, A. E.; MacGregor, J. G.**, "Tension-Stiffening Model for Planar Reinforced Concrete Members", Jour. of Struct. Engineering, Vol. 116, No. 11, pp. 3039-3058, November **1990**.
- [7] - **Gupta A. K.; Maestrini S. R.**, "Tension-Stiffness Model for Reinforced Concrete Bars", ASCE Jour. of Struct. Engineering, Vol. 116, No. 3, pp. 769-790, March **1990**.
- [8] - **SBETA**, Computer Program for Nonlinear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures in Plane Stress State, Program Documentation, Peekel Instruments, B.V., **1992**.
- [9] - **CEB-FIP Model Code 1990**, Comité Euro-International du Béton, Published by Thomas Telford Services Ltd.
- [10] - **Barros, J. A. O.**, "Modelos constitutivos para o betão armado fendilhado", Report DECEST/FEUP/941, 130 p., **1994**.
- [11] - **Collins M. P.; Mitchell D.**, "Prestressed Concrete Basics", Canadian Prestressed Concrete Institute, Ottawa, 614p., **1987**.
- [12] - **Vecchio, F. J. ; Collins, M. P.**, "The Response of Reinforced Concrete to In-Plane Shear and Normal Stresses", Pub. No. 82-03, Depart. of Civil Engineering, University of Toronto, 323 p., **1982**.
- [13] - **Gopalaratnan, V. S.; Shah, S. P.**, "Softening Response of Plain Concrete in Direct Tension", ACI Journal, May-June, pp.310-323, **1985**.
- [14] - **Hordijk, D.A.**, "Local approach to fatigue of concrete", Dissertation, Delft Univ. of Technology, **1991**.
- [15] - **Barros, J.A.O.; Figueiras, J.A.; Veen, C.V.D.**, "Tensile Behaviour of Glass Fibre Reinforced Concrete", Recent Advances in Experimental Mechanics, eds. J.F. Silva Gomes *et al.*, Vol. 2, pp. 1073-1080, **1994**.
- [16] - **Bazant, Z.P. ; Oh, B.H.**, "Crack band theory for fracture of concrete", Materials and Structures, RILEM, 16(93), pp. 155-177, **1983**.
- [17] - **Póvoas, R.H.C.F.**, "Modelos não-lineares de análise e dimensionamento de estruturas laminares de betão incluindo efeitos diferidos", Tese de Doutoramento, FEUP, **1991**.
- [18] - **Rots, J.G.**, "Mixed-mode fracture of concrete: an experimental approach", Dissertation, Delft Univ. of Technology, **1988**.
- [19] - **Kolmar, W.**, "Beschreibung der Kraftübertragung über Risse in nichtlinearen Finite-Element-Berechnungen von Stahlbetontragwerken", Dissertation, Techn. Hochschule Darmstadt, **1985**.