



**Universidade do Minho**  
Instituto de Estudos da Criança

Cidália Cristina Rodrigues Pereira

**Aprendizagem cooperativa e investigações  
matemáticas: uma experiência no 1.º ano de  
escolaridade**



**Universidade do Minho**

Instituto de Estudos da Criança

Cidália Cristina Rodrigues Pereira

**Aprendizagem cooperativa e investigações matemáticas: uma experiência no 1.<sup>o</sup> ano de escolaridade**

Tese de Mestrado em Estudos da Criança  
Especialização em Ensino e Aprendizagem da Matemática

Trabalho efectuado sob a orientação da  
**Professora Doutora Maria Alexandra Oliveira Gomes**

Outubro de 2009

## DECLARAÇÃO

**Nome:** Cidália Cristina Rodrigues Pereira

**Endereço electrónico:** cidaliafrance@portugalmail.com **Telf.:** 966255741

**Número do Bilhete de Identidade:** 11032668

**Título da Tese:** Aprendizagem cooperativa e investigações matemáticas: uma experiência no 1º ano de escolaridade

**Orientadora:** Professora Doutora Maria Alexandra Oliveira Gomes

**Ano de conclusão:** 2009

**Designação do Mestrado:** Mestrado em Estudos da Criança – Especialização em Ensino e Aprendizagem da Matemática

É AUTORIZADA A REPRODUÇÃO INTEGRAL DESTA TESE/TRABALHO APENAS PARA EFEITOS DE INVESTIGAÇÃO, MEDIANTE DECLARAÇÃO ESCRITA DO INTERESSADO, QUE A TAL SE COMPROMETE.

Universidade do Minho, \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

## **AGRADECIMENTOS**

Finalizado este trabalho, gostaria de agradecer a todas as pessoas que, de algum modo, contribuíram para a sua concretização.

O meu primeiro agradecimento dirige-se a todos os alunos da turma em que foi implementado este estudo. O seu empenhamento e cooperação foram essenciais para que o trabalho empírico se concretizasse.

À Professora Doutora Alexandra Gomes, pela valiosa orientação que me proporcionou, bem como, pela disponibilidade que sempre demonstrou.

À minha família, pelas privações que passou durante todo o tempo que envolveu a elaboração deste trabalho.

Ao meu namorado, pelo incentivo e apoio que me concedeu.

Aos encarregados de educação dos alunos envolvidos no projecto, pela autorização dada relativamente às gravações áudio e vídeo das aulas e das entrevistas.



# **Aprendizagem cooperativa e investigações matemáticas: uma experiência no 1º ano de escolaridade**

## **RESUMO**

Este estudo decorre de uma experiência pedagógica, com uma turma do 1º ano de escolaridade, em que se privilegia a realização de tarefas de investigação seguindo uma metodologia de trabalho cooperativo. Tem como objectivo a análise das interacções e do desempenho de um grupo de alunos, quando realizam investigações matemáticas de acordo com o modelo de aprendizagem cooperativa.

O estudo, realizado em contexto natural de sala de aula, segue uma abordagem de natureza qualitativa baseada num estudo de caso de um grupo de quatro alunos, seleccionados segundo alguns critérios previamente definidos. A investigadora assumiu o papel de observadora participante, dirigindo e testemunhando, presencialmente, as sessões de trabalho do grupo.

Na recolha de dados inserem-se os dados recolhidos durante as oito sessões em que se realizaram as tarefas de investigação e os momentos da recolha de dados antes (questionários) e após estas sessões (entrevistas).

Os dados foram analisados em função de duas categorias: as interacções e o desempenho do grupo. Relativamente às interacções, os resultados do estudo permitem concluir que é possível trabalhar cooperativamente na resolução de tarefas de investigação, embora os alunos reajam de maneiras diferentes. Para além disso, as tarefas de investigação e o envolvimento dos alunos em práticas de trabalho cooperativo ajudam a estabelecer um ambiente de sala de aula em que os alunos se sentem mais motivados, assumem gradualmente um papel activo na sua aprendizagem e desenvolvem a confiança nas suas capacidades e nas dos seus parceiros. No que se refere ao desempenho, durante a fase de desenvolvimento das tarefas, verificou-se uma progressiva autonomia por parte dos alunos, o recurso a diferentes estratégias de resolução, a aplicação de conceitos anteriormente estudados, bem como a aquisição de novos conceitos matemáticos. A fase de discussão, ao possibilitar a apresentação dos principais resultados, dos diferentes processos desenvolvidos, o confronto de opiniões e a validação perante toda a turma, revelou-se um momento rico da actividade investigativa. Os alunos, a pouco e pouco, foram perdendo o medo de comunicar as suas ideias e de questionar os outros.

Neste contexto, pôde verificar-se que os alunos, logo no 1º ano de escolaridade, são capazes de resolver tarefas de investigação e aprender a trabalhar cooperativamente, valorizando estas formas de trabalho. Deste modo, as tarefas de investigação, aliadas ao trabalho cooperativo, representam uma proposta positiva para o ensino e aprendizagem da Matemática.

# **Cooperative learning and mathematical researches: an experiment in 1st grade**

## **ABSTRACT**

This study is based on a teaching experience, involving a class of 1st graders, which focuses on the performance of investigation tasks using a methodology of cooperative work. It aims at analyzing the interactions and performance of a group of students when doing investigations according to a mathematical cooperative learning model.

The study, conducted in the natural context of the classroom, followed a qualitative approach based on a case study of a group of four students, selected according to predefined criteria. The researcher assumed the role of participant observer, directing and witnessing, the working sessions of the group.

Data was collected during the eight sessions during which the investigation tasks were developed and also before and after these sessions (through questionnaires and interviews, respectively).

Data was analyzed according to two categories: the interaction and group performance. For the interactions, the results of this study indicate that it is possible to work cooperatively in solving investigation tasks, although students react in different ways. In addition, the investigation tasks and the students' involvement in collaborative work practices help establish a classroom environment where students feel more motivated, gradually assume an active role in their learning and develop confidence in their abilities and those of its partners. With regard to performance, during the development of tasks, there was a progressive growth on students' autonomy, the use of different resolution strategies, the application of concepts previously studied, and the acquisition of new mathematical concepts. The discussion phase, allowing the submission of the main results of the various processes developed, the confrontation of opinions and validation before the whole class has proved to be a rich moment of investigative activity. Students, little by little, lost their fear of communicating their ideas and challenge others.

In this context, there is evidence that students as early as the 1st year of schooling, are able to solve investigation tasks and can learn to work cooperatively, valuing these types of work. Thus, investigation tasks, combined with collaborative work, represent a positive proposal for the teaching and learning of mathematics.

# ÍNDICE

|   |    |
|---|----|
| <b>CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO</b> .....                                  | 1  |
| <b>1.1. Pertinência do estudo</b> .....                               | 1  |
| <b>1.2. Organização do estudo</b> .....                               | 3  |
| <b>CAPÍTULO 2 – REVISÃO DA LITERATURA</b> .....                       | 4  |
| <b>2.1. A Aprendizagem Cooperativa</b> .....                          | 4  |
| 2.1.1. Perspectiva e Fundamentos da Aprendizagem Cooperativa.....     | 4  |
| 2.1.2. Aprendizagem Cooperativa e Outras Formas de Aprendizagem.....  | 6  |
| 2.1.3. Princípios e Modelos de Aprendizagem Cooperativa.....          | 8  |
| 2.1.4. O Papel do Professor na Estrutura de Trabalho Cooperativo..... | 11 |
| 2.1.5. O Trabalho Cooperativo na Aula de Matemática.....              | 13 |
| 2.1.6. A Organização dos Grupos em Matemática.....                    | 14 |
| <b>2.2. As Interações Sociais</b> .....                               | 17 |
| 2.2.1. Quadro de Referência Teórico.....                              | 17 |
| 2.2.2. Interações, Construção do Conhecimento e Comunicação.....      | 20 |
| 2.2.3. As Interações em Grupo na Aula de Matemática.....              | 21 |
| <b>2.3. As Investigações Matemáticas</b> .....                        | 23 |
| 2.3.1. Tarefas Matemáticas e Actividade Matemática.....               | 23 |
| 2.3.2. O que são Actividades de Investigação?.....                    | 24 |
| 2.3.3. As Actividades Investigativas no Currículo.....                | 25 |
| 2.3.4. Actividades de Investigação e Resolução de Problemas.....      | 28 |
| 2.3.5. Dinâmica de uma Aula com Investigações Matemáticas.....        | 29 |
| 2.3.6. A Avaliação das Actividades de Investigação.....               | 32 |
| <b>CAPÍTULO 3 – METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO</b> .....                 | 36 |



|   |            |
|---|------------|
| <b>3.1. Opções Metodológicas.....</b>                                 | <b>36</b>  |
| <b>3.2. Procedimentos de Carácter Metodológico.....</b>               | <b>38</b>  |
| 3.2.1. O Modelo de Aprendizagem Cooperativa Adoptado.....             | 38         |
| 3.2.2. A Escolha dos Casos.....                                       | 39         |
| 3.2.3. Delineamento do Estudo.....                                    | 40         |
| 3.2.4. Métodos de Recolha de Dados.....                               | 42         |
| <b>3.3. Análise dos Dados.....</b>                                    | <b>47</b>  |
| <br>  |            |
| <b>CAPÍTULO 4 – TAREFAS DESENVOLVIDAS.....</b>                        | <b>50</b>  |
| <b>4.1. Tarefas Desenvolvidas no Projecto.....</b>                    | <b>50</b>  |
| 4.1.1. Tarefa 1 – O Aniversário.....                                  | 52         |
| 4.1.2. Tarefa 2 – Triângulos de Fósforos.....                         | 53         |
| 4.1.3. Tarefa 3 – As Mesas da Cantina da Escola.....                  | 54         |
| 4.1.4. Tarefa 4 – Oito Pontos.....                                    | 56         |
| 4.1.5. Tarefa 5 – Escadas em Papel Quadriculado.....                  | 58         |
| 4.1.6. Tarefa 6 – Números em Escada.....                              | 60         |
| 4.1.7. Tarefa 7 – Uma Calculadora Diferente.....                      | 61         |
| 4.1.8. Tarefa 8 – Pares e Ímpares.....                                | 63         |
| <br>  |            |
| <b>CAPÍTULO 5 – ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS.....</b>                | <b>65</b>  |
| <b>5.1. Caracterização do Grupo Objecto de Estudo.....</b>            | <b>65</b>  |
| <b>5.2. Caracterização das Interacções e Desempenho do Grupo.....</b> | <b>71</b>  |
| <br>  |            |
| <b>CAPÍTULO 6 – CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....</b>                   | <b>134</b> |
| <b>6.1. Resumo do Estudo.....</b>                                     | <b>134</b> |
| <b>6.2. Síntese das Principais Conclusões.....</b>                    | <b>135</b> |
| <b>6.3. Ideias e Recomendações para Futuras Investigações.....</b>    | <b>141</b> |

|   |     |
|---|-----|
| <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....   | 143 |
| <b>ANEXOS</b> .....   | 150 |
| Anexo 1 – Cartaz das regras negociadas com os grupos.....   | 151 |
| Anexo 2 – Crachás identificativos da função desempenhada por cada elemento do grupo em cada uma das tarefas.....                          | 152 |
| Anexo 3 – Cartaz da avaliação individual e grupal.....  | 153 |
| Anexo 4 – Questionário aplicado a todos os alunos da turma, previamente à fase de recolha de dados.....                                   | 154 |
| Anexo 5 – Grelha de registo de comportamentos observáveis.....  | 156 |
| Anexo 6 – Guião da entrevista realizada, no final da fase de recolha de dados, aos alunos que constituíram o grupo objecto de estudo..... | 157 |
| Anexo 7 – Enunciado da tarefa 1.....  | 159 |
| Anexo 8 – Enunciado da tarefa 2.....  | 160 |
| Anexo 9 – Enunciado da tarefa 3.....  | 161 |
| Anexo 10 – Enunciado da tarefa 4.....   | 162 |
| Anexo 11 – Enunciado da tarefa 5.....   | 163 |
| Anexo 12 – Enunciado da tarefa 6.....   | 164 |
| Anexo 13 – Enunciado da tarefa 7.....   | 165 |
| Anexo 14 – Jogo: “O rato e o queijo”.....   | 166 |
| Anexo 15 – Enunciado da tarefa 8.....   | 167 |

## ÍNDICE DE TABELAS

|   |    |
|---|----|
| Tabela 1 – Caracterização das fases em que se desenvolveu o estudo..... | 41 |
| Tabela 2 – Métodos de recolha de dados e sua descrição.....             | 42 |
| Tabela 3 – Breve caracterização das tarefas do projecto.....            | 51 |

## ÍNDICE DE FIGURAS

|  |    |
|--|----|
| Figura 1 – Apresentação dos resultados da investigação “O Aniversário”.....                            | 53 |
| Figura 2 – Triângulos construídos com onze fósforos.....   | 54 |
| Figura 3 – Apresentação dos resultados da tarefa “As Mesas da Cantina da Escola”.....                  | 55 |
| Figura 4 – Registo do grupo <i>Descobridores</i> relativamente à 1ª questão da tarefa 4.....           | 57 |
| Figura 5 – Registo do grupo <i>Estudantes</i> relativamente à 2ª questão da tarefa 4.....              | 57 |
| Figura 6 – Descrição do processo utilizado pelo grupo <i>Estudantes</i> na construção das figuras..... | 58 |
| Figura 7 – Registo das escadas construídas pelo grupo <i>Matemáticos</i> .....                         | 59 |
| Figura 8 – Apresentação dos resultados da tarefa “Números em Escada”.....                              | 61 |
| Figura 9 – Fotografia de uma das calculadoras utilizadas pelos grupos.....                             | 62 |
| Figura 10 – Secretário do grupo <i>Investigadores</i> a efectuar o registo em folha própria.....       | 63 |
| Figura 11 – Registos apresentados relativamente à resolução da tarefa 1.....                           | 77 |
| Figura 12 – Resolução da primeira questão da tarefa 2.....   | 81 |
| Figura 13 – Registo referente à resolução da segunda questão da tarefa 2.....                          | 83 |

|   |     |
|---|-----|
| Figura 14 – Registo correspondente à resolução da terceira questão da tarefa 2.....         | 87  |
| Figura 15 – Registos referentes às quatro primeiras questões da tarefa 3.....               | 91  |
| Figura 16 – Registo referente à resolução da terceira questão da tarefa 3.....              | 93  |
| Figura 17 – Desenho dos triângulos resultantes da união dos oito pontos assinalados.....    | 97  |
| Figura 18 – Descrição do processo utilizado na obtenção dos triângulos.....                 | 97  |
| Figura 19 – Outras figuras geométricas resultantes da união dos oito pontos.....            | 99  |
| Figura 20 – Descrição do processo utilizado na obtenção das outras figuras geométricas..... | 100 |
| Figura 21 – Resolução da primeira questão da tarefa 5.....                                  | 103 |
| Figura 22 – Registo da resolução da segunda questão da tarefa 5.....                        | 105 |
| Figura 23 – Registo da resolução da terceira questão da tarefa 5.....                       | 106 |
| Figura 24 – Registo referente à resolução da quarta questão da tarefa 5.....                | 109 |
| Figura 25 – Registo correspondente à resolução da primeira questão da tarefa 6.....         | 113 |
| Figura 26 – Registo da resolução da segunda questão da tarefa 6.....                        | 115 |
| Figura 27 – Registo da resolução da terceira questão da tarefa 6.....                       | 117 |
| Figura 28 – Registo da resolução da quarta questão da tarefa 6.....                         | 119 |
| Figura 29 – Registo efectuado relativamente à resolução da tarefa 7.....                    | 124 |
| Figura 30 – Registo da resolução da primeira questão da tarefa 8.....                       | 127 |
| Figura 31 – Registo da resolução da segunda questão da tarefa 8.....                        | 130 |
| Figura 32 – Registo da resolução da terceira questão da tarefa 8.....                       | 132 |
| Figura 33 – Registo da resolução da quarta questão da tarefa 8.....                         | 132 |



## CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

No contexto de mudança curricular que se vive actualmente, as práticas de ensino e aprendizagem têm, necessariamente, que sofrer alterações.

Actualmente, a aprendizagem é entendida como um processo de construção de significados, no qual as interacções entre os alunos desempenham um papel de relevo (Ponte, Matos e Abrantes, 1998). Esta ideia veio inspirar muitas orientações curriculares, nas quais se inclui a valorização do trabalho cooperativo.

Apesar disso, de acordo com o relatório *Matemática 2001* (APM, 1998), a situação que se vive nas salas de aula, na maioria dos casos, não é propícia à orientação dos alunos para a descoberta e construção do seu próprio. Os resultados deste relatório alertam para a elevada frequência da utilização, por parte dos professores, de exercícios e problemas, em vez de recorrerem a actividades de exploração e investigação, capazes de possibilitarem um ambiente de sala de aula mais dinâmico, onde a comunicação e as interacções sejam valorizadas. Portanto, o referido relatório aconselha a que se inclua na sala de aula “situações de trabalho variadas, valorizando tarefas que promovam o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos e que diversifiquem as formas de interacção em aula, criando a oportunidade de discussão entre alunos” (APM, 1998, p.79).

### 1.1. PERTINÊNCIA DO ESTUDO

Quer documentos oficiais (DEB, 2001) quer documentos da Associação de Professores de Matemática (APM, 1998) mencionam que o recurso a tarefas de carácter investigativo, pelo dinamismo que introduzem na aula, contribui positivamente para o desenvolvimento nos alunos de aspectos fulcrais da competência matemática: o raciocínio, a comunicação, a capacidade de argumentação. As potencialidades das tarefas de natureza investigativa poderão ser ainda mais acentuadas quando realizadas em grupo, pois “as crianças aprendem melhor se estiverem em situações que lhes permitam interagir com os outros no sentido de partilhar e comunicar as suas ideias acerca da matemática” (Wood *et al*, 1996, p.39).

Em consonância com isto, Matos e Serrazina (1996) referem que, para ocorrer uma actividade matemática significativa, o ambiente da sala de aula deve estimular os alunos a participar activamente na construção do seu próprio conhecimento, a comunicar ideias matemáticas e a argumentar. Desta forma, e de acordo com os mesmos autores, as práticas interactivas na sala de aula não representam uma metodologia possível mas uma modalidade insubstituível de trabalho, devido à qualidade e variedade de situações de aprendizagem que proporcionam.

Atendendo ao acima referido, é de crer que a aliança entre as duas metodologias de trabalho (aprendizagem cooperativa e investigações matemáticas), ao possibilitar um envolvimento activo dos alunos no processo de aprendizagem, poderá proporcionar-lhes aprendizagens mais significativas, tornando-os matematicamente mais competentes.

Deste modo, a realização de investigações matemáticas, tendo por base a aprendizagem cooperativa, parece promover o desenvolvimento nos alunos das competências de “cooperar com outros em tarefas e projectos comuns”; “pesquisar, seleccionar, organizar informação”; “adoptar estratégias adequadas (...) à tomada de decisões” e “adoptar metodologias personalizadas de trabalho e de aprendizagem adequadas aos objectivos visados” tal como preconizado no Currículo Nacional do Ensino Básico (DEB, 2001, p.15).

Nos últimos anos têm sido realizados alguns estudos, quer no estrangeiro quer em Portugal, sobre a aprendizagem cooperativa nas aulas de Matemática. Também existem várias investigações que se debruçam sobre a implementação de actividades de investigação nestas aulas. No entanto, parecem não existir investigações que tenham estudado simultaneamente estes dois aspectos: aprendizagem cooperativa e investigações matemáticas.

Por outro lado, são escassos, em Portugal, os estudos com crianças pequenas, no início da sua escolaridade. Assim, o facto de não se ter conhecimento da existência de estudos com crianças de tenra idade, aliando a aprendizagem cooperativa às investigações matemáticas, constituiu a principal motivação para este estudo.

Além disso, parece existir a ideia entre muitos professores de que as crianças, no início da sua escolaridade, não são capazes de resolver tarefas de natureza investigativa, uma vez que ainda não conseguem efectuar os registos, que caracterizam este tipo de tarefas, ou não são capazes de comunicar as suas ideias matemáticas. O trabalho em grupo também costuma ser evitado neste nível de ensino. Por conseguinte, o desafio deste estudo parecia ser maior.

Desta forma, o trabalho de investigação que a seguir se apresenta decorre da implementação, numa turma do 1º ano de escolaridade, de uma proposta pedagógica em que se valoriza a realização de investigações matemáticas na sala de aula, assente numa metodologia de trabalho cooperativo. A investigação centra-se num estudo de caso, de um grupo de trabalho composto por quatro alunos e, através dela, procura-se obter um maior conhecimento sobre as interações e desempenho dos alunos quando trabalham em grupos cooperativos sobre tarefas de natureza investigativa. Neste sentido, definiram-se as seguintes questões de investigação:

(1) Que interações ocorrem quando os alunos trabalham, de acordo com o modelo de aprendizagem cooperativa, em investigações matemáticas?

(2) Como se caracteriza o desempenho dos alunos perante tarefas de investigação matemática realizadas em grupos cooperativos?

## **1.2. ORGANIZAÇÃO DO ESTUDO**

Para dar uma visão global do presente trabalho é de referir que, no que diz respeito à sua estrutura formal, ele é constituído por seis capítulos distintos e, simultaneamente, complementares.

A dissertação começa com um capítulo de introdução à problemática em causa, onde surgem explicitadas as questões que nortearam o estudo (capítulo 1), seguido de um capítulo de fundamentação teórica, baseado nas temáticas em questão: aprendizagem cooperativa, interações sociais e investigações matemáticas (capítulo 2). Posteriormente, surge a metodologia de investigação, onde se identificam as opções metodológicas e os procedimentos de carácter metodológico efectuados (capítulo 3). Em seguida, afiguram-se as tarefas desenvolvidas (capítulo 4). Depois, segue-se um capítulo sobre a análise e discussão dos dados, no qual se estuda as interações e desempenho do grupo estudo de caso (capítulo 5). Para finalizar, sintetizam-se as principais conclusões e apresentam-se algumas ideias e recomendações para futuras investigações que possam emergir do estudo realizado (capítulo 6).



## **CAPÍTULO 2 – REVISÃO DA LITERATURA**

Neste capítulo são apresentadas teorias e resultados de investigações anteriores referentes aos temas deste estudo. Desta forma, pretende-se contribuir para a contextualização necessária no âmbito desta investigação, que valoriza, por um lado, a aprendizagem cooperativa como promotora da interacção social entre alunos e criadora de dinâmicas de sala de aula que visam incentivar a participação e envolvimento dos alunos na construção do seu conhecimento matemático e, por outro lado, as tarefas de investigação como metodologia privilegiada de aprendizagem da Matemática.

Neste sentido, o presente capítulo encontra-se estruturado em três secções: a aprendizagem cooperativa, as interacções sociais e as investigações matemáticas.

### **2.1. A APRENDIZAGEM COOPERATIVA**

#### **2.1.1. Perspectiva e Fundamentos da Aprendizagem Cooperativa**

A aprendizagem cooperativa é um modelo de ensino no qual os alunos trabalham em equipas heterogéneas (de quatro/cinco elementos), ajudando-se uns aos outros na aprendizagem das matérias escolares (Arends, 1995).

Segundo Ovejero (1990), o facto de os alunos se ajudarem reciprocamente na aprendizagem de matérias escolares é uma velha ideia, pois, já no século I, Quintiliano argumentava que os alunos obtinham maiores benefícios se se ensinasse mutuamente. Igualmente, no Renascimento, Johann Comenius afirmava que os alunos beneficiariam tanto de ensinar os outros como de serem ensinados pelos outros. Por sua vez, Parker, nos finais do século XIX, potenciou a aprendizagem cooperativa e, na sua opinião, as crianças são colaboradoras naturais e a sua maior diversão, depois de descobrir a verdade, é partilhá-la com os companheiros. O seu objectivo primordial, com a expansão da aprendizagem cooperativa nas escolas, era facilitar o desenvolvimento de uma sociedade verdadeiramente cooperativa e democrática.

Os desenvolvimentos contemporâneos da aprendizagem cooperativa começaram com os primeiros psicólogos educacionais e teóricos da pedagogia, no início do século XX. Assim, Dewey, seguindo Parker, fomentou o uso de grupos de aprendizagem cooperativa e a sua concepção de educação era a de que a sala de aula deveria ser o reflexo da sociedade como um todo, transformando-se num laboratório para a aprendizagem da vida real. Os professores deveriam ser responsáveis por envolverem os alunos na pesquisa de importantes problemas, quer pessoais quer interpessoais. Arends (1995, p.365) refere que:

os procedimentos específicos de sala de aula, descritos por Dewey (e pelos seus seguidores), enfatizam a organização de pequenos grupos de problemas, constituídos por alunos que procuravam as suas próprias respostas e aprendendo os princípios democráticos, através da interacção diária de uns com os outros.

Muitos anos depois, já na segunda metade do século XX, Herbert Thelen, tal como Dewey, considerava que a sala de aula deveria ser um laboratório ou uma democracia em miniatura, com o objectivo de se fomentarem o estudo e a pesquisa de problemas interpessoais e sociais importantes. Dado o seu interesse por dinâmicas de grupo, Thelen estruturou a pedagogia da investigação em grupo e forneceu a base conceptual para os desenvolvimentos contemporâneos da aprendizagem cooperativa (Arends, 1995).

Para os dois autores atrás citados, Dewey e Thelen, a utilização do grupo de trabalho cooperativo ultrapassou a mera melhoria da aprendizagem escolar.

Dado que a sociedade hodierna se caracteriza por comunidades globais e interdependentes e por instituições sociais complexas, as quais requerem elevados níveis de cooperação entre os seus membros, as pessoas começam a valorizar cada vez mais o comportamento cooperativo e acreditam que este constitui um objectivo fundamental para a educação. Díaz-Aguado (1996) considera que a aprendizagem cooperativa, para além de permitir alcançar objectivos educativos (como a tolerância, solidariedade), representa também uma adequada resposta às exigências que se vão estabelecendo em contextos heterogéneos. O autor acrescenta, ainda, que foi comprovado que a conduta de ajuda tem consequências psicológicas muito positivas para a pessoa que a emite. Por sua vez, Ovejero (1990, p.235) é da opinião que “se aprende más enseñando que aprendiendo”.

Para Arends (1995), a aprendizagem cooperativa é fundamental na medida em que “ao ajudar a promover o comportamento cooperativo e ao desenvolver melhores relações grupais entre os alunos, está simultaneamente a ajudar os alunos na sua aprendizagem escolar” (p.369). Assim, com o objectivo de avaliar os efeitos da aprendizagem cooperativa na realização escolar, refere que Slavin fez uma revisão de literatura e

encontrou quarenta e cinco estudos que investigaram, precisamente, os referidos efeitos. Destes estudos, a maioria (trinta e sete) mostrou que as turmas em que se implementou a aprendizagem cooperativa suplantavam significativamente as turmas do grupo de controlo, no que concerne à realização escolar. Em oito desses estudos não foram encontradas quaisquer diferenças, porém, nenhum deles mostrou efeitos negativos na aprendizagem cooperativa.

Ainda dessa revisão da literatura, Slavin concluiu que todos os métodos de aprendizagem cooperativa possuíam duas componentes importantes: uma estrutura de incentivo cooperativo e uma estrutura de tarefa cooperativa.

A característica essencial da estrutura de incentivo cooperativo consiste no facto de dois ou mais indivíduos se encontrarem interdependentes para uma recompensa que irão partilhar se forem sucedidos como grupo... As estruturas de tarefa cooperativa são situações nas quais a dois ou mais indivíduos é permitido, encorajado ou exigido o trabalho conjunto em determinada tarefa, coordenando os seus esforços para a completar (citado em Arends, 1995, p.369).

Do apresentado pode-se concluir que as principais características da aprendizagem cooperativa apresentadas pelos autores são: os alunos trabalham em grupo para dominarem as matérias escolares; os grupos devem ser heterogéneos no que diz respeito às capacidades dos alunos, ao sexo e à raça; os sistemas de recompensa são orientados para o grupo e não individualmente. Além disso, ao incorporar-se na sala de aula a aprendizagem cooperativa legitimam-se as condutas de dar e receber ajuda, melhorando quer o repertório social dos alunos quer as suas oportunidades de aprendizagem.

### **2.1.2. Aprendizagem Cooperativa e Outras Formas de Aprendizagem**

Segundo Ovejero (1990), os modelos de aprendizagem cooperativa não devem ser implementados de forma pura, sendo necessário combiná-los com uma certa dose de aprendizagem competitiva e individualista, pois estas três formas de estruturar a turma têm as suas vantagens, de acordo com diferentes objectivos.

Nas actividades de cooperação o professor estrutura a aula de tal maneira que os alunos trabalham juntos para maximizar a sua própria aprendizagem e a dos outros, isto é, os alunos trabalham juntos para alcançar objectivos comuns. Por sua vez, nas actividades competitivas o professor estrutura a aula de tal modo que os alunos trabalham uns contra

os outros, para conseguir um objectivo que só um ou alguns poderão alcançar. Finalmente, um trabalho individualista desenvolve-se quando cada aluno trabalha por si mesmo, para alcançar objectivos de aprendizagem que não têm relações com os outros alunos (Torres, 1996).

Desde o início do século XX que se tornou visível o interesse de alguns autores em analisar os efeitos de situações cooperativas *versus* competitivas. Foram, deste modo, realizadas experiências em laboratório, empresas e salas de aula, as quais revelaram, de forma consistente, que as estruturas cooperativas são mais produtivas que as competitivas. Arends (1995, p.367) refere que sob condições cooperativas, em que os alunos são incentivados a contribuir para o sucesso individual e do grupo, acontecem três coisas:

- (1) As relações interdependentes, nas quais a cooperação é reforçada, levam a uma motivação mais forte para completar a tarefa;
- (2) o trabalho de grupo desenvolve uma amistosidade considerável entre os membros do grupo;
- (3) a cooperação desenvolve um processo de comunicação amplamente efectivo que tende a promover uma maximização da criação de ideias e uma maior influência mútua.

Por sua vez, Johnson e Johnson (1990) fazem sobressair a ideia de que não estão contra a competição, mas contra a competição inapropriada e consideram que a maior parte da competição na turma é inapropriada. Estes autores crêem que as três estruturas – cooperativa, competitiva e individualista – deveriam ser utilizadas, na sala de aula, e os alunos deveriam aprender como funciona cada uma delas. Assim, eles tornar-se-iam capazes de competir com prazer, trabalhar individualmente e cooperar eficazmente com os outros para solucionar problemas.

Dentro da estrutura cooperativa é imprescindível que o professor supervisione os grupos, assegurando-se que a competição interpessoal não seja tão forte, ou pese mais, que a cooperação intergrupala. Em todo o caso, Johnson e Johnson (1990) referem que a competição entre os alunos que experimentaram uma grande quantidade de cooperação é, geralmente, mais apropriada do que a competição entre os alunos que não partilharam muitas experiências cooperativas.

Ovejero (1990) assinala que a maioria dos professores despende uma grande quantidade do tempo fomentando individualmente habilidades de raciocínio conceptual e de resolução de problemas (que dão aos alunos uma grande experiência de pensamento), actividades que teriam melhores resultados em contexto cooperativo. Existem, por sua vez, algumas habilidades e conhecimentos que poderão ser alcançados mais facilmente em contextos individualistas. O contexto competitivo é, apenas, mais eficaz na realização de

actividades de rotina e de memória. O autor considera que “idealmente el estructura cooperativa podría ocupar el 60-70% del tiempo escolar, el individualista el 20% y el competitivo entre el 10 y el 20%. Pero, se ha encontrado que tiempos inferiores de aprendizaje cooperativo también es eficaz” (p.167).

Com base em múltiplos estudos poder-se-á afirmar que a aprendizagem cooperativa, em relação à competitiva e individualista, apresenta resultados superiores a vários níveis, nomeadamente: no rendimento escolar, dado que o êxito pessoal depende do êxito da equipa e vice-versa; na organização da sala de aula; na esfera socioemocional do aluno; na motivação pela aprendizagem; nas relações interpessoais e grupais e na autoestima e sentido de eficácia pessoal (Torres, 1996).

Os professores têm, então, à sua disposição três formas de estruturar a turma. Portanto, torna-se necessário que conheçam as vantagens e inconvenientes de tais estruturas e como utilizá-las adequadamente, isto é, para que objectivos cada uma delas é mais eficaz.

### **2.1.3. Princípios e Modelos de Aprendizagem Cooperativa**

A cooperação é mais do que os alunos estarem fisicamente juntos uns dos outros, distribuírem o material entre si, ajudarem-se mutuamente, embora todos estes aspectos sejam fundamentais na aprendizagem cooperativa. Para que um método ou técnica de grupo possa ser considerado realmente cooperativo deve incluir determinados princípios. Assim, Freitas (1997) apresenta os quatro princípios que se seguem:

Interdependência positiva: A unidade da turma e do grupo de trabalho é importante. Cada elemento deve sentir-se unido aos outros, de modo a construir um sentimento de pertença ao grupo. Isto é possível através da partilha de objectivos, da divisão de trabalho, de materiais e de informação e por todo o grupo ser recompensado de igual modo.

Interacção cara a cara: Para que a aprendizagem cooperativa tenha resultados positivos é necessário que os grupos sejam pequenos, de modo a que os seus elementos possam interagir entre si. Este modelo de ensino permite uma maior participação nas actividades, por parte de cada elemento do grupo, fomentando a interacção verbal, bem como a troca de informação e de afectividade.

Responsabilidade individual: As actividades de aprendizagem cooperativa dependem de todos os elementos do grupo, o que significa que cada um tem a sua quota de responsabilidade, pois “o fim de uma situação de aprendizagem é maximizar o rendimento de cada estudante” (Johnson *et al*, citados em Freitas, 1997, p.166).

Utilização de habilidades interpessoais e grupais: Os alunos não sabem automaticamente como trabalhar em conjunto com eficácia. Porém, há *skills* próprios para saber cooperar e os alunos têm de ser ensinados a usá-los.

A avaliação das actividades que têm em conta os *skills* de cooperação, constitui um elemento fundamental da aprendizagem cooperativa e Freitas (1997) acredita que, apesar das inúmeras diferenças entre o trabalho de grupo e a aprendizagem cooperativa, é este princípio que as torna mais evidentes.

Estes quatro princípios têm-se revelado elementos essenciais para o sucesso da aprendizagem cooperativa e, no seu conjunto, constituem uma estratégia diferente do simples trabalho em grupo.

De acordo com Ovejero (1990) existem vários modelos de aprendizagem cooperativa que cumprem adequadamente esses princípios e que têm sido implementados, com êxito, nas escolas. Um modelo de aprendizagem cooperativa pode ser definido como “un sistema instruccional en el que el trabajo no se encuentra determinado exclusivamente por el producto académico, se orienta hacia una meta común y se efectúa en pequeños grupos de una cierta heterogeneidad interna” (González-Tejero e López, 1996, p.44). Assim, de seguida, referir-se-á os modelos mais amplamente investigados e divulgados e que, portanto, devem fazer parte do repertório do professor, chamando-se especial atenção para o facto de que qualquer modelo de aprendizagem cooperativa exige a sua compreensão em profundidade.

Learning Together (aprender juntos).

Este modelo foi concebido, por volta de 1970, pelos irmãos Johnson (David e Roger Johnson) e seus colaboradores.

Os alunos trabalham em grupos heterogêneos de 4/5 elementos. A actividade é delineada de forma a haver interdependência (através da distribuição de um único material por grupo ou com a divisão de actividades que, posteriormente, se integram), o que

significa que é esperado um produto único do grupo. No fim de cada sessão os elementos do grupo podem auto-avaliar-se, isto é, se trabalharam bem como grupo. Além disso, o produto do grupo é avaliado com base em critérios especificados de antemão, sendo recompensado o grupo que melhor realizou a tarefa (Díaz-Aguado, 1996).

Na implementação deste modelo é importante que o professor supervisione os grupos, ajudando-os sempre que surjam problemas sérios e reforçando as atitudes ou comportamentos dos alunos quando demonstrem comportamentos cooperativos.

#### Jigsaw (quebra-cabeças).

Neste modelo, desenvolvido por Aronson, por volta de 1970, os alunos são organizados em grupos heterogéneos, sendo o material dividido em tantas partes quantas os membros do grupo. Deste modo, cada elemento do grupo estuda determinada secção da informação reunindo-se, posteriormente, com os membros dos outros grupos responsáveis pela mesma secção, formando grupos de peritos. Após o debate em grupos de peritos os alunos voltam aos seus grupos de origem e ensinam os conteúdos aos seus colegas de grupo. Finalmente, todos os membros do grupo são questionados e avaliados individualmente sobre toda a unidade (Díaz-Aguado, 1996).

Aronson e Osherow (citados em Ovejero, 1990, p.169) consideram que:

este método de aprendizaje interdependiente incrementa la atracción de los estudiantes hacia sus compañeros y hacia la escuela, aumenta su autoestima, mejora su rendimiento académico, disminuye su competitividad y les ayuda a ver a sus compañeros como fuentes de aprendizaje. Los niños expuestos al método de rompecabezas también muestran una mayor capacidad para ponerse en el lugar o papel de otra persona y tienden a hacer atribuciones de ensalzamiento del yo tanto para sí mismos como para sus compañeros.

#### Student Teams Achievement Division, STAD (divisão de tarefas em equipas cooperativas).

Este modelo de aprendizagem cooperativa foi desenvolvido por Slavin nos finais da década de 70, do ano de 1900 e, na opinião de Freitas (1997), constitui a abordagem mais simples e clara à aprendizagem cooperativa.

Os alunos são divididos em grupos de 4/5 elementos, heterogéneos quanto ao rendimento, sexo e raça. O professor apresenta o material académico a ser aprendido e os alunos trabalham em grupo (fazendo perguntas uns aos outros, realizando discussões), a fim de se assegurarem que todos os seus elementos sabem bem a matéria. Finalmente, todos os alunos fazem exames individuais sobre essa matéria, sem que exista a

possibilidade de serem ajudados pelos seus companheiros. A classificação obtida neste exame é comparada à obtida na avaliação anterior e o aluno apenas consegue pontos para a sua equipa se esta última for superior. As equipas e os alunos que revelarem maiores progressos ou que obtiverem classificações máximas podem ser reconhecidos num jornal da turma, boletim ou revista da escola.

Embora o STAD seja um modelo de aprendizagem cooperativa “esta técnica incluye también diversos aspectos competitivos” (Ovejero, 1990, p.170).

Group Investigation, GI (investigação em grupo).

O modelo da investigação em grupo foi criado por Sharan e Sharan, em 1980.

Na perspectiva de Freitas (1997) talvez se trate da abordagem mais complexa de aprendizagem cooperativa e a mais difícil de implementar (ao contrário das STAD).

Neste método, os alunos distribuem-se por grupos de 2 a 6 elementos segundo as suas próprias preferências. Cada grupo escolhe um tema do programa e distribui as tarefas pelos seus elementos para elaborarem um relatório final. O professor encoraja os alunos a elaborarem um plano que lhes permita desenvolver bem a tarefa, utilizando uma variedade de materiais e fontes de informação e envolvendo-se em discussões entre si. Os resultados do trabalho de cada grupo são apresentados à turma, sendo avaliado tanto pelo professor como pelos elementos dos outros grupos (Díaz-Aguado, 1996).

Relativamente aos diversos modelos de aprendizagem cooperativa, Díaz-Aguado (1996) refere que, investigações realizadas demonstraram que (com excepção da capacidade de colaboração que melhorou significativamente em todas as investigações) a adopção de um ou outro modelo depende dos objectivos que se pretende alcançar, bem como das características dos alunos (idade, motivação, autonomia) e condições educativas que rodeiam a sua aplicação (actividade, heterogeneidade do grupo).

#### **2.1.4. O Papel do Professor na Estrutura de Trabalho Cooperativo**

O êxito da aprendizagem cooperativa depende da capacidade do professor criar um espírito cooperativo na sua turma, pois Freitas (1997) acredita que o desencanto de muitos professores que experimentaram trabalhar em grupos cooperativos proveio de não terem considerado a necessidade de ensinar como se trabalha em grupo. Como tal, aquando do



início da implementação de actividades de aprendizagem cooperativa, torna-se fundamental que o professor negocie com os alunos regras para o seu bom funcionamento, criando hábitos de trabalho que repousem na interdependência. Paralelamente à assunção das regras a aprendizagem cooperativa supõe a atribuição de papéis a todos os elementos do grupo, os quais devem ser diferenciados e rotativos. Por sua vez, Arends (1995) considera que a preocupação central dos professores que queiram dirigir actividades de aprendizagem cooperativa não deverá incidir somente nos conteúdos disciplinares, mas essencialmente na criação de *skills* de trabalho em grupo.

Dado que, na aprendizagem cooperativa, o ambiente de aprendizagem se caracteriza pela utilização de processos democráticos os alunos responsabilizam-se pela sua própria aprendizagem, assumindo um papel activo. Consequentemente, a função do professor consiste em ajudar os alunos a fazer a transição de um contexto de turma, enquanto um todo, para grupos de aprendizagem, bem como ajudar esses mesmos grupos à medida que vão trabalhando. Díaz-Aguado (1996) enuncia que a aprendizagem cooperativa supõe uma mudança significativa no papel do professor e na interacção que este estabelece com os seus alunos, uma vez que o controlo das actividades deixa de estar centrado nele passando a ser partilhado por toda a turma. Deste modo, para aplicar procedimentos cooperativos deverá empreender actividades que, por si mesmas, possibilitem melhorar a sua interacção com os alunos assim como a qualidade educativa.

Por um lado, a melhor forma de favorecer a eficácia da aprendizagem cooperativa é incluí-la, de forma sistemática, como uma actividade académica regular, embora não se pretenda com isto significar que se excluam as outras actividades de aprendizagem (competitiva e individualista) com as quais ela se complementa. Por outro lado, ela só será verdadeiramente eficaz se o professor acreditar nos benefícios do trabalho em grupo e estiver disponível para ajudar os grupos a crescer. Freitas (1997) considera que “os professores que adiram à aprendizagem cooperativa têm de ter um espírito aberto à diversidade, aos desafios, aceitando que virtualmente tudo possa ser posto à discussão” (p.173).

Várias investigações apontam para que a aprendizagem cooperativa seja uma das técnicas mais eficientes para a promoção do desenvolvimento pessoal e social. Deste modo, é fundamental que o professor acredite que a aprendizagem cooperativa tem inúmeros benefícios para o desenvolvimento dos seus educandos, considerando-se imprescindível que este permaneça optimista pois, como refere Goodlad (citado em Costa, 1991, p.64), “É para mim uma contradição ser simultaneamente pessimista e educador”.

### **2.1.5. O Trabalho Cooperativo na Aula de Matemática**

A quantidade de trabalhos dirigidos à investigação sobre a aprendizagem cooperativa na aula de Matemática permite que haja, actualmente, alguma informação, relativamente à sua eficácia.

Numa revisão a vários estudos comparativos entre o ensino cooperativo e o ensino tradicional nas aulas de Matemática, Davidson (1990) menciona que 40% dos mesmos indicam que os grupos que trabalharam num modelo cooperativo conseguiram melhores resultados em testes de desempenho do que o grupo de controlo. No mesmo sentido, Davidson e Kroll (1991) referem que a maioria dos estudos que compara a aprendizagem da Matemática, com recurso a métodos de trabalho cooperativos com o modelo tradicional de ensino, apresenta diferenças e que, quando estas são significativas, elas são sempre favoráveis à aprendizagem cooperativa. Por sua vez, Marín (citado em Guerreiro, 2005) levou a cabo uma investigação cujo objectivo era avaliar a influência da aplicação de um método de aprendizagem cooperativa na motivação, rendimento académico e clima de convivência na sala de aula. No final, concluiu que mais de metade dos alunos abrangidos pelo estudo apresentaram melhorias relativamente aos três aspectos estudados. Também Panitz (citado em Guerreiro, 2005) enuncia que os alunos submetidos a métodos de aprendizagem cooperativa nas aulas de Matemática aumentam as suas competências ao nível do pensamento crítico, da motivação e da auto-estima face ao seu desempenho matemático.

Em síntese, no caso particular da Matemática, a maioria dos estudos refere que as técnicas de aprendizagem cooperativa, quando utilizadas de forma consistente e bem conduzida, geram vantagens evidentes nos alunos. Estes resultados parecem estar relacionados com as interações que os alunos estabelecem no seio do grupo e que os levam a relacionar novos significados com aqueles que já possuíam, estimulando o conflito cognitivo e ampliando-lhes, deste modo, os seus conceitos matemáticos. No grupo estas interações são potencialmente mais espontâneas pois a comunicação necessária ao entendimento é baseada numa linguagem comum que, embora imprecisa e pouco formal, desbloqueia os receios, inibições e desconfianças, mais frequentes nas interações professor-aluno.

A confirmar o mérito do método estão também as várias recomendações que, um pouco por toda a parte, vão destacando a aprendizagem cooperativa como metodologia privilegiada para o ensino da Matemática.

Abrantes (1994), nas recomendações do Projecto Mat789, sugere que:

(...) a construção de um ambiente de aprendizagem que valoriza ao mesmo tempo a cooperação e a liberdade individual, em que os alunos se ajudam e aprendem uns com os outros (...) pode ser um factor decisivo no progresso, tanto daqueles que são à partida os melhores alunos como dos que revelam mais dificuldades (p.606).

As recomendações da APM (APM, 1998) atribuem ênfase a três aspectos fundamentais no processo de ensino e aprendizagem da Matemática: (1) a realização de actividades significativas e diversificadas, como a resolução de problemas e actividades de investigação; (2) a inclusão de momentos de discussão entre os intervenientes; (3) e o recurso a formas de trabalho diversificadas, como o trabalho em pares e em pequenos grupos. Relativamente a este último aspecto, isto é, à organização dos alunos, o mesmo documento refere que o trabalho individual é o mais frequente (70%), aconselhando a que se proceda a uma alteração da situação que se tem vivido.

Louis (citado em Guerreiro, 2005) é da opinião que não é fácil mobilizar os professores no sentido de aplicar os métodos de aprendizagem cooperativa nas suas aulas, devido a factores de ordem pessoal e institucional. Ainda assim, Davidson e Kroll (1991) afirmam que a mudança mais visível na educação matemática das últimas décadas é o aumento do recurso a esta metodologia.

### 2.1.6. A Organização dos Grupos em Matemática

Quando o professor organiza grupos de trabalho nas suas aulas de Matemática tem de considerar vários aspectos: a dimensão dos grupos, a sua composição, formação, estabilidade/duração e tipos de actividades de aprendizagem que propõe. Assim, Abrantes (1994) salienta que os diferentes modos de organizar o trabalho em grupos, na aula de Matemática, não são igualmente aceites por todos os autores.

A respeito da **dimensão dos grupos** as opiniões são variadas, no entanto, a maioria dos autores e investigadores, quando se refere à aprendizagem cooperativa, considera e propõe grupos formados por quatro elementos. Esta opção recai sobre a experiência pessoal ou argumento de simplicidade, isto é, dividir os alunos em grupos de quatro é um

método mais fácil de concretizar uma vez que, geralmente, os alunos já se encontram organizados aos pares (Burns; Crabill; e Slavin, citados em Abrantes, 1994). Para além desta razão Crabill acrescenta outras. Na sua opinião, num grupo de quatro alunos todos se integram facilmente, havendo seis possibilidades diferentes de diálogo entre dois alunos. Pelo contrário, um número ímpar de elementos tem o inconveniente de deixar mais facilmente um aluno excluído de algumas discussões. No entanto, caso haja necessidade de constituir grupos com número ímpar é preferível estes terem cinco elementos do que três. Grupos de seis ou mais membros também não aconselha, pois considera que alguns alunos podem tornar-se demasiado passivos, enquanto outros podem procurar uma oportunidade para dominar (citado em Abrantes, 1994).

Johnson e Johnson (1990), por outro lado, propõem a formação de grupos pequenos, de dois a quatro elementos, mostrando preferência por grupos de três alunos. Os autores referem que, quanto menor for a experiência dos alunos no trabalho de grupo e menos tempo houver disponível menor deverá ser a dimensão dos grupos.

Robertson *et al* (citados em Abrantes, 1994) consideram que a natureza das actividades é um aspecto a ter em conta quando se pensa na dimensão dos grupos. Assim, “o trabalho em pares poderá ser adequado para tarefas de revisão ou de prática, enquanto os grupos de quatro podem constituir uma melhor opção se as actividades são menos estruturadas – resolução de problemas, descoberta ou exploração de materiais” (p.155).

Relativamente à **composição dos grupos**, em Matemática, subsistem duas tendências opostas, uma caracterizada por uma ênfase nos pequenos grupos heterogéneos e outra que defende os grupos homogéneos (Good *et al*, citados em Abrantes, 1994).

Freudenthal (citado em Abrantes, 1994) é a favor dos grupos heterogéneos, em virtude da própria estrutura do processo de aprendizagem da Matemática, que se caracteriza pela existência de diferentes “níveis” e pelo facto de se progredir a partir da observação e reflexão sobre os processos dos níveis anteriores. Os grupos heterogéneos são também defendidos por outros autores, como Burns; Crabill; e Slavin, que consideram que os grupos com mais sucesso são os que integram alunos com capacidades variadas – aproveitamento bom, médio e fraco (referidos por Abrantes, 1994).

Também Dekker é a favor da heterogeneidade mas no que se refere a aspectos como o sexo, a origem social e racial, apontando como vantagem o confronto e discussão que se gera sobre as diferentes soluções. Davidson refere que experiências evidenciaram efeitos positivos dos grupos heterogéneos para alunos com uma aprendizagem mais lenta (citados em Abrantes, 1994).

Embora os grupos heterogêneos sejam defendidos por inúmeros autores esta opinião não é consensual. Neste sentido, há autores que apresentam críticas relativamente a esta composição dos grupos. Abrantes (1994) apresenta as críticas de Good *et al*, segundo os quais estes grupos mantêm o *status quo* quanto à participação dos alunos, uma vez que os alunos com melhor aproveitamento tendem a dominar e os que têm pior aproveitamento podem não ser capazes de pedir/dar informações necessárias à interação no grupo.

Relativamente à **formação dos grupos**, Abrantes (1994) refere que há muitas maneiras de se dividir os alunos de uma turma em grupos, podendo esse agrupamento ser feito aleatoriamente (por exemplo, através de sorteio), decidido pelo professor, decidido pelos alunos ou ser o resultado de uma combinação de processos (Abrantes, 1994).

Estas diferentes propostas encontram-se relacionadas com outros aspectos do trabalho de grupo. Assim, a formação dos grupos utilizando um método aleatório, na opinião de Robertson *et al*, tem a vantagem de transmitir a ideia de que todos os alunos têm o mesmo valor como membro de um grupo (citados em Abrantes, 1994). A formação dos grupos baseada na escolha feita pelos próprios alunos pode oferecer algumas vantagens, uma vez que no trabalho cooperativo é importante a amizade e as boas relações pessoais. Porém, também apresenta sérias desvantagens, por várias razões: (1) os alunos, em certas idades, tendem a formar grupos só de rapazes ou só de raparigas; (2) existe o risco de que os alunos assumam papéis fixos e estabeleçam relações de dominação; (3) alguns alunos podem ser rejeitados de um modo que seja difícil para o professor alterar a situação (Terwel, mencionado em Abrantes, 1994). Relativamente a uma escolha baseada na decisão do professor, geralmente, as suas preocupações, aquando da formação dos grupos, estão associadas à ideia de constituir grupos estáveis durante períodos de tempo mais prolongados.

Bishop e Goffree (1986) referem que, ao pensar na composição dos grupos, o professor deve ter em consideração o conhecimento que possui de cada um dos alunos, bem como o tipo de actividade que vai propor (actividade competitiva, cooperativa...).

A questão da **estabilidade** é algo que o professor tem de considerar na formação dos grupos. Burns é da opinião que a alteração da composição dos grupos (no final de uma semana ou de uma actividade) pode evitar problemas de relacionamento entre os alunos, para além de permitir que cada aluno tenha a oportunidade de trabalhar com um maior número de colegas. Robertson *et al* referem que, se o objectivo do trabalho em grupo for contribuir para que os alunos aprendam a cooperar e desenvolver atitudes e capacidades mais sofisticadas em relação à Matemática, é vantajoso que o grupo se mantenha inalterado

durante um período de tempo alargado. Por outro lado, consideram que o surgimento de conflitos no grupo não é razão para alterar a sua composição, mas uma oportunidade para os alunos aprenderem a resolver problemas (citados em Abrantes, 1994).

Outro aspecto que também requer atenção é a relação entre o trabalho de grupo e o **tipo de actividades** que se propõe, pois os diferentes tipos de actividades em Matemática não são igualmente adequados para o trabalho dos alunos em pequenos grupos (Abrantes, 1994).

Assim, Bishop e Goffree (1986) consideram que inúmeras actividades matemáticas podem ser desenvolvidas em grupo. Porém, o trabalho de grupo pode ser mais vantajoso em actividades que têm uma natureza de resolução de problemas ou que requerem investigação.

## **2.2. AS INTERACÇÕES SOCIAIS**

### **2.2.1. Quadro de Referência Teórico**

Na década de 70 (1975, 1976), Doise, Mugny e Perret-Clermont foram pioneiros no estudo do papel das interacções sociais no desenvolvimento cognitivo dos sujeitos. As primeiras investigações desenvolvidas pelos referidos autores tiveram lugar em meio laboratorial e basearam-se em provas piagetianas, que permitiram determinar o nível de desenvolvimento cognitivo dos sujeitos e ver se eles possuíam, ou não, determinadas operatividades cognitivas (citados em Branco, Angelino e César, 1995).

Os resultados desses estudos revelaram que as crianças que trabalhavam em interacção social apresentavam maiores progressos cognitivos (Branco, Angelino e César, 1995; César, 1996). Além disso, revelaram também que esses progressos eram estáveis no tempo, ou seja, não desapareciam quando passado algum tempo elas realizavam o pós-teste, voltando a trabalhar individualmente na resolução de provas que avaliavam a mesma capacidade operatória (César, 2000a).

À medida que se fazia sentir a crescente divulgação da teoria de Vygotsky, na abordagem da Psicologia Social Genética, as interacções sociais na apreensão do conhecimento e na aquisição de competências começaram a assumir cada vez mais um

papel preponderante. Assim, admitiu-se que não se vive nem se aprende no vazio social e que, portanto, os desempenhos dos sujeitos são influenciados pelos contextos e situações em que ocorrem (César, 2000a; Carvalho, 2001; Carvalho e César, 2002).

Deste modo, considerou-se a necessidade de realizar estudos contextualizados, isto é, efectuados na sala de aula e que utilizassem como instrumentos provas ligadas aos conteúdos matemáticos abordados. Percebeu-se, então, que os desempenhos matemáticos dos sujeitos são influenciados por inúmeros aspectos, tais como: “a situação em que a tarefa é proposta, o tipo de tarefa em si, as instruções de trabalho que são fornecidas, o estatuto de quem propõe a tarefa, o facto de esta ser resolvida individualmente ou em interacção” (César *et al*, 1999, p.288). César (2000a) é da opinião que esta vasta gama de factores trouxe novos desafios, uma vez que tornou o processo de avaliação de conhecimentos e desempenhos algo bastante mais complexo do que fora admitido até então. A autora acrescenta, ainda, que as interacções sociais são processos complexos, sendo necessário ser estudadas de forma detalhada “para que se possam compreender os mecanismos em jogo e para conseguirmos aproveitar, do ponto de vista pedagógico, todas as suas potencialidades” (p.7).

Diversas investigações (nacionais e internacionais) estudaram o papel das interacções sociais na apreensão de conhecimentos, designadamente na disciplina de Matemática. Dos principais investigadores que se debruçaram sobre este tema citam-se César, Perret-Clermont, Schubauer-Leoni, entre outros. Todos os estudos desenvolvidos pelos referidos autores permitiram compreender que as interacções entre pares são facilitadoras da apreensão de conhecimentos e da aquisição de competências, independentemente dos anos de escolaridade dos sujeitos e dos conteúdos abordados (César *et al*, 1999).

Um dos primeiros conceitos a ser estudado foi o conflito sócio-cognitivo, o qual revelou ser, na maioria dos estudos, um elemento facilitador das aprendizagens e do desenvolvimento cognitivo (César, 2000a).

Nas situações de trabalho em díade ou em pequenos grupos, onde se fomenta o conflito sócio-cognitivo, os alunos são conduzidos a co-recontextualizar os seus saberes e competências, de forma a gerirem as opiniões de contração existentes entre eles (Schubauer-Leoni, citada em César, 2000a). Isto faz com que os alunos progridam mais nitidamente, em comparação com situações de trabalho individual, dado que ser confrontado com pontos de vista diferentes do seu, ser capaz de argumentar, de forma a defender o seu ponto de vista e saber gerir a interacção estabelecida (quem lidera, quando o faz, quando se chega a um consenso, quando não abdicamos da nossa opinião) promove o

desenvolvimento sócio-cognitivo e facilita a apreensão de conhecimentos e a aquisição de competências (César, 2000a).

Porém, nem todas as situações de trabalho são susceptíveis de provocar conflito sócio-cognitivo entre os parceiros. Para que as interações sociais sejam, de facto, um processo eficaz de implementação de melhores desempenhos por parte dos alunos não basta pô-los a trabalhar em conjunto (César *et al*, 1999).

É necessário estabelecer critérios para a formação dos grupos ou díades, conceber tarefas que suscitem o conflito sócio-cognitivo ou que levem os alunos a investigar, fornecer instruções de trabalho que promovam o levantamento de conjecturas e respectivas argumentações, criar um clima de trabalho que favoreça o estabelecimento de interações frutuosas (p.289).

Relativamente à natureza das tarefas, César (2000a) salientou que as tarefas “não habituais” (tarefas abertas, onde diversas estratégias de resolução podem ser exploradas) são as mais susceptíveis de promover conflitos sócio-cognitivos e interação entre pares, que sejam frutuosas para o desenvolvimento dos alunos e para os seus progressos em tarefas matemáticas.

Outro aspecto a ter em consideração é o contrato didáctico que se estabelece entre o professor e os alunos. Assim, o contrato didáctico pode ser entendido como um conjunto de regras que rege a relação didáctica e que legitima o que cada parceiro da relação didáctica (professor e alunos) espera dos outros elementos dessa mesma relação (César *et al*, 1999).

Geralmente, o contrato didáctico mais utilizado nas nossas escolas é o que privilegia as interações verticais (professor-aluno), em que o professor tem um papel preponderante, isto é, o professor ensina e os alunos aprendem, o professor questiona e os alunos respondem. No entanto, quando se pretende implementar práticas pedagógicas inovadoras (como as investigações matemáticas) e valorizar as interações na aula de Matemática é necessário alterar este contrato didáctico. Desta forma, torna-se fulcral romper o contrato didáctico a que, habitualmente, os alunos estão sujeitos e valorizar as interações horizontais “o que cria a necessidade de explicitar algumas das regras deste novo contrato didáctico, para que os alunos discutam entre si as estratégias de resposta e conjecturas levantadas, antes de questionarem o professor sobre a pertinência das mesmas” (César *et al*, 1999, p.289).



### 2.2.2. Interações, Construção do Conhecimento e Comunicação

Como exposto no ponto anterior, várias investigações têm sido realizadas sobre as interações na aula de Matemática. Em Portugal, os primeiros estudos sobre este tema foram realizados por César e procuravam responder aos desafios colocados pelos professores quando pretendiam promover o trabalho de grupo. Rodrigues (2000) aponta vários estudos que mostram que as crianças, em interação com um par mais competente, conseguem realizar tarefas mais complexas e reforçar a sua autonomia.

Carvalho (2001) refere que os estudos realizados por César e seus colaboradores vão mais além, mostrando que os alunos em interação uns com os outros progredem cognitivamente, quer quando interagem com pares cognitivamente mais competentes, quer quando interagem com pares que apresentam um desenvolvimento cognitivo menos avançados que o seu, sendo necessário que se verifiquem processos de raciocínio diferentes e que ocorra o confronto entre diversas formas de resolução dos dois parceiros. Na opinião de César (2000a), do ponto de vista pedagógico, não seria correcto pensar em recorrer ao trabalho em díades ou em grupo, no contexto de sala de aula, se apenas os elementos mais fracos beneficiassem dessa interação. A autora refere, ainda, que vários estudos concluíram que a existência, na sala de aula, de interações sociais positivas em relação à Matemática pode contribuir para alterar positivamente as representações sociais dos alunos sobre a disciplina, através da promoção de atitudes mais positivas face à Matemática e, conseqüentemente, podem proporcionar melhores desempenhos e sucesso escolar.

Estes estudos, ao serem realizados em contexto de sala de aula, permitiram uma melhor compreensão dos mecanismos relacionados com as interações sociais e de como estas representam um meio poderoso para a promoção do desenvolvimento sócio-cognitivo dos alunos, para a apropriação de conhecimentos e para a mobilização de competências. Um destes estudos foi o projecto *Interação e Conhecimento* que procurou, ao longo de cinco anos, estudar e implementar interações sociais na sala de aula, como uma forma de fomentar o desenvolvimento sócio-cognitivo dos alunos e a aquisição de competências matemáticas, com vista a impulsionar o seu sucesso escolar (César, 2000b). Outros projectos como o Mat 789 (Abrantes, 1994) revelaram aspectos positivos face à interação entre os alunos.

Fruto da reflexão realizada desde os anos 80 em torno da comunicação estabelecida, na sala de aula, entre professor e alunos, tornou-se evidente a necessidade de alterar a

forma como esta, habitualmente, ocorre, promovendo uma mudança do seu carácter essencialmente unívoco (do professor para os alunos) para o estabelecimento de comunidades discursivas (Romão, 2000). Assim, no nosso país, as orientações curriculares atribuem grande importância ao desenvolvimento das capacidades de comunicação e prevêm o recurso a estratégias de ensino onde, a partir da exploração de actividades de investigação matemática, se promovam a argumentação e reflexão (DEB, 2001). No entanto, os alunos vinculados a um método, essencialmente, expositivo sentirão dificuldades em compreender a natureza interactiva da aprendizagem matemática. Esta natureza interactiva é realçada por uma visão da aprendizagem como construção de significados pessoais e pelo reconhecimento de que este processo envolve a partilha de ideias e pensamentos. Nesta perspectiva, ensino e aprendizagem são uma actividade reflexiva que envolve a negociação do significado, através de um processo em que a obrigação de comunicar é uma expectativa mútua (Wood *et al*, 1996).

Na opinião de Yackel, Cobb e Wood (citados em Sousa, 2006), ao trabalhar em grupo os alunos vêem-se confrontados com a necessidade de resolver os problemas matemáticos suscitados pela aula e de resolver conflitos sociais criados na interacção com os colegas do grupo. Depois de resolvidos estes conflitos sociais, no seio do grupo, as interacções ocorridas resultam em possibilidades de aprendizagem, já que, ao trabalhar em conjunto, os alunos se esforçam por comunicar. As oportunidades de verbalizar o seu pensamento, explicar e justificar os seus raciocínios ou, até mesmo, de solicitar ao colega explicações sobre aspectos não compreendidos surgem naturalmente. Este tipo de comunicação/discussão não é característico de ambientes mais tradicionais, onde, geralmente, as crianças trabalham individualmente, não se envolvendo em discussões matemáticas entre si.

### **2.2.3. As Interações em Grupo na Aula de Matemática**

Hoje em dia, vários autores atribuem importância ao papel das interações no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Wood *et al* (1996) consideram que o processo de ensino e aprendizagem da Matemática deve proporcionar aos alunos um ambiente em que eles interajam uns com os outros, partilhando e comunicando as suas ideias matemáticas e estratégias de resolução de problemas, ouvindo e tendo em consideração as ideias dos outros. Aliás, os autores

afirmam que as crianças aprendem melhor se estiverem em situações que lhes permitam interagir com outros, podendo partilhar e comunicar as suas ideias acerca da matemática. Portanto, é indispensável que os alunos se sintam à vontade para criar os seus próprios significados, para transmitir as suas ideias e para que estas sejam ouvidas e respeitadas pelos outros. Acrescentam, ainda, que a criação de situações de aprendizagem cooperativa é um aspecto importante. Relativamente a este último aspecto, Sousa (2006) menciona que ao centrar-se a prática lectiva em formas de trabalho colaborativas, onde se valorizam as interações e a comunicação de ideias matemáticas procura-se desenvolver a competência matemática dos alunos.

No entanto, a implementação de interações no seio de um grupo reveste-se de alguma complexidade e morosidade. Porfírio (1993) refere-se às dificuldades de implementação das interações em pequenos grupos, quando afirma que “conseguir que os alunos discutam estratégias e soluções, aceitem e critiquem propostas dos seus colegas demora muito tempo” (p.215). Através de um estudo que realizou, a autora constatou que inicialmente os alunos, em trabalho de grupo, manifestavam dificuldades em expor as suas ideias, ouvir e confrontar as sugestões apresentadas pelos colegas, para além de dependerem da ajuda do professor para iniciar o trabalho e decidir uma posição. Assim, com o objectivo de implementar as interações em pequenos grupos, adoptou os seguintes pressupostos: (1) as tarefas propostas deviam incentivar a comunicação e a troca de ideias; (2) as questões colocadas pelos alunos eram remetidas para a discussão no seio do grupo; (3) era solicitado a cada grupo o registo da actividade desenvolvida, no sentido de serem valorizado o seu trabalho colectivo. Com estas medidas, ao longo do seu estudo, foi verificando alguns progressos, afirmando que os alunos “lentamente foram conseguindo uma boa organização a este nível e ganhando um visível prazer e entusiasmo por este tipo de trabalho [em pequenos grupos]” (p.220). No final da experiência indica que “os alunos (...) conseguiram uma boa organização ao nível do trabalho de grupo, sendo, para muitos deles, a forma de trabalho que preferiam” (p.217).

Relativamente às interações entre alunos, a trabalhar em pequenos grupos, Abrantes (1994), no seu estudo, conta que inicialmente a qualidade das discussões era fraca, os alunos demonstravam dificuldades em argumentar (as explicações que davam eram curtas e pouco explicativas), ouvir e ajudar os seus colegas. No final, passados três anos, revela que eram evidentes os progressos, tendo-se observado uma alteração positiva nas atitudes dos alunos para com os colegas, no comportamento e aproveitamento. Ressalta, ainda, um outro aspecto que foi a adesão dos alunos à ideia de que só poderiam obter bons resultados

colectivos se todo o grupo se esforçasse e se cada um contribuísse com o que sabia fazer melhor.

Outro estudo sobre interacções em grupo na aula de Matemática foi realizado por Machado (1997), que também refere as dificuldades iniciais sentidas pelos alunos ao nível da comunicação com os colegas de grupo e a dependência da professora. Para além disto, refere igualmente a morosidade do processo, afirmando que “a criação de um ambiente de cooperação nos grupos foi um processo moroso e a construção de hábitos de cooperação fez-se lentamente” (p.132).

Em suma, os autores supracitados (Porfírio, 1993; Abrantes, 1994; Machado, 1997) destacam, como um dos papéis fundamentais do professor, a organização da aprendizagem no que se refere à implementação de um ambiente de cooperação.

## **2.3. AS INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS**

### **2.3.1. Tarefas Matemáticas e Actividade Matemática**

A distinção entre os termos tarefa e actividade assume especial relevância quando se fala de aprendizagem da Matemática. O termo actividade é muito corrente entre os professores, utilizando-o para se referirem tanto às propostas que são apresentadas aos alunos como ao desenvolvimento destas pelos próprios alunos (Amaral, 2003).

Na opinião de Ponte e Serrazina (2000) os conceitos de tarefa e actividade não possuem o mesmo significado, embora sejam categorias globais e que se relacionam. O aluno aprende em consequência da actividade que desenvolve e da reflexão que faz sobre essa actividade. Portanto, o professor tem de procurar criar situações a partir das quais possa ter lugar essa actividade, uma vez que as tarefas matemáticas que ele propõe aos alunos (exercícios, jogos, problemas, investigações, etc.) constituem o ponto de partida para a sua actividade matemática. Neste sentido, as tarefas propostas devem despertar a curiosidade e o entusiasmo dos alunos e devem apelar aos seus conhecimentos prévios e intuições.

A tarefa é algo exterior ao aluno, mas que ele tem de interpretar para que possa dar origem a diversas actividades, ou nenhuma, conforme a disposição deste e o ambiente de

aprendizagem da sala de aula. A actividade (física ou mental) refere-se ao próprio aluno, àquilo que ele faz num dado contexto, podendo incluir a execução de numerosas acções (Ponte *et al*, 1997; Ponte e Serrazina, 2000). Deste modo, “é a actividade realizada pelo aluno que constitui a base fundamental na sua aprendizagem” (Ponte e Serrazina, 2000, p.112).

A importância da actividade é assim justificada no documento *Renovação do Currículo de Matemática*, onde se explicita que:

A aprendizagem da Matemática é sempre produto da actividade, e se este se reduz, por exemplo, à resolução repetitiva de exercícios para a aplicação de certas fórmulas, é exactamente isto que se aprende e vai perdurar, enquanto fica a memória das fórmulas (APM, 1988, pp.55-56).

Segundo Ponte *et al* (1997) a tarefa envolve dois aspectos, nomeadamente: a situação de aprendizagem e o conteúdo. Para estes autores,

A mesma situação de aprendizagem e o mesmo conteúdo pode dar origem a diferentes tipos de actividade consoante a tarefa proposta, o modo como foi apresentada aos alunos, a forma de organização do trabalho e o ambiente de aprendizagem (p.75).

Relativamente à tarefa, Ponte e Serrazina (2000) acrescentam que uma tarefa pode remeter para diferentes estruturas ou conceitos matemáticos, embora estes não se encontrem na tarefa. Porém, é a conjugação da tarefa com certas estruturas mentais que leva o aluno a interpretá-la de determinada forma. É por isso que não é de admirar que perante uma mesma tarefa duas pessoas possam fazer interpretações totalmente diferentes, pois “a percepção dos aspectos matemáticos da tarefa feita pelo aluno depende da sua interpretação da tarefa, e nessa interpretação intervêm sempre factores de natureza cultural, sociológica e psicológica” (p.113).

As tarefas propostas a um aluno podem assumir um carácter rotineiro ou problemático, dependendo do grau subjectivo de dificuldade que cada aluno sente. Assim, uma actividade que seja o resultado de tarefas rotineiras contribui apenas para consolidar cognitivamente conhecimentos e destrezas adquiridos, enquanto a realização de tarefas com carácter problemático são favoráveis a um desenvolvimento cognitivo (Ponte e Serrazina, 2000).

### **2.3.2. O que são Actividades de Investigação?**

Antes de se apresentar a definição de actividades de investigação parece crucial esclarecer o significado do vocábulo *investigar*. Assim, na perspectiva de Porfírio e Oliveira (1999) investigar é um termo que é usado para descrever actividades que envolvem determinadas características, nomeadamente: a pesquisa, a descoberta, a autonomia, a tomada de decisões, o espírito crítico. Já na opinião de Brunheira e Fonseca trata-se de “uma viagem até ao desconhecido”, que “torna possível aproximarmo-nos da matemática do mesmo modo que os matemáticos o fazem” (mencionados em Cebolo, 2006, p.3).

Oliveira (1998) refere que as actividades de investigação se caracterizam por: (a) surgirem de enunciados pouco concisos e estruturados, o que exige que sejam os investigadores (alunos) a definir os seus objectivos; (b) serem tarefas de carácter amplo e divergente, que podem partir de uma questão/situação proposta pelo professor ou pelo aluno; (c) conduzirem o aluno à construção do seu próprio conhecimento.

Por sua vez, Kissane (citado em Fonseca, 1999) caracteriza as investigações matemáticas como sendo a exploração de situações abertas, de um modo pouco estruturado e que incluem:

formulação de problemas, generalização de exemplos, verificação e generalização, registos de observações, exploração de uma questão sistematicamente, identificação de padrões, elaboração e testagem de conjecturas, justificação de generalizações e apresentação dos resultados (p.29).

De forma a ressaltar a importância das actividades de investigação, Kissane aponta quatro razões para que estas sejam contempladas no currículo: (a) são a natureza essencial da actividade matemática, pois o aluno é encaminhado a tratar de situações que não são conhecidas; (b) estimulam a persistência; (c) potenciam uma aprendizagem sobre a natureza Matemática; (d) desenvolvem a motivação para a aprendizagem da Matemática (citado em Fonseca, 1999).

Nesta linha de pensamento encontram-se também as orientações emanadas pelo Currículo Nacional do Ensino Básico, na área de Matemática, que colocam ênfase na resolução de problemas e actividades de investigação (DEB, 2001).

### **2.3.3. As Actividades Investigativas no Currículo**

Na opinião de Cockcroft (citado em Amaral, 2003) a ênfase que hoje é atribuída às actividades de investigação na aprendizagem da Matemática tem como ponto de partida a importância conferida à resolução e formulação de problemas. Assim, desde os anos 80, vários documentos têm sido divulgados como resposta à necessidade de desencadear mudanças significativas no âmbito da educação matemática. Tais documentos definem como linha de trabalho fundamental a resolução de problemas e as investigações, no ensino da Matemática nas várias idades.

Em 1988, a Associação de Professores de Matemática colocava a resolução de problemas no centro do processo de ensino e aprendizagem da matemática, onde a ideia de investigação já estava presente quando se afirmava que “explorar aqui tem exactamente o sentido normal da palavra: entrar em terreno desconhecido, recolher dados, detectar diferenças, (...) ou porventura um sentido ainda mais forte – investigar, procurar encontrar, procurar descobrir” (APM, 1988, p.48).

Mais tarde, no documento *Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da matemática* (APM, 1998) era referido que a renovação do ensino da Matemática passava pela alteração da natureza das tarefas, isto é, na sala de aula deveria valorizar-se a realização de actividades de resolução de problemas e de investigação.

Relativamente ao 1º ciclo, a introdução da resolução de problemas como actividade fundamental na Matemática, foi uma inovação aquando da publicação do Programa ainda em vigor em algumas escolas. Este apresenta a resolução de situações problemáticas como actividade central na área de Matemática, acrescentando que deve estar presente no desenvolvimento de todos os tópicos (DEB, 1998). Por sua vez, o novo Programa de Matemática do Ensino Básico (DGIDC, 2007) encara a resolução de problemas como “uma actividade privilegiada para os alunos consolidarem, ampliarem e aprofundarem o seu conhecimento matemático” (p. 6). Para além disto, refere a Resolução de problemas, o Raciocínio matemático e a Comunicação matemática como capacidades transversais a toda a aprendizagem da Matemática. Não obstante, este documento não descarta a realização de investigação matemática, valorizando a argumentação, momentos de partilha e discussão.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), no que concerne aos Programas de Matemática dos 2º e 3º ciclos, publicados em 1991 e presentemente em vigor, referem que neles surgem algumas referências a tarefas de natureza investigativa. Embora essas referências sejam implícitas é feita, várias vezes, referência à importância da formulação de conjecturas, sendo este um dos aspectos que caracterizam o processo de investigação. Os autores acrescentam que “significativo é também o destaque dado à criação do espírito de

pesquisa (um termo com um significado muito próximo do de “investigação”), bem como o realce dado à argumentação, à discussão, à descoberta e à avaliação” (p.133).

O Programa de Matemática do Ensino Secundário (publicado em 1997) apresenta como finalidade para esta área curricular o desenvolvimento da capacidade de formular e resolver problemas, de comunicar, do espírito crítico, da criatividade, entre outras capacidades (DES, 1997). Por outro lado, relativamente às indicações metodológicas, neste Programa surge uma referência explícita a tarefas de investigação “no estudo das famílias de funções os alunos podem realizar pequenas investigações” (p.20).

Posteriormente, o Currículo Nacional do Ensino Básico (DEB, 2001), relativamente às finalidades da Matemática, explicita dois aspectos: o contacto com métodos fundamentais da ciência, de forma a apreciar o seu valor e natureza e o desenvolvimento da confiança no uso da Matemática, quer para resolver problemas quer para raciocinar e comunicar. Este documento refere também, de forma clara, que a competência matemática se desenvolve “através de uma experiência rica e diversificada” (p.67), o que pressupõe que todos os alunos tenham a possibilidade de vivenciar diferentes tipos de experiências de aprendizagem, entre as quais as actividades de investigação. Assim, a referência explícita às actividades de investigação é feita do seguinte modo:

Numa actividade de investigação, os alunos exploram uma situação aberta, procuram regularidades, fazem e testam conjecturas, argumentam e comunicam oralmente ou por escrito as conclusões. Qualquer tema de matemática pode proporcionar ocasiões para a realização de actividades de natureza investigativa (DEB, 2001, p.67).

Para além dos documentos enunciados, a inclusão da abordagem investigativa nas aulas e nos currículos de Matemática é defendida por diversos autores. Abrantes, Leal e Ponte (citados em Duarte, 2004) referem aspectos diversificados como:

a relação existente entre as actividades de investigação e a natureza da actividade matemática, o modo como estas actividades promovem o envolvimento dos alunos no trabalho que realizam na aula de Matemática, o facto de proporcionarem o envolvimento de alunos com diferentes níveis de competência matemática, o desenvolvimento do raciocínio matemático que lhes está inerente, o seu carácter transversal ao longo do currículo de Matemática e a forma como favorecem a consolidação das aprendizagens mais elementares (p.35).

Embora sejam inúmeras as vantagens apresentadas relativamente ao desenvolvimento de actividades de investigação matemática nas nossas escolas, o Relatório das Provas de Aferição, publicado pelo Ministério da Educação e citado em Amaral (2003), menciona a



existência de um fosso entre o currículo enunciado e o currículo implementado. Neste sentido, torna-se crucial reconhecer o porquê desse fosso, quando vários documentos enfatizam, implícita ou explicitamente, a importância do desenvolvimento de actividades de investigação nas aulas de Matemática.

#### **2.3.4. Actividades de Investigação e Resolução de Problemas**

A relevância que hoje é atribuída às investigações no ensino da Matemática teve como ponto de partida a importância dada à resolução e formulação de problemas.

Neste sentido, torna-se importante compreender o significado de problema e de investigação matemática, identificando-se as principais diferenças entre os dois e as suas potencialidades no ensino da Matemática.

As actividades de investigação apresentam elementos semelhantes e distintos comparativamente com a resolução de problemas (Cebolo, Alves e Cruz, 2006). Porém, Ernest (1996) refere que há determinadas características que permitem esclarecer o que se entende por actividades de investigação. Deste modo, começa por estabelecer comparação com base na formulação de questões. Enquanto na resolução de problemas as questões estão formuladas à partida, nas investigações o primeiro passo é a formulação das próprias questões. Outra diferença apontada assenta nos objectivos. Na resolução de problemas valoriza-se o resultado, o objectivo é encontrar um caminho que possibilite atingir um ponto não imediatamente acessível sendo, portanto, um processo convergente. Nas investigações utilizam-se processos divergentes, dado que o objectivo é a própria exploração, isto é, “a ênfase está em explorar uma questão matemática em todas as suas direcções. O objectivo é a viagem e não o destino” (Pirrie, citado em Ernest, 1996, p.30).

O mesmo autor considera que, nas duas abordagens pedagógicas à matemática acima referidas, são igualmente distintos o papel do professor e o papel do aluno. Na resolução de problemas é o professor quem coloca o problema e o aluno tem o papel de encontrar um caminho para chegar à solução. Nas investigações o professor pode escolher uma situação de partida ou, até mesmo, aprovar a escolha do aluno, mas é este último que, partindo de uma situação pouco definida, formula as questões e define os seus próprios problemas dentro dessa situação. Nesta linha de pensamento, as relações de poder que se estabelecem ao nível da turma têm de apresentar diferentes características. Embora na resolução de problemas o aluno tenha alguma criatividade, na resolução de uma nova situação, o

professor consegue controlar tanto o conteúdo como o modo de ensinar. Por sua vez, esta situação pode ser alterada nas investigações, dado que cabe ao aluno o papel de formular as questões a investigar.

A tentativa de definir o que é uma investigação a partir das diferenças e semelhanças com a resolução de problemas permite clarificar vários aspectos, mas não nos conduz a um conceito claro e partilhado por vários autores. Assim, Brocardo (2001) dá-nos a conhecer a opinião de vários autores, referindo que Ernest e Frobisher concordam nos seguintes aspectos: na situação de partida e de chegada e na divergência do processo. Por sua vez, na definição de investigação, Pehkonen considera apenas o ponto de partida e o ponto de chegada, o que leva a crer que o autor “parece sobretudo estar a pensar nas investigações como as tarefas escritas ou orais que são propostas ao aluno” (citado em Brocardo, 2001, p.97).

### **2.3.5. Dinâmica de uma Aula com Investigações Matemáticas**

Uma aula em que se realizam investigações matemáticas apresenta uma dinâmica muito própria, uma vez que estas actividades se caracterizam por enunciados e objectivos pouco precisos, em que é o aluno quem elabora as questões e define os objectivos, explorando situações que desconhece (Fonseca, 2000; Cebolo, 2006). Portanto, numa aula com investigações é importante considerar as fases em que estas se desenvolvem, bem como o papel que o professor e os alunos devem assumir.

De acordo com Christiansen e Walter (1986), de um modo geral, a realização de investigações compreende três fases: a apresentação/introdução da tarefa, o desenvolvimento do trabalho e a discussão/reflexão final.

Na opinião de Porfírio e Oliveira (1999), anteriormente à apresentação da tarefa de investigação, isto é, aquando da sua concepção o professor deve reflectir sobre vários aspectos: o que vai considerar como prioridades curriculares, o grau de estruturação da própria tarefa, o tipo de linguagem utilizada, a forma de a apresentar aos alunos e o tipo de organização que melhor se adequa ao seu desenrolar. Relativamente ao grau de estruturação da tarefa é importante ter em consideração a experiência dos alunos, pois uma tarefa mais estruturada pode ser a mais indicada para alunos que possuem pouca experiência de investigação. No que concerne à linguagem utilizada na redacção dos enunciados das tarefas de investigação, os autores alertam para o facto de que expressões

com o mesmo significado, mas em que os termos diferem ligeiramente, não dão aos alunos o mesmo tipo de indicações sobre a natureza da actividade a desenvolver. Assim, embora seja importante reflectir sobre o tipo de linguagem que se utiliza no enunciado, a principal preocupação reside na tentativa de que essa linguagem seja compreensível pelos alunos que irão explorar a tarefa. Os autores acrescentam, ainda, que as tarefas de investigação devem dar indicações de que os alunos devem descobrir argumentos para validar as suas conjecturas, portanto, o enunciado deverá vincar a necessidade da prova. Para além disto, o professor deve também explorar e investigar ele próprio o trabalho de investigação que propõe, antes de o implementar com os seus alunos.

A primeira fase - apresentação da tarefa - embora não corresponda a uma actividade investigativa por parte dos alunos, pode ser determinante para que esta seja rica e produtiva (Tudella *et al*, 1999). Deste modo, sendo a apresentação da tarefa realizada pelo professor este tem de garantir que todos os alunos entendem o sentido da tarefa que lhes é proposta e o que se espera deles no decorrer da actividade. O cuidado atribuído a esta fase, que é considerada crítica, adquire especial relevo quando os alunos estão pouco ou nada familiarizados com as investigações sendo conveniente, neste caso, proceder à sua explicitação. No entanto, a introdução não deve ser demasiado pormenorizada, relativamente ao que é para fazer, pois poderá condicionar a realização da própria investigação pelos alunos ou, até mesmo, os alunos podem perder o interesse pela tarefa (Ponte, Brocardo e Oliveira, 2003).

A apresentação da tarefa poderá ser realizada oralmente e por escrito – distribui-se o enunciado e faz-se uma apresentação oral, de forma a clarificar a tarefa, ou então faz-se somente uma leitura da tarefa em grande grupo. A tarefa poderá também ser apresentada apenas por escrito, não havendo uma discussão inicial do seu enunciado, ou apenas oralmente, isto é, a tarefa é apresentada sem qualquer suporte escrito (Tudella *et al*, 1999; Fonseca, 2000; Cebolo, 2006).

Depois de assegurada a compreensão dos alunos, acerca da actividade que se irá realizar, tem lugar a fase seguinte - o desenvolvimento da investigação. Nesta fase pretende-se que os alunos assumam uma atitude investigativa e que o professor oriente a actividade, direccionando a aula para o trabalho dos alunos (Fonseca, 2000; Cebolo, 2006).

Durante o desenvolvimento do trabalho é natural que o professor seja bastante solicitado, principalmente quando se trata de alunos que não estão habituados a trabalhar com investigações matemáticas. Assim, o professor deve estar disponível para as solicitações dos alunos podendo dar uma sugestão, fazer uma observação ou colocar uma

nova questão (Ridgway, citado em Fonseca, 2000). Tanto Ernest (1996) como o NCTM (1994) salientam que este deve assumir uma atitude questionadora e desafiadora, no sentido de não dar respostas que funcionem como pistas que possam auxiliar os alunos na sua investigação, mas deve responder às questões colocadas pelos alunos com outras questões, encaminhando-os para a análise e reflexão do seu próprio trabalho. Ridgway acrescenta que “se o professor estiver sempre a dizer aos alunos o que devem fazer, eles não aprenderão a desenvolver determinadas estratégias” (citado em Fonseca, 2000, p.18). Na opinião de Cebolo (2006), durante esta fase, o professor deve também “proporcionar informação útil aos alunos, ajudando-os a recordar ou a compreender conceitos matemáticos e formas de representação importantes” (p.7).

Importa referir que, durante o desenvolvimento da investigação, é esperado que os alunos utilizem vários processos que caracterizam a actividade investigativa em Matemática. Assim, devem começar por compreender a tarefa proposta, organizar os dados, formular questões e conjecturas, testar e reformular as conjecturas, podendo chegar à demonstração (Ponte, Brocardo e Oliveira, 2003; Cebolo, 2006). Para que o trabalho realizado pelos alunos possa ser produtivo é necessário que eles se sintam à vontade e que tenham o tempo adequado para o desenvolver. Para além disto, os alunos precisam sentir que as suas ideias são valorizadas (Ponte, Brocardo e Oliveira, 2003).

A fase de discussão/reflexão é fundamental para que a actividade investigativa tenha o seu sentido e não se perca o valor do que foi feito nas fases anteriores. Esta fase visa a apresentação dos principais resultados e dos diferentes processos desenvolvidos, o confronto de opiniões, a validação, por toda a turma, das conjecturas que cada aluno ou grupo considerou verificadas. Aqui, o professor tem o papel de orientar e moderar a discussão e estimular a comunicação (Tudella *et al*, 1999). Estes autores aconselham a que a discussão final tenha lugar no próprio dia em que a actividade investigativa é realizada, pois consideram que, se isso não acontecer, os alunos podem esquecer-se de questões relacionadas com o trabalho e corre-se o risco de se perder uma boa parte da sua riqueza.

Para que o professor possa fazer uma melhor gestão da fase de discussão/reflexão, de forma a que todos os alunos participem no trabalho e vejam valorizados os seus contributos, o professor deverá conhecer convenientemente os trabalhos realizados pelos alunos, de modo a saber valorizar tanto os mais interessantes como os mais modestos (Ponte *et al*, mencionados em Cebolo, 2006).

### 2.3.6. A Avaliação das Actividades de Investigação

As investigações matemáticas, tal como as outras actividades de aprendizagem, devem ser alvo de processos avaliativos, de modo a evitar a sua describilização, pois, como refere Oliveira (2002, p.221), “os alunos, tal como os professores, têm uma forte tendência para minorizar trabalhos escolares que não são formalmente avaliados”. Na perspectiva de Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) essa avaliação permitirá ao professor saber se os alunos estão a progredir de acordo com as suas expectativas, ou se é preciso repensar a sua acção nesse campo. Por outro lado, permitirá ao aluno saber como é que o seu desempenho é visto pelo professor e se há aspectos aos quais é necessário dar mais atenção.

As investigações reportam-se a diversos objectivos do currículo. Assim, através das investigações matemáticas pretende-se que o aluno seja capaz de usar conhecimentos matemáticos na resolução da tarefa proposta, que desenvolva a capacidade de realizar investigações e pretende-se, ainda, promover atitudes, como a persistência e o gosto pelo trabalho investigativo (Ponte, Brocardo e Oliveira, 2003).

Para avaliar os objectivos referidos torna-se necessário o recurso a uma variedade de modos e instrumentos de avaliação, adequados a esta metodologia de trabalho.

De acordo com Varandas (2000) um primeiro procedimento avaliativo de que os professores têm feito uso tem sido a observação informal.

A observação informal dos alunos no decorrer da implementação da tarefa, bem como na apresentação das suas conclusões à turma, tem sido o modo mais comum de avaliação dos alunos quando estes realizam trabalho de cunho investigativo (p.31).

Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) consideram que a observação informal é uma forma natural de avaliar os alunos quando eles trabalham numa investigação. Através desta forma de avaliação, o professor tem a oportunidade de recolher muita informação sobre as atitudes dos alunos, sobre o modo como eles mobilizam os conhecimentos matemáticos (formais e informais) e sobre o seu entendimento do que é uma investigação. Os autores acrescentam, ainda, que “a observação dos alunos enquanto trabalham é um processo de avaliação fundamental para dar mais informação ao professor” (p.125). Esta observação pode incidir num ou outro aluno que precisa de uma atenção individual ou na actividade de um ou mais grupos. Geralmente, essa observação é realizada de modo selectivo, observando cada grupo ou cada aluno de uma só vez.

Durante este processo de avaliação o professor não tem, necessariamente, de assumir uma atitude passiva. Ele pode fazer perguntas aos alunos, que lhe permitam perceber

melhor o modo como eles estão a realizar a tarefa e a forma como pensam (Ponte, Brocardo e Oliveira, 2003).

Outra forma de avaliação apresentada por diversos autores é o relatório da investigação. Este refere-se a uma produção escrita, realizada individualmente ou em grupo, através da qual se procura apresentar o trabalho desenvolvido.

Santos, Brocardo, Pires e Rosendo (citados por Rocha, 2003) referem que muitos professores solicitam, frequentemente, aos alunos a elaboração de um relatório escrito como produto final da investigação realizada, constituindo este um importante momento de reflexão por parte dos alunos.

Na opinião de Rocha (2003) os relatórios constituem também um importante instrumento de avaliação do desempenho matemático dos alunos, uma vez que possibilitam ao professor um melhor acompanhamento da sua evolução. Contudo, atendendo a que os produtos obtidos da actividade investigativa não permitem, por si só, uma compreensão da actividade desenvolvida é fundamental que os relatórios não contemplem somente as conclusões.

Para além de pequenas justificações e das conclusões que os alunos tiraram da realização da tarefa de investigação, estes devem ser convidados a referir nos relatórios os processos/procedimentos que usaram para chegar às conclusões (Ponte, Brocardo e Oliveira, 2003). Deste modo, para se conseguir uma avaliação mais completa dos trabalhos investigativos, nestes relatórios:

pretende-se que os alunos refiram não apenas as conclusões obtidas da investigação, mas também os procedimentos utilizados para chegar às conclusões apresentadas – questões levantadas acerca da situação proposta; conjecturas provadas; processos de validação das conjecturas; bibliografia utilizada; etc (Varandas, 2000, p.32).

Relativamente aos relatórios, Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) ressaltam a necessidade de o professor dialogar com os alunos ao longo do processo da sua elaboração, no sentido de clarificar o que é pretendido e dando-lhes hipótese de colocarem as suas questões. Chamam, também, a atenção para o problema de como avaliar estes relatórios, lembrando que a avaliação pode ser traduzida numa escala quantitativa ou qualitativa. Porém, consideram que o importante não é a escala utilizada, mas os critérios usados nessa avaliação, bem como os comentários que o professor deve escrever para os alunos.

Oliveira (2002) sugere que, para além dos relatórios, sejam utilizados também portefólios. Assim, de modo a responsabilizar os alunos, num processo conducente à sua progressiva autonomia, o professor poderá promover a elaboração de um portefólio, por

cada aluno ou grupo. A utilização do portefólio faz mais sentido quando os alunos são envolvidos a longo prazo em investigações matemáticas. Nele podem constar as melhores investigações realizadas, durante o ano lectivo, no ponto de vista dos alunos. Estes documentos podem eles mesmos ser objecto de avaliação.

Outra possibilidade de avaliação do trabalho dos alunos é apresentada pelo mesmo autor e segue a lógica dos «testes em duas fases», isto é, a investigação pode, igualmente, ser realizada em duas fases.

No final da primeira fase, os alunos, em conjunto com o professor, identificariam as mais-valias e as menos-valias do seu próprio trabalho investigativo, devendo esta capacidade de auto-análise dos alunos ser um dos objectivos das investigações. Na segunda fase, os alunos teriam a chance de melhorar os aspectos mais frágeis do seu trabalho (Oliveira, 2002, p.225).

As apresentações orais são referidas por Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) como outra forma de avaliação, as quais possibilitam a avaliação de uma diversidade de objectivos incluindo “as atitudes e valores, a compreensão do processo de investigação, a pertinência das estratégias, os processos de raciocínio, o uso de conceitos, as competências de cálculo e a capacidade de comunicação oral” (p.125).

Visto que as apresentações orais têm lugar quando determinada investigação chega ao fim e os alunos dão a conhecer ao professor e aos colegas o trabalho realizado, estas podem ser entendidas como constituindo uma situação de avaliação, mas também de aprendizagem, favorecendo o desenvolvimento da capacidade de comunicação e de argumentação (Ponte, Brocardo e Oliveira, 2003).

Esta parte concludente do trabalho pode ser realizada individualmente ou em grupo. No final, o professor deve fazer uma apreciação do desempenho dos alunos, salientando os seus progressos e dando sugestões concretas sobre aspectos que eles possam melhorar (Ponte, Brocardo e Oliveira, 2003).

A esta forma de avaliação são atribuídas duas limitações. A primeira, apresentada por Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), diz respeito ao tempo que consomem. Os autores consideram que, se todos os alunos forem chamados a fazer as suas apresentações, corre-se o risco destas gastarem muito tempo e se tornarem cansativas. A segunda, apresentada por Oliveira (2002), refere-se à monotonia/repetição que pode caracterizar as apresentações dos alunos. Isto pode acontecer porque os últimos alunos/grupos que apresentam as suas investigações sentem dificuldade em acrescentar algo de novo, algo que seja relevante. Este óbice pode ser atenuado se o professor articular as apresentações com uma certa

dinamização da discussão, por exemplo, colocando questões adicionais que possam aprofundar o trabalho.

Embora a avaliação do trabalho investigativo possa conter elementos dilemáticos, estes são característicos deste tipo de trabalho. Através do seu estudo, Varandas (2000, p.227) experimentou vários modos de avaliação e concluiu que “a diversidade de formas de avaliação foi o aspecto mais marcante para as professoras e, na sua perspectiva, todas elas se revelaram úteis para obter informação sobre a aprendizagem e o progresso dos alunos”.



## **CAPÍTULO 3 – METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO**

Neste capítulo justificam-se as opções metodológicas do estudo. Desta forma, articula-se a sua finalidade – compreender um fenómeno educativo de características únicas estudando-o, nas condições reais em que ocorreu, em toda a sua complexidade – com a opção de uma abordagem investigativa de natureza qualitativa e a utilização de uma metodologia de estudo de caso.

Apresentam-se e justificam-se, também, os procedimentos de carácter metodológico. A recolha e a análise dos dados reflectem a preocupação de considerar a globalidade do contexto, apesar da natural incidência sobre as interacções entre os alunos e o seu desempenho no decurso de actividades de investigação, sustentadas por modelos e princípios de aprendizagem cooperativa.

### **3.1. OPÇÕES METODOLÓGICAS**

A escolha da metodologia a adoptar numa determinada investigação depende dos objectivos do estudo e das questões que se procura responder, bem como da natureza do fenómeno estudado e das condições em que esse fenómeno decorre (Abrantes, 1994).

Bodgan e Biklen (1994) referem que a investigação qualitativa apresenta as seguintes características: (a) a fonte directa de dados é o ambiente natural e o investigador é o instrumento principal; (b) é descritiva, pois os dados são recolhidos em forma de palavras ou imagens e não de números; (c) o interesse é centrado, sobretudo, nos processos e não, propriamente, nos resultados alcançados; (d) os dados são analisados de forma indutiva, isso é, os investigadores vão construindo abstracções conforme os dados que recolhem se vão agrupando. Os autores acrescentam, também, que é dada especial relevância às perspectivas dos participantes para “fazer luz sobre a dinâmica interna das situações” (p.51). A este respeito, referem, ainda, que nem todos os estudos têm necessariamente de patentear todas estas características para serem considerados qualitativos.

Desta forma, tendo em atenção as características enunciadas, é possível afirmar que elas se adequam ao presente estudo, pois:

– Em primeiro lugar, torna-se necessário recolher dados em ambiente natural (sala de aula), já que o contexto em que os alunos trabalham é determinante para o desenvolvimento das suas interacções.

– Em segundo lugar, é necessário recolher dados ricos em pormenores descritivos, de forma a conseguir-se uma visão mais sustentada da realidade.

– Em terceiro lugar, não interessa somente conhecer os resultados das tarefas de investigação matemática propostas aos alunos, mas, principalmente, saber como interagem no decorrer das mesmas, que aspectos influenciam as suas interacções e desempenhos. Pretende-se, então, valorizar os processos em detrimento dos produtos.

– Por fim, o ponto de vista dos participantes assume especial relevo, de modo a compreender-se a forma como vivem as suas experiências e o significado que lhes atribuem.

Yin (1989) propõe a análise de três aspectos que devem ser considerados aquando da escolha da metodologia de investigação: (1) o tipo de questões do estudo; (2) o grau de controlo que o investigador tem sobre as variáveis ou acontecimentos; (3) o foco situar-se, ou não, em acontecimentos que ocorrem no momento do estudo. O estudo de caso, segundo este autor, é a estratégia adequada quando se reúnem várias características relativas a cada um dos aspectos anteriores. Este método é adequado para responder às questões “como” e “porquê”, pois são questões explicativas que tratam de relações operacionais que ocorrem ao longo do tempo. Por outro lado, não pressupõe o controlo de variáveis e acontecimentos e o foco do estudo diz respeito a acontecimentos que ocorrem no momento do estudo.

A análise dos três aspectos referidos clarifica sobre a pertinência de se optar por uma metodologia de estudo de caso, relativamente à presente investigação. Por um lado, o problema do estudo focou-se na compreensão da influência de uma metodologia de trabalho cooperativo sobre as interacções e desempenhos dos alunos em tarefas de investigação matemática. Por outro lado, o estudo incidiu em fenómenos que foram sendo observados e analisados à medida que a investigação decorria. Para além disto, pretendeu-se descrever e interpretar um fenómeno na sua globalidade e não incidir na análise de um conjunto de variáveis que se pretende controlar.

Merriam (1988) enuncia outras propriedades que devem influenciar a decisão quando se opta por um estudo de caso qualitativo. Na sua opinião, este é especialmente indicado quando o objectivo é descrever e interpretar um fenómeno contemporâneo na sua

globalidade, e não estabelecer relações de causa efeito ou quantificar certas variáveis numa população. Por sua vez, Patton (citado em Abrantes, 1994) refere que um *caso* pode ser uma pessoa, um grupo de pessoas, um acontecimento mas, independentemente da unidade de análise, um estudo de caso qualitativo procura descrevê-la com pormenor, em contexto e de forma holística.

Mais uma vez, tendo em conta os objectivos deste estudo, se percebe a opção por uma metodologia de estudo de caso. De facto, uma das preocupações do estudo foi a de obter um produto final que corresponda a uma descrição rica do objecto do estudo. Simultaneamente, quis-se interpretar esta descrição de modo a procurar explicar certos fenómenos que se relacionassem com as interações e desempenho dos alunos no decurso da experiência de aprendizagem que lhes foi proporcionada.

## **3.2. PROCEDIMENTOS DE CARÁCTER METODOLÓGICO**

### **3.2.1. O Modelo de Aprendizagem Cooperativa Adoptado**

Como foi visto no capítulo anterior, inúmeros autores têm referenciado nas suas obras diversos modelos de aprendizagem cooperativa. Atendendo às exigências de cada um desses modelos e às características dos sujeitos, optou-se por seleccionar para este estudo o modelo *Learning Together* (aprender juntos), citado em Díaz-Aguado (1996).

A selecção deste modelo deve-se ao facto de se considerar ser aquele que implica maior interdependência entre os elementos do grupo e, conseqüentemente, exigir maior cooperação entre eles. De acordo com o modelo de aprendizagem cooperativa adoptado, a actividade é delineada de forma a haver interdependência entre os elementos do grupo (através da distribuição de um único material por grupo ou com a divisão de actividades que, posteriormente, se integram), esperando-se um único produto do grupo.

Sendo um modelo que se caracteriza pela formação de grupos heterogéneos, desde o início do ano lectivo a professora/investigadora dedicou-se, de forma atenta, à observação informal dos alunos no desenrolar das aulas de Matemática. Possuindo-se um conhecimento ainda um pouco ténue sobre cada um deles, no mês de Outubro, formaram-se grupos de trabalho de forma a iniciar o contacto dos alunos com esta nova metodologia

de trabalho, assim como com actividades matemáticas de carácter investigativo. Havendo vinte e três alunos na turma formaram-se seis grupos de trabalho: cinco grupos de quatro alunos e um grupo de três alunos. Com o decorrer do tempo e, conseqüentemente, com um conhecimento mais pormenorizado dos alunos procederam-se a algumas alterações relativas à constituição dos mesmos.

Aquando da formação dos grupos, os seus elementos escolheram um nome que os identificasse como grupo (Amigos, Descobridores, Detectives, Estudantes, Investigadores e Matemáticos) e negociaram-se algumas regras de trabalho necessárias, isto é, procurou-se estabelecer um contrato didáctico com os alunos. Estas regras foram negociadas oralmente e transcritas para o papel, pela professora, visto os alunos ainda não saberem escrever (anexo 1).

Outro procedimento abraçado foi a distribuição de funções e sua rotatividade pelos elementos dos grupos. Assim, foram definidas quatro funções distintas: porta-voz (solicitava o auxílio da professora quando necessário e, na fase de discussão/reflexão, apresentava os trabalhos do grupo), secretário (responsável pela realização dos registos de cada tarefa), distribuidor de materiais (distribuía os materiais pelos elementos do grupo e era responsável pela sua organização) e ajudante (apoiava os colegas do grupo em tudo o que fosse necessário). Como foi referido, estas funções eram rotativas o que significa que em cada tarefa realizada os alunos assumiam diferentes funções. Uma vez que da presente investigação constam oito tarefas, cada elemento de um grupo desempenhou, duas vezes, as funções acima referidas, tal como consta nos crachás do grupo alvo do estudo (anexo 2).

Díaz-Aguado (1996) refere que, de acordo com o modelo de aprendizagem cooperativa seleccionado, no final de cada actividade os alunos auto-avaliam-se, isto é, reflectem se trabalharam bem como grupo. Desta forma, no final de cada tarefa de investigação procedeu-se a uma avaliação individual e grupal (anexo 3), sendo que a última era dependente da primeira.

### **3.2.2. A Escolha dos Casos**

O propósito desta investigação está vocacionado para o estudo das interacções e desempenho dos alunos perante a aplicação de uma metodologia baseada em tarefas de investigação, nas quais os alunos se encontram organizados em grupos de trabalho cooperativo. Assim, atendendo a que as interacções e desempenhos dos sujeitos são

influenciados pelos contextos e situações em que ocorrem (César, 2000a), considerou-se fundamental a realização deste estudo em contexto de sala de aula.

A escolha da turma não obedeceu a nenhum critério que tivesse sido estabelecido como condição prévia para nela poder ser desenvolvido este projecto. A investigadora, sendo professora do 1º ciclo, no ano lectivo 2007/2008 esteve a leccionar na Escola E.B.1 Bairro Primeiro de Maio (Arcozelo - Barcelos), numa turma do 1º ano de escolaridade, constituída por vinte e três alunos, quinze raparigas e oito rapazes. Portanto, foi nesta turma que desenvolveu o presente projecto, desempenhando, simultaneamente, a função de professora e investigadora.

O número de casos considerado importante para o estudo, uma vez que não faz sentido usar uma lógica de amostragem, é uma questão que deve ser pensada em termos do número de replicações teóricas e descritivas que o investigador gostaria de ter (Yin, 1989). Assim, tendo em consideração o tempo de que se dispunha para realizar o estudo e as suas implicações ao nível da recolha e análise de dados, decidiu-se estudar apenas um grupo de alunos, apostando-se, desta forma, num equilíbrio entre o número de casos a estudar e a profundidade que se pretendia atingir no estudo. Porém, importa referir que todos os alunos da turma realizaram, simultaneamente, as tarefas de investigação propostas.

O grupo estudo de caso (grupo *Detectives*) é constituído por quatro alunos (dois rapazes e duas raparigas), com seis anos de idade. Para além da heterogeneidade relativa ao género, procurou-se que o grupo fosse heterogéneo em termos de aprendizagens/competências matemáticas, atitudes/comportamentos, capacidade de comunicação e ritmo de trabalho.

### **3.2.3. Delineamento do Estudo**

Este estudo promoveu o contacto dos alunos com investigações matemáticas, num ambiente assente no trabalho cooperativo. Por serem alunos do 1º ano de escolaridade, sem hábitos de trabalho, não familiarizados com as tarefas propostas e com o ambiente de aprendizagem gerado pela metodologia aplicada, considerou-se importante dividir o estudo em duas fases: a primeira fase, de preparação, e a segunda fase, de recolha de dados.

A fase de preparação teve lugar nos dois primeiros períodos lectivos, precisamente, entre os meses de Outubro de 2007 e Abril de 2008. Este período de tempo foi absolutamente necessário para o contacto e a adaptação dos alunos a estas metodologias de

trabalho, na sala de aula. Para além disto, possibilitou: (a) o conhecimento mais pormenorizado dos alunos, por parte da professora/investigadora, de modo a formar grupos heterogéneos; (b) a pesquisa de tarefas de investigação adequadas às suas características; (c) o estabelecimento de um contrato didáctico necessário a esta forma de trabalho; (d) e, ainda, que os alunos dessem os “primeiros passos” na escrita, podendo assim recolher produções escritas realizadas pelos grupos, nas quais estes apresentavam o trabalho desenvolvido (procedimentos utilizados e resultados das investigações).

Nesta fase, a professora/investigadora começou por realizar uma observação informal dos grupos, constituídos inicialmente, para depois proceder aos reajustes necessários, de forma a obter os grupos que se iriam manter durante todo o processo de recolha de dados. Esta observação foi importante para a selecção do grupo que iria ser objecto do estudo. Consolidados os grupos, procurou-se incentivar o diálogo e as interacções entre os alunos de forma a desenvolver as suas capacidades de comunicação, de argumentação de ideias e raciocínios matemáticos.

Foi, também, durante esta fase que a investigadora comunicou aos encarregados de educação e ao Conselho Executivo do Agrupamento a sua intenção de realizar este estudo e obteve, de ambas as partes, as necessárias autorizações para prosseguir com a recolha de dados. Posto isto, introduziu-se em algumas aulas gravadores e uma câmara de filmar, de forma a evitar constrangimentos na fase seguinte.

A segunda fase, de recolha de dados, decorreu entre os meses de Maio e Junho de 2008, período de tempo durante o qual foram realizadas as oito tarefas de investigação que constituem o foco de análise deste estudo. Esta fase foi complementada com a utilização de vários métodos de recolha de dados, que serão descritos posteriormente.

Na tabela 1 sintetizam-se, cronologicamente, as duas etapas desenvolvidas ao longo do estudo.

*Tabela 1 - Caracterização das fases em que se desenvolveu o estudo*

| FASES DO ESTUDO               | ACTIVIDADES DESENVOLVIDAS   | PARTICIPANTES   | CALENDARIZAÇÃO                  |
|-------------------------------|---|-----------------|---------------------------------|
| - FASE 1 - Fase de preparação | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Introdução ao método de aprendizagem cooperativa, com estabelecimento de regras de trabalho.</li> <li>• Formação dos grupos.</li> <li>• Realização, em grupos, de tarefas investigativas.</li> <li>• Introdução de gravadores e</li> </ul> | Todos os grupos | Outubro de 2007 a Abril de 2008 |

|  |   |  |                      |
|--|---|--|----------------------|
|  | câmara de filmar em algumas dessas actividades.<br>• Resposta a um questionário.  |  |                      |
| - FASE 2 -<br>Fase de recolha de dados | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Realização, em grupos, das oito tarefas de investigação, que constam deste estudo.</li> <li>• Observação, gravação áudio e vídeo e recolha de documentos diversos referentes a essas tarefas.</li> <li>• Entrevista aos elementos do grupo em estudo.</li> </ul> | <p>Todos os grupos</p> <p>O grupo objecto de estudo e os restantes grupos</p> <p>O grupo objecto de estudo</p> | Maio e Junho de 2008 |

### 3.2.4. Métodos de Recolha de Dados

Na opinião de Yin (1989), os estudos de caso não se devem limitar a uma única fonte de evidência, sendo desejável dispor de um leque alargado de fontes de informação, de modo a garantir uma triangulação que possibilite produzir um estudo tão completo e equilibrado quanto possível. Assim, no presente estudo utilizou-se uma variedade de métodos de recolha de dados, que poderão ser agrupados em quatro categorias principais: observação (participante), gravações áudio e vídeo realizadas nas aulas, documentos e entrevistas. Estes métodos são caracterizados, de forma sucinta, na tabela 2, fazendo-se, posteriormente, uma descrição mais pormenorizada de cada um dos métodos e instrumentos utilizados, no sentido de clarificar o objectivo de cada um deles.

Tabela 2 – Métodos de recolha de dados e sua descrição

| MÉTODOS                 | DESCRIÇÃO   |
|-------------------------|---|
| Observação participante | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Ocorreu em todas as fases do estudo.</li> </ul>  |
| Gravações áudio e vídeo | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Em alguns momentos que antecederam a recolha de dados, de forma a familiarizar os alunos com estes instrumentos.</li> <li>• Em todas as aulas que se realizaram as tarefas de investigação que constam deste estudo (oito tarefas).</li> <li>• Foi apenas utilizada uma câmara, orientada para o grupo (com o objectivo de obter informação mais detalhada sobre o grupo objecto de estudo). Os restantes grupos apenas dispunham de um gravador.</li> <li>• No momento da discussão a câmara era orientada para o quadro (onde os porta-vozes de cada grupo apresentavam os procedimentos/resultados da investigação). A câmara permitia, também, captar as intervenções (vozes) dos outros alunos da turma durante a discussão.</li> </ul> |

|             |   |
|-------------|---|
| Documentos  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Documentos produzidos pelos alunos: folhas de registo referentes às tarefas de investigação propostas.</li> <li>• Questionário aplicado a todos os alunos no início do 3º período lectivo: após dois períodos de aulas em que vivenciaram estas formas de trabalho (trabalho cooperativo e investigativo), mas anteriormente à realização das tarefas investigativas presentes neste estudo.</li> <li>• Diários de aula produzidos pela professora/investigadora, no final de cada uma das aulas em que se realizaram as oito investigações.</li> <li>• Grelhas de registo, preenchidas no final de cada aula, relativamente aos comportamentos/atitudes dos alunos que constituem o grupo em estudo.</li> </ul> |
| Entrevistas | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Semi-estruturadas: <ul style="list-style-type: none"> <li>– realizadas no final do estudo aos alunos que constituíam o grupo em estudo, com o objectivo de recolher as suas perspectivas relativamente ao trabalho desenvolvido;</li> <li>– registadas em suporte áudio e vídeo;</li> <li>– transcritas integralmente.</li> </ul> </li> </ul>  |

### Observação participante

A observação constitui, para a investigação, uma importante ferramenta de trabalho que permite obter informação bastante diferenciada daquela que, normalmente, é obtida através de outras técnicas.

Segundo Ludke e André (1986), a observação ocupa um lugar privilegiado nas abordagens qualitativas. Usada como principal método de recolha de dados, ou associada a outras técnicas, possibilita um contacto pessoal e estreito do investigador com o fenómeno a investigar.

Há vários graus de observação, desde a observação não participante à participante. Jorgensen (citado em Segurado, 1997) considera que a observação participante é a mais adequada para estudar quase todos os aspectos da existência humana. Segundo Yin (1989) na observação participante o investigador não é meramente um observador passivo, mas antes desempenha um papel na situação em estudo.

Cohen e Manion (1994) referem que as técnicas de observação participante apresentam as seguintes vantagens: (1) os estudos por observação são superiores a experiências e entrevistas quando os dados são colectados sobre um comportamento não verbal; (2) nos estudos de observação, o investigador consegue discernir um comportamento habitual conforme este se verifica e é capaz de tomar notas apropriadas acerca das características mais importantes; (3) dado que a observação tem lugar durante um período mais alargado de tempo permite ao observador estabelecer uma relação informal e íntima com aqueles que está a observar, normalmente, em ambientes mais



naturais do que aqueles em que se desenvolvem experiências e entrevistas; (4) estas observações são menos reactivas do que outros métodos de recolha de dados.

No presente estudo privilegiou-se a observação participante, realizada em contexto natural (sala de aula), uma vez que determinado tipo de informação (como o desempenho dos alunos nas tarefas e as atitudes manifestadas durante o processo de ensino e aprendizagem) é mais facilmente obtido mediante o exame directo do observador. Para além disto, esta forma de observação permite compreender o modo como os alunos abordam e se envolvem em tarefas de investigação, bem como o modo como interagem no decurso dessas actividades, assentes numa perspectiva de trabalho cooperativo.

Ao privilegiar-se a observação participante o principal instrumento de recolha de dados foi a investigadora, neste caso, também professora da turma.

Inicialmente, ou seja, na fase 1 (fase de preparação) a observação incidiu, de um modo geral, no trabalho desenvolvido pelos vários grupos e, posteriormente, na fase 2 (fase de recolha de dados), foi mais centrada no grupo objecto de estudo, estando a professora/investigadora sempre disponível para apoiar os restantes grupos durante a realização das tarefas (esclarecer dúvidas, orientar, conhecer o seu trabalho).

Para registar os dados da observação realizaram-se anotações escritas: diários de aula e grelhas de registo de comportamentos observáveis. Uma vez que a professora é também investigadora tornou-se difícil, no momento da observação, proceder ao registo dos comportamentos e comentários dos alunos. Assim, essas anotações foram feitas nos momentos posteriores às aulas.

### **Gravações áudio e vídeo**

Para além da observação directa e participante, foram efectuadas gravações áudio e vídeo das aulas onde se propôs aos alunos actividades de cunho investigativo e estes se encontravam organizados em grupos de trabalho cooperativo.

Abrantes (1994) é da opinião que havendo possibilidades de se gravar as aulas em vídeo a investigação pode ter muito a ganhar, argumentando que esta é uma forma de captar aspectos que, de outra forma, dificilmente seriam registados. Por sua vez, Segurado (1997) refere que, no trabalho realizado na sala de aula, os alunos em interacção uns com os outros formulam conjecturas e validam-nas, apresentam contra-exemplos e argumentos, o que muitas vezes não se reflecte nas suas produções escritas mas que é possível captar com o auxílio de uma câmara.

Assim, procurou-se que a câmara de vídeo e os gravadores fossem percebidos pelos alunos como algo natural dentro da sala de aula. Portanto, previamente à recolha de dados presentes neste estudo, gravaram-se em áudio e vídeo outros momentos em que se realizou trabalho deste tipo. A relação existente entre professora/investigadora e os alunos, que vinha a ser construída ao longo dos dois primeiros períodos lectivos, foi fundamental para que as gravações fossem bem aceites e não causassem constrangimentos significativos aos alunos.

Quanto ao uso da câmara optou-se pela utilização de uma câmara fixa que, durante a fase de recolha de dados, foi focalizada para o grupo em estudo (nos momentos de apresentação e desenvolvimento das tarefas), em virtude de a atenção da professora não poder estar unicamente direccionada para o mesmo, mas ter de acompanhar o trabalho de toda a turma. Para além disso, procurou-se evitar que “os resultados a obter viessem a ser influenciados por quem manipula a câmara” (Machado, 1997, p.64).

Nos momentos de discussão a câmara foi direccionada para o quadro, local onde os porta-vozes dos vários grupos procediam à apresentação dos resultados das tarefas, fazendo também referência aos procedimentos utilizados no decorrer das mesmas.

Todos os registos vídeo foram visionados pela investigadora que, simultaneamente, efectuava a sua transcrição integral.

## **Documentos**

Vários autores mencionam a importância de recolher informação a partir da análise de um conjunto de documentos que possam estar disponíveis. Yin (1989) considera que os documentos são uma fonte de recolha de dados de grande importância nos estudos de caso, uma vez que permitem validar as informações recolhidas por outro tipo de fontes de dados. Por sua vez, Merriam (1988) salienta que as observações e as entrevistas estão muito ligadas ao propósito da investigação que se está a realizar. Em contrapartida, nos documentos, geralmente, isto não se verifica, dado que estes existem ou são produzidos independentemente do propósito da investigação que se está a realizar.

Neste estudo foram recolhidos e, posteriormente, analisados diversos documentos.

– Documentos produzidos pelos alunos, nomeadamente as folhas de registo nas quais apresentaram os procedimentos e resultados de cada uma das investigações.

– Questionários para recolher as opiniões dos alunos relativamente ao trabalho que vinha sendo desenvolvido em algumas aulas de Matemática, precisamente aquelas em que

os alunos realizaram investigações matemáticas, organizados em grupos de trabalho cooperativo. Este questionário foi aplicado a todos os alunos da turma, no início do terceiro período, ou seja, anteriormente à realização das tarefas de investigação a que se refere este estudo (anexo 4).

Os questionários pertencentes aos elementos do grupo estudo de caso foram analisados, questão a questão, resumindo-se as opiniões dos alunos e identificando-se o tipo de justificações que apresentavam.

– Diários de aula, nos quais foram registados os aspectos considerados mais significativos de cada aula. Estes registos foram realizados no final das aulas em que tiveram lugar as diversas tarefas de investigação e basearam-se nas gravações audiovisuais e nas observações, procurando-se, assim, construir um registo mais organizado e completo.

– Grelhas de registo, preenchidas no final de cada aula, relativamente aos comportamentos/atitudes dos alunos em estudo (anexo 5).

Para além dos documentos citados anteriormente, importa referir que, no final de cada tarefa, se procedeu à avaliação individual e grupal, estando a segunda dependente da primeira. Este registo foi efectuado num cartaz que se encontrava afixado na sala de aula e cuja classificação variava entre 1 e 3 pontos, consoante o trabalho e atitudes manifestadas nestas aulas: 1 ponto – trabalhei(amos) pouco, cooperei(amos) poucas vezes; 2 pontos – trabalhei(amos) satisfatoriamente, cooperei(amos) algumas vezes; 3 pontos – trabalhei(amos) bem, cooperei(amos) sempre.

Há, ainda, a salientar que foram tiradas fotografias destas aulas, correspondentes às fases de desenvolvimento e discussão das tarefas de investigação.

## **Entrevistas**

Na opinião de Yin (1989) as entrevistas representam uma fonte essencial de evidência para os estudos de caso, uma vez que, em pesquisa social, estes lidam com actividades de pessoas e grupos. Bogdan e Biklen (1994) referem que a entrevista “é utilizada para recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito, permitindo ao investigador desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretam aspectos do mundo” (p.134).

Tendo-se em consideração o acima citado, neste estudo, a entrevista foi utilizada como forma de complementar a observação, isto é, a investigadora recorreu à entrevista

para obter elementos mais detalhados acerca dos participantes no estudo, nomeadamente sobre o que pensam ou sentem os sujeitos.

Fontana e Frey (1994) distinguem três tipos de entrevistas: estruturadas, semi-estruturadas e não estruturadas. Esta distinção é feita consoante o grau de estruturação e de abertura das questões, ou seja, do grau de controlo que o investigador deseja ter sobre a situação. Assim, as entrevistas estruturadas implicam a definição prévia das questões a colocar, as quais envolvem um conjunto limitado de categorias de resposta, assemelhando-se a questionários. As entrevistas semi-estruturadas e não estruturadas são as mais utilizadas em investigação qualitativa. Nestes dois tipos de entrevistas, para além do entrevistador ter maior margem de manobra, podendo alterar algumas perguntas, o tipo de questões a formular tem um carácter aberto. Isto permite à pessoa entrevistada expressar as suas opiniões nos seus próprios termos e ajuda o entrevistado a entender as percepções e experiências pessoais dos sujeitos.

As entrevistas realizadas nesta investigação (guião no anexo 6) têm um carácter semi-estruturado, em que a entrevistadora/professora procurou explorar e aprofundar as questões, de acordo com as respostas dos alunos entrevistados. Tais entrevistas foram realizadas, no final da fase de recolha de dados, aos quatro alunos que constituíam o grupo foco do estudo, pretendendo-se que fizessem um balanço global do trabalho desenvolvido.

As entrevistas foram gravadas em suporte áudio e vídeo e transcritas, posteriormente, de modo a facilitar a sua análise.

### **3.3. ANÁLISE DOS DADOS**

Neste ponto descreve-se o modo como se procedeu à análise dos dados recolhidos com os diferentes instrumentos utilizados ao longo desta investigação.

Começou-se por se ter em conta as questões do estudo: (1) Que interacções ocorrem quando os alunos trabalham, de acordo com o modelo de aprendizagem cooperativa, em investigações matemáticas? (2) Como se caracteriza o desempenho dos alunos perante tarefas de investigação matemática realizadas em grupos cooperativos?

No presente estudo, a recolha e análise de dados decorreram de forma articulada, isto é, procurou-se seguir as recomendações de Yin (1989) e Merriam (1988) de que, numa investigação qualitativa, estas duas fases devem estar intimamente ligadas. Assim, a par

com a recolha de dados, procedeu-se à análise de materiais que constituíram a substância de dados disponíveis para tentar responder às questões do estudo. Nesta investigação, a análise documental seguirá o modelo proposto por Miles e Huberman (citados em Vale, 2000), que se divide em três fases: redução dos dados, apresentação dos dados e conclusões e verificação.

A primeira fase, redução dos dados, ocorre transversalmente em todo o estudo e refere-se ao processo de seleccionar, simplificar, focar, abstrair, transformar e organizar os dados que constam dos registos escritos, para que se possam retirar conclusões finais, tendo o cuidado de não os descontextualizar. Os dados podem ser reduzidos e transformados, fazendo-se a selecção de todo o material recolhido (através de resumos, parágrafos, frases, números, etc.).

A fase de apresentação dos dados refere-se à reunião de informação organizada e condensada que permitirá retirar conclusões e actuar. Na opinião dos autores, uma boa apresentação dos dados constitui o melhor caminho para validar a análise qualitativa.

A última fase, de conclusões e verificação, consiste na atribuição de significado aos dados, representando um processo de tomada de decisões. Num processo que tanto pode ser rápido, com breves incursões a registos escritos, como elaborado e minucioso, com larga argumentação, ocorre a verificação das conclusões. Os significados que emergem dos dados têm de ser testados pela sua plausibilidade, pela sua consistência e pela sua validade (Miles e Huberman, citados em Vale, 2000).

Finalizado o processo de recolha de dados obteve-se um vasto conjunto de materiais, que incluíam os registos efectuados com base na observação das aulas, os registos efectuados pelos alunos aquando da realização das tarefas de investigação, as transcrições dos registos em áudio e vídeo, as respostas ao questionário e as transcrições das entrevistas realizadas aos quatro elementos do grupo. Estes materiais, que constituíram fontes de informação a ser consideradas neste estudo, necessitavam de ser organizados e analisados, como foi referido anteriormente, para ser possível atribuir-lhes significado e encontrar explicações que respondam às questões do estudo, dilatando, assim, a compreensão da investigadora sobre o fenómeno em estudo.

Tendo presentes as questões do estudo procurou-se estruturar a análise dos dados em torno de duas categorias: uma relacionada com as interacções manifestadas pelos alunos ao longo das tarefas de investigação propostas e a outra relacionada com o seu desempenho/dinâmicas de trabalho.

Numa primeira fase, fez-se a transcrição das gravações áudio e vídeo, seleccionando-se, posteriormente, os momentos mais importantes destas. Realizou-se também uma leitura atenta de todo o material escrito, já mencionado. Com esta leitura global procurou-se, por um lado, elaborar uma pré-categorização que fosse ao encontro das questões do estudo e, por outro lado, seleccionar, simplificar e organizar os dados, para se poder retirar algumas conclusões.

## **CAPÍTULO 4 – TAREFAS DESENVOLVIDAS**

Neste capítulo pretende-se fazer a apresentação das tarefas de investigação realizadas na sala de aula e que integram a recolha de dados do presente estudo.

Relativamente a cada tarefa refere-se a data da sua realização, a sua duração e apresenta-se uma breve caracterização, do desempenho dos vários grupos e de algumas interacções manifestadas.

### **4.1. TAREFAS DESENVOLVIDAS NO PROJECTO**

As tarefas de investigação que constam deste projecto foram em número de oito, encontrando-se em anexo os seus enunciados. Realizaram-se entre os meses de Maio e Junho de 2008 e tiveram a duração mínima de tempo de 1 hora e 10 minutos (tarefa 3) e máxima de 2 horas e 45 minutos (tarefa 7). As referidas tarefas de investigação integram, essencialmente, dois temas do Programa do 1º ciclo do Ensino Básico: números e operações e geometria (DEB, 1998).

As diversas tarefas realizadas apresentam aspectos em comum. Assim, anteriormente à realização de cada tarefa, os alunos organizavam-se em grupos e, posteriormente, eram distribuídos os enunciados. Salienta-se que, apesar dos enunciados das tarefas terem sido sempre entregues por escritos, a professora/investigadora optou por fazer a leitura dos mesmos perante toda a turma. Paralelamente, fornecia alguma informação básica considerada essencial e tecia alguns comentários de forma a promover o envolvimento dos alunos no trabalho.

Para além dos enunciados das tarefas eram também distribuídos, pelos grupos, os crachás (onde cada aluno escrevia a função que desempenhava em cada tarefa – porta-voz, secretário, distribuidor de materiais e ajudante) e, quando necessário, folhas de registo do trabalho e material manipulativo a usarem no decurso da mesma.

Na maioria das tarefas (tarefa 1, 2, 3, 5 e 7) os grupos utilizaram materiais manipuláveis, para os auxiliarem no desenvolvimento das investigações. Acerca do uso de materiais manipuláveis, já Oliveira (2008) focou a importância da utilização, considerando-os uma mais-valia para uma melhor aprendizagem e facilitadores da

aquisição de conceitos matemáticos. Realça-se, no entanto, que os materiais foram sempre fornecidos em excesso para não condicionar as respostas dos grupos.

Durante a fase de desenvolvimento das tarefas de investigação, a professora tentou cingir-se o mais possível a um apoio discreto, dando liberdade de acção aos grupos de trabalho, intervindo apenas quando solicitada ou quando considerou necessário fazê-lo.

No final das tarefas realizou-se sempre um momento de discussão perante o grande grupo, com a finalidade de dar a conhecer a todos os alunos o trabalho realizado por cada um dos grupos. Os porta-vozes apresentavam, no quadro, o trabalho realizado no seio do grupo. Quando estes manifestavam qualquer dificuldade eram auxiliados por outro colega do grupo. Para além disto, cada aluno, em nome próprio, poderia intervir para questionar sobre algo ou esclarecer uma dúvida.

Na tabela seguinte (tabela 3) apresenta-se uma breve caracterização das tarefas do presente projecto, fazendo-se referência à data da sua realização, bem como à sua duração.

Os desempenhos e interacções manifestadas pelos elementos do grupo serão alvo de atenção mais adiante, quando for feita a análise e discussão dos dados referentes ao “grupo caso” do presente estudo.

*Tabela 3 – Breve caracterização das tarefas do projecto*

| DENOMINAÇÃO DA TAREFA                       | DATA DA SUA REALIZAÇÃO | DURAÇÃO              |
|---|------------------------|----------------------|
| Tarefa 1<br>“O aniversário”                 | 23/05/2008             | 2 horas e 30 minutos |
| Tarefa 2<br>“Triângulos de fósforos”        | 27/05/2008             | 1 hora e 50 minutos  |
| Tarefa 3<br>“As mesas da cantina da escola” | 30/05/2008             | 1 hora e 10 minutos  |
| Tarefa 4<br>“Oito pontos”                   | 04/06/2008             | 1 hora e 45 minutos  |
| Tarefa 5<br>“Escadas em papel quadriculado” | 06/06/2008             | 2 horas e 30 minutos |
| Tarefa 6<br>“Números em escada”             | 11/06/2008             | 2 horas              |
| Tarefa 7<br>“Uma calculadora diferente”     | 16/06/2008             | 2 horas e 45 minutos |
| Tarefa 8<br>“Pares e ímpares”               | 20/06/2008             | 1 hora e 40 minutos  |



#### 4.1.1. Tarefa 1 – O Aniversário

Trabalho em grupos cooperativos: 23 de Maio de 2008.

Por ser a primeira tarefa de investigação que consta deste estudo, antes de se dar início à mesma, foram recordadas as regras de trabalho em grupos cooperativos e a professora fez algumas considerações sobre o trabalho de cunho investigativo.

Com esta tarefa pretendia-se que os alunos descobrissem de que formas diferentes se podem dispor 3, 4 e 5 mesas, havendo sempre pelo menos um lado comum entre elas (enunciado no anexo 7). Desta forma, os alunos puderam utilizar quadrados em cartolina (a representar as mesas), como material manipulativo.

Além do exemplo que constava no enunciado, foram apresentadas no quadro duas formas possíveis de colocar três mesas e os alunos perceberam que teriam que ser eles a descobrir as outras figuras (construídas por três, quatro e cinco quadrados).

A maioria dos grupos demonstrou um grande nível de envolvimento na tarefa, revelando-se muito interessados e conseguindo construir inúmeras figuras diferentes. Entende-se aqui por figuras diferentes todas as que podem resultar da rotação ou reflexão de uma figura, privilegiando-se as diferentes posições de uma figura no espaço.

Uns grupos conseguiram descobrir mais figuras que outros, mas o número de figuras construídas foi, de um modo geral, bastante significativo. No entanto, no desenrolar da actividade os alunos revelaram alguma dificuldade na transcrição das figuras para o papel e, posteriormente, em verificarem se tinham figuras repetidas.

Ao nível do registo dos dados, houve a necessidade de se ir insistindo com os alunos para registarem as suas descobertas de forma organizada, pois as descobertas relativas a cada uma das questões colocadas deveriam ser registadas em folhas diferentes, de forma a facilitar a fase da apresentação/discussão dos resultados.

Ao longo da fase de desenvolvimento da tarefa, os alunos embora construíssem figuras simétricas nunca utilizaram o termo simetria e/ou figura(s) simétrica(s), proferindo apenas expressões como as seguintes: *“Esta figura é igual à outra, mas a outra estava assim e esta está ao contrário”* e *“Já fizemos deitada e em pé, mas ainda não fizemos de lado”*. Porém, o tema das simetrias já tinha sido trabalhado nas aulas.

Na última fase do trabalho, fase de discussão, após a professora ter colocado a questão: *“É possível construir mais figuras diferentes com três, com quatro ou com cinco*

mesas?”, os alunos conseguiram descobrir uma regra simples: “*Quantas mais mesas quantas mais formas*” (grupo *Matemáticos*).

Esta tarefa de investigação teve a duração de duas horas e trinta minutos, desde a apresentação até à discussão final, tendo a segunda e a terceira fases ocupado 80% do tempo total. A última fase da investigação tornou-se mais demorada uma vez que os alunos desenharam, no quadro, as diferentes figuras que haviam descoberto, como se pode ver através da figura 1.

Figura 1 – Apresentação dos resultados da investigação “O Aniversário”



#### 4.1.2. Tarefa 2 – Triângulos de Fósforos

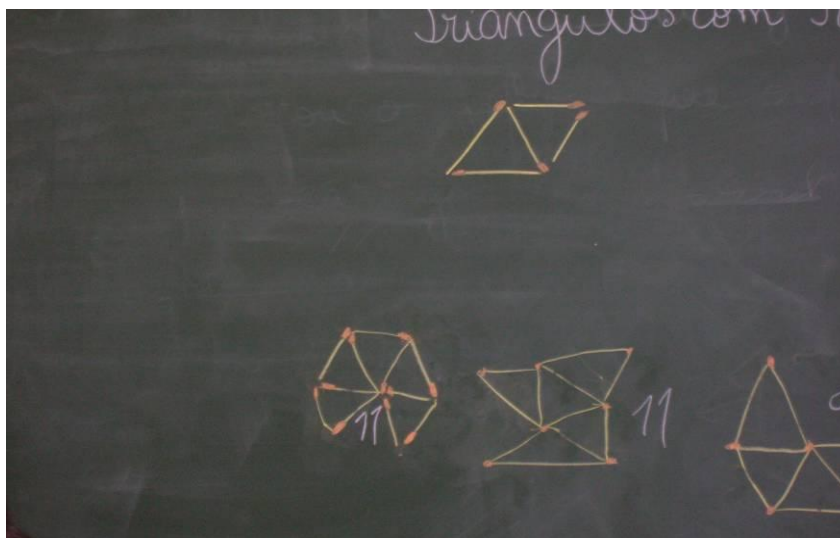
Trabalho em grupos cooperativos: 27 de Maio de 2008.

A presente tarefa de investigação consistia, essencialmente, na construção de triângulos com fósforos e na descoberta de regularidades (enunciado no anexo 8), pelo que foram fornecidos aos alunos fósforos em papel para os auxiliar no desenvolvimento da investigação proposta. Salienta-se que, na fase de apresentação, foi dito aos alunos que, na construção das figuras, deveriam utilizar o menor número possível de fósforos. Posteriormente, os grupos iniciaram o trabalho manifestando, desde logo, curiosidade e entusiasmo.

Relativamente às estratégias adoptadas no desenvolvimento do trabalho pôde-se observar alguma variedade por parte dos grupos, como se mostra na figura seguinte (figura

2), correspondente à construção de duas figuras com cinco triângulos. Em ambas as figuras foram construídos cinco triângulos com onze fósforos. Porém, é notório que o aspecto visual é diferente, isto é, foram construídas duas figuras diferentes, embora com algumas características semelhantes (o mesmo número de fósforos).

Figura 2 – Triângulos construídos com onze fósforos



De um modo geral, os alunos atingiram um grande nível de envolvimento na tarefa e pareciam estar muito interessados em participar nela. Não obstante, a maioria dos grupos ficou-se pela resposta às duas primeiras questões, não sendo capazes de identificar qualquer regularidade entre o número de triângulos e o número de fósforos. Houve, no entanto, dois grupos que foram mais longe e que se destacaram pelo facto de terem realizado esta tarefa na sua plenitude, tendo conseguido identificar regularidades simples, nomeadamente: “*Quanto mais fósforos mais triângulos dá*” (grupo *Descobridores*) e “*Aumentam-se sempre mais dois fósforos só que, às vezes, só se aumenta um*” (grupo *Detectives*).

Esta tarefa de investigação teve a duração de uma hora e cinquenta minutos.

#### 4.1.3. Tarefa 3 – As Mesas da Cantina da Escola

Trabalho em grupos cooperativos: 30 de Maio de 2008.

A presente tarefa, para além da descoberta do número de pessoas que se podem sentar em 3, 4, 5 e 6 mesas (que tenham sempre, pelo menos, um lado comum), consistia também na descoberta de regularidades existentes (enunciado no anexo 9).

Para que todos percebessem, mais facilmente, o que se pretendia, a professora fez a representação gráfica no quadro e promoveu uma breve dramatização, com alguns alunos sentados em torno das mesas da sala de aula (à semelhança do que consta na folha do enunciado). Estas duas estratégias, adoptadas na fase de apresentação da tarefa, revelaram-se fundamentais para a fase de desenvolvimento.

Antes de os alunos iniciarem a segunda fase da investigação foram, ainda, apresentados e distribuídos os materiais manipuláveis de que estes dispunham: rectângulos em papel (a representar as mesas) e imagens de pessoas.

A motivação e o empenho foram uma constante no decurso do desenvolvimento desta tarefa.

Os grupos revelaram uma certa facilidade no desenrolar da investigação. Alguns deles começaram, mesmo, por fazer os desenhos nas folhas de registo, sem necessitarem do auxílio do material manipulável. Apenas um grupo não conseguiu identificar qualquer regularidade (pergunta 5), tendo recorrido também ao auxílio da professora nas outras questões anteriores, uma vez que a forma como dispunham as mesas não era a que permitia sentar o maior número de pessoas.

A última fase, discussão final, foi realizada com o material manipulável. Assim, os porta-vozes dos grupos foram colando, no quadro, as imagens correspondentes às mesas e às pessoas (conforme consta na figura 3), dando as respostas às questões levantadas.

Figura 3 – Apresentação dos resultados da tarefa “As Mesas da Cantina da Escola”



Relativamente à última questão – “*Conseguem encontrar alguma regularidade?*” – os porta-vozes apresentaram algumas ideias básicas. Assim, a primeira ideia exposta foi: “*Descobrimos que a primeira mesa leva três pessoas, no meio leva duas e na última leva três*” (porta-voz do grupo *Descobridores*). Posto isto, a professora colocou-lhes uma nova questão: “*Porque é que nas mesas do meio só se podem sentar duas pessoas?*”, ao que o mesmo aluno, apontando para a representação que se encontrava no quadro, respondeu: “*Porque as mesas do meio estão juntas...*”.

Embora a professora tivesse conhecimento que as descobertas efectuadas pelos restantes grupos eram semelhantes, questionou os outros porta-vozes obtendo respostas idênticas: “*As mesas do meio só têm duas pessoas e as das pontas têm sempre três pessoas*” (porta-voz do grupo *Estudantes*).

Esta tarefa de investigação teve a duração de uma hora e dez minutos, tendo sido aquela que despendeu menor tempo.

#### **4.1.4. Tarefa 4 – Oito Pontos**

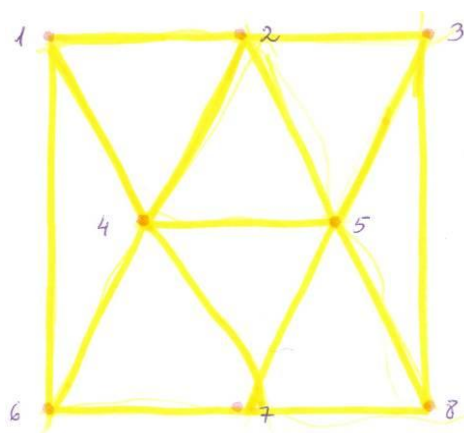
Trabalho em grupos cooperativos: 4 de Junho de 2008.

Esta tarefa consistia, essencialmente, na união de alguns dos oito pontos assinalados na figura que consta no enunciado da tarefa (anexo 10), de forma a obter diferentes figuras geométricas. Portanto, os alunos utilizaram régua e lápis de cor/canetas de feltro para representarem, com diferentes cores, as distintas figuras geométricas.

Na fase de apresentação procedeu-se a uma pequena revisão de conteúdos, tendo sido colocadas aos alunos questões sobre as figuras geométricas que haviam aprendido (triângulo, rectângulo, quadrado e círculo).

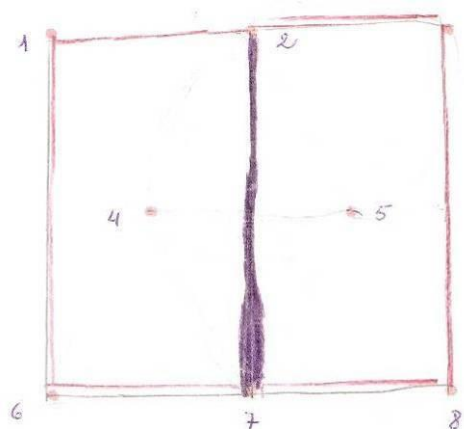
Relativamente à primeira questão desta tarefa – “*Unindo outros pontos da figura é possível obter mais triângulos? Quantos?*” – todos os grupos encontraram, com relativa facilidade, os oito triângulos representados através da figura seguinte (figura 4). Apenas dois grupos (*Detectives* e *Investigadores*) conseguiram ir mais longe, embora se considere que o grupo *Detectives* (objecto do estudo) conseguiu ir um pouco mais além, realizando um trabalho bastante mais completo, comparativamente com os restantes grupos.

Figura 4 – Registo do grupo *Descobridores* relativamente à 1ª questão da tarefa 4



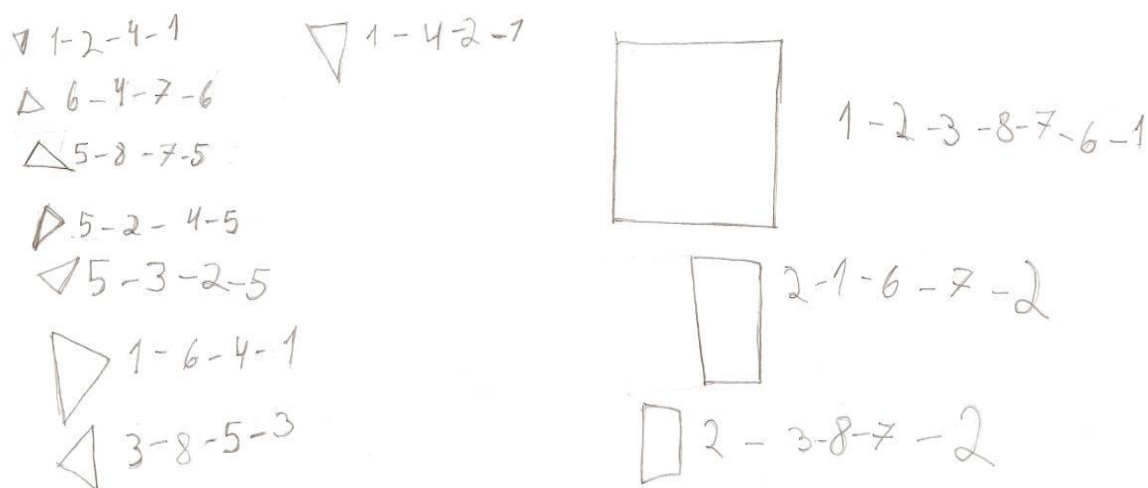
No que concerne à segunda e última questão, pretendia-se que os alunos, unindo os mesmos pontos, procurassem obter outras figuras geométricas além do triângulo. De salientar que, os grupos se limitaram a tentar encontrar quadrados, rectângulos e círculos, pois eram as outras figuras geométricas que conheciam. Dois grupos (*Estudantes* e *Detectives*) descobriram que era possível obter um quadrado e dois rectângulos (figura 5). Os outros quatro grupos apenas conseguiram unir os pontos de forma a obter os dois rectângulos, não tendo a percepção que da junção dos dois rectângulos resultava um quadrado.

Figura 5 – Registo do grupo *Estudantes* relativamente à 2ª questão da tarefa 4



Para além da obtenção das figuras pedia-se aos alunos para descreverem os processos utilizados. Desta forma, foram conduzidos a registarem, simultaneamente, os pontos correspondentes a cada figura descoberta, como se mostra através da figura seguinte (figura 6).

Figura 6 – Descrição do processo utilizado pelo grupo Estudantes na construção das figuras



No decurso da fase de desenvolvimento da tarefa foi visível o empenho dos alunos e um ambiente de cooperação e partilha de ideias entre os elementos dos grupos.

Nesta tarefa notou-se que os alunos recorreram, várias vezes, à professora para que esta validasse o trabalho que eles iam fazendo.

A fase de discussão teve lugar no dia seguinte, pois a segunda fase demorou mais tempo do que o previsto. Considera-se que este aspecto diminuiu um pouco a riqueza da última fase, uma vez que os alunos pareciam ter-se esquecido de questões relacionadas com o trabalho.

A presente tarefa teve a duração total de uma hora e quarenta e cinco minutos.

#### 4.1.5. Tarefa 5 – Escadas em Papel Quadriculado

Trabalho em grupos cooperativos: 6 de Junho de 2008.

Antes do início desta tarefa, e porque se estava a meio do processo de recolha de dados relativos às tarefas de investigação que constam deste projecto, considerou-se essencial relembrar as regras necessárias a um bom funcionamento do trabalho em grupos cooperativos e a um bom desempenho dos alunos na realização das tarefas.

Nesta tarefa pretendia-se que os alunos identificassem o número de quadradinhos que compunham as escadas que constam no enunciado da tarefa (anexo 11), bem como o número de quadradinhos de outras escadas e que procurassem descobrir regularidades.

No que concerne à primeira questão da tarefa, todos os grupos identificaram, correcta e facilmente, o número de quadradinhos que compunham cada uma das escadas que constam do enunciado. Porém, quando deram início à construção das escadas apresentaram alguma dificuldade, tanto na sua construção, como na sua representação gráfica. No entanto, a pouco e pouco, com empenho e interajuda entre os elementos dos grupos e com o apoio da professora, estas dificuldades foram sendo ultrapassadas. Com o auxílio do material manipulável (quadrados em cartolina) os grupos construíram a quarta e quinta escada, identificando, posteriormente, o número de quadrados (questão 2).

No que concerne à terceira questão que lhes era colocada – “*Procurem descobrir quantos quadradinhos compõem outras escadas.*” – três dos grupos ficaram-se pela construção da sétima escada, enquanto os outros três, um pouco mais rápidos no desenvolvimento da investigação, foram mais além: dois deles construíram e identificaram o número de quadradinhos da oitava escada, como comprova a figura seguinte (figura 7), e um foi até à décima segunda escada.

Figura 7 – Registo das escadas construídas pelo grupo Matemáticos



Foca-se que os grupos seguiram diferentes procedimentos na construção das escadas. A maioria dos grupos construiu as escadas colocando um quadrado em cima de cada um dos degraus que compunham a escada anterior, mas dois dos grupos adoptaram a estratégia de acrescentar uma coluna (na parte de trás da escada), formando uma nova escada.

Na última questão pretendia-se que os grupos procurassem descobrir regularidades numéricas. Esta investigação revelou-se muito rica em termos da descoberta de regularidades, uma vez que, apesar de dois grupos não terem conseguido encontrar nenhuma regularidade, os outros quatro grupos conseguiram encontrar a seguinte regularidade numérica: da primeira para a segunda escada colocam-se mais dois quadrados, da segunda para a terceira escada colocam-se mais três quadrados, da terceira para a quarta mais quatro, da quarta para a quinta mais cinco, e assim sucessivamente, isto



é, o número de quadrados que têm de acrescentar corresponde ao número da escada. Um desses grupos referiu, ainda, que: a primeira escada tem apenas um degrau, a segunda tem dois degraus, a terceira tem três, a quarta tem quatro, e assim sucessivamente. O mesmo grupo, com base no material manipulativo, ainda acrescentou que quantos mais quadrados tiverem mais degraus é possível fazer e, desta forma, construir escadas maiores.

Esta tarefa de investigação teve a duração de duas horas e trinta minutos, desde a apresentação até à discussão final, tendo sido despendido grande parte deste tempo na fase de desenvolvimento e na fase de discussão, devido ao tempo que exigiu o registo das figuras, nas folhas de registo e no quadro.

#### **4.1.6. Tarefa 6 – Números em Escada**

Trabalho em grupos cooperativos: 11 de Junho de 2008.

Esta tarefa consistia na descoberta de números em escada. Uma vez que continha termos/conceitos que não eram do conhecimento dos alunos foi-lhes explicado o que são números consecutivos e números em escada e apresentaram-se alguns exemplos, para além dos que constavam no enunciado da tarefa (anexo 12). De seguida, pediu-se para eles apresentarem outros exemplos, de forma a saber-se se haviam entendido os conceitos e percebido em que consistia a investigação.

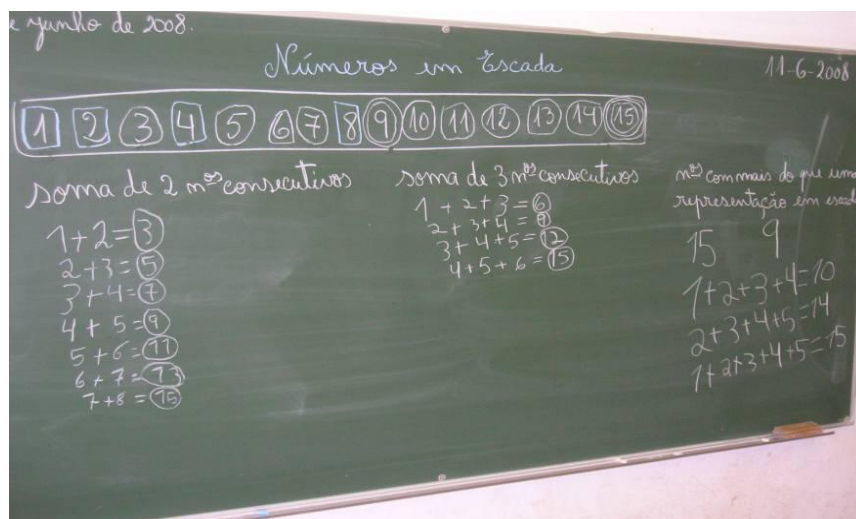
Durante a fase de desenvolvimento, os alunos demonstraram empenho na obtenção das respostas para as questões colocadas. No que concerne à organização e registo dos resultados da investigação os alunos receberam alguma orientação da professora.

A actividade foi bem conseguida pela maioria dos grupos, tendo todos identificado que números, até 15, podem ser escritos como uma soma de dois e três números consecutivos, bem como os números que tinham mais que uma representação em escada. Relativamente à última questão: “*Descobriram números que não sejam em escada?*”, dois dos grupos não chegaram aos resultados correctos, pois apenas se basearam nas respostas dadas às duas primeiras questões.

A fase de discussão dos resultados da investigação revelou-se fundamental para o esclarecimento de algumas dúvidas que existiam no seio dos grupos. Mais uma vez, nesta fase os alunos foram, igualmente, orientados no registo da informação, de forma a ser bem perceptível para todos. Assim, conforme iam efectuando a suas descobertas iam

assinalando os números, até 15, que se encontravam num rectângulo, como se pode ver na figura seguinte.

Figura 8 – Apresentação dos resultados da tarefa “Números em Escada”



A tarefa de investigação supracitada teve a duração de duas horas, tendo sido cerca de 50% do tempo despendido na fase de desenvolvimento e 25% em cada uma das outras duas fases – apresentação e discussão final.

#### 4.1.7. Tarefa 7 – Uma Calculadora Diferente

Trabalho em grupos cooperativos: 16 de Junho de 2008.

Através da presente investigação pretendia-se que os alunos, utilizando a calculadora, realizassem adições de forma a obter os números indicados no enunciado da tarefa (anexo 13).

São alunos do 1º ano de escolaridade que, na sua maioria, nunca tinham utilizado a calculadora com o fim pretendido, nomeadamente a realização de operações. Portanto, o facto de a tarefa envolver a utilização da calculadora implicou um trabalho prévio, na sala de aula. Desta forma, anteriormente à aula em que se realizou esta tarefa, os alunos tiveram a oportunidade de saber como funciona uma calculadora e fazerem uso dela. No trabalho prévio que foi elaborado, na sala de aula, o entusiasmo dos alunos foi enorme, pareciam transbordar de alegria ao verem o que era capaz de fazer uma simples calculadora.

Nesta tarefa os alunos dispunham de duas calculadoras por grupo. Porém, como o nome da actividade indica, a calculadora era diferente pelo facto dos alunos apenas poderem utilizar algumas das suas teclas, como se mostra na figura seguinte, correspondente à fotografia de uma das calculadoras utilizadas por um dos grupos. Assim, utilizando apenas as teclas 2, 3, + e =, os alunos deveriam procurar obter os números 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12.

Figura 9 – Fotografia de uma das calculadoras utilizadas pelos grupos



A primeira questão da tarefa era precisamente a seguinte: “Conseguiram obter todos os números acima indicados?”. Todos os grupos descobriram, pelo menos, uma adição para cada um dos números referidos. No entanto, a segunda questão – “Conseguiram descobrir mais do que uma forma para obter alguns desses números? Investiguem e registem-nas.” – tornou a investigação um pouco mais complexa para a maioria dos grupos.

Quanto ao número 4, todos os grupos foram unânimes relativamente à única operação possível de realizar ( $2 + 2$ ). Todos conseguiram, igualmente, descobrir as duas operações possíveis de obter o número 5 ( $2 + 3$  e  $3 + 2$ ) e o número 6 ( $3 + 3$  e  $2 + 2 + 2$ ). Quanto aos restantes números: o 7, o 8, o 9, o 10, o 11 e o 12, os trabalhos dos grupos foram divergentes, isto é, nem todos conseguiram chegar aos mesmos resultados. Uma vez que, para estes últimos números era possível encontrar maior número de adições (recorrendo à propriedade comutativa da adição), as dificuldades dos grupos foram aumentando. Desta forma, os grupos identificaram distintas formas de obter os números referidos, embora nenhum deles tivesse descoberto todas as hipóteses possíveis.

Como era pedido para os alunos registarem as suas descobertas, foi-lhes fornecida uma folha própria para o efeito, como se procura evidenciar através da figura que se segue.

*Figura 10 – Secretário do grupo Investigadores a efectuar o registo em folha própria*



Relativamente aos procedimentos adoptados no desenvolvimento da investigação observou-se que os alunos, de um modo geral, adoptaram três formas diferentes de realizar ou confirmar os resultados das operações, nomeadamente: (1) faziam as adições na calculadora e confirmavam os resultados obtidos efectuando, posteriormente, as adições com o auxílio dos dedos; (2) faziam as adições mentalmente ou com o auxílio dos dedos e, em seguida, utilizavam a calculadora para conferirem os resultados; (3) realizavam as adições numa das calculadoras e quando descobriam uma adição possível conferiam-na, fazendo-a noutra calculadora, para se certificarem que o resultado era o mesmo.

Nesta tarefa verificou-se a partilha de materiais, uma vez que apenas havia duas calculadoras por grupo, a partilha de ideias e a interajuda.

Das oito tarefas de investigação, que integram este estudo, esta foi a que requereu mais tempo, tendo demorado duas horas e quarenta e cinco minutos desde a apresentação até à discussão final.

#### **4.1.8. Tarefa 8 – Pares e Ímpares**

Trabalho em grupos cooperativos: 20 de Junho de 2008.

À semelhança da tarefa anterior, esta tarefa de investigação também requereu um trabalho prévio. Antecipadamente, nas aulas de Matemática, foi abordado o tema dos números pares e ímpares. Uma das actividades realizadas pelos alunos, numa dessas aulas, foi o jogo “O rato e o queijo” (anexo 14). Inicialmente, os alunos realizaram o jogo em pares e, posteriormente, fez-se o desenho do jogo no quadro procurando-se identificar todos os caminhos que permitiam chegar ao queijo e, assim, ganhar o jogo.

A presente tarefa consistia, essencialmente, na realização de adições de dois números pares, de dois números ímpares e de um número par com um ímpar (ou vice-versa). Para além disso, pretendia-se que os alunos descobrissem regularidades nas somas obtidas. No dia da sua realização, antes de se dar início à mesma, fez-se uma revisão sobre o que são números pares e ímpares. Posteriormente, continuou-se com a apresentação da tarefa.

Depois de colocadas e esclarecidas as dúvidas dos alunos, os grupos iniciaram o desenvolvimento da investigação de forma bastante empenhada, tendo realizado a tarefa com bastante êxito. Todos os grupos efectuaram diferentes adições e conseguiram descobrir regularidades.

Esta tarefa de investigação teve a duração de uma hora e quarenta minutos, sendo que a fase de apresentação ocupou cerca de 25% do tempo, devido à revisão de conteúdos.

## CAPÍTULO 5 – ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Neste capítulo faz-se uma breve caracterização dos quatro alunos que constituem o grupo objecto de estudo de caso.

No âmbito do mesmo capítulo e na tentativa de responder às questões levantadas previamente ao desenrolar da investigação procura-se, ainda, através das observações e transcrição das gravações vídeo, descrever e analisar as interacções e o desempenho do grupo perante as oito tarefas de investigação que integram o estudo. Assim, cada uma das tarefas é analisada separadamente, procurando-se identificar algumas particularidades, quer em termos de dinâmica interactiva, quer em termos de desempenho dos alunos.

Em todas as tarefas, os excertos transcritos correspondem, principalmente, à fase de desenvolvimento da investigação que teve lugar no seio do grupo que se visa estudar. No entanto, em algumas tarefas (tarefa 1, 2, 4 e 5) foram também extraídos diálogos correspondentes à fase de discussão, por se pensar apresentarem informação complementar e significativa.

No final da análise de cada tarefa surge uma reflexão geral, em que se destacam aspectos que integram duas fases típicas de uma aula com investigações: a fase de desenvolvimento da investigação e a fase de discussão final. De salientar que, a análise da discussão final é feita da óptica do grupo objecto de estudo de caso. Exclui-se a primeira fase de uma investigação (apresentação da tarefa) porque, de acordo com Tudella *et al* (1999) não corresponde a uma actividade investigativa por parte dos alunos.

### 5.1. CARACTERIZAÇÃO DO GRUPO OBJECTO DE ESTUDO

O grupo objecto de estudo de caso é composto por quatro alunos, dois rapazes e duas raparigas: a Beatriz, o Carlos, o Diogo e a Sara. O grupo é designado por “*Detectives*”, tendo sido o nome escolhido pelos alunos que o compõem no momento da sua formação.

Em seguida caracteriza-se, de forma sucinta, cada um dos alunos sendo que há aspectos comuns, nomeadamente o facto de serem crianças com seis anos de idade e que iniciaram a escolaridade básica no presente ano lectivo (2007/2008). Tal caracterização assenta no conhecimento que a professora/investigadora possui de cada um deles (baseado

no contacto do dia-a-dia na sala de aula), bem como nos dados recolhidos através do questionário, aplicado antes da fase de recolha de dados, e da entrevista, aplicada no final da investigação.

### **A Beatriz:**

É uma aluna que demonstra interesse nos trabalhos que realiza, revelando persistência e empenho. Tem um bom comportamento e é comunicativa. A nível da aprendizagem, incluindo a área de Matemática, tem um bom aproveitamento.

Através do questionário revela que nas aulas de Matemática gosta *sempre* de trabalhar em grupo, preferindo trabalhar em grupo do que sozinha, justificando que, desta forma, *os colegas ajudam-me*. Também gosta sempre de resolver as tarefas de investigação que lhes são propostas *porque são fáceis e divertidas*. A Beatriz é o único elemento do grupo que, para além de considerar as tarefas de investigação realizadas nas aulas como *muito interessantes* (à semelhança dos colegas) também diz serem *fáceis*. O que gosta mais nestas aulas é o facto de *trabalhar em grupo com os colegas*.

Quando questionada sobre a forma de dar e receber ajuda, menciona que os colegas do grupo se ajudam entre si na resolução das tarefas, pois *gostam de trabalhar em grupo e ajudamos sempre uns aos outros*.

Aquando da entrevista, a Beatriz continua a apresentar a mesma opinião, no que se refere à forma como caracteriza as oito tarefas de investigação que integram este projecto, enumerando que *elas são fixas, são engraçadas e são fáceis*, porque *estamos com os colegas e os colegas ajudam-se uns aos outros. E se nos ajudarmos uns aos outros é mais fácil e é mais divertido (...)*. A aluna ainda vai mais longe nas suas justificações, dizendo que *nas primeiras vezes que fizemos eu comecei a saber e elas são fixas* (referindo-se às tarefas realizadas na fase de preparação). *Agora, cada vez que se ia fazendo, ia sendo mais fácil*.

Comparando as aulas em que realizou as tarefas de investigação e as outras, aponta como principais diferenças a possibilidade de haver interajuda, nomeadamente *quando fazemos estes trabalhos os colegas estão-se a ajudar (...)* em grupo *os colegas ajudam-se sempre uns aos outros*. Deste modo, vê na aprendizagem cooperativa vantagens para a aprendizagem, mencionando que *cada vez que o meu grupo se ajuda uns aos outros vamos sabendo, todos juntos, como é que se faz e vamos aprendendo mais*.

Com a sua participação neste projecto, diz ter aprendido *mais coisas do que o que sabia e a fazer tudo com os outros*. Para além disto, do que gostou mais nestas aulas foi *quando nós trabalhamos em grupo todos juntos com a máquina calculadora* (referindo-se à tarefa 7 – Uma calculadora diferente). A calculadora não era uma novidade para a aluna, que justifica a sua preferência por esta tarefa pelo simples facto de gostar de fazer contas. Quando questionada sobre o que gostou menos referiu: *eu gostei de tudo*.

A aluna refere que, com o passar do tempo, se tornou mais fácil trabalhar com os colegas, falar com eles, ouvir os seus argumentos, *porque agora (...) já estamos mais habituados*. Desta forma, não gostaria de trabalhar noutra grupo se não o seu, porque *eles sempre se ajudavam uns aos outros e era fixe*. A interajuda foi, então, um sentimento presente no grupo, e que é ainda reforçado quando a aluna refere que os colegas a ajudaram sempre que sentiu dificuldades e que ela fez o mesmo.

Gostaria de continuar este tipo de trabalho no ano lectivo seguinte, pelo carácter não habitual das tarefas, justificando que *era divertido e também era fixe, porque ajudavam-se uns aos outros. Os do meu grupo ajudavam-se sempre e nós quando fazíamos todos era divertido*. Assim, a forma como contaria a alguém como foram as aulas em que realizou investigações matemáticas, segundo o modelo da aprendizagem cooperativa, era dizendo que *nos juntávamos todos em grupo, (...) você dava as folhas, explicava, tínhamos de pôr os crachás. Depois dizia que fazíamos tarefas fixas e, se eu me lembrasse, dizia como eram as tarefas*.

### **O Carlos:**

O Carlos é um aluno muito introvertido e pouco comunicativo.

Na Matemática possui algumas dificuldades, no entanto, o seu aproveitamento nesta área consegue ser satisfatório. Tem um ritmo de trabalho muito lento.

No questionário aplicado antes da recolha dos dados, refere que gosta *sempre* de trabalhar em grupo nas aulas de Matemática, preferindo trabalhar em grupo a trabalhar sozinho. Refere, também, que gosta de resolver tarefas de investigação no âmbito da disciplina, mencionando que o que gosta mais é *do meu grupo e de trabalhar com eles* e do que gosta menos é *quando não sei fazer*. Porém, revela que tem sentido muitas dificuldades nas tarefas de investigação realizadas nas aulas (previamente à recolha de dados), caracterizando-as como *muito interessantes e difíceis*.



No final da investigação, aquando da entrevista, o aluno continua a ter uma opinião positiva quanto à realização de tarefas de investigação e diz que, nestas aulas, *aprendi a trabalhar em grupo*. Acrescenta, ainda, que é mais fácil aprender quando se está em grupo, *porque os colegas dizem, ajudam*.

Como grandes diferenças, entre as aulas em que realizou tarefas de investigação e as outras, aponta o trabalho em grupo e o facto de as tarefas serem divertidas.

Quando interrogado sobre o que gostou mais respondeu que gostou *de fazer as tarefas*. Sobre o que gostou menos não respondeu. Considera que agora, isto é, com o decorrer do tempo se tornou mais fácil falar com os elementos do grupo, ouvir as suas explicações, dar a sua opinião. Relativamente à interajuda, o Carlos diz que os colegas o ajudaram quando sentiu dificuldades, *quando não sabia eles diziam-me* e que, poucas vezes, conseguiu ajudar os colegas, argumentando que *eles eram muito mais rápidos a contar*.

Questionado sobre se gostaria de trabalhar noutros grupos, o aluno foi peremptório a responder: *prefiro o meu grupo, onde estou*, justificando que gosta dos colegas de grupo.

No final da entrevista, ainda, manifestou vontade em continuar a realizar este tipo de trabalho no ano lectivo seguinte, *porque gosto das tarefas*.

Se tivesse que contar a alguém como foram as aulas em que realizou investigações matemáticas, segundo o modelo da aprendizagem cooperativa, diria que *eram aulas em que as tarefas eram fixas*.

### **O Diogo:**

É um aluno muito empenhado nas tarefas escolares e persistente. À semelhança da Beatriz, tem um bom comportamento e é comunicativo. Tem um aproveitamento muito bom na área de Matemática.

No questionário menciona que gosta *sempre* de trabalhar em grupo nas aulas de Matemática, preferindo trabalhar em grupo do que sozinho, pois *se trabalhar sozinho posso ter dificuldades*. O aluno, através da expressão citada, parece ter presente um dos princípios do trabalho cooperativo, a interajuda.

No que se refere às tarefas de investigação, o aluno diz gostar sempre deste tipo de trabalho, argumentando que *podemos aprender muito com as tarefas*. Neste tipo de aulas, do que gosta mais é de *aprender coisas novas* e do que gosta menos é *das tarefas que são*

*difíceis e que eu tenho dificuldades.* Caracteriza as tarefas de investigação realizadas nas aulas como sendo *muito interessantes e difíceis.*

Na entrevista voltou-se a perguntar ao Diogo a sua opinião acerca do trabalho em grupo e acerca das tarefas de investigação. O aluno valorizou novamente o trabalho em grupo, em detrimento do trabalho individual, pois considera que *se nós trabalharmos em grupo podemos aprender muitas coisas.* Relativamente às tarefas de investigação que realizou nas aulas de Matemática realçou, mais uma vez, aspectos relacionados com a aprendizagem, nomeadamente: *se nós trabalharmos bem nas tarefas podemos aprender mais coisas, podemos aprender melhor a fazer as contas, porque se nós estivermos em grupo e não soubermos alguma coisa podemos perguntar ao grupo.* Referenciou, ainda, a importância da fase de discussão para a aprendizagem, dizendo que *quando vamos apresentar, ficamos a saber todas as coisas que todos os grupos descobriram.*

Das aulas em que realizou tarefas de investigação gostou mais *daquela tarefa que era de nós fazermos as mesas. Era engraçada* (tarefa 3 – “As mesas da cantina da escola”). Em contrapartida, e ao contrário da Beatriz, apontou a tarefa 7 “Uma calculadora diferente” como aquela em que se deparou com mais dificuldades, dizendo *eu nunca sabia se dava o resultado ou não e nós tínhamos que prestar atenção para ver se não tínhamos contas iguais.*

Sobre o que considera serem as grandes diferenças entre as aulas em que se realizaram tarefas de investigação e as outras, o aluno relatou que *nas aulas em que não fazemos as tarefas aprendemos umas coisas e depois, nas outras aulas de investigação, nós podemos fazer uma coisa sobre o que nós aprendemos, para podermos aprender mais.*

O aluno, no momento da entrevista, é da opinião que com o decorrer do tempo se tornou mais fácil falar com os colegas do grupo, ouvir as suas explicações, tirar as dúvidas, *porque como nós agora já nos conhecemos muito melhor, já podemos falar melhor e como nós já sabemos coisas podemos dizer muitas coisas certas, que perguntamos ao grupo.*

Quando questionado sobre dar e receber ajuda no decurso das tarefas, o aluno referiu que os colegas o ajudaram quando sentia dificuldades, sendo que *quando eu não sabia alguma coisa perguntava ao grupo. Perguntava a um e se ele não soubesse perguntava aos outros do grupo. Se os outros não souberem é que eu posso perguntar à professora.* Na expressão do aluno está presente o contrato didáctico, que é importante ser estabelecido em tarefas desta natureza. No entanto, além de receber ajuda refere que, também, ajudou os colegas, mencionando que *quando eles me perguntavam eu tentava fazer, mas antes de perguntar podemos tentar saber (...) porque senão não aprendemos.*

Através da entrevista, ainda, foi possível saber que o Diogo gostou de trabalhar com os seus colegas não tendo qualquer interesse em trocar de grupo, pois *estava mais habituado a estar naquele*. Manifestou, ainda, gosto em realizar este tipo de trabalho no ano lectivo subsequente, apontando alguns motivos: *porque podemos aprender muitas coisas com as tarefas e também, se nós trabalharmos muitas vezes, (...) podemos aprender melhor*.

Quanto ao modo como relataria a alguém as aulas em que realizou investigações matemáticas, segundo o modelo da aprendizagem cooperativa, ele diria que *podemos aprender muitas coisas com o trabalho em grupo. E se trabalharmos em grupo podemos conseguir fazer todas as tarefas e descobrir muitas coisas. E, às vezes, quando temos dificuldades perguntamos ao grupo. O grupo pode saber e assim já descobrimos as coisas*.

#### **A Sara:**

É uma aluna um pouco introvertida. Revela gosto e interesse pela disciplina de Matemática, sendo que, nesta área, tem um aproveitamento satisfatório.

Quando questionada sobre se gosta de trabalhar em grupo, a aluna foi unânime com o sentimento dos colegas, isto é, refere que gosta *sempre* de trabalhar em grupo, privilegiando esta forma de trabalho ao trabalho individual, *porque se tiver dúvidas posso perguntar ao grupo*. Gosta de realizar tarefas de investigação nas aulas de Matemática *porque aprendo muito*, sendo que gosta mais do facto *de poder pedir ajuda aos colegas*. Caracteriza as tarefas de investigação como *muito interessantes e difíceis*, deixando presente a ideia de interajuda entre os elementos do grupo, pois *se eu não sei pergunto e eles dizem-me*.

Na entrevista foram-lhe, novamente, colocadas questões referentes ao trabalho cooperativo e às investigações matemáticas. Assim, a Sara continuou a manifestar gosto e preferência pelo trabalho em grupos cooperativos, considerando que é uma boa forma de aprender. Acrescentou que gostou de trabalhar com o seu grupo, não tendo qualquer interesse em trocar de grupo, mas não foi capaz de apresentar qualquer justificação. A sua opinião acerca das tarefas de investigação que realizou nas aulas é que gostou deste tipo de trabalho, pois *são engraçadas* (referindo-se às tarefas). Porém, diz que houve tarefas em que sentiu dificuldades mas, na entrevista, não conseguiu especificar nenhuma.

Como grandes diferenças entre as aulas em que realizou actividades de investigação e as outras refere vários aspectos, nomeadamente: *trabalhávamos em grupo; fazíamos as tarefas; e as tarefas eram engraçadas*. Quanto ao que mais e menos gostou nestas aulas a aluna também não respondeu (revelando-se muito pensativa).

Relativamente à interajuda, refere que, geralmente, os colegas de grupo a ajudaram a resolver as tarefas quando sentia dificuldades, enunciando que *pedia ajuda e eles ajudavam, diziam-me as coisas*. Por sua vez, a ajuda era recíproca, dado que a aluna também ajudava os colegas, *dizia-lhes, tirava as dúvidas*.

Tal como os seus colegas de grupo, a Sara considera que é mais fácil agora, do que no início do ano, falar com os colegas do grupo, ouvir as suas explicações e argumentos. Assim, manifesta interesse em continuar com este tipo de trabalho, no ano lectivo seguinte, *porque é divertido, engraçado*.

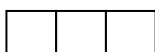
Quanto à forma como contaria a alguém como foram as aulas em que realizou este tipo de trabalho, a aluna limitar-se-ia a dizer que *essas aulas foram fixes, divertidas*.

## 5.2. CARACTERIZAÇÃO DAS INTERACÇÕES E DESEMPENHO DO GRUPO

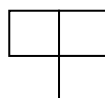
### Tarefa 1 – O Aniversário

O diálogo que se segue corresponde à interacção estabelecida no seio do grupo, no desenrolar da primeira questão da tarefa, em que se pretendia que os alunos descobrissem de que formas diferentes se podem dispôr três mesas, de modo que elas tenham sempre, pelo menos, um lado comum.

1. Sara: “**A primeira é a P1 que são 3.**” (e arruma os dois quadrados de cartolina que sobram)
2. Sara: “**Já vou fazer a primeira.**” Pegando na folha de registo, desenha a primeira figura.

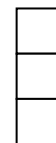


3. Beatriz: Com o material constrói a segunda figura e diz: “**Já descobrimos outra.**” Entretanto, continua a construir outras figuras.



4. Beatriz: “**Agora faz esta.**” (dirigindo-se ao secretário para fazer o registo da figura)

5. Diogo: “**Essa já está.**” (referindo-se à figura ao lado)
6. Beatriz: “**Não. Esta é em pé. E a que fizemos não é em pé. Olha.**”
7. Diogo: “**Pois é.**”



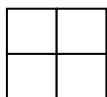
A interacção começa com uma frase da Sara, que menciona o que está em causa nesta questão [fala 1] e apresenta a primeira figura formada por três quadrados [fala 2]. A Beatriz continua a interacção. Quando apresenta uma figura, que foi construída através de um processo de rotação da primeira, o Diogo não concorda [fala 5], pois considera que é igual à anterior. A Beatriz argumenta [fala 6], fazendo com que o Diogo acabe por aceitar a sua proposta [fala 7], e evita que se crie um conflito sócio-cognitivo. O entendimento a que chegaram permite ver que o grupo considerou como diferentes as figuras que se podiam obter por rotação e reflexão, privilegiando, assim, as diferentes posições de uma figura no espaço.

Através do excerto da interacção apresentada vê-se que três alunos, o Diogo, a Sara e a Beatriz, vão co-elaborando uma resolução, assistindo-se assim à negociação da resolução da primeira questão da tarefa, onde não é observável uma manifestação de desacordos ou contradições entre os seus elementos. Verifica-se, então, uma participação equitativa destes três elementos, conseguida graças a uma dinâmica de co-construção (de acordo com Gilly, Fraisse e Roux, 1988).

Por outro lado, a leitura da interacção revela uma atitude passiva por parte de um dos alunos, o Carlos, uma vez que não interveio no diálogo.

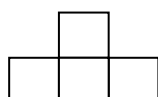
Apresenta-se a seguir um excerto da interacção relativo à segunda questão da tarefa, onde se questionava de que formas diferentes podem quatro mesas ser colocadas.

12. Diogo: “**Vamos para as de quatro. Mais uma.**” (pedindo à Beatriz mais um quadrado)
13. Beatriz: “**Já sei uma.**” E constrói a primeira figura com quatro quadrados.

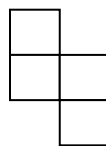


14. Sara: (virando-se para o Carlos) “**Não sei o que estás a fazer. Não estás a pensar.**”
15. Diogo: Enquanto faz a representação da figura em papel, menciona: “**Uma janela.**” (referindo-se à figura anterior)

A Sara ajuda a Beatriz e constróem outra figura (a figura seguinte).



Enquanto isso, o Diogo sem recurso a material faz a representação, no papel, da seguinte figura.

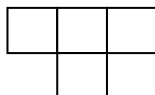


16. Diogo: “**Já pensei noutra.**”

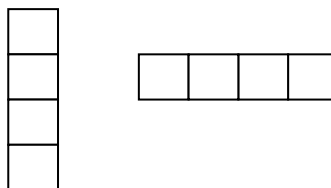
Em seguida, faz a representação da figura construída pelas duas colegas do grupo.

17. Sara: (virando-se para o Carlos) “**Carlos pensa. Ainda não disseste nada.**”

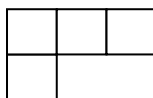
18. Diogo: Pega na figura construída pelas colegas e gira-a 180 graus referindo: “**Virada ao contrário já dá.**”



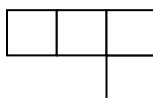
A Beatriz, posteriormente, faz duas construções.



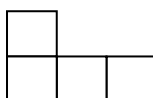
19. Sara: “**Já sei.**” E mudando apenas um dos quadrados constrói outra figura.



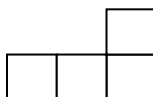
20. Beatriz: (referindo-se à mesma peça) “**Depois troca-se.**” (e constrói uma figura simétrica à anterior)



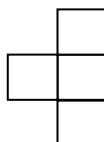
O Diogo faz mais tentativas e constrói outra figura.



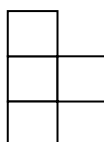
21. Carlos: Pela primeira vez dá a sua opinião, dizendo: “**Depois trocamos esta para aqui.**” (sugerindo a construção de uma figura simétrica à anterior)



O Diogo e a Beatriz continuam a tentar outras construções. Até que, o Diogo constrói outra figura.

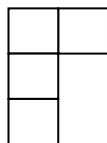


22. Diogo: “**Depois é só trocar, pôr do outro lado.**” (referindo-se a um dos quadrados que compõem a figura)

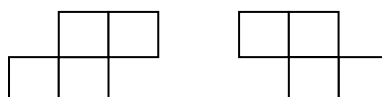


O Diogo, após fazer a representação em papel, procede à contagem das figuras: “**1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.**” Posteriormente, pega no material e constrói outra figura diferente fazendo a sua representação na folha de registo.

(...)



25. Sara: Constrói uma figura e acrescenta: “**Depois é fácil. Trocamos daqui para aqui.**” E modifica a posição de dois dos quadrados, construindo uma nova figura. Em seguida, acrescenta: “**Esta figura é igual à outra, mas a outra estava assim e esta está ao contrário.**” (procedendo à demonstração das duas figuras, que são as que se seguem)



Quando se lê o episódio da interacção referente à segunda questão da tarefa, onde se questionava de que formas diferentes podem quatro mesas ser colocadas, encontram-se várias características interessantes. Verifica-se uma liderança na interacção por parte de dois alunos, do Diogo e da Sara. Estes, pelo facto de estarem a trabalhar colaborativamente, conseguem que o grupo tenha êxito na resolução desta parte da tarefa.

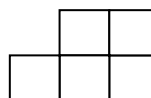
É o Diogo quem dá início ao processo de interacção relativo à segunda questão da tarefa [fala 12]. No entanto, a Beatriz embora, neste momento, tivesse assumido uma atitude pouco interactiva é ela quem apresenta a primeira proposta de resolução [fala 13]. Por sua vez, o Diogo acrescenta outras formas de resolução da questão, isto é, outras figuras construídas com quatro quadrados. Assiste-se, também, a uma liderança cognitiva por parte do aluno pois, sem usar o termo “figura simétrica”, descobre que a figura “*virada ao contrário já dá*” [fala 18]. A partir daqui, o grupo segue a estratégia apresentada pelo colega, que se encontra expressa nas falas da Beatriz [fala 20] e do Carlos [fala 21]. Não se assiste, porém, a qualquer conflito cognitivo, visto que os alunos vão aceitando as ideias dos colegas.

A Sara, ao apelar à intervenção do Carlos e ao incentivá-lo a trabalhar [fala 17], mostra que tem presente o contrato didáctico estabelecido entre a professora/investigadora e o grupo, o qual previa que o trabalho fosse realizado com a cooperação de todos os parceiros e as ideias discutidas e explicadas entre si, procedimento que a mesma adoptou quando mostra aos colegas a forma como chega a uma resolução [fala 25]. Para além disso, a atitude da aluna de chamar o colega à atenção parece ter tido um efeito positivo, uma vez que, posteriormente, o Carlos participou na interacção [fala 21].

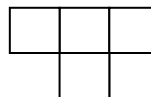
26. Diogo: “**Vamos para a outra pergunta.**” E passam para a pergunta três: “*E em 5 mesas?*”

27. Sara: “**Nós vamos fazendo.**”

28. Beatriz: “**Já sei uma.**” E constrói a figura ao lado.

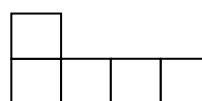


29. Sara: (dirigindo-se ao Diogo) “**Fazes esta e depois fazes assim.**” (trocando um dos quadrados de posição, construindo a figura seguinte). Em seguida, acrescenta: “**Já sei outra de cinco. De cinco há muitas. O que é preciso é pensar.**”

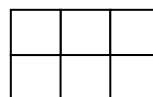


30. Diogo: “**Espera um bocado que eu ainda estou a escrever.**”

A Sara e a Beatriz continuam a fazer outras construções e conseguem encontrar mais uma figura diferente (enquanto isso o Diogo termina de cobrir as figuras com canetas de feltro).



31. Carlos: (virando-se para a Sara e fazendo os gestos com a mão) “**Podemos pôr três aqui, uma aqui e outra aqui.**”



32. Sara: “**O Carlos já sabe uma.**” Tenta mostrar aos colegas o que o Carlos disse e este, por sua vez, ajuda-a na construção da figura.

33. Beatriz: “**Destá vez o Carlos pensou.**”

Relativamente à resolução da terceira questão desta tarefa, em que se pretendia que os alunos descobrissem de que formas diferentes podem cinco mesas ser colocadas, verifica-se que é, novamente, o Diogo quem inicia o processo de interação [fala 26] e a Beatriz quem apresenta a primeira proposta de resolução da tarefa [fala 28]. Por sua vez, a Sara continua, acrescentando mais uma forma de resolução [fala 29]. Na mesma fala, ao proferir a expressão “*De cinco há muitas*”, a aluna dá a entender que começa a estabelecer uma relação entre o número de quadrados usados na construção das figuras e o número de figuras que se podem construir.

O ritmo de trabalho aquando da resolução da questão parece ser um pouco rápido, o que é traduzido pela expressão do Diogo [fala 30], quando diz: “*Espera um bocado que eu ainda estou a escrever*”.

Assiste-se à negociação de uma resolução, essencialmente, entre o Diogo, a Sara e a Beatriz. O Carlos apresenta uma proposta de resolução [fala 31] que provoca um comentário, num tom um pouco irónico, da Beatriz [fala 33].

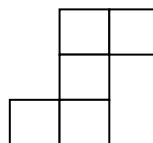


57. Diogo: “**Olhem, já fiz uma.**” (constrói uma figura em que os quadrados se tocam nos cantos)

58. Sara: “**Achas que é assim, Diogo? Não pode estar assim.**”

O Diogo tenta outras hipóteses e a Sara ajuda-o.

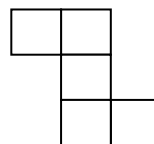
59. Sara: “**Olha, fiz uma.**” (referindo-se à figura ao lado)



60. Diogo: “**Não. Essa já está.**”

61. Sara: “**Ah, pois!**”

62. Diogo: “**Só se ficar esta em baixo e esta aqui.**” (movimenta dois quadrados e constrói uma figura simétrica à anterior, como se mostra ao lado)



63. Sara: “**Olha o que eu fiz.**”

64. Diogo: (...) “**Já descobrimos que chegou.**”

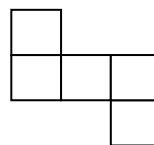
65. Beatriz: “**Espera. Dá para descobrir mais.**”

O Diogo conta, novamente, as figuras construídas com cinco quadrados.

66. Diogo: “**Temos vinte e uma.**”

67. Beatriz: “**Espera. Dá para descobrir mais.**” Continua a fazer tentativas e constrói uma figura.

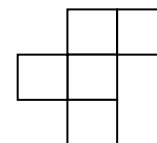
(...)



74. Sara: “**Diogo, já fizemos esta?**” (e mostra outra figura que construiu)

75. Diogo: “**Eu acho que já.**” (e verifica na folha de registo)

76. Beatriz: “**Essa não fizemos.**” (referindo-se à figura ao lado)



Pegando apenas em três quadrados de cartolina, diz: “**Eu vou descobrir mais com três. Só fizemos seis. Tenho de descobrir mais.**”

No início do excerto da interacção, verifica-se que o Diogo constrói uma figura em que os quadrados se tocavam apenas nos cantos [fala 57], não sendo capaz de ver que a figura não obedecia às condições pretendidas, referidas no enunciado da tarefa. A Sara chama, imediatamente, atenção para o facto [fala 58].

O diálogo mostra uma harmonia em termos de dinâmica interactiva entre o Diogo e a Sara, assistindo-se à criação de uma dinâmica de co-construção de uma resolução, entre os dois alunos. Cada um dos alunos retoma e acrescenta algo à ideia do outro, quando o outro termina, e assim sucessivamente, assistindo-se a um início de negociação de uma resolução. No entanto, ao longo da interacção não é possível saber se cada um dos alunos alcançaria uma ou a mesma resolução se estivesse a trabalhar individualmente.

O contrato didáctico que previa, entre outros aspectos, a partilha de ideias entre os elementos do grupo e que esteve presente aquando da resolução da primeira questão desta

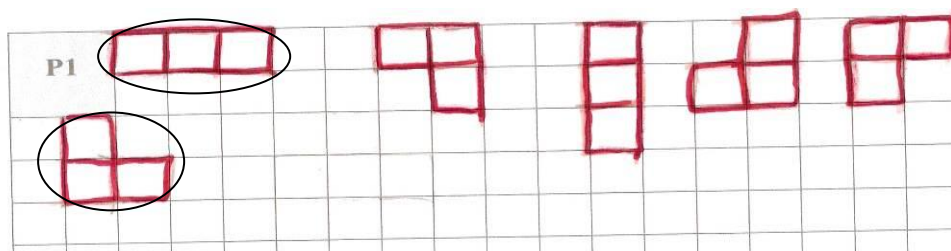
tarefa está, novamente, patente na fala da Sara [fala 63], quando procura apresentar ao grupo as suas descobertas.

Na interacção anterior, nota-se uma persistência na resolução da tarefa por parte da Beatriz [fala 65]. A persistência da aluna está ainda presente, posteriormente, nas falas 67 e 76.

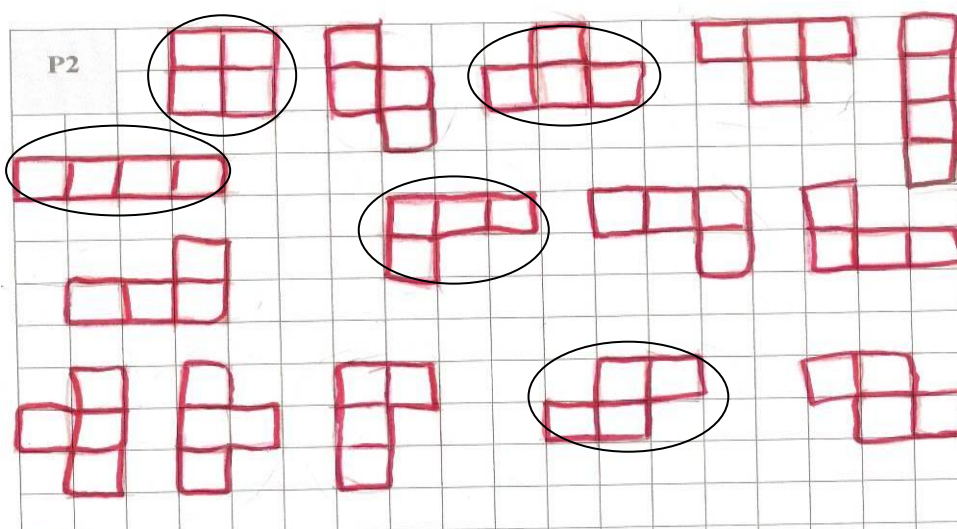
Como se constata nos excertos apresentados, ao longo da resolução da tarefa os alunos foram representando, no local correspondente, as figuras que iam construindo com os quadrados de cartolina que lhes foram fornecidos, procedendo ainda à sua contagem. Os registos da tarefa apresentam-se a seguir (figura 11).

Figura 11 – Registos apresentados relativamente à resolução da tarefa 1

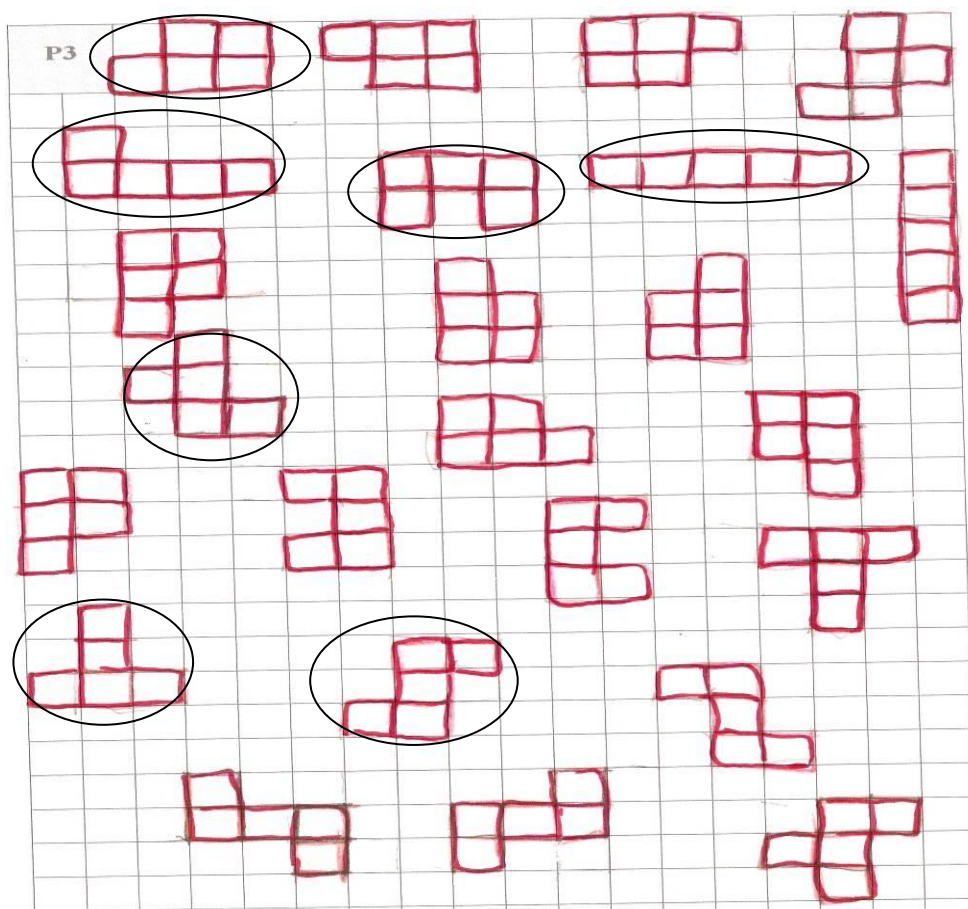
P1 • De que formas diferentes podem as 3 mesas ser colocadas? 6



P2 • E se forem 4 mesas? 15



P3 • E 5 mesas? 2 3



Relativamente à primeira questão “De que formas diferentes podem as três mesas ser colocadas?” e à segunda questão “E se forem 4 mesas?”, salienta-se que o grupo conseguiu descobrir todas as figuras base, que são as que se encontram atrás assinaladas, e ainda outras que são simétricas e possíveis de obter por rotação e reflexão. No que se refere à terceira questão “E 5 mesas?”, o grupo conseguiu encontrar sete (das doze) figuras base e outras simétricas a elas.

O fragmento de diálogo a seguir reproduzido equivale à parte final da fase de discussão.

- 237. Professora: “É possível fazer mais figuras diferentes com três, quatro ou cinco mesas?”
- 238. Turma: “Com cinco.”
- 239. Prof.: “E se pusessem seis mesas? Iam ter mais ou menos figuras diferentes?”
- 240. Turma: “Mais.”
- 241. Prof.: “E se pusessem sete? Iam ter mais ou menos figuras diferentes?”

242. Turma: “**Mais.**”

243. Prof.: “**Então, o que é que podemos concluir daqui?**”

244. Diogo: (porta-voz do grupo *Detectives*) “**Quantas mais mesas ficam mais formas.**”

245. Pedro: (porta-voz do grupo *Matemáticos*) “**Quantas mais mesas quantas mais formas.**”

Considera-se importante a transcrição deste momento, uma vez que permite confirmar que, após uma sucessão de perguntas colocadas pela professora, os alunos conseguem ir um pouco mais além do que era questionado no enunciado da tarefa, isto é, fazem uma generalização muito simples quanto ao número de mesas e ao número de formas, designadamente: “*Quantas mais mesas quantas mais formas*” [fala 245].

### **Reflexões gerais**

Tal como referido no início deste capítulo, salientam-se duas fases do trabalho: a fase de desenvolvimento e a fase de discussão, por estarem estritamente relacionadas com a actividade do grupo.

#### Desenvolvimento da investigação

Nos excertos das interacções da primeira tarefa de investigação é possível assistir a momentos de co-construção, uma vez que os alunos se envolvem numa procura conjunta de soluções, não sendo visíveis conflitos sócio-cognitivos. A tarefa foi realizada de forma cooperativa, assistindo-se a uma participação mais ou menos equitativa de três dos alunos, do Diogo, da Sara e da Beatriz. Inicialmente, verifica-se a ausência de participação do Carlos, porém, no decurso da actividade, este foi interagindo e cooperando com os colegas. Salienta-se que, por um lado, os colegas apelaram à participação e intervenção do Carlos na fase de desenvolvimento da tarefa mas, por outro lado, parece não lhe terem dado o tempo de que este necessitava para elaborar e apresentar uma resolução. A propósito, o aluno referiu, na entrevista realizada no final do projecto, que os colegas “*eram mais rápidos*”.

Ao longo desta fase, os elementos do grupo foram-se apropriando da actividade a ser desenvolvida, debatendo sobre o que está em causa e realizando as suas experiências relativas à construção de diferentes figuras com 3, 4 e 5 quadrados. Inicialmente, as figuras construídas resultaram, essencialmente, de um processo de tentativa e erro. A partir do momento que os alunos verificam que através de um processo de rotação e reflexão é

possível obter outras figuras irrompe, no seio do grupo, a descoberta de várias figuras diferentes, com o mesmo número de quadrados.

O desenvolvimento da tarefa consistiu, em geral, no seguinte padrão de actuação: construir a figura com o material manipulável e, em seguida, reproduzi-la para o papel (folha de registo).

A tarefa revelou-se muito rica do ponto de vista da construção de figuras, tendo o grupo obtido bastante êxito na sua resolução, uma vez que conseguiu obter um número significativo de figuras. O facto de o Carlos ter desempenhado um papel mais passivo, parece não ter tido consequências negativas na compreensão da resolução da tarefa. Deste modo, aparentemente, o aluno beneficiou, tal como os colegas, de ter trabalhado de forma cooperativa.

De referir que o registo escrito foi elaborado conforme decorria o desenvolvimento da investigação.

#### Discussão final

A discussão final visou, sobretudo, a apresentação dos principais resultados alcançados pelos grupos, não se verificando mudanças relativamente aos resultados obtidos pelo grupo objecto de estudo, nem aos processos por si utilizados. A partilha de ideias e troca de opiniões possibilitou que se estabelecesse uma generalização simples [fala 245], relativamente ao número de formas e de mesas, nomeadamente: “*Quantas mais mesas quantas mais formas*”.

### **Tarefa 2 – Triângulos de Fósforos**


Uma análise da interacção estabelecida, no decurso da resolução da primeira questão da tarefa - “*Quantos triângulos conseguem formar utilizando 7 fósforos?*” - denota uma participação equitativa de dois dos alunos: do Diogo e da Beatriz.

1. Diogo: “**São três, Bia.**” E dirigindo-se à Sara (secretária do grupo), acrescenta: “**Põe três. Escreve três.**”
2. Beatriz: “**Mas pode dar mais. Podemos ver mais. Não ponhas três.**”
3. Diogo: “**Não. Só dá assim. Com sete dá sempre três.**”
4. Beatriz: “**Está bem.**”

Logo no início da interacção assiste-se ao delinear de uma atitude de liderança por parte do Diogo [fala 1], que está patente no tempo verbal que utiliza, o imperativo. Esta liderança está ainda vigente na fala 3. A Beatriz inicialmente não partilha da ideia do Diogo, mostrando vontade de descobrir algo mais [fala 2], mas acaba por concordar com a opinião do colega, sem o questionar [fala 4].

Em conjunto, o Diogo e a Beatriz, demonstraram facilidade na resolução da questão e chegaram com êxito à solução, como se pode observar através da figura 12, correspondente ao registo efectuado pelo grupo.

Figura 12 – Resolução da primeira questão da tarefa 2

**P1 • Quantos triângulos conseguem formar utilizando 7 fósforos?** 

O fragmento do diálogo seguinte refere-se à interacção que se estabeleceu no decurso da resolução da segunda questão da tarefa, em que questionava os alunos sobre o número de fósforos que são necessários para construir uma figura formada por 4, 5, 6 e 7 triângulos.

5. Diogo: “**Agora é quantos fósforos precisamos para fazer quatro triângulos. Primeiro temos que fazer os triângulos e depois é que contamos os fósforos.**”

A Beatriz e o Diogo começam a tentar fazer a construção da figura com quatro triângulos. Entretanto, a Sara ajuda-os. Enquanto isto, o Carlos mantinha-se passivo, observando apenas o trabalho dos colegas.

6. Diogo: “**Carlos, tu não ajudas?**”

7. Beatriz: “**Não ouviste o que a professora disse?**”

8. Sara: “**O Carlos não quer fazer asneiras. É por isso que ele não faz.**”

A Beatriz, a Sara e o Diogo revelam-se completamente envolvidos no trabalho. Após terminarem, o Diogo conta os fósforos.

9. Diogo: “**Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove. São nove. Põe nove aqui.**”  
(dirigindo-se para a Sara e apontando para a folha de registo da tarefa)

10. Beatriz: “**A seguir é com cinco triângulos.**”

11. Sara: “**Põe aqui um. Põe aqui um. Ora vê.**”

Quando terminam o Diogo conta os fósforos.

12. Diogo: “**São onze.**”

13. Beatriz: “**Agora com seis triângulos.**”

14. Carlos: “**Falta mais um aqui e faz uma roda.**” (figura formada por seis triângulos, como se mostra ao lado)



A Beatriz certifica-se de que a figura está correcta e conta os triângulos.

15. Beatriz: “**Um, dois, três, quatro, cinco, seis.**” (...)

Posteriormente conta os fósforos: “**Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez, onze, doze.**” (...)

16. Diogo: “**Doze.**”

(...)

54. Prof.: “**A próxima pergunta é com sete.**”

55. Sara: “**Deixa o Carlos fazer. Deixa o Carlos fazer.**”

56. Diogo: “**Ó Carlos agora só é preciso acrescentar...**”

57. Beatriz: “**...Dois.**”

58. Carlos: “**Um, dois.**” (acrescenta dois fósforos à figura construída, fazendo mais um triângulo)

59. Diogo: Após o colega terminar a figura diz, imediatamente, sem contar os fósforos: “**Catorze. Catorze.**”

Apontando para a figura anterior que tinham desenhado na folha de registo, o aluno refere: “**Esta tinha doze. Juntamos mais dois... treze, catorze. São catorze fósforos.**”

Os colegas tentam ajudar a Sara a fazer o registo.

60. Carlos: “**É uma roda e depois isto.**”

61. Beatriz: Apontando para a figura anterior refere: “**É uma roda como esta, só que se pôs mais um triângulo.**”

62. Diogo: “**Já fizemos a P2.**”

Através do excerto da interacção, vê-se que o Diogo esboça e apresenta uma estratégia de resolução [fala 5], quando diz “*Primeiro temos de fazer os triângulos e depois é que contamos os fósforos*”, o que parece traduzir uma liderança cognitiva do aluno. A interacção mostra que ele consegue conceber um plano sobre o modo de resolver a tarefa. A estratégia apresentada pelo aluno revelou-se frutífera no êxito da tarefa, sendo que foi assumida pelos colegas do grupo na resolução das questões que se seguiram. Desta forma, no desenrolar da interacção não é fácil saber se cada um dos alunos chegaria à mesma solução se estivesse a trabalhar sozinho. O processo interactivo ajudou-os a progredirem nas suas resoluções, gerando-se um diálogo estimulante para os parceiros, que se traduz nos seus desempenhos. Quando terminam a construção dos triângulos, o Diogo, assumindo a estratégia que apresentou, conta o número de fósforos que compõem as figuras, facto que se verifica através das falas 9, 12 e 16.

No início desta tarefa o Carlos teve novamente uma atitude pouco interventiva, limitando-se a observar o trabalho dos colegas, o que levou o Diogo e a Beatriz [falas 6 e


7] a sentirem necessidade de apelar à sua intervenção e cooperação na resolução da tarefa, de modo a evitar uma ruptura no contrato estabelecido (que previa a cooperação de todos os elementos do grupo). A Sara, que na tarefa anterior chamou o Carlos à atenção, agora desculpabiliza-o procurando justificar perante os outros o comportamento do colega [fala 8]. Curiosamente é o Carlos quem apresenta a resolução do terceiro ponto da segunda questão [fala 14]. Num momento posterior, a Sara propõe uma forma de o Carlos poder participar, sugerindo aos colegas que seja ele a procurar a solução referente ao número de fósforos necessários para construir sete triângulos [fala 55].

No final da resolução da segunda questão assiste-se, novamente, a uma liderança cognitiva do Diogo. No desenrolar da questão era quase sempre ele que, seguindo a estratégia que delineou inicialmente, procedia à contagem do número de fósforos que compunham as figuras construídas. Porém, no final, já não necessitava de realizar essa contagem. Desta forma, ao ter interiorizado que a construção de um novo triângulo implicava a utilização de mais dois fósforos, o aluno demonstra possuir um bom raciocínio matemático. Através da fala 59 constata-se que o Diogo mantém na memória o trabalho já feito e calcula, mentalmente, o número de fósforos utilizados na construção da figura com sete triângulos.


A tarefa sobre a qual recai esta análise tem um carácter geométrico e numérico. Assim, ao observar-se os registos efectuados pelo grupo (figura 13), verifica-se que, para além de indicarem o número de triângulos, também procederam ao desenho da figura, tendo conseguido um registo bem estruturado.

Figura 13 – Registo referente à resolução da segunda questão da tarefa 2

**P2 • Quantos fósforos são precisos para construir uma figura formada por:**

9 4 triângulos?  9

12 6 triângulos? 

11 5 triângulos?  11

14 7 triângulos? 



Na terceira parte da tarefa pedia-se aos alunos para procurarem regularidades entre o número de fósforos que utilizaram e o número de triângulos que construíram. Segue-se um fragmento do diálogo.

63. Prof.: “Acabaram? (...)”

64. Beatriz: “Já.”

(...)

67. Prof.: “Qual é a relação entre os fósforos que utilizaram e os triângulos que construíram?”

68. Diogo: “Se nós juntarmos tudo ficam mais coisas, fica uma figura maior.”

69. Prof.: “Olhem para o trabalho que fizeram. Reparem nos triângulos que foram construindo e vejam o que acontece com os fósforos que são necessários para construir as diferentes figuras.”

A professora afasta-se do grupo, deixando-os reflectir sobre o trabalho que realizaram. Os alunos analisam o trabalho, fazem novas construções, mas não encontram nenhuma relação entre os dados.

Passado algum tempo, a professora regressa ao grupo e coloca-lhes, então, mais algumas questões.

70. Prof.: “Ainda não descobriram nada?”

71. Beatriz: “Não.”

72. Prof.: “Para um triângulo quantos fósforos são precisos?”

73. Beatriz: “Três.”

74. Prof.: “Para dois triângulos?”

75. Beatriz: (faz a construção da figura e conta os fósforos) “Cinco.”

76. Prof.: “Para três triângulos?”

77. Beatriz: “Sete.”

78. Prof.: “O que aconteceu?”

(...)

81. Beatriz: “Eu tinha posto um triângulo, depois aumentei mais dois fósforos e fiz dois triângulos. Aumentei mais dois e fiz três triângulos.”

82. Prof.: “Então o que é que existe entre os triângulos e o número de fósforos?”

83. Beatriz: “Nós vamos metendo mais fósforos e ficam cada vez mais triângulos.”

84. Prof.: “Mais fósforos? Quantos?”

85. Beatriz: “No primeiro triângulo pus três, para fazer o outro triângulo pus dois e para fazer o outro pus, outra vez, mais dois.”

O Diogo é o primeiro a procurar apresentar uma relação entre os dois, mas manifesta dificuldades em verbalizar e justificar os seus argumentos [fala 68]. Assim, é a Beatriz que, com base na intervenção e questionário oral da professora, apresenta uma proposta mais clarificada de resolução da tarefa [fala 81]. Em seguida, a aluna vai acrescentando outras ideias [falas 83 e 85], procurando sustentar os seus argumentos e justificações. Nesta fase, a intervenção da professora junto do grupo foi fundamental, pois levou os alunos a procurarem justificações, o que contribuiu para o sucesso da resolução da questão.

É de referir que o procedimento adoptado na construção dos triângulos foi diferente do dos restantes grupos e até daquele em que a professora havia pensado. De acordo com o exemplo presente no enunciado da tarefa, o segundo triângulo foi construído ao lado do primeiro (com um lado na horizontal). Porém, a partir do terceiro triângulo, o grupo foi construindo os outros triângulos não na horizontal, mas em forma circular, daí as expressões proferidas pelo Carlos nas falas 14 e 60, respectivamente: “(...) *faz uma roda*” e “*É uma roda e depois isto*”. Este procedimento levou a que a relação entre o número de fósforos utilizados e o número de triângulos construídos não fosse simples de encontrar.

Este facto levou a que, na presente tarefa, a fase de discussão desempenhasse um papel fundamental, havendo, como referem Tudella *et al* (1999), apresentação dos principais resultados e dos diferentes processos desenvolvidos, confronto de opiniões e validação, por toda a turma, das conjecturas que cada grupo considerou verificadas. Assim, observe-se o seguinte diálogo que corresponde a uma parte da discussão final.

161. Prof.: “**A partir dessa figura com cinco triângulos, o que é preciso fazer para termos seis triângulos?**”

162. Beatriz: (porta-voz do grupo *Detectives*) “**É só preciso pôr aqui mais um fósforo.**”

163. Prof.: “**Construíste seis triângulos. Quantos fósforos utilizaste?**”

164. Beatriz: “**Doze**”.

165. Prof.: “**Para construir sete triângulos quantos fósforos utilizaram, Andreia?**”

166. Andreia: (porta-voz do grupo *Matemáticos*) “**Quinze.**”

(...)

175. Prof.: “**Beatriz...?**”

176. Beatriz: “**Catorze.**”

A aluna desenhou a figura, visto o grupo ter conseguido utilizar o menor número possível de fósforos.

(...)

179. Prof.: “**Relativamente à última pergunta, que regularidades descobriram?**”

180. Francisca (porta-voz do grupo *Descobridores*) “**Quantos mais triângulos maiores os números são?**”.

181. Prof.: “**Os números? Que números?**”

182. Bruno: (elemento do mesmo grupo) Tenta ajudá-la e responde: “**Os números dos fósforos.**”

183. Prof.: “**Tenta explicar melhor a tua ideia.**”

184. Bruno: “**Quantos mais fósforos mais triângulos dá. Dois fósforos vai dar mais um triângulo.**”

(...)

205. Prof.: “**Do quinto triângulo para o sexto quantos fósforos puseram a mais?**”

206. Diogo: “**Um.**”

207. Prof.: “**Então a regra é sempre mais dois? (...)**”

(...)

213. Diogo: “**Aumentam-se sempre mais dois fósforos só que, às vezes, só se aumenta um.**”

214. Prof.: “**E quando é que se aumentou mais um.**”

215. Beatriz: “**Para fazer seis.**”

No final, a professor chama a atenção para o que aconteceria se a figura fosse sempre construída na horizontal. Desta forma, desenha no quadro uma sequência de triângulos, para os alunos verem que, deste modo, se aplica a regra de acrescentar sempre mais dois fósforos na construção de um triângulo.

Com base no excerto verifica-se que a Beatriz refere que para construir o sexto triângulo “*É só preciso pôr mais um fósforo*” [fala 162], acrescentando que, na construção de seis triângulos, o grupo apenas utilizou doze fósforos [fala 164]. Os restantes grupos referiram ter utilizado treze fósforos, uma vez que construíram os triângulos de forma diferente. A maioria fez a construção dos triângulos seguindo uma linha horizontal, o que vai implicar, a partir daqui, a utilização de um número diferente de fósforos, como comprova a fala 166 da Andreia (porta-voz do grupo *Matemáticos*). Relativamente ao número de fósforos necessários à construção de sete triângulos, a Andreia (tal como os outros porta-vozes) referiu que são necessários quinze fósforos. Resposta diferente deu a Beatriz [fala 176], pois o seu grupo conseguiu utilizar menos fósforos, tanto na construção do sexto como do sétimo triângulo. Se fosse solicitado a construção de mais triângulos os fósforos utilizados pelo grupo *Detectives*, provavelmente, continuariam a ser em menor número que os utilizados pelos restantes grupos, devido ao procedimento utilizado na sua construção.

Apenas dois grupos (*Descobridores* e *Detectives*) conseguiram, durante a fase de desenvolvimento da investigação, encontrar regularidades entre o número de fósforos e o número de triângulos. A utilização de procedimentos diferentes conduziu, também, à descoberta de diferentes regularidades.

A Francisca [fala 180] procura apresentar uma regularidade, mas revela dificuldades em transmitir e verbalizar as suas ideias. Desta forma, o Bruno, colega de grupo, procura auxiliá-la, esclarecendo a sua ideia. Assim, menciona que “*Quantos mais fósforos mais triângulos dá. Dois fósforos vai dar mais um triângulo*” [fala 184]. A última parte do argumento apresentado pelo aluno nem sempre se verifica, sendo contrariado pelo Diogo que refere “*(...) às vezes só se aumenta mais um*” [fala 213], nomeadamente quando o grupo construiu o sexto triângulo.

O registo que se segue (figura 14) foi efectuado pelo grupo objecto de estudo e diz respeito à terceira e última questão. Pode-se verificar que o registo está incompleto, pois,

de acordo com o procedimento por eles utilizado, a regra de se utilizar mais dois fósforos na construção de um novo triângulo apenas se aplica até à construção do quinto triângulo, não se verificando no sexto triângulo (em que apenas utilizaram um fósforo). Parece, pois, que o procedimento adoptado pelo grupo, ainda que eficiente, dificultou a descoberta de regularidades.

Figura 14 – Registo correspondente à resolução da terceira questão da tarefa 2

**P3 • Conseguem encontrar algumas regularidades entre o número de fósforos que utilizaram e o número de triângulos construídos?**

No primeiro triângulo tem-se três fósforos  
e nos outros triângulos metámoos + 2.

### Reflexões gerais

#### Desenvolvimento da investigação

No que se refere à presente tarefa de investigação, observa-se uma participação mais equilibrada entre todos os elementos do grupo. Ao longo da tarefa, foram co-construindo uma solução não sendo nítida uma manifestação observável de desacordos ou contradições entre eles (Gilly, Fraisse e Roux, 1988). O Carlos parece ter começado a desinibir-se, dado que estabeleceu uma interacção mais assumida, interventiva e cooperativa do que na tarefa anterior. Desta forma, a análise da interacção entre os elementos do grupo aponta para o facto de todos os alunos terem, de algum modo, beneficiado com a mesma.

No início da fase de desenvolvimento, o Diogo demonstra ter compreendido a tarefa proposta e indica aos colegas uma estratégia de resolução [fala 5]. É ele quem, num primeiro momento (na primeira e segunda questão), lidera cognitivamente. Num segundo momento (terceira questão) é a Beatriz que demonstra alguma liderança cognitiva.

A exploração da tarefa consiste no seguinte padrão de actuação: acrescentar mais um triângulo à figura, contar os fósforos e reproduzir a figura para o papel.

Na construção das figuras, a Beatriz e o Diogo verificam que a composição de um novo triângulo implica a utilização de mais dois fósforos (excepto no sexto triângulo).

Pode-se observar a dificuldade de verbalização das ideias matemáticas dos alunos que apenas conseguem apresentar uma regularidade entre o número de triângulos e o número de fósforos após a professora estabelecer um debate com o grupo, levando-os a reflectir sobre o trabalho realizado.

De referenciar que o registo escrito foi elaborado conforme sucedia o desenvolvimento da investigação.

### Discussão final

Na presente tarefa, a fase de discussão representa um momento importante do trabalho, pois permite aos alunos terem conhecimento da obtenção de diferentes resultados por parte dos grupos. Assim, o grupo objecto de estudo, ao utilizar um processo diferente na construção dos triângulos, consegue construir o sexto e o sétimo triângulo utilizando o menor número possível de fósforos. Esta estratégia, apesar de conduzir a um resultado mais económico, dificulta a descoberta de regularidades entre o número de fósforos e o de triângulos. Deste modo, a professora destaca o processo de resolução que permite obter a regularidade: *acrescentando dois fósforos obtemos mais um triângulo*.

### **Tarefa 3 – As Mesas da Cantina da Escola**

Uma leitura inicial da interacção que se estabeleceu no seio do grupo traduz uma participação activa e equitativa de três dos seus elementos (Diogo, Sara e Beatriz), na procura de soluções para as questões colocadas no enunciado da tarefa. De acordo com Gilly, Fraisse e Roux (1988), está-se perante uma dinâmica de co-construção, uma vez que se assiste a uma cooperação na procura de uma resolução onde não há desacordos ou contradições entre os alunos.

1. Beatriz: **“Já sei o que se pode fazer. Divide-se...vai ficar um bocadinho para cada um.”**  
(referindo-se aos cartões com as imagens das pessoas)

Assim, distribuiu as imagens das pessoas, uma a uma, por cada um dos elementos do grupo, à excepção do Carlos que estava incumbido de registar os resultados obtidos. Feita a distribuição, e uma vez que os cartões referentes às mesas já estavam colocados correctamente em cima da secretária do grupo, o Diogo coloca a primeira pessoa num lado de uma das mesas. Seguiu-se a Sara que colocou a segunda pessoa também num dos lados da segunda mesa. Depois foi a Beatriz quem “sentou” mais uma pessoa, e assim sucessivamente. Após sentarem todas as pessoas nas três mesas, o Diogo diz:

2. Diogo: **“Vamos contar.”** E inicia a contagem, em voz alta, das pessoas “sentadas” nas 3 mesas: **“Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito.”**

3. Sara: Para se certificar de que o Diogo tinha contado correctamente volta a contar, também em voz alta: **“Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito.”**

4. Beatriz: **“Agora temos que tirar as pessoas para pôr mais uma mesa.”**

Enquanto o Carlos regista os resultados obtidos na primeira questão os colegas recolhem as imagens alusivas às pessoas, de modo a iniciarem a resolução da segunda questão - *“Quantas pessoas podem sentar-se em 4 mesas?”*. Entretanto, o Diogo vai dando algumas indicações ao Carlos para efectuar os registos.

5. Diogo: **“Não é assim. É deitado.”** (referindo-se ao desenho das mesas)

A Sara e a Beatriz juntam mais um cartão, ficando dispostas quatro mesas/cartões. Em seguida, o Diogo volta a “sentar” a primeira pessoa, posteriormente é a Sara e depois a Beatriz, e assim sucessivamente.

Quando terminam de “sentar” as pessoas em torno das quatro mesas, a Beatriz, sem contar, refere:

6. Beatriz: **“Sentaram-se dez pessoas.”**

7. Sara: Verifica os registos que o Carlos está a efectuar, contando as pessoas que ele desenhou: **“Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez.”** Depois conta cada uma das pessoas que eles sentaram nas mesas: **“Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez.”**

Posteriormente, passaram para a terceira questão, em que lhes era perguntado quantas pessoas se podiam sentar em cinco mesas. Enquanto a Beatriz junta mais um cartão aos quatro que já estavam distribuídos em cima da mesa do grupo, o Carlos começa a desenhar, na folha de registo, as cinco mesas. Entretanto, o Diogo “sentou” a primeira pessoa.

8. Beatriz: **“Põe Sara. És tu.”**

A Sara “sentou” a segunda pessoa, a Beatriz a terceira, e assim sucessivamente.

(...)

11. Beatriz: Sem contar as figuras, responde: **“São doze.”**

12. Diogo: **“Como é que sabes que são doze?”**

13. Beatriz: Apontando para as figuras conta-as em voz alta para os colegas: **“Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez, onze, doze.”**

14. Diogo: **“Treze.”**

15. Beatriz: **“São doze.”** E volta a contar as pessoas: **“Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez, onze, doze.”**

Em seguida, verifica o registo efectuado pelo Carlos, contando as pessoas que ele desenhou: **“Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez, onze, doze. Escreve aí doze pessoas.”**

Os três alunos recolhem, novamente, as figuras que representam as pessoas.

16. Diogo: **“Agora com seis mesas.”**

E, enquanto a Sara e a Beatriz colocam mais um cartão equivalente a uma mesa, acrescenta: **“Carlos põe aqui seis mesas. Seis mesas deitadas.”** (apontando para a folha de registo)

O Carlos começa a fazer os registos, enquanto os colegas distribuem as mesas e as pessoas. Estes, por sua vez, não contaram as pessoas no final.

17. Carlos: **“Já está. Catorze pessoas.”**

Uma análise do diálogo mostra que a Beatriz inicia a interacção [fala 1] propondo a distribuição equitativa do material que lhes foi distribuído (figuras correspondentes às pessoas), à excepção do Carlos que desempenhava a função de secretário e, como tal, estava responsável por efectuar os registos.

Relativamente à primeira questão da tarefa “*Quantas pessoas se podem sentar em três mesas?*”, a resposta foi sendo co-construída entre o Diogo, a Sara e a Beatriz, no entanto, a solução é apresentada pelo Diogo [fala 2].

Para a resolução da segunda questão, a Beatriz define uma estratégia de resolução [fala 4]. A aluna propõe a recolha das imagens correspondentes às pessoas que haviam sentado nas mesas, a colocação de uma nova mesa e, finalmente, “sentar” outra vez, uma a uma, as pessoas em torno das mesas. Embora a estratégia apresentada não fosse a mais simples e rápida, foi aceite e utilizada pelos colegas do grupo, tanto na resolução desta questão como das que se seguiram. Esta estratégia adoptada pelo grupo vai inibir o processo de generalização, como se irá ver mais à frente, quando procuram encontrar regularidades entre o número de mesas e o número de pessoas.

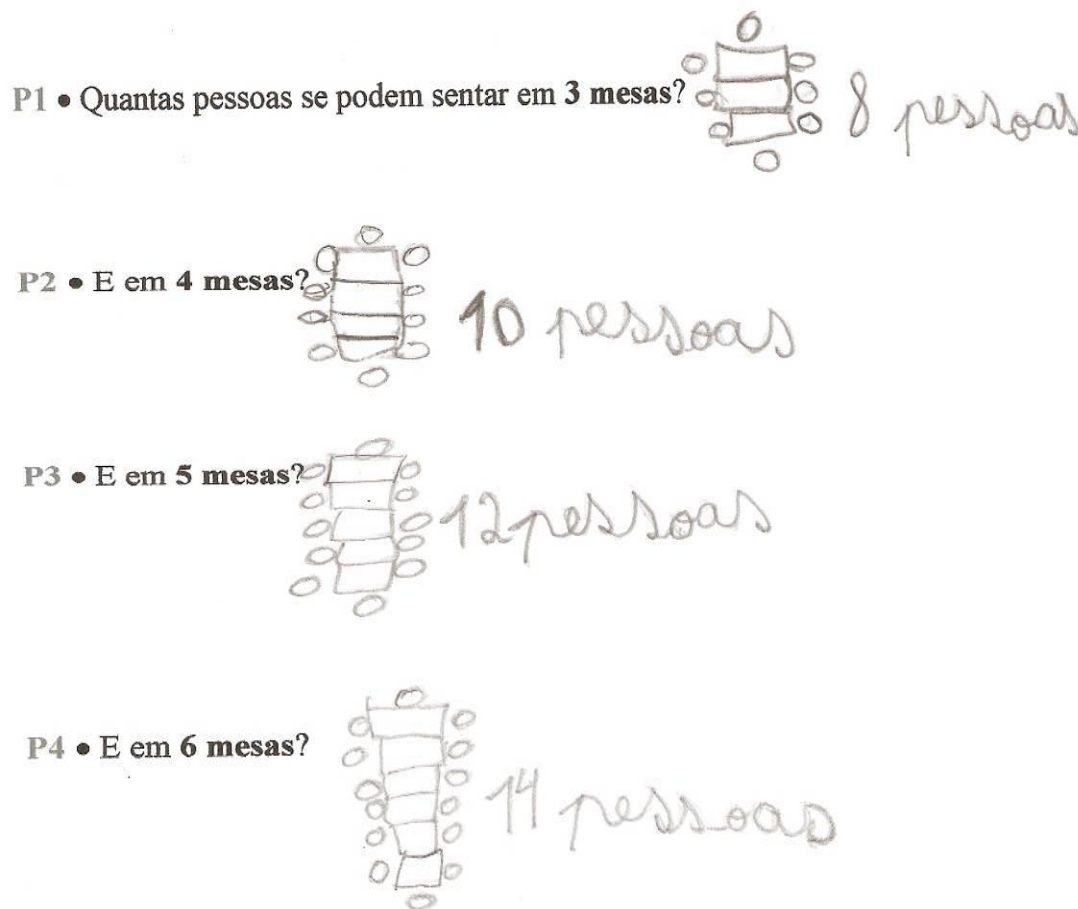
A Beatriz, ao longo deste excerto da interacção, vai manifestando alguma liderança cognitiva [falas 6 e 11], pois, sem fazer a contagem das pessoas “sentadas”, a aluna apresenta a solução correcta relativamente à segunda e à terceira questão da tarefa, o que parece significar que conseguiu, mentalmente, estabelecer uma relação entre o número de mesas e o número de pessoas.

No que concerne à terceira questão – “*E em 5 mesas?*” – assiste-se a um conflito de opiniões, embora ténue, entre o Diogo e a Beatriz, ao não estarem de acordo quanto ao número de pessoas que se podem sentar em cinco mesas. O Diogo questiona [fala 12] a solução apresentada pela Beatriz [fala 11] que, por sua vez, se limita a explicar a sua opção através da contagem das figuras das pessoas [falas 13 e 15].

Pode observar-se, ainda, que os alunos vão cumprindo algumas regras do contrato didáctico, nomeadamente no que se refere à distribuição do material e à cooperação e interajuda entre todos os elementos do grupo. O Diogo, para além de colaborar na procura de soluções, também auxilia o secretário do grupo na realização dos registos [falas 5 e 16].

O ritmo da interacção impresso na resolução das quatro primeiras questões desta tarefa foi muito rápido, o que significa que não houve dificuldades na sua resolução. Os resultados apresentados relativamente às questões estão correctos, como se comprova através da figura 15, correspondente aos registos efectuados pelo grupo.

Figura 15 – Registos referentes às quatro primeiras questões da tarefa 3



Observando os registos apresentados pelo grupo verifica-se que, tal como nas tarefas anteriores, apresentam um cariz geométrico, com o desenho das mesas, e numérico, com a indicação do número de pessoas “sentadas”.

O excerto que se segue corresponde à interacção que teve lugar no grupo aquando da resolução da quinta questão da tarefa, em que se pretendia que os alunos procurassem regularidades entre o número de mesas e o número de pessoas.

24. Prof.: “A que conclusões chegaram? (...) Qual é a regularidade que encontram entre o número de mesas e o número de pessoas?”

25. Beatriz: “Quantas mais mesas mais pessoas.”

26. Prof.: “Como é que isso acontece?”

27. Diogo: “Porque é assim. Uma mesa dá para quatro. Depois, se juntarmos outra mesa sai uma pessoa e depois põe-se outra vez e aumenta-se sempre mais pessoas.”

28. Prof.: “E como é que aumenta o número de pessoas e o número de mesas?”

29. Beatriz: “Cada vez que se aumentam as mesas aumenta-se as pessoas.”



30. Prof.: “**E como é que aumentam o número de mesas e o número de pessoas?**”

31. Beatriz: “**Põe-se assim...**” (colocando uma mesa com quatro pessoas à volta). “**Para aumentar uma mesa temos de tirar esta pessoa. Depois põe-se na outra mesa e vai-se aumentando, na outra mesa, as outras pessoas.**”

32. Prof.: “**E quantas são as outras pessoas?**”

(...)

40. Beatriz: “**Mais duas.**”

41. Prof.: “**E com a terceira mesa?**”

A aluna retira uma das figuras e coloca mais um cartão para ficarem três mesas juntas. A figura que tinha retirado coloca-a na terceira mesa.

42. Prof.: “**Quantas pessoas faltam sentar na terceira mesa?**”

43. Beatriz: “**Duas.**”

44. Prof.: “**Carlos, e na quarta mesa?**”

O aluno retira a pessoa que está na ponta da terceira mesa, coloca a quarta mesa e volta a sentar a pessoa que havia retirado.

45. Prof.: “**Quantas pessoas faltam sentar nessa mesa?**”

46. Carlos: “**Duas.**” (e acrescenta as duas figuras)

47. Prof.: “**E na quinta mesa?**”

O Carlos repete o procedimento que adoptou anteriormente.

48. Prof.: “**Quantas pessoas ainda podem sentar-se nessa mesa?**”

49. Carlos: “**Duas.**”

50. Prof.: “**E na sexta mesa?**”

(...)

52. Carlos: “**Duas.**”

(...)

65. Prof.: “**O que é que vocês vêem entre o número de pessoas e o número de mesas?**”

66. Diogo: “**Já sei. Começa com três pessoas, depois aumenta-se sempre duas e na última também são três.**”

A análise do excerto permite verificar que a Beatriz apresenta a primeira conclusão, embora ainda pouco estruturada “*Quantas mais mesas mais pessoas*” [fala 25]. Por sua vez, o Diogo interveio procurando desenvolver e esclarecer a ideia da colega [fala 27]. Esta, em seguida, retoma novamente a sua ideia inicial, salientando que: “*Cada vez que se aumentam as mesas aumenta-se as pessoas*” [fala 29].

Por se verificar alguma dificuldade dos alunos em verbalizar os seus argumentos, a professora optou por lhes colocar questões que lhes possibilitassem tomar conhecimento dos mesmos e que, simultaneamente, levassem os alunos a reflectir sobre eles. Nesta fase [falas 30 a 52], que se caracteriza por uma sequência de pergunta-resposta entre a

professora e o grupo, respectivamente, vê-se que os alunos vão explicando as suas ideias e exemplificando com o recurso ao material manipulável. Para além disso, a estratégia utilizada neste momento é relativamente diferente, como é possível comprovar através da fala da Beatriz [fala 31]. Agora os alunos apenas retiram uma das pessoas colocadas na ponta de uma das mesas, colocam outra mesa, voltam a “sentar” a pessoa que haviam retirado e, finalmente, acrescentam as restantes pessoas (duas pessoas). Esta estratégia, ao contrário da usada inicialmente, vai favorecer o processo de generalização. Assim, no final da interacção verifica-se que o Diogo manifesta ter encontrado uma relação entre o número de mesas e o número de pessoas que se podem sentar [fala 66]. Após transmitir oralmente a sua ideia, é ele quem procede ao seu registo, em vez do secretário, sem que isso fosse interpretado pelo colega como um sinal de incompetência da sua parte, uma vez que na interacção não se regista qualquer tipo de censura a este comportamento. Quando termina o registo, lê em voz alta para os colegas, de forma a obter a sua concordância. O registo realizado está patente na figura seguinte (figura 16).

Figura 16 – Registo referente à resolução da terceira questão da tarefa 3

P5 • Conseguem encontrar alguma regularidade?

Na primeira mesa põe-se 3 pessoas e acrescenta 2  
e na última também se põe 3 pessoas, mas a mesa.

### Reflexões gerais

#### Desenvolvimento da investigação

Ao analisar-se os dois excertos da interacção que ocorreu na fase de desenvolvimento da tarefa, constata-se que todos os alunos participaram na sua resolução. Porém, é a Beatriz quem apresenta a maioria das soluções [falas 6, 11 e 25] e propõe uma estratégia de resolução da tarefa “Primeiro temos de tirar as pessoas para pôr mais uma mesa” [fala 4], que é aceite e seguida pelos restantes elementos do grupo. Assim, inicialmente o padrão de actuação consiste em: retirar as pessoas “sentadas” em torno das mesas, colocar mais uma mesa, voltar a “sentar” as pessoas que foram retiradas e,

finalmente, acrescentar as pessoas em falta. Com o debate estabelecido entre a professora e o grupo surge uma mudança de estratégia, sugerida também pela Beatriz [fala 31]. Deste modo, o seu plano de actuação passa a ser: retiram apenas a pessoa “sentada” no topo de uma das mesas, acrescentam outra mesa, voltam a “sentar” a pessoa que retiraram e acrescentam as restantes pessoas (mais duas). Esta mudança de estratégia vai favorecer o estabelecimento de regularidades.

À semelhança das tarefas anteriores, os alunos puderam utilizar material manipulativo, o que poderá ter contribuído para o sucesso da mesma. De referir que o material correspondente às figuras das pessoas foi fornecido em excesso, para não condicionar a resolução. O ritmo da interacção impresso nesta tarefa foi rápido, o que é um indicador da facilidade com que a mesma foi resolvida por parte do grupo, essencialmente, no que se refere às quatro questões iniciais. Para além disto, os alunos manifestaram gosto por esta tarefa, como se pode aferir através de uma das respostas dadas pelo Diogo na entrevista: “(...) gostei daquela tarefa que era de nós fazermos as mesas. Era engraçada”.

O registo escrito foi elaborado conforme decorria a exploração da tarefa.

#### Discussão final

A discussão final, apesar de não ter provocado qualquer mudança relativamente ao trabalho realizado pelo grupo em estudo, proporcionou a apresentação e a validação, perante toda a turma, do trabalho realizado por cada um dos grupos.

### **TAREFA 4 – OITO PONTOS**

Na primeira questão da tarefa era pedido aos alunos para unir os oito pontos assinalados na figura, de forma a obter triângulos, e descrever o processo que utilizaram. A análise da interacção que se estabeleceu no interior do grupo, referente ao início da resolução desta questão, indica que o Diogo, a Sara e a Beatriz vão co-construindo uma resolução (Gilly, Fraisse e Roux, 1988).

1. Beatriz: “**Eu já sei um.**” (com o lápis e a régua começou a traçar um triângulo na folha de registo)
2. Diogo: “**Qual é que vais fazer?**”
3. Beatriz: “**É este.**” (referindo-se aos pontos 1-2-4)
4. Diogo: “**Também dá do 4 para o 6 e do 6 para o 7.**” (e efectua o registo dos pontos)
5. Sara: “**Eu também já sei um. Olha este, este e este.**” (referindo-se aos pontos 2-5-3)

Em seguida, a Beatriz começa a desenhar o triângulo referido pela Sara. Quando termina diz para o Diogo:

6. Beatriz: “Foi do 2 para o 5, do 5 para o 3 e do 3 para o 2.”

O Diogo efectua o registo.

7. Beatriz: “Já sei outro. Do 5 para o 7, do 7 para o 8 e do 8 para o 5.”

8. Diogo: “Como?”

9. Beatriz: Repete para o Diogo escrever: “Do 5 para o 7. Do 7 para o 8. Do 8 para o 5.”

Logo que termina de ditar os pontos, acrescenta: “Agora dá o 4, o 5 e o 7.” E liga os pontos referidos.

10. Diogo: Olhando para a folha diz: “Dá o 2, o 4 e o 5.”

11. Sara: “Então escreve: do 2 para o 4, do 4 para o 5 e do 5 para o 2.”

O diálogo começa com uma fala da Beatriz, quando comunica ao grupo a descoberta de uma solução [fala 1]. Nesta tarefa há dois alunos responsáveis pelos registos. Por um lado, a Beatriz está encarregue de desenhar as figuras e, por outro lado, o Diogo é responsável por assinalar os pontos correspondentes a essas figuras, o que requer um grande trabalho de cooperação entre ambos. Esta cooperação é manifestada pelo Diogo, a Beatriz e a Sara ao longo da interacção [falas 6, 9, 10 e 11], assistindo-se a um envolvimento entre eles na procura conjunta de soluções.

12. Diogo: “O Carlos não está a fazer nada.”

(...)

16. Beatriz: “Carlos dá ideias.”

17. Carlos: Depois de olhar atentamente para a folha de registo, refere: “Do 1 para o 6.”

18. Beatriz: “Do 1 para o 6 não é um triângulo.”

19. Diogo: “É. É. E do outro lado também dá.”

A Sara chama a professora numa tentativa de esclarecerem as suas dúvidas.

20. Beatriz: (apontando para os pontos 1, 6 e 4) “Ó professora, isto assim é um triângulo?”

(...)

24. Prof.: “Um triângulo quantos lados tem?”

25. Beatriz: “Tem três.”

26. Prof.: “E essa figura quantos lados tem?”

27. Beatriz: “Tem três. (...)”

(...)

30. Sara: Conta os lados: “Um, dois, três. Tem três.” E acrescenta ainda: “Esta ideia foi do Carlos.”

31. Diogo: “Agora é do outro lado.” (referindo-se aos pontos 3-8-5)

(...)

45. Sara: “Do 2 para o 5 e para o 7.”

46. Beatriz: “Vamos dizer à professora.”

47. Sara: Chama a professora e pergunta: “Professora dá assim?” (apontando para a figura)

48. Prof.: “Assim como?”

49. Sara: “Do 7 para o 2.”

50. Prof.: “E depois?”

51. Diogo: “Do 7 para o 5 e depois para o 2.”

52. Prof.: “É um triângulo ou não?”

53. Grupo: (em coro) “É.”

(...)

55. Sara: “Também dá do 2 para o 4 e para o 7.”

O grupo continua a olhar, atentamente, para os pontos na tentativa de efectuarem mais descobertas.

56. Diogo: Apontando para os pontos menciona: “E se fizermos assim: do 4 para este.”

57. Beatriz: “Espera. Espera. Deixa-me desenhar.”

58. Diogo: “Do 4 para 5 e para o 8.” E rapidamente descobre outro: “Olha, olha, e aqui também é outro triângulo.” (referindo-se aos pontos 4-8-7)

59. Sara: “Eu vou perguntar à professora.”

O grupo volta a solicitar o apoio da professora.

60. Sara: “Professora, também dá assim?”

61. Prof.: “A ligar que pontos?”

62. Diogo: “Do 4 para o 5 e para o 8, fica aqui um triângulo. E depois, do 4 para o 7 e para o 8, fica aqui outro triângulo.” (enquanto dizia ia apontando para a figura)

63. Prof.: “Correcto. (...)”

64. Sara: “Já sei outro. Do 5 para o 6 e do 6 para o 1.”

65. Beatriz: A aluna une os pontos e diz: “Escreve Diogo. Do 5 para o 6 e do 6 para o 1.”

66. Sara: “E do 1 para o 8, para o 5 e para o 2.”

67. Beatriz: “Não dá.”

68. Diogo: “Eu sei um. Vai do 1 para o 8, do 8 para o 3.” (enquanto dita, a Beatriz une os pontos)

69. Sara: “Agora escreve aí, Diogo.”

No excerto anterior vê-se que o Carlos é chamado à atenção pelos colegas, primeiro pelo Diogo [fala 12] e depois pela Beatriz [fala 16], de modo a cooperar na resolução da tarefa e evitar uma ruptura no contrato didáctico. Estas chamadas de atenção tiveram um efeito positivo, na medida que conduziram o aluno a apresentar uma proposta de resolução [fala 17] que criou um certo conflito de opiniões. O Carlos apenas referenciou dois pontos, sendo que, para a Beatriz [fala 18], a proposta apresentada estava incorrecta, mas na opinião do Diogo [fala 19] estava correcta. Não havendo consenso recorrem à professora, numa tentativa de serem aprovada, ou não, a proposta [fala 20].

O recurso à professora é algo que caracteriza esta parte da interacção, isto é, os alunos solicitam, várias vezes, a presença da professora junto do grupo [falas 47 e 60], com o objectivo de serem validadas as suas respostas. Porém, a ajuda da professora foi,

essencialmente, no sentido de lhes colocar novas questões [falas 24 e 26] que os conduzissem à análise e reflexão do seu próprio trabalho.

Atendendo aos dois excertos anteriormente transcritos, referentes à resolução da primeira questão desta tarefa de investigação, constata-se que, para além de uma participação mais ou menos equitativa entre os três alunos (Diogo, Sara e Beatriz), também se verifica um equilíbrio quanto ao número de soluções apresentadas por cada um. Através da união dos oito pontos assinalados na figura, o grupo conseguiu obter um total de dezassete triângulos, como se pode ver pelos registos que efectuaram (figuras 17 e 18). Este resultado é impressionante, não só pela pela quantidade de triângulos que conseguiram descobrir como pela qualidade presente nos seus registos.

Figura 17 – Desenho dos triângulos resultantes da união dos oito pontos assinalados

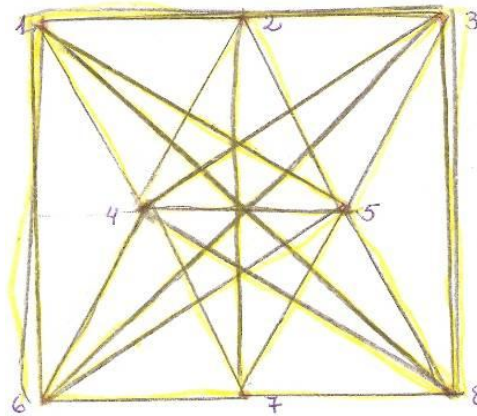


Figura 18 – Descrição do processo utilizado na obtenção dos triângulos

17

P1 • Unindo outros pontos da figura é possível obter mais triângulos?

Quantos?

Descrevam o processo que utilizaram.

Handwritten student work showing 17 triangles with their vertex labels:

- $\nabla$  - 1-2-4-1
- $\triangle$  - 4-6-7-4
- $\nabla$  - 2-5-3-2
- $\triangle$  - 5-7-8-5
- $\nabla$  - 4-5-7-4
- $\triangle$  - 2-4-5-2
- $\triangle$  - 1-6-4-1
- $\triangle$  - 3-8-5-3
- $\triangle$  - 2-4-7-2
- $\triangle$  - 2-5-7-2
- $\triangle$  - 3-4-8-3
- $\triangle$  - 4-5-8-4
- $\triangle$  - 4-7-8-4
- $\triangle$  - 1-6-3-7
- $\triangle$  - 1-8-3-1
- $\triangle$  - 5-6-1-5
- $\triangle$  - 5-6-7-5

Quanto à segunda questão desta tarefa “*É possível obter outras figuras geométricas unindo outros pontos dessa figura? Quais/Quantas?*”, é o Diogo quem dá início à sua resolução, ao apresentar a primeira proposta de resolução [fala 70], como se verifica no diálogo que se segue. Por sua vez, a Beatriz interrompe a frase do colega e termina a ideia iniciada por ele [fala 71].

70. Diogo: “**Se unirmos todos os pontos já dá.**” E continua: “**Do 1 para o 6, para o 8...**”

71. Beatriz: Interrompe, dizendo: “**Já temos uma.**” E une os pontos 1-6-8-3, formando um quadrado.

O grupo faz tentativas para obter um círculo, mas não era possível fazê-lo unindo os oito pontos.

72. Diogo: “**Eu sei fazer um triângulo.**”

73. Beatriz: “**Mas não se pode fazer triângulos. Triângulos fizemos em cima.**”

74. Diogo: “**Mas pode.**”

75. Beatriz: “**Levanta o dedo Sara. Vamos perguntar à professora.**”

A Sara levanta o dedo e aguardam que a professora vá ao grupo.

76. Beatriz: (apontando para a segunda pergunta) “**Aqui não se pode fazer triângulos, pois não?**”

77. Prof.: “**(...) Aí diz outras figuras.**”

78. Diogo: “**Eu sei um rectângulo.**”

(...)

80. Beatriz: “**Se é um rectângulo diz.**”

81. Diogo: “**É do 7 para o 2, para o 1 e para o 6.**” E continua: “**Depois dá outra do outro lado.**”

82. Beatriz: “**Pois dá. Dá um de cada lado.**”

83. Prof.: “**E quais são os pontos que têm de unir?**”

84. Diogo: “**O 3, o 8, o 7 e o 2.**”

85. Beatriz: “**Já sei outros quadrados. Faz-se daqui para aqui** (referindo-se a uma linha a unir os pontos 4 e 5) **e fica aqui um, aqui outro, aqui outro e aqui outro.**”

86. Diogo: “**Não dá.**”

87. Sara: “**Não ficam quatro quadrados.**”

88. Beatriz: “**Mas ficam. Pergunta à professora.**”

89. Diogo: Procura argumentar e diz: “**Não dá. Tens que unir até ao risco.**”

90. Prof.: Ao chegar junto do grupo pergunta: “**O que é que se passa?**”

91. Beatriz: “**Dá assim?**” (apontando para o traço que ela tinha feito a unir os pontos 4 e 5)

92. Prof.: “**O que é que fica aí?**”

93. Beatriz: (apontando) “**Fica aqui um quadrado, aqui outro quadrado, aqui outro quadrado...**”

94. Prof.: “**Isso são quadrados? (...).**”

95. Diogo: “**Eu disse que não dava.**”

Da interacção que se estabeleceu entre o Diogo e a Beatriz, presente no início do excerto anterior, nasce uma situação de conflito cognitivo quando ambos entram em

desacordo quanto às figuras que se podem construir na segunda questão. A Beatriz, ao referir “(...) *não se pode fazer triângulos. Triângulos fizemos em cima*” [fala 73], demonstra ter presente o enunciado e o significado da tarefa. Não havendo consenso entre eles solicitam, novamente, o apoio da professora [fala 75], que procura esclarecer as dúvidas e clarifica as noções necessárias para a resolução da tarefa. Posto isto, o Diogo apresenta uma nova proposta de resolução [fala 81] que, desta vez, tem a aprovação da Beatriz [fala 82]. Verifica-se, assim, uma co-construção por consentimento. Por sua vez, a Beatriz, com base na proposta do Diogo “*Depois dá do outro lado*” [fala 81], desenha rapidamente o outro rectângulo possível. O grupo continua a realizar mais tentativas e surge um novo conflito cognitivo com base numa proposta de resolução apresentada pela Beatriz [fala 85] e com a qual o Diogo [fala 86] e a Sara [fala 87] estão em desacordo. No entanto, o Diogo procura justificar a sua opinião [fala 89]. Para verem resolvido o conflito existente no seio do grupo recorrem, outra vez, à professora [fala 88], que assume uma atitude questionadora [falas 92 e 94]. Com base nas questões que lhes foram colocadas, o Diogo toma a resolução como não aceitável, ao proferir a frase: “*Eu disse que não dava*” [fala 95]. Deste modo, atendendo aquilo que lhes era pedido na segunda questão, unindo outros pontos da figura, construíram um quadrado e dois rectângulos, como aferimos através dos registos apresentados (figuras 19 e 20). A obtenção destas figuras revela uma crença que os alunos têm acerca das figuras geométricas que, na sua opinião, são apenas os triângulos, rectângulos, quadrados e círculos, uma vez que são aquelas que conhecem/aprenderam.

Figura 19 – Outras figuras geométricas resultantes da união dos oito pontos

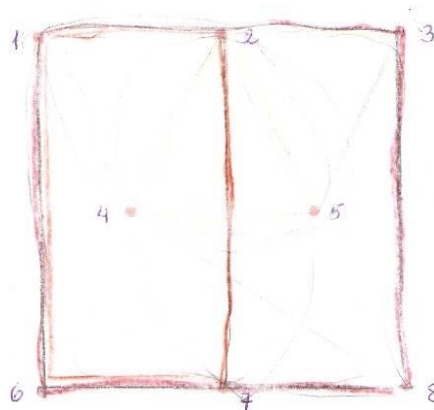
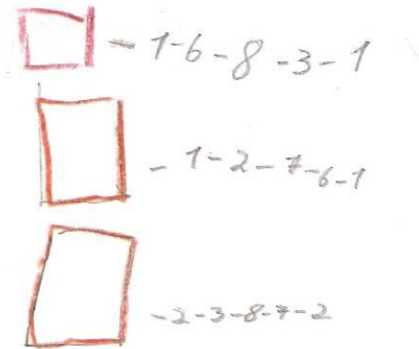




Figura 20 – Descrição do processo utilizado na obtenção das outras figuras geométricas

P2 • É possível obter outras figuras geométricas unindo outros pontos dessa figura? Quais/Quantas?

Descrevam o processo que utilizaram.



A seguir transcreve-se um excerto do diálogo, correspondente à fase de discussão.

151. Prof.: “Joel, que figuras conseguiram descobrir?”

152. Joel: (porta-voz do grupo *Estudantes*) “Um quadrado e dois rectângulos.”

153. Prof.: “E o teu grupo, Sara?”

154. Sara: (porta-voz do grupo *Detectives*) “Um quadrado e dois rectângulos.”

155. Prof.: “Pedro...?”

156. Pedro: (porta-voz do grupo *Matemáticos*) “Dois rectângulos.”

157. Prof.: “Simão, que figuras descobriu o teu grupo?”

158. Simão: (porta-voz do grupo *Amigos*) “Dois rectângulos.”

(...)

165. Prof.: “Joel desenha o quadrado.”

166. Joel: Começa a traçar a linha e refere: “Do 1 para o 2.”

167. Luís: (elemento do grupo *Estudantes*) Interfere e diz: “Do 1 para o 3.”

168. Prof.: “Então, é do 1 para qual?”

169. Luís: “Do 1 para o 3. Do 3 para o 8. Do 8 para o 6, do 6 para o 1.”

(...)

172. Prof.: “Sara, desenha os rectângulos.”

173. Sara: Ao mesmo tempo que traça as linhas, a unir os pontos, menciona: “Do 1 para o 2, do 2 para o 7, do 7 para o 6 e do 6 para o 1.”

174. Prof.: “Qual é o outro rectângulo?”

175. Sara: “Do 2 para o 3, do 3 para o 8, do 8 para o 7 e do 7 para o 2.”

176. Prof.: “Ali temos quantos rectângulos?” (referindo-se às figuras do quadro)

177. Turma: “Dois.”

178. Prof.: “E...?”

179. Turma: “**E um quadrado.**”

180. Prof.: “**Durante a resolução da tarefa alguns grupos tentaram fazer círculos. Porque é que não dava para construir um círculo?**”

181. Luís: “**Porque os números não estão a fazer redondo.**”

Desta interacção retiram-se alguns aspectos interessantes. Apenas dois grupos (*Estudantes* e *Detectives*) conseguiram identificar um quadrado e dois rectângulos [falas 152 e 154], sendo que os restantes grupos descobriram os dois rectângulos, mas não tiveram a percepção que da união destes resultava um quadrado. Para além disto, através da intervenção do Luís [falas 167 e 169] verifica-se que os colegas de grupo têm autoridade para intervirem sempre que considerem significativo, de forma a auxiliar os seus parceiros, a esclarecer uma ideia ou a questionar algo, estimulando-se, desta forma, o processo comunicativo na fase de discussão.

Como durante a fase de desenvolvimento da investigação a professora constatou que tanto o grupo objecto de estudo como outros procuraram obter círculos, antes de pôr termo à fase de discussão, questionou-os sobre isso [fala 180]. “*Porque os números não estão a fazer redondo*” [fala 181] foi uma justificação apresentada por um dos alunos, para o facto de não ser possível obter círculos.

## **Reflexões gerais**

### Desenvolvimento da investigação

Esta fase da investigação é realizada de forma cooperativa entre três elementos do grupo (Diogo, Sara e Beatriz), que procuram identificar os pontos que possibilitam a construção de diferentes triângulos, bem como de outras figuras geométricas. O Carlos nesta tarefa volta a ter uma reduzida interacção, apenas intervindo quando é chamado à atenção pelos colegas para cooperar na resolução da tarefa. Há, assim, um certo desrespeito pelo contrato experimental estabelecido entre a professora e o grupo que previa, entre outras regras, a cooperação de todos e entre todos os elementos do grupo. Porém, o contrato didáctico é ignorado por ambas as partes, pois os colegas também não lhe deram espaço para participar na interacção ou apresentar as suas eventuais dúvidas. A rapidez de raciocínio e execução da tarefa poderá ter sido responsável pelo silêncio do Carlos. Deste episódio não é possível deduzir se o aluno ficou a compreender a tarefa e as estratégias de resolução apresentadas.

Relativamente à primeira questão da tarefa (construção de triângulos) poder-se-á dizer que há uma generalização do procedimento utilizado pelo grupo, que consiste, essencialmente, na união de três pontos. Na segunda questão, após a identificação do primeiro rectângulo, o Diogo, ao mencionar “*Depois dá do outro lado*” [fala 81], está a generalizar o processo utilizado conseguindo, assim, obter os dois rectângulos possíveis.

O desenvolvimento da investigação apresentou, em geral, o seguinte padrão de actuação: unir alguns dos pontos assinalados formando uma figura geométrica, reproduzir a figura para o papel e identificar os pontos que a compõem.

Realça-se neste ponto o facto de que, uma vez que os alunos apenas conheciam/aprenderam quatro figuras geométricas: o quadrado, o rectângulo, o triângulo e o círculo, não exploraram outro tipo de configurações dos pontos.

Os alunos recorreram várias vezes à professora durante o desenvolvimento da investigação, de forma a verem esclarecidas as suas dúvidas e validadas as suas respostas. A intervenção desta junto do grupo procurou pautar-se por uma atitude esclarecedora, isto é, esclarecendo dúvidas que pudessem estar relacionadas com dificuldades de compreensão da tarefa e por uma atitude questionadora, ou seja, colocando novas questões que os conduzissem os alunos à reflexão.

O registo escrito foi realizado consoante decorria o desenvolvimento da tarefa.

### Discussão final

Na fase de discussão verificou-se a partilha dos resultados obtidos por cada um dos grupos, no desenrolar da fase anterior. Porém, no que concerne ao grupo estudo de caso não se verificaram acréscimos relativamente aos seus resultados.

## **Tarefa 5 – Escadas em Papel Quadriculado**

Iniciada a fase de desenvolvimento da investigação relativa à presente tarefa e enquanto a Beatriz distribui o material (quadrados em cartolina) por cada um dos elementos do grupo, o Diogo, sem solicitar a ajuda dos parceiros, conta o número de quadrados das escadas que constam do enunciado da tarefa e responde à primeira questão. O registo efectuado pelo aluno está presente na figura seguinte (figura 21).

Figura 21 – Resolução da primeira questão da tarefa 5

**P1 • Quantos quadradinhos compõem cada uma das escadas?**

$$1^{\text{a}} = 10 \quad 2^{\text{a}} = 30 \quad 3^{\text{a}} = 60$$

(...)

2. Beatriz: (...) “**Temos que fazer o quê?**”

3. Diogo: “**A quarta e a quinta escada.**”

4. Beatriz: “**Primeiro é a quarta escada.**”

E começou por dispor os quadrados de papel em cima da mesa, tentando construir a quarta escada.

5. Diogo: “**Assim não é. Isso não é uma escada.**”

6. Sara: “**Pois não. Assim não pode ser.**” Desloca um quadrado, mas a Beatriz volta a colocá-lo no mesmo sítio.

Na tentativa de esclarecerem as suas dúvidas chamam a professora junto do grupo.

7. Carlos: (porta-voz do grupo) “**Professora, pode ser assim?**”

8. Prof.: “**Vocês sobem um degrau e depois avançam dois?**”

9. Diogo: “**Não, mas a Beatriz acha que está certo.**”

10. Prof.: “**Façam a primeira escada igual à do exemplo.**”

11. Diogo: “**É só um.**” E colocou apenas um quadrado em cima da mesa.

12. Prof.: “**Agora continua, Beatriz. Faz a segunda escada, como está no exemplo.**”

A Beatriz revela dificuldades e a Sara tenta ajudá-la.

13. Sara: “**Põe aqui o quadrado.**”

Com a ajuda da Sara, a Beatriz conseguiu reproduzir a segunda escada.

14. Prof.: “**Carlos continua a terceira escada.**”

O aluno olha para a figura desenhada no quadro tentando fazer a sua reprodução. Porém, também revela algumas dificuldades, recebendo algumas indicações dos colegas.

15. Diogo: “**Junta aqui o material.**” (referindo-se aos quadrados que o Carlos tinha)

16. Sara: “**Carlos, põe deste lado.**”

A escada foi construída formando uma nova coluna na parte de trás da escada já existente (2ª escada).

17. Prof.: “**E a quarta escada como é que se faz, Sara?**”

(...)

20. Sara: “**Agora faz aqui uma coluna.**”

21. Prof.: “**Quantos quadradinhos tem essa escada?**”

22. Beatriz: Conta e responde: “**Dez.**”

23. Prof.: “**Façam o desenho das escadas e registem o número de quadradinhos utilizados.**”

24. Sara: “**Na outra escada tem de se pôr mais uma coluna aqui.**”

25. Beatriz: “**Não és tu Sara. Agora é o Diogo a fazer.**”

(...)

28. Diogo: “**Eu faço.**” (e segue as indicações sugeridas pela Sara)

29. Beatriz: Quando o Diogo termina, conta os quadrados e refere: “**São quinze.**”

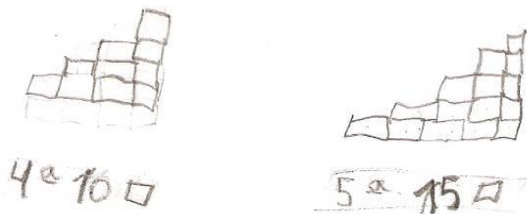
Na segunda questão da tarefa pedia-se aos alunos para identificar o número de quadradinhos que compunham a quarta e a quinta escada. A Beatriz, após uma clarificação da tarefa por parte do Diogo [fala 3], inicia a resolução da questão tentando construir a quarta escada. Os colegas, Diogo [fala 5] e Sara [fala 6] não concordam com a figura que a Beatriz construiu e, por isso, o porta-voz solícita a professora junto do grupo [fala 7]. Como refere Ridgway (citado em Fonseca, 2000), o professor deve estar disponível para as solicitações dos alunos, mas o auxílio prestado deve ser no sentido de dar uma sugestão, fazer uma observação ou colocar uma nova questão. Desta forma, foi sugerido que, reproduzindo o modelo presente no enunciado da tarefa, começassem por construir a primeira escada com a ajuda do material [fala 10]. O Diogo colocou em cima da mesa o primeiro quadrado, correspondente à primeira escada [fala 11]. Em seguida, a professora pediu à Beatriz para reproduzir a segunda escada, continuando a aluna a apresentar algumas dificuldades, ultrapassadas com o auxílio da Sara [fala 13]. Esta constante dificuldade manifestada pela Beatriz na construção das escadas vem contrastar com a sua opinião aquando da entrevista realizada no final do projecto, onde a aluna revelou que as tarefas realizadas “(...) são fáceis”.

Posteriormente, o Carlos continua com a construção da terceira escada sendo ajudado pelo Diogo [fala 15] e pela Sara [fala 16], que sugerem algumas estratégias de resolução. Esta interajuda entre os elementos do grupo na construção das escadas revela a presença de uma das regras do contrato didáctico.

Para a construção da quarta e da quinta escada, a Sara apresenta uma estratégia de resolução que consiste em acrescentar uma coluna na parte de trás da escada já existente [falas 20 e 24], revelando, deste modo, alguma liderança cognitiva. Tal estratégia foi aceite e assumida pelo grupo na resolução da questão. Ultrapassadas as dificuldades iniciais, os alunos resolveram correctamente a questão. No registo, seguiram a sugestão dada pela professora [fala 23], isto é, fizeram o desenho das escadas e escreveram o número de quadrados que compõem cada uma delas, como é visível através da figura que se segue (figura 22).

Figura 22 – Registo da resolução da segunda questão da tarefa 5

P2 • Quantos quadrinhos são precisos para construir a quarta escada? E para a quinta escada?



30. Sara: “Agora sou eu.”

31. Sara: “São seis aí.” (referindo-se ao número de quadrados)

32. Beatriz: Terminada a construção da escada, conta os quadrados e diz: “São vinte e um.”

(...)

O Carlos constrói a 7ª escada, seguindo os mesmos procedimentos utilizados na construção das escadas anteriores, isto é, acrescentando uma nova coluna (composta por 7 quadrados) na parte de trás da 6ª escada.

Em seguida, a Beatriz conta, em voz alta, os quadrados que compõem cada uma das colunas...

45. Beatriz: Apontando para os quadrados das colunas (na vertical) conta: “Um. Um, dois. Um, dois, três. Um, dois, três, quatro. Um, dois, três, quatro, cinco. Um, dois, três, quatro, cinco, seis. Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete.”

Em seguida, conta todos os quadrados que compõem a figura. “Um, dois, três, quatro, cinco, seis (...) vinte e oito.” E completa: “São vinte e oito quadrados.”

Posteriormente, é o Diogo quem constrói a oitava escada e, tal como anteriormente, acrescentou à direita uma coluna composta por oito quadrados. No final, transcreve para o papel a escada que construiu. Enquanto faz o desenho, a Beatriz conta os quadrados que compõem a escada.

46. Beatriz: “Um, dois, três, quatro, cinco, seis (...) trinta e seis. Tem trinta e seis.”

47. Diogo: “Já está.” (referindo que terminou os registos relativos à 8ª escada)

48. Beatriz: “Eu já sei. Quanto mais quadrados mais escadas são. Por exemplo, eu ponho aqui um quadrado e depois vou pondo mais e vai dando mais.” (referindo-se aos degraus)

Passado alguns minutos, a professora aproxima-se do grupo e questiona os alunos.

49. Prof.: “Quantas escadas já fizeram?”

50. Beatriz: “Fizemos a sexta, a sétima e a oitava.”

51. Prof.: “Como não têm mais quadrados tentem fazer outras escadas apenas com o desenho.”

O diálogo anteriormente transcrito corresponde à interação que ocorreu no seio do grupo, relativamente à resolução da terceira questão, em que era pedido aos alunos para descobrirem quantos quadrinhos compõem outras escadas. A sua análise permite

verificar que o grupo optou por construir as escadas rotativamente, isto é, um aluno construía uma escada, depois era outro aluno e, assim, sucessivamente, para que todos pudessem colaborar, daí a frase da Beatriz: “*Agora sou eu*” [fala 30].

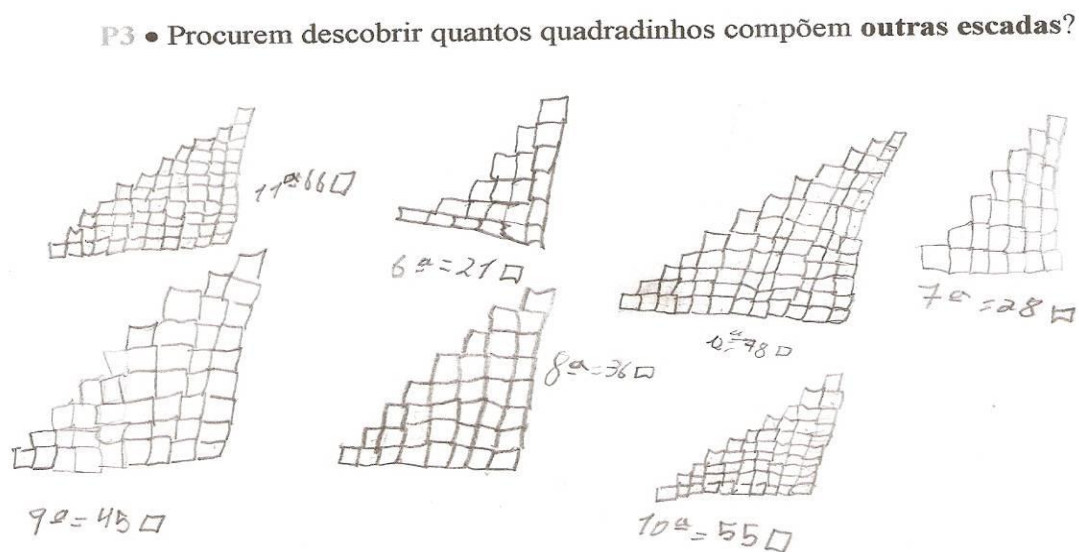
No que concerne à sua resolução vê-se que o grupo continuou a adotar a estratégia apresentada, anteriormente, pela Sara que consistia em “(...) *pôr mais uma coluna*” [fala 24].

Na construção da sexta escada, quando a Sara diz: “*São seis aí*” [fala 31] pretende significar que para passar da quinta para a sexta escada apenas é necessário acrescentar seis quadrados. Desta forma, estabelece uma relação entre o número de quadrados necessários à construção da escada e o número da escada.

Quando terminam a construção de uma escada, os alunos contam o número de quadrados que utilizaram e procedem ao registo, desenhando a escada e indicando o respectivo número de quadrados. Ao longo da resolução desta questão verifica-se que é a Beatriz quem, geralmente, faz a contagem do número de quadrados das escadas [falas 32, 45 e 46].

O material fornecido nesta tarefa apenas permitia construir até à oitava escada. Porém, uma vez que grupo resolveu a questão em pouco tempo, a profesora sugeriu que continuassem a construção de outras escadas sem o recurso ao material manipulável [fala 51]. Seguindo a sugestão apresentada, os alunos envolveram-se, com empenho, na construção de mais escadas, como se pode observar através dos registos apresentados (figura 23).

Figura 23 – Registo da resolução da terceira questão da tarefa 5



No que se refere ao último ponto da tarefa “*Procurem descobrir regularidades numéricas*”, é a Beatriz quem esboça e apresenta a primeira regularidade, como consta do diálogo anterior [fala 48]. Quando questionados sobre a resolução da questão, o Diogo lê a expressão que registou: “*Quantos mais quadrados mais escadas são*” [fala 53].

52. Prof.: “**Que regularidades numéricas encontraram?**”

53. Diogo: Leu o que tinham registado: “**Quantos mais quadrados mais escadas são.**”

54. Prof.: “**O que é que querem dizer com isso?**”

55. Beatriz: “**Porque tem-se uma escada, depois aumenta-se mais duas e depois vai-se aumentando mais.**” (a aluna está a confundir o termo escada com degrau)

56. Prof.: (...) “**Com 36 quadrados vocês fizeram uma escada e com 24 quadrados também fizeram uma escada. Mas elas não são iguais. Com 24 quadrados a escada vai ter menos...?**”

57. Beatriz: “**Degraus.**”

58. Prof.: “**Então, como é que pode ser quantos mais quadrados mais escadas são?**”

59. Beatriz: “**Aqui tem poucas escadas e aqui já tem mais.**” (apontando para a 6ª e a 7ª escada)

60. Prof.: “**São mais escadas ou mais degraus?**” Apontando para as duas figuras diz: “**Isto é uma escada e isto também é uma escada.**”

61. Beatriz: “**Pois. Esta escada tem poucos degraus e esta tem mais.**” (apontando para os registos)

62. Prof.: “**Então é quantos mais quadrados mais...?**”

63. Beatriz: “**...Mais degraus são.**”

64. Prof.: “**Quantos quadrados tem a 1ª escada?**”

65. Diogo: “**Uma.**”

66. Prof.: “**E a 2ª?**”

(...)

69. Diogo: “**Três.**”

70. Prof.: “**A 3ª?**”

71. Diogo: Pega na folha de registo e responde: “**Seis.**”

72. Prof.: “**A 4ª?**”

73. Diogo: “**Dez.**”

74. Prof.: “**A 5ª escada?**”

75. Diogo: “**Quinze.**”

76. Prof.: “**A 6ª escada, quantos quadrados tem?**”

77. Diogo: “**Vinte e um.**”

78. Prof.: “**A 7ª escada?**”

79. Beatriz: Olhando também para a folha de registo responde: “**Vinte e oito.**”

80. Prof.: “**A 8ª escada?**”

81. Diogo: “**Trinta e seis.**”

(...)

94. Prof.: “**E o que é que se passa da 1ª para a 2ª escada?**”



(...)

97. Diogo: “A 1ª tem um quadrado, a 2ª tem três quadrados...” E continua: “...Porque nós para irmos para cada uma das escadas temos que pôr os quadrados que é o número da escada.”

(...)

105. Prof.: “Quantos quadrados tem a 3ª?”

106. Diogo: “Tem seis.”

107. Prof.: “E o que é que se passou da 2ª para a 3ª?”

108. Diogo: “Aumentamos mais três.”

109. Prof.: “O que é que se passou da 3ª para a 4ª?”

110. Diogo: “Aumentamos mais quatro.”

111. Prof.: “A 4ª escada, quantos quadrados tem?”

112. Beatriz: Olhando para a folha de registo responde: “Dez.”

113. Prof.: “E a 5ª?”

114. Beatriz: “Quinze.”

115. Prof.: “O que é que fizeram da 4ª para a 5ª?”

116. Diogo: “Aumentamos mais... Da 4ª para a 5ª aumentamos cinco.”

117. Prof.: “E da 5ª para a 6ª?”

118. Diogo: “Aumentamos mais seis.” E continua dizendo: “Quando nós estamos a fazer as escadas aumenta-se sempre o número que nós vamos fazer da escada.”

(...)

127. Beatriz: “Pois. A 1ª tem um, para ir para a 2ª aumenta-se dois, para ir para a 3ª aumenta-se três, para ir para a 4ª aumenta-se quatro, para ir para a 5ª aumenta-se cinco, para ir para a 6ª aumenta-se seis, para ir para a 7ª aumenta-se sete e sempre assim.”

128. Prof.: (...) “Já pensaram o que é que se passa entre os degraus?”

129. Diogo: “Degraus?”

130. Prof.: “A 1ª escada quantos degraus tem?”

131. Beatriz: “Um degrau.”

132. Prof.: “E a 2ª?”

(...)

135. Sara: “Dois degraus.”

136. Prof.: “E a 3ª?”

137. Sara: “Três degraus.”

138. Prof.: “E a 4ª?”

139. Sara: “Quatro degraus.”

140. Prof.: “E a 5ª?”

141. Sara: “Cinco degraus.”

142. Beatriz: “Ah! É como aqui. O número de degraus é igual ao número da escada.”

No início do excerto anterior assiste-se a dois aspectos interessantes. Por um lado, a uma atitude questionadora da professora, que pretende ver esclarecidos os argumentos do

grupo e de levar os alunos à reflexão sobre o trabalho realizado, com o intuito destes produzirem novas descobertas. Por outro lado, à procura de justificações por parte da Beatriz, que sustentem a sua proposta, apresentada através da fala 48, em que refere: “*Quantos mais quadrados mais escadas são*”. Verifica-se, ainda, alguma confusão da aluna em distinguir os termos escada e degraus, visível no desenrolar do discurso [falas 55 a 61].

Esta tarefa revelou-se rica em termos de descoberta de regularidades. Para além da regularidade já referida (apresentada pela Beatriz) surgiram mais duas no seio do grupo. Uma apresentada pelo Diogo [fala 118], que refere que o número de quadrados a acrescentar corresponde ao número da escada (ideia transmitida pela Sara aquando da resolução da segunda questão) e outra, novamente, pela Beatriz [fala 142], que menciona que o número de degraus equivale ao número da escada. A figura seguinte (figura 24) corresponde ao registo efectuado pelo grupo, relativamente às regularidades encontradas.

Figura 24 – Registo referente à resolução da quarta questão da tarefa 5

**P4 • Procurem descobrir regularidades numéricas.**

*qu岸tes mais quadrados mais degraus são e as escadas ficam maiores.*

|                      |                                |                                |
|----------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 1 <sup>a</sup> = 1   | 1 <sup>a</sup> tem 1 degrau    | 12 <sup>a</sup> tem 12 degraus |
| 2 <sup>a</sup> = 3   | 2 <sup>a</sup> tem 2 degraus   | 13 <sup>a</sup> tem 13 degraus |
| 3 <sup>a</sup> = 6   | 3 <sup>a</sup> tem 3 degraus   | 14 <sup>a</sup> tem 14 degraus |
| 4 <sup>a</sup> = 10  | 4 <sup>a</sup> tem 4 degraus   | 15 <sup>a</sup> tem 15 degraus |
| 5 <sup>a</sup> = 15  | 5 <sup>a</sup> tem 5 degraus   |                                |
| 6 <sup>a</sup> = 21  | 6 <sup>a</sup> tem 6 degraus   |                                |
| 7 <sup>a</sup> = 28  | 7 <sup>a</sup> tem 7 degraus   |                                |
| 8 <sup>a</sup> = 36  | 8 <sup>a</sup> tem 8 degraus   |                                |
| 9 <sup>a</sup> = 45  | 9 <sup>a</sup> tem 9 degraus   |                                |
| 10 <sup>a</sup> = 55 | 10 <sup>a</sup> tem 10 degraus |                                |
| 11 <sup>a</sup> = 66 | 11 <sup>a</sup> tem 11 degraus |                                |
| 12 <sup>a</sup> = 78 | 12 <sup>a</sup> tem 12 degraus |                                |

O excerto da interacção que se segue, equivalente à fase de discussão da investigação, permite verificar a utilização de dois procedimentos diferentes, por parte dos grupos, na construção das escadas.

172. Prof.: “**Bruno desenha a 6ª escada a partir da que já está no quadro.**”

O aluno desenhou a 6ª escada acrescentando uma coluna na parte de trás da escada existente.

173. Prof.: “**Quantos quadrados desenhaste a mais?**”

174. Bruno: (porta-voz do grupo *Descobridores*) Conta os quadrados que desenhou e responde: “**Seis.**”

175. Prof.: “**Quantos quadradinhos tem essa escada, a 6ª escada?**”

176. Bruno: Olha para a sua folha de registo e responde: “**Vinte e um.**”

(...)

183. Prof.: “**Desenha a 7ª escada Inês.**”

A aluna desenhou a 7ª escada, mas ao contrário do colega que tinha construído a 6ª escada, completa o desenho colocando um quadradinho na parte da frente de cada um dos degraus.

184. Prof.: “**Quantos quadrados tem essa escada, que é a sétima?**”

185. Inês: (porta-voz do grupo *Investigadores*) Olha para a folha de registo e refere: “**Vinte e oito.**”

(...)

191. Prof.: “**Desenha a 8ª escada, Carlos.**”

O aluno construiu a 8ª escada, tendo colocado uma coluna (composta por oito quadrados) na parte de trás da escada anterior.

192. Prof.: “**Quantos quadrados puseste nessa escada?**”

193. Carlos: (porta-voz do grupo *Detectives*) Conta os quadrados que desenhou e responde: “**Oito.**”

194. Prof.: “**Com quantos quadrados ficou essa figura, a 8ª escada?**”

195. Carlos: Olha para a folha de registo e diz: “**Trinta e seis.**”

196. Prof.: “**Como foi só o teu grupo que desenhou mais, continua a desenhar as outras escadas que se seguem.**”

O aluno foi desenhando as escadas até à 12ª escada e enunciando o número de quadradinhos correspondente a cada escada. Continuou a utilizar o mesmo procedimento que anteriormente, isto é, a acrescentar mais uma coluna de quadradinhos na parte de trás da escada existente.

A partir da quinta escada, para evitar demorar demasiado tempo com o desenho individualizado de cada uma das escadas, a professora solicitou aos porta-vozes que construíssem uma nova escada a partir da já existente [fala 172]. Assim, pode-se observar que, na construção da sexta escada, o Bruno (porta-voz do grupo *Descobridores*) utilizou o mesmo procedimento que o grupo estudo de caso, isto é, acrescentou uma coluna na parte de trás da escada existente. Por sua vez, na construção da sétima escada, verificamos que a Inês (porta-voz do grupo *Investigadores*) recorre a uma estratégia distinta da anterior. A aluna acrescenta um quadradinho na frente de cada um dos degraus da escada anterior. Com isto, a turma teve a oportunidade de constatar que é possível chegar correctamente a uma resposta/solução utilizando percursos diversos, ou seja, estratégias diferentes.

Uma vez que o grupo *Detectives* (objecto de estudo de caso) foi mais além na construção de diferentes escadas, tendo construído a nona, décima, décima primeira e décima segunda escada sem recurso ao material manipulável, a professora recomendou que fosse o seu porta-voz a proceder à apresentação das referidas escadas [fala 196]. Assim, o Carlos, porta-voz do grupo, construiu as escadas e enunciou o número de quadradinhos que compõem cada uma. A informação transmitida pelo aluno é coincidente com o registo apresentado pelo grupo, exposto na figura 24.

## **Reflexões gerais**

### Desenvolvimento da investigação

Uma análise geral dos diálogos referentes ao desenvolvimento da quinta tarefa permite dizer que os alunos se envolveram na sua resolução com empenho e entusiasmo, o que poderá ser um factor que contribuiu para o êxito da mesma. Para além disto, o material manipulativo e o papel desempenhado pela professora representaram, igualmente, um importante contributo.

Observa-se a participação de todos os parceiros, essencialmente, na segunda e terceira questão, o que pode significar que aprender a trabalhar cooperativamente é algo que leva tempo, não se conseguindo de um dia para o outro.

O contrato didáctico estabelecido com o grupo esteve presente em vários momentos das interacções: na distribuição equitativa do material, na rotatividade adoptada na construção das figuras e na interajuda verificada entre os parceiros, ao longo da resolução da tarefa.

De um modo geral, o desenvolvimento da tarefa consistiu no seguinte padrão de actuação: acrescentar uma coluna na parte de trás da escada existente formando uma nova escada, contar o número de quadrados que compõem a escada e, depois, reproduzir a escada para a folha de registo, bem como o respectivo número de quadrados.

Na terceira questão, relativa à descoberta de regularidades, o grupo foi aprofundando as suas generalizações. Começando por uma conclusão muito geral, “*Quantos mais quadrados mais escadas são*” [fala 48] o grupo consegue, com a ajuda da professora e a reflexão acerca do trabalho realizado, descobrir que “*(...) temos que pôr os quadrados que é o número da escada*” [Diogo, fala 97] e, finalmente, que “*O número de degraus é igual ao número da escada*” [Beatriz, fala 142].

De realçar que o registo escrito da tarefa foi realizado conforme decorria a actividade, isto é, consoante os alunos construía as diferentes escadas.

### Discussão final

Nesta tarefa a discussão final facultou aos alunos o conhecimento do uso de diferentes estratégias, que conduziram à obtenção dos mesmos resultados, relativamente ao número de quadrados das escadas (da primeira até à sétima escada). No que respeita à descoberta de regularidades, o grupo realizou um trabalho bastante rico, apresentando três regularidades. Apenas uma delas foi também enunciada por outros grupos, nomeadamente a que é referida pela Beatriz, na fala 127.

## **Tarefa 6 – Números em Escada**

Esta tarefa envolvia termos desconhecidos pelos alunos (números em escada e números consecutivos), pelo que, na fase de apresentação, se procedeu à explicação dos seus significados, de modo a garantir que todos os alunos entendem o sentido da tarefa que lhes é proposta e o que se espera deles no decurso da mesma.

Na primeira questão pretendia-se que os alunos descobrissem que números podem ser escritos como uma soma de dois números consecutivos.

1. Diogo: “**1 + 2.**”

2. Beatriz: Repete para a Sara fazer o registo “**1 + 2 = 3.**” Depois continua dizendo: “**Agora 2 + 3 = 5.**

**Agora é 3 + 4. É igual a quê?”**

3. Sara: Faz a conta mentalmente e, rapidamente, responde: “**Sete.**”

4. Beatriz: “**Agora 4 + 5.**”

5. Diogo: “**É igual a nove.**”

6. Beatriz: “**5 + 6**” Faz a operação com o auxílio dos dedos e diz: “**Onze.**”

7. Diogo: “**6 + 7.**”

8. Beatriz: Repete: “**6 + 7.**” (insistindo para a Sara escrever)

Tanto o Diogo como a Beatriz procuram resolver a operação com o recurso aos dedos. Porém, é o Diogo quem chega à resposta mais rapidamente.

9. Diogo: “**Treze.**”

10. Beatriz: Olhando para o quadro onde estavam registados os números até 15 refere, toda entusiasmada: “**Já vamos no 13.**”

11. Diogo: “**7 + 8.**”

12. Beatriz: “**Quinze.**”

(...)

17. Sara: “**Já estamos no 15. Então acabou.**”

Neste momento, a professora aproxima-se do grupo e questiona:

18. Prof.: “**Já descobriram quais são os números em escada que resultam da soma de dois números consecutivos?**”

19. Beatriz: “**Sim.**”

20. Prof.: “**Quais são?**”

21. Beatriz: Pega na folha de registo e responde: “**O 3, o 5, o 7, o 9, o 11 e o 15.**”

Uma análise do fragmento transcrito permite constatar que a interação começa com uma frase do Diogo, em que apresenta a primeira adição de dois números consecutivos [fala 1]. Verifica-se, ainda, a participação de três dos alunos (do Diogo, da Sara e da Beatriz), que colaboram na construção de uma resolução. Neste momento, o Carlos não interaje com os colegas.

Nesta questão, assim como nas seguintes, o grupo abraçou um procedimento sugerido pela professora na fase de apresentação da tarefa. Tal procedimento consistiu em escrever a sequência dos números até quinze e conforme o grupo ia descobrindo os números em escada ia rodeando os números que se encontravam na sequência, como se vê na figura abaixo (figura 25) referente ao registo apresentado pelo grupo.

Figura 25 – Registo correspondente à resolução da primeira questão da tarefa 6

P1 • Que números, até 15, podem ser escritos como uma soma de dois números consecutivos?

1 2 ③ 4 ⑤ 6 ⑦ 8 ⑨ 10 ⑪ 12 ⑬ 14 ⑮

1 + 2 = 3

2 + 3 = 5

3 + 4 = 7

4 + 5 = 9

5 + 6 = 11

6 + 7 = 13

7 + 8 = 15

24. Beatriz: “**Escreve 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15.**”

25. Beatriz: “**Agora 1 + 2 + 3.**” Conta pelos dedos e apresenta o resultado: “**Seis.**”

Depois refere: “**2 + 3 + 4.**”

26. Diogo: “**Dá oito.**” (o grupo não reparou que o resultado estava errado)

27. Beatriz: “**Agora 3 + 4 + 5.**”

28. Diogo: Conta, pelos dedos, e responde: “**Doze.**” Em seguida, apresenta outra operação: “**4 + 5 + 6.**” “**Quinze.**”

(...)

34. Prof.: Pergunta ao porta-voz do grupo: “**Quais são os números em escada que resultam da soma de três números consecutivos?**”

35. Beatriz: (porta-voz) Olhando para os registos, responde: “**É o 6, o 8, o 12 e o 15.**”

36. Prof.: Olha para os registos do grupo e questiona: “**Têm a certeza de que fizeram as contas bem?**” E acrescenta: “**Verifiquem as contas (...).**”

37. Diogo: “**A primeira é 1 + 2 + 3.**”

38. Prof.: “**Então, quanto é 1 + 2 + 3?**”

(...)

41. Carlos: “**Seis.**”

42. Prof.: “**A conta a seguir...**” (referindo-se à operação  $2 + 3 + 4$ )

43. Carlos: Conta pelos dedos e responde: “**Nove.**”

44. Prof.: “**E quanto é que vocês têm aí?**”

45. Sara: “**Oito.**” Em seguida, corrige os registos efectuados.

(...)

47. Carlos: “**Agora é 3 + 4 + 5.**”

48. Sara: “**Estas duas estão bem.**” (referindo-se às duas operações seguintes)

O excerto anterior corresponde à interacção ocorrida no desenrolar da resolução da segunda questão da tarefa, cujo objectivo era que os alunos descobrissem quais os números que podem ser expressos como uma soma de três números consecutivos. A Beatriz inicia a interacção referente à resolução da questão [fala 24] e, em seguida, apresenta três adições de três números consecutivos [falas 25 e 27]. A última proposta de resolução é esboçada pelo Diogo [fala 28].

Quando os elementos do grupo apresentaram as somas de três números consecutivos não repararam que uma delas estava incorrecta (a soma apresentada pela Beatriz “ $2+3+4$ ” [fala 25], erradamente assumida como “*Dá oito*” [fala 26]. Assim, quando questionados pela professora [fala 34] sobre os resultados obtidos na segunda questão, a Beatriz apresenta uma resolução parcialmente incorrecta [fala 35], ao referir que o oito é um número em escada. O erro é corrigido após a intervenção da professora: “*Verifiquem as contas (...)*” [fala 36], tendo o grupo reparado os registos efectuados. Desta forma, a figura que se segue (figura 26) corresponde ao registo apresentado pelo grupo relativo à resolução da segunda questão da tarefa. Os números rodeados na sequência (o 6, 9, 12 e 15) são aqueles que o grupo considerou números em escada.

Figura 26 – Registo da resolução da segunda questão da tarefa 6

P2 • Quais podem ser expressos como uma soma de três números consecutivos?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

$1 + 2 + 3 = 6$   
 $2 + 3 + 4 = 9$   
 $3 + 4 + 5 = 12$   
 $4 + 5 + 6 = 15$

29. Diogo: “Agora temos de ver quais são os números que são iguais.” Olhando para as folhas, diz: “O quinze.”

30. Sara: “Não tem. Não tem.”

31. Beatriz: “Então não tem? O quinze é repetido?” (apontando para o registo efectuado relativamente à primeira e à segunda questão da tarefa). Em seguida, pega nas folhas de registo e verifica, com atenção, se há mais algum número que se repete e, posto isto, refere: “Não há mais.”

(...)

63. Prof.: “A pergunta três o que é que vos pede?”

64. Diogo: “Para nós vemos qual é o número igual que nós somamos aqui e aqui.” (referindo-se aos resultados das somas efectuadas na primeira e na segunda questão)

(...)

66. Beatriz: “Só tem o 15.”

67. Prof.: “É só o 15?”

68. Beatriz: Olha com atenção para os registos e, rapidamente, diz: “E o 9.”

69. Prof.: “Esses dois números já descobriram, mas agora vão tentar ver se existem outros.” E continua dizendo: “Fizeram a soma de dois números consecutivos, fizeram a soma de três números consecutivos, mas ainda não fizeram de quatro números consecutivos, de cinco números consecutivos...”

70. Diogo: Dirigindo-se à Sara diz: “Põe  $1 + 2 + 3 + 4$ .”

(...)

72. Sara: “São 10.”

Posteriormente, a Beatriz e o Diogo verificam o resultado.

73. Diogo: “São 11.”

74. Beatriz: “Não. São 10.”

A Beatriz chama a professora para ir ao grupo. Enquanto esperam a Sara continua o trabalho.

75. Sara: “ $2 + 3 + 4 + 5$ .”



76. Diogo: “**Essa dá 14.**”

Nesta altura, a professora chega ao grupo.

77. Beatriz: “**Ó professora, o Diogo diz que aqui é 11 e é 10.**”

78. Prof.: “**Então façam outra vez a conta.**”

(...)

83. Diogo: Vai contando os dedos e dizendo: “**4, 5, 6... 7, 8, 9, 10.**”

84. Prof.: “**Então, quanto é?**”

85. Diogo: “**Dez.**”

86. Prof.: “**Aqui só quero os números que têm mais do que uma representação.**” E continua: “**Já têm o 9 e o 15. O 10 surge na soma de dois e de três números consecutivos?**”

87. Diogo: “**Não.**”

88. Prof.: “**Então é porque não tem mais do que uma forma.**” E aconselha o grupo: “**Vão experimentando outros. Eu só quero os que têm mais do que uma forma.**”

A professora volta a afastar-se do grupo.

89. Beatriz: “**Experimenta  $3 + 4 + 5 + 6$ .**”

90. Diogo: Faz a soma e responde: “**Dá dezoito. Não dá. Não pode. Essa não pode.**”

91. Sara: “**Já não dá mais.**”

92. Diogo: “**Agora vamos ver se o 14 está rodeado noutro lado.**” Verifica os registos e refere: “**Não está.**”

93. Sara: “**Vamos fazer com cinco números.**”

94. Diogo: “**Se com quatro dá duas contas com cinco só dá uma.**”

95. Beatriz: “**É  $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ . Dá quinze.**” E acrescenta: “**Na primeira dá logo quinze.**”

96. Diogo: Verifica os registos efectuados na primeira questão e diz: “**Já está rodeado o 15.**”

97. Beatriz: “**Há em todos.**” (como resultado da adição de dois, três e cinco números consecutivos)

Passado mais alguns minutos, a professora volta junto do grupo e questiona, novamente, os alunos.

98. Prof.: “**Quais são os números que têm mais do que uma representação em escada?**”

99. Diogo: Olha para a folha de registo e responde: “**O 15 e o 9.**”

100. Prof.: “**Quantas representações tem o 9?**”

101. Diogo: Analisa atentamente as folhas de registo e responde: “**Duas.**”

102. Prof.: “**E o 15?**”

103. Beatriz: “**Três.**”

Através do diálogo anterior vê-se que o Diogo, na fala 29, para além de ter delineado uma estratégia para chegarem à solução também menciona a primeira resolução, quando diz: “*O quinze*”. Mais tarde, após o grupo ser questionado pela professora sobre o que se pretendia na questão [fala 63], o Diogo revela ter presente o conteúdo do enunciado da tarefa, quando responde que o que se pretende é “*(...) vemos qual é o número igual que nós somamos aqui e aqui*” [fala 64]. Em seguida, a Beatriz descobre outra resolução, acrescentando “*E o 9*” [fala 68]. No entanto, o grupo teria ficado por aqui no que concerne

a esta questão. Foi necessário a professora dizer-lhes que não se podiam limitar aos resultados das adições de dois e três números consecutivos [fala 69].

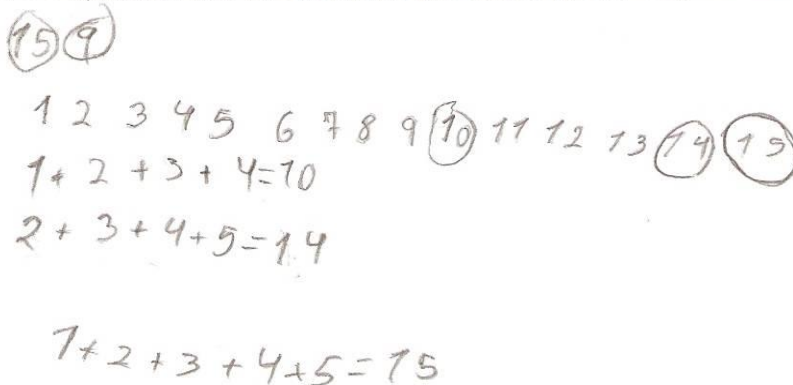
Com base na intervenção da professora, o Diogo [fala 70] inicia a adição de quatro números consecutivos, cujo resultado levanta um pequeno conflito no grupo. A Sara refere que o resultado “São 10” [fala 72] e o Diogo diz que “São 11” [fala 73]. Por sua vez, a Beatriz [fala 74] está em acordo com a Sara. Como forma de resolverem o conflito existente recorrem à professora que não valida nenhuma das respostas, sugerindo apenas que voltassem a efectuar a operação, de modo a conferirem o resultado. É então que, o Diogo [fala 85] acaba por concordar com as colegas.

Observa-se, ainda, uma boa capacidade de generalização por parte do Diogo quando diz: “Se com quatro dá duas contas com cinco só dá uma” [fala 94].

Relativamente aos resultados obtidos verifica-se que o grupo resolve correctamente a questão, quando o Diogo, com base no trabalho realizado e nos registos efectuados (figura 27), diz que os números com mais do que uma representação em escada são “O 15 e o 9” [fala 99].

Figura 27 – Registo da resolução da terceira questão da tarefa 6

P3 • Que números têm mais do que uma representação em escada?



49. Carlos: Lê a questão oralmente: “**Descobriram números que não sejam em escada?**”

O grupo, inicialmente, observa os números que tinham registado como sendo números em escada.

50. Beatriz: Com a primeira folha de registo na mão, apontando para os registos da primeira questão, diz: “**Primeiro são estes. Olha, os que não estão rodeados.**” E acrescenta: “**É o 1 e o 2. O 4, o 6...**”

51. Diogo: “**Não o seis está aqui rodeado.**” (apontando para os resultados da segunda questão)

52. Beatriz: “**Mas eu estou a dizer nesta.**” (referindo-se à primeira questão)

53. Diogo: “**Mas nós temos de fazer com esta e com esta. Por exemplo, aqui o 11 não está rodeado e aqui está.**” (comparando os registos da primeira com os da segunda questão)

54. Beatriz: “Ah! Já percebi.”

55. Diogo: “O 1 e o 2 está certo. O quatro também.”

A Sara vai registrando os números. A Beatriz ajuda o Diogo a comparar os registos e a descobrir os números que não são em escada.

56. Beatriz: “Dá o 8.”

57. Diogo: “Põe o 8.” (dirigindo-se à Sara para fazer o registo do número).

58. Beatriz: “O 10.”

59. Diogo: “E o 14.”

60. Beatriz: Entusiasmada refere: “Já está tudo.”

(...)

113. Prof.: “Então, quais são os números que não são em escada?”

114. Diogo: “O 1...”

115. Prof.: “Mais...”

116. Diogo: “O 2, o 4, o 8, o 10 e o 14.”

117. Prof.: “O 10 não é um número em escada? Mas têm aí uma conta que dá 10.” E continua a questioná-los: “E mais?”

118. Sara: “Catorze.”

119. Beatriz: “Está.” (querendo dizer que estava registado como sendo um número em escada)

(...)

124. Prof.: “Então, quais os números que não são em escada?”

125. Diogo: “1, 2, 4, e 8.”

A resolução da última questão tem início com uma frase do Carlos [fala 49], que lê a questão para os colegas. Em seguida, a Beatriz refere uma estratégia de resolução, quando diz “*Primeiro são (...) os que não estão rodeados*” [fala 50], o que indica que a aluna tem presente a ideia de que todos os números que rodearam na sequência são números consecutivos, logo são números em escada. Por sua vez, o Diogo reformula a estratégia apresentada pela colega, procurando explicá-la aos parceiros [fala 53], o que parece ter dado resultado, pois a Beatriz diz: “*Ah! Já percebi*” [fala 54]. Posto isto, o Diogo e a Beatriz comparam os registos efectuados, anteriormente, e esboçam e apresentam a resolução desta questão [falas 55 a 59].

Quando questionados sobre os resultados obtidos [fala 113] o Diogo, inicialmente, menciona que “*O 1*” [fala 114] e “*O 2, o 4, o 8, o 10 e o 14*” [fala 116] não são números em escada, mas, após uma análise mais atenta, acaba por concluir que apenas satisfazem esta condição os números “*1, 2, 4 e 8*” [fala 125].

A resolução da questão está presente na figura 28, correspondente ao registo efectuado pelo grupo.

Figura 28 – Registo da resolução da quarta questão da tarefa 6

P4 • Descobriram números que **não sejam em escada**?

1      2      4      8

### Reflexões gerais

#### Desenvolvimento da investigação

Uma leitura global das interacções apresentadas permite concluir que todos os parceiros participaram na resolução da tarefa, no entanto, as intervenções não são equitativas. O Diogo, a Sara e a Beatriz demonstraram empenho e cooperaram, de forma activa, na construção de uma resolução, não sendo possível saber se chegariam ao mesmo resultado se cada um trabalhasse individualmente. Por sua vez, o Carlos apenas interveio pontualmente, na terceira e quarta questão.

A maioria das soluções foi apresentada pelo Diogo e pela Beatriz, que, ao longo da tarefa, foram revelando alguma liderança cognitiva.

O procedimento assumido pelo grupo nas três questões iniciais (escrita da sequência de números até quinze) teve um importante contributo na resolução da tarefa, uma vez que constituiu um auxílio na obtenção da resposta à última questão. Nas duas primeiras questões os alunos utilizam um procedimento rotineiro, que consiste, exclusivamente, em efectuar somas de dois e de três números consecutivos. No entanto, na resolução das questões seguintes houve a necessidade de definir estratégias. Desta forma, o Diogo apresenta, imediatamente, uma estratégia facilitadora da resolução desta parte da tarefa, propondo que se compare os resultados da primeira e segunda questão, de modo a verificar os números que foram assinalados em ambas as sequências [fala 29]. Esta estratégia, por si só, não permitiu uma correcta resolução da terceira questão da tarefa, pelo que foi necessária a intervenção da professora.

O facto de o grupo ter realizado a tarefa num reduzido período de tempo parece significar que os alunos interiorizaram a explicação realizada pela professora sobre números em escada e números consecutivos, isto é, entenderam o sentido da tarefa e aquilo que se esperava deles no decurso da mesma.

O grupo foi efectuando os registos simultaneamente ao desenrolar desta fase da investigação.

### Discussão final

Nesta tarefa, a discussão final não trouxe qualquer alteração a nível de resultados obtidos ou do uso de diferentes estratégias, no que concerne ao trabalho efectuado pelo grupo estudo de caso, servindo apenas para apresentar e validar as resoluções dos grupos.

## **Tarefa 7 – Uma Calculadora Diferente**

Na presente tarefa de investigação pretendia-se que os alunos, utilizando apenas as teclas 2, 3, + e = de uma calculadora, procurassem obter os números 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12.

1. **Beatriz:** “**Ó professora, eles os dois usam aquela e nós os dois usamos esta.**” (referindo-se às calculadoras – uma para o Carlos e Sara e outra para a Beatriz e Diogo).
2. **Diogo:** Com a calculadora descobre uma adição cujo resultado é 4. Assim, referiu: “**2 + 2.**”
3. **Sara:** “(...) **Eu sei uma de 5. 2 + 3 = 5.**” Em seguida, verificou o resultado contando pelos dedos. A Beatriz auxilia o Carlos (secretário) nos registos, ditando-lhe as operações.
4. **Sara:** Com a calculadora na mão descobre outra adição: “**3 + 3**”.
5. **Beatriz:** “**Carlos põe aí 3 + 3.**”
6. **Diogo:** “**Eu sei outra desta de 5.**” Depois acrescenta: “**3 + 2.**”
7. **Beatriz:** “**Agora de 7.**” Com a calculadora na mão diz: “**Já sei**”. E experimenta: “**2 + 2 + 2. Não dá.**” Experimenta ainda outra operação: “**3 + 3 + 2. Também não dá.**”
8. **Diogo:** Contando pelos dedos diz: “**Faz 3 + 2 + 2.**”  
Por sua vez, a Sara também realiza a mesma operação na sua calculadora.
9. **Sara:** “**Dá 7. Dá 7.**”
10. **Beatriz:** “**Agora vamos para o 8.**” (...)
11. **Diogo:** Sem a calculadora, imediatamente refere: “**3 + 3 + 2.**” Em seguida, a Sara passa-lhe a calculadora e ele verifica o resultado da operação.
12. **Diogo:** “**Agora 3 + 3 + 3.**”
13. **Sara:** Dita ao Carlos: “**3 + 3 + 3 = 9.**”  
O Diogo continua a procurar na calculadora outras formas de obter os números indicados.
14. **Diogo:** “**2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10.**”
15. **Sara:** (dirigindo-se ao Carlos) “**Já sabemos uma para 10.**”  
Ao mesmo tempo que o Carlos vai registando a operação, a Beatriz resolve-a com o auxílio dos dedos.

Posteriormente, o Diogo e a Beatriz, com as calculadoras, procuram descobrir uma forma de obter o número 11. Após algumas tentativas, é a Beatriz quem faz a descoberta.

16. Beatriz: “**3 + 3 + 3 + 2 = 11.**” Em seguida, dita a operação para o Carlos a registar e volta a confirmar na calculadora.

O Diogo, enquanto tentava descobrir uma forma de obter o 11, conseguiu descobrir como obter 12.

17. Diogo: Dirigindo-se ao Carlos, refere: “**Agora aqui pões 3 + 3 + 3 + 3.**”

Neste momento, a professora aproxima-se do grupo e questiona os alunos.

18. Prof.: “**Então, (...) conseguiram obter todos os números acima indicados?**”

19. Beatriz: “**Sim.**”

Uma análise do fragmento do diálogo acima transcrito, referente à resolução da primeira questão, revela uma participação equitativa de três dos parceiros (o Diogo, a Sara e a Beatriz), conseguida devido a uma dinâmica de co-construção (segundo Gilly, Fraisse e Roux, 1988). Revela, também, a ausência de diálogo de um dos elementos do grupo (o Carlos). No entanto, tal não significa, neste caso, que o aluno não cooperou na resolução da questão, pois, embora não apresentasse nenhuma proposta de resolução, efectuou os registos.

A interacção começa com uma frase da Beatriz [fala 1], mas é o Diogo quem apresenta a primeira forma de obter um dos números - o número quatro [fala 2].

Numa análise global da interacção, observa-se que é o Diogo quem descobre a maioria das formas de obter os números referidos: para além do número 4, o aluno também descobre como obter o número 7 [fala 8]; o número 8 [fala 11]; o número 9 [fala 12]; o número 10 [fala 14]; e o número 12 [fala 17].

Observa-se, ainda, que a forma como os alunos chegam à solução não é sempre a mesma. Umhas vezes, descobrem os números realizando somente as adições na calculadora [fala 4]; outras vezes, depois de obterem o número na calculadora verificam o resultado efectuando a adição com os dedos [fala 3]; e, ainda, descobrem os números realizando primeiro as adições pelos dedos e, posteriormente, verificando-as na calculadora [fala 8].

Ao longo da interacção vemos que os alunos têm presentes algumas regras do contrato didáctico estabelecido entre a professora e o grupo, nomeadamente no que se refere à partilha de materiais [fala 1 e 11] e à interajuda [fala 8 e 13].

20. Prof.: “**Agora têm que (...) descobrir mais do que uma forma para obter esses números?**”

21. Diogo: “**De 5 já está.**”

(...)

23. Beatriz: Realizando tentativas na calculadora refere: “**Isto dá 8. Sei uma que dá 8. 3 + 3 + 2 = 8.**”

(...)

26. Carlos: “São iguais. Duas contas iguais.” (reparando que já tinham registado essa soma)

27. Beatriz: “Então pomos ao contrário  $2 + 3 + 3$ . (...)”

28. Sara: “A de 7 é...” Faz tentativas na calculadora e refere: “Ah! Já sei. Já sei. É  $3 + 2 + 2 = 7$ .”

29. Carlos: “Ei! Esta também já está.” (verificando que a operação já estava registava)

30. Sara: “Ao contrário, pá.  $2 + 3 + 2$ .”

31. Diogo: Após realizar algumas somas na calculadora refere: “Já sei.”

32. Sara: “E não é igual?”

33. Diogo: “É  $2 + 2 + 3$ .”

34. Beatriz: Aponta para a folha de registo e diz para o Carlos: “Põe aqui  $2 + 2 + 3 = \dots$ ”

35. Carlos: “... Igual a 7.”

(...)

75. Diogo: Enquanto carrega nas teclas da calculadora enuncia: “ $3 + 2 + \dots$ ” Partindo do número 5 que se encontrava no ecrã da calculadora, conta pelos dedos até chegar a oito. No fim refere: “Já sei uma para 8.” E volta a realizar a operação na calculadora, mencionando: “ $3 + 2 + 3 = 8$ .”

76. Beatriz: “Sei uma para 12.” E dita a operação para o Carlos escrever: “É assim:  $2 + 2 + 2 + 2 + 2 = \dots$ ” De repente, confunde-se e diz: “Não é assim. Enganei-me.” E acrescenta: “Espera. Deixa-me ver.”

Conforme verifica a operação vai contando com os dedos, depois diz: “Safa o igual. Põe + 2.”

77. Sara: “Eu sei uma conta de 11.” Apontando para a folha de registo: “Olha  $2 + 3 + 3 + 3$ .” (a aluna trocou a ordem das parcelas da 1ª operação em que obtiveram o número 11)

Passado algum tempo, volta a olhar para os registos e acrescenta: “Já sei outra.  $3 + 2 + 3 + 3$ .” (a aluna voltou a trocar a posição das parcelas, não realizando a operação na calculadora)

78. Beatriz: Confere a operação, contando pelos dedos, e refere: “Pois é. Está bem. Está bem.”

79. Diogo: Descobre uma nova forma de obter o número 10. Assim, diz: “Já sei.  $2 + 3 + 2 + 3$ .”

80. Beatriz: Verifica na sua calculadora a operação apresentada pelo Diogo e refere: “Está certo.”

81. Diogo: Sem utilizar a calculadora diz: “Agora pode ser de outra maneira. Pode ser  $3 + 2 + 3 + 2$ . Onde estava o 2 punha-se o 3 e onde estava a 3 punha-se o 2.”

82. Sara: Também sem usar a calculadora, aponta para a folha de registo e diz: “Olha  $3 + 3 + 2 + 3 = 11$ .” E dirigindo-se à Beatriz, acrescenta: “Vê se dá certo.”

83. Beatriz: Verifica a operação na calculadora e diz: “Está certa.”

Contando pelos dedos, a Beatriz descobre outra forma. “Já sei uma para 9.” E dita a operação para o Diogo confirmar na calculadora: “ $2 + 2 + 2 + 3$ ”. Simultaneamente faz, novamente, a operação com os dedos.

84. Diogo: “Dá 9.”

85. Beatriz: Repete para o Carlos poder fazer o registo: “ $2 + 2 + 2 + 3 = 9$ .”

(...)

117. Prof.: “E outras possibilidades de obter o 9?”

118. Diogo: “Ah!  $3 + 2 + 2 + 2$ .”

119. Prof.: “O que é que fizeste, Diogo?”

120. Diogo: “Pus ao contrário a conta.”

(...)

124. Prof.: Olhando para os registos, do grupo, pergunta: “**E para o 10? Só conseguiram descobrir uma forma?**”

125. Diogo: Com a calculadora na mão, diz: “**Já descobri outra.**”

126. Prof.: “**Qual é?**”

127. Diogo: “**2 + 2 + 3 + 3.**”

Ao mesmo tempo, a Beatriz, confirmava a soma contando pelos dedos.

128. Prof.: “**E agora, outras possibilidades?**”

129. Diogo: “**Já sei. Ao contrário.**”

130. Beatriz: “**3 + 3 + 2 + 2.**”

Neste momento, a professora volta a afastar-se do grupo.

131. Sara: “**Já sei outra. Já sei outra. Ao contrário.**” E acrescenta: “**É assim...**” E apontando para os registos, refere: “**2 + 3 + 2 + 3.**”

132. Beatriz: Após verificar a soma pelos dedos e na calculadora diz: “**Está certo.**”

133. Diogo: “**Já sei uma.**” E, apontando para a adição anterior, acrescenta: “**3 + 2 + 3 + 2.**”

(...)

Ao fim de algum tempo, a professora regressou ao grupo.

138. Prof.: Questionando o Diogo: “**Como é que tu disseste que era possível descobrir outras formas?**”

139. Diogo: “**Pôr ao contrário.**”

140. Prof.: “**E, então, para o 12 não é possível descobrir mais maneiras?**”

141. Diogo: “**Já sei.**”

Uma leitura do excerto da interacção, alusivo à segunda questão da tarefa, permite verificar que todos os parceiros interagiram e cooperaram na resolução da questão. Assiste-se, assim, à co-construção de uma resolução.

No início do excerto, vê-se que a Beatriz nomeia uma estratégia que permitirá ao grupo chegar, mais facilmente, às diferentes formas de obter um dos números. Quando o secretário refere que a adição por ela apresentada já tinha sido registada [fala 26], a aluna menciona “*Então pomos ao contrário (...)*” [fala 27], sugerindo que se troque a ordem das parcelas. Através desta fala, a Beatriz revela alguma liderança cognitiva, demonstrando que interiorizou a propriedade comutativa da adição.

Posteriormente, observa-se, em vários momentos, que tanto a Sara [falas 30, 77 e 131] como o Diogo [falas 81 e 129] assumem a estratégia apresentada pela Beatriz, no que se refere à troca da ordem das parcelas conseguindo, desta forma, apresentar diferentes adições para o mesmo número.

Com base na análise dos extractos reproduzidos, assiste-se à utilização, por parte dos alunos, de diferentes procedimentos para a obtenção de uma solução, nomeadamente:



- realizam diferentes adições na calculadora até chegarem a um dos números indicados no enunciado da tarefa [falas 23 e 28];
- limitam-se a trocar a ordem das parcelas, não conferindo o resultado da operação [falas 27, 30 e 77];
- trocam a ordem das parcelas e conferem o resultado pelos dedos [fala 78], na calculadora [fala 83] ou de ambas as formas [fala 132];
- descobrem a soma contando pelos dedos e, depois, conferem-na com a calculadora [falas 75 e 83];
- realizam a adição na calculadora e, depois, verificam o resultado contando pelos dedos [fala 127].

Relativamente aos resultados obtidos nesta tarefa, com base nos registos apresentados pelo grupo, verifica-se que os alunos descobriram todas as formas possíveis de obter os números 4, 5, 6 e 7. No entanto, apenas descobriram algumas formas de obter o 8, 9, 10, 11 e 12. De salientar que estas foram registadas, pelo secretário, em folha própria para o efeito, como podemos ver através da figura 29.

Figura 29 – Registo efectuado relativamente à resolução da tarefa 7

| 4  | 5   | 6   | 7   | 8  |
|--|---|---|---|--|
| $2+2=4$<br><br><p style="text-align: right;">①</p>                                 | $2+3=5$<br><br>$3+2=5$<br><br><p style="text-align: right;">②</p>   | $3+3=6$<br>$2+2+2=6$<br><br><p style="text-align: right;">②</p>   | $3+2+2=7$<br>$2+3+2=7$<br>$2+2+3=7$<br><br><p style="text-align: right;">③</p>              | $3+3+2=8$<br>$2+3+3=8$<br>$3+2+3=8$<br><br><p style="text-align: right;">③</p> |
| 9  | 10  | 11  | 12  |  |
| $3+3+3=9$<br>$2+2+2+3=9$<br>$3+2+2+2=9$<br><br><p style="text-align: right;">③</p> | $2+2+2+2+2=10$<br>$2+2+3+3=10$<br>$3+3+2+2=10$<br>$2+3+2+3=10$<br>$3+2+3+2=10$<br><br><p style="text-align: right;">⑤</p> | $3+3+3+2=11$<br>$2+3+3+3=11$<br>$3+2+3+3=11$<br>$3+3+2+3=11$<br><br><p style="text-align: right;">④</p> | $3+3+3+3=12$<br>$2+2+2+2+2=12$<br>$3+2+3+2+2=12$<br><br><p style="text-align: right;">③</p> |  |

## Reflexões gerais

### Desenvolvimento da investigação

Uma análise global das interações relativas ao desenvolvimento da presente tarefa de investigação permite dizer que, no decurso da sua resolução, em conjunto, os alunos foram delineando estratégias que lhes permitiram chegar a uma solução.

Observa-se, ainda, que o Carlos vai demonstrando maior à vontade, o que lhe possibilita participar de forma mais activa na construção de uma resolução.

Das interações reproduzidas identifica-se que: (1) não se assiste a uma liderança clara e forte de algum elemento do grupo, embora a maioria das soluções tenha sido apresentada pelo Diogo; (2) não ocorrem conflitos sócio-cognitivos; (3) são utilizados diferentes procedimentos, pelos alunos, para se certificarem que as somas estão correctas.

O desenvolvimento desta investigação caracteriza-se, essencialmente, por um conjunto de experiências que o grupo vai efectuando com o auxílio da calculadora. Com base nestas experiências e no conhecimento matemático que possui, a Beatriz sugere uma estratégia de resolução da tarefa que se baseia na propriedade comutativa da adição [fala 27] conseguindo, assim, que o grupo apresente diferentes adições para cada um dos números indicados. De salientar que as adições apresentadas resultaram, na sua maioria, de um processo de tentativa e erro.

O registo escrito foi elaborado conforme decorria esta fase do trabalho.

### Discussão final

Nesta tarefa, a fase de discussão final trouxe alguns acréscimos ao trabalho realizado pelo grupo estudo de caso, uma vez que lhes permitiu tomar conhecimento de outras adições (apresentadas pelos outros grupos) que conduziam à mesma soma.

## Tarefa 8 – Pares e Ímpares

Na primeira questão desta tarefa pedia-se aos alunos para que, utilizando apenas os números de 1 a 10, somassem dois números pares e investigassem o que acontece.

1. Sara: “**Vamos pôr 2 + 4**”. E acrescenta: “**2 + 4 é 6.**”
2. Diogo: “**4 + 6.**”

(...)

6. Beatriz: “Ah...  $2 + 6 = 8$ .” (e regista a operação)

7. Sara: “ $10 + 10$ .”

8. Diogo: “Não dá.”

9. Sara: “Mas dá. Pode-se repetir os números.”

10. Carlos: “ $10 + 10$  é 20”.

Porém, o grupo fica com dúvidas e recorre à professora.

11. Beatriz: “ $10 + 10$  dá?”

12. Prof.: “O 10 é par?”

13. Beatriz: “É.”

14. Prof.: “Então, qual é a dificuldade?”

15. Sara: “Eles pensavam que não se podia repetir o mesmo número.”

16. Prof.: “Qual foi a primeira operação que fizeram?”

17. Beatriz: “ $2 + 4$ .”

18. Prof.: “E o que é que observaram?”

19. Beatriz: “Deu 6.”

20. Prof.: “E o que é que observam nisso?”

21. Diogo: “Nós observamos que com dois números podemos ter...”

22. Prof.: “Podemos ter o quê?”

23. Diogo: “Se somarmos temos um número maior.”

24. Prof.: “Somaste o quê? Dois números quê?”

25. Diogo: “Pares.”

26. Prof.: “E o que é que tiveste?”

27. Diogo: “6.”

28. Prof.: “Tiveste o quê?”

29. Beatriz: “Par também.”

30. Prof.: “Que outras contas experimentaram?”

31. Beatriz: Olhando para a folha de registo, refere: “ $4 + 6$ .”

32. Prof.: “E o que é que tiveste em  $4 + 6$ ?”

33. Beatriz: “10.” E acrescenta: “É par.”

34. Prof.: “E depois?”

35. Beatriz: “ $2 + 6 = 8$ .” E acrescenta: “Agora íamos pôr  $10 + 10$ , que também dá par.”

36. Prof.: “ $10 + 10$ , dá quanto?”

37. Beatriz: “20.”

38. Prof.: “E então?”

39. Beatriz: “Também dá porque tem o zero.”

40. Prof.: “Também dá o quê?”

41. Beatriz: “Par.”

42. Diogo: “Se nós juntarmos dois números pares o resultado também dá número par.”

A Sara é quem inicia a resolução da questão, apresentando a primeira adição [fala 1]. Segue-se o Diogo [fala 2] e, depois, a Beatriz [fala 3] que apresentam outros exemplos.

A Sara volta a apresentar uma adição de dois números pares “ $10 + 10$ ” [fala 7], com a qual o Diogo não concorda [fala 8], o que parece indicar que o aluno não tinha bem esclarecido o significado da tarefa. Apesar de a Sara procurar clarificar a sua opção [fala 9], o grupo recorre à professora para ultrapassar esta discordância. Note-se que esta situação não pode ser considerada um conflito sócio-cognitivo, pois o que está em causa não é uma oposição de resoluções que tem de ser esclarecida através de um processo de contra-argumentação. O que parece estar em jogo é a aceitação, ou não, de um procedimento, por parte do Diogo. A ajuda da professora vai, uma vez mais, no sentido de colocar novas questões [fala 12] que levem os alunos à reflexão.

Questionados sobre o que observam quando adicionam dois números pares, o Diogo responde referindo que “*Se somarmos temos um número maior*” [fala 23]. Após uma sucessão de perguntas e respostas, expressas entre as falas 16 e 28, a Beatriz esboça e apresenta outro argumento, referindo que ao adicionar-se dois números pares obtém-se “*Par também*” [fala 29]. Com base na justificação da Beatriz, o Diogo apresenta, posteriormente, uma opinião mais clarificada “*Se nós juntarmos dois números pares o resultado também dá número par*” [fala 42]. Assim, verifica-se que os dois alunos vão co-construindo uma resolução, sendo que o processo interactivo parece ter ajudado a progredirem nas suas resoluções.

Quando se lê a interacção e se observa o registo efectuado, relativamente à resolução desta questão (figura 30), constata-se que os alunos, para além das adições que realizaram, também registaram a regra encontrada, nomeadamente: “*par + par = a par*”.

Figura 30 – Registo da resolução da primeira questão da tarefa 8

**PI • Escolham dois números pares e somem-nos.**

O que observam? Tentem com mais alguns números.

$$\begin{array}{l} 2 + 4 = 6 \\ 4 + 6 = 10 \\ 2 + 6 = 8 \\ 10 + 10 = 20 \end{array}$$

$$\text{par} + \text{par} = \text{a par.}$$

O excerto da interacção abaixo reproduzido, referente à segunda questão da tarefa, revela a participação de todos os elementos do grupo, que trabalhando de forma cooperativa ao longo de toda a interacção, vão co-construindo uma resolução de forma dinâmica.

49. Prof.: “(...) Escolham dois números ímpares.”

50. Diogo: “1 + 3.”

51. Prof.: “Quanto é 1 + 3?”

52. Diogo: “5.” (o resultado está errado)

53. Beatriz: A Beatriz ao registar a operação escreve “4 + 3 = 5.”

54. Sara: Rapidamente acrescenta: “É ímpar.”

A professora não corrige o erro e coloca-lhes a seguinte questão:

55. Prof.: “Vamos ver se é sempre assim? Têm de fazer mais tentativas.”

Neste momento, volta a afastar-se do grupo. Ao fim de algum tempo, o Diogo repara no erro.

56. Diogo: “Esta está mal. É 4. 1 + 3 dá 4.” E diz à Beatriz: “Aí tem que se juntar ímpar e ímpar.”

57. Beatriz: “E...?”

58. Diogo: “Tu juntaste um par e um ímpar e isso é na terceira.”

59. Beatriz: “Tu disseste como?”

60. Diogo: “3 + 1 = 4.”

61. Beatriz: “3 + 1? Mas o 3 é ímpar.”

62. Diogo: “E o que é que tem? Nesta pergunta diz ímpar.”

A Beatriz corrige a operação, mas não o resultado (ficando  $3 + 1 = 5$ ).

63. Carlos: “Também dá 5 + 7.” Conta pelos dedos e diz: “12.”

64. Sara: “É par.”

65. Diogo: “É. Doze é par.”

66. Sara: “Eu sei outra.”

67. Diogo: “Eu também sei.”

68. Beatriz: “Diogo deixa dizer a Sara. É um de cada vez.”

69. Sara: “7 + 3.”

70. Beatriz: Enquanto faz o registo pergunta: “Quanto é que dá a conta?”

71. Sara: “10.”

72. Beatriz: Em seguida, regista outra adição: “9 + 9.”

73. Diogo: Conta pelos dedos e diz: “18.”

74. Beatriz: “3 + 3.”

75. Sara: “3 + 3 dá 6.” (calculando mentalmente)

76. Beatriz: “Carlos agora és tu.”

77. Carlos: “7 + ...”

78. Beatriz: “7 + o quê?”

79. Carlos: “7.”

80. Sara: “7 + 7 dá 14.” E rapidamente descobre outra adição e diz: “3 + 5. 3 + 5 ... 8. Oito é par.”

81. Diogo: Apresenta a última adição, dizendo: “**1 + 1.**”

82. Sara: “**1 + 1 = 2.**”

83. Diogo: “**Já sei a regra. Ímpar mais ímpar vai dar par ou ímpar.**”

(...)

90. Prof.: Aproximando-se do grupo, pergunta: “**Então, o que é que acontece quando se junta dois números ímpares?**”

91. Diogo: “**Pode ficar ou um número par ou um número ímpar.**”

(...)

94. Prof.: “**Se ímpar mais ímpar pode dar par ou ímpar, eu quero saber quando é que dá ímpar?**

**Mostra-me aí uma conta que dê ímpar.**”

95. Diogo: “**Eu já vi.**” E acrescenta: “**O 5.**”

96. Sara: Apontando para a folha de registo refere: “**Esta. 3 + 1 = 5.**”

97. Beatriz: “**O 5 é ímpar.**”

(...)

100. Prof.: “**Quanto é 3 + 1?**”

101. Diogo: “**4.**”

A Beatriz corrige o resultado da soma.

102. Prof.: “**Diz-me qual foi a primeira conta que fizeram?**”

103. Beatriz: “**1 + 1.**”

104. Prof.: “**Quanto deu?**”

105. Beatriz: “**Deu 2. É par.**”

106. Prof.: “**A seguir...?**”

107. Beatriz: “**3 + 1 = 4. Que é par também.**”

108. Prof.: “**A seguir...?**”

109. Beatriz: “**7 + 3 = par. Que é 10.**”

(...)

116. Prof.: “**Então? Acham que a regra ímpar mais ímpar é igual a ímpar ou a par?**”

117. Diogo: “**Não.**”

118. Prof.: “**Então? Ímpar mais ímpar é igual a quê?**”

119. Diogo: “**A par.**”

120. Prof.: “**Então, qual é a regra?**”

121. Diogo: “**Se nós juntarmos ímpar mais ímpar dá par.**”

Nesta questão pretendia-se que os alunos procurassem descobrir o que acontece quando adicionam dois números ímpares. Assim, é o Diogo quem apresenta a primeira adição [fala 50]. Porém, o aluno comete um erro quando dita à colega, secretária do grupo, o resultado da operação [fala 52], não se apercebendo de imediato que o fez. A Beatriz preocupada com o registo também não repara no erro que o Diogo cometeu e, para além de escrever o resultado que este lhe dita, também se engana no registo dos números

correspondentes às parcelas referidas pelo aluno. Esta situação não parece derivar da dificuldade de resolução de operações, pois ambos apresentam, geralmente, bons desempenhos na disciplina de Matemática mas, antes, ter origem numa distração dos alunos. Estes erros vão conduzir à apresentação de uma conclusão errónea, relativamente ao que observa quando adiciona dois números ímpares: “Ímpar mais ímpar vai dar par ou ímpar” [fala 83]. Posteriormente, o Diogo apercebe-se do erro e procura corrigi-lo [fala 56], não se esquecendo das informações presentes na folha do enunciado da tarefa, como acontece quando diz “Tu juntaste um par e um ímpar e isso é na terceira” [fala 58], o que revela que ele não só não se esqueceu do contexto como atribuiu um significado à tarefa que está a realizar. Após a correcção da operação e do seu resultado, e com o auxílio das perguntas que a professora lhes vai colocando e que os conduzem à reflexão, o Diogo acaba por concordar que a regra por ele mencionada não está correcta [fala 117]. Assim, corrige a conclusão, anteriormente apresentada e refere que “Se nós juntarmos ímpar mais ímpar dá par” [fala 121]. A conclusão a que chegou encontra-se expressa nos registos do grupo, apresentados através da figura que se segue (figura 31).

Figura 31 – Registo da resolução da segunda questão da tarefa 8

**P2 • Escolham dois números ímpares e somem-nos.**

O que observam? Tentem com mais alguns números.

Handwritten student work showing arithmetic operations and a conclusion. The operations listed are:  $7+7=2$ ,  $3+7=4$ ,  $7+3=10$ ,  $9+9=18$ ,  $3+3=6$ ,  $7+7=14$ , and  $3+5=8$ . The conclusion written in Portuguese is: "Se juntar dois números ímpares dá um número par. Ímpar + Ímpar = a par."

Em alguns momentos da interacção supracitada assiste-se, ainda, nas falas da Beatriz [falas 68 e 76], à presença de regras do contrato didáctico estabelecido entre a professora e o grupo, nomeadamente, no que se refere à participação de todos os parceiros na resolução da tarefa. As expressões proferidas pela aluna “É um de cada vez” e “Carlos agora és tu”, não indicam atitudes de liderança por parte da mesma, mas traduzem a valorização do cumprimento do referido contrato.

O diálogo que se segue refere-se à interacção entre os parceiros no decurso da terceira e última questão da tarefa.

123. Diogo: “**Põe 1 + 2.**”

124. Sara: “**1 + 2 é 3.**”

125. Beatriz: “**Carlos diz uma conta. Pode ser ímpar ou par.**”

126. Diogo: “**Sim. Pode ser um número ímpar e um par. Não podem ser dois números pares.**”

127. Sara: “**Eu já sei uma. 4 + 5 = 9.**”

128. Diogo: “**2 + 3**”

129. Carlos: “**9 + 5.**”

130. Beatriz: “**Não dá. Não dá.**”

131. Diogo: “**Porque são dois ímpares.**”

Neste momento, a professora aproxima-se do grupo.

132. Prof.: “**Qual foi a primeira conta que fizeram?**” (referindo-se à terceira questão)

133. Beatriz: Olha para a folha de registo e refere: “**1 + 2.**”

134. Prof.: “**O que é que tiveram? Que número?**”

135. Beatriz: “**O 3.**”

136. Prof.: “**Que é...?**”

137. Beatriz: “**Ímpar.**”

138. Prof.: “**A seguir...outra conta?**”

139. Beatriz: “**4 + 5.**”

140. Prof.: “**Igual a...?**”

141. Beatriz: “**9. Ímpar.**”

142. Prof.: “**A seguir?**”

143. Beatriz: “**2 + 3 = 5. Ímpar.**”

144. Prof.: “**Então, o que é que observam quando juntam um par e um ímpar?**”

145. Diogo: “**Se juntarmos um número par e um número ímpar dá sempre ímpar.**”

Uma análise da interacção permite verificar que existe uma dinâmica de co-elaboração muito eficaz entre os elementos do grupo. O ritmo que eles imprimem à interacção é muito rápido, o que denota que não têm dificuldades em compreender a tarefa e que dominam o conteúdo que estão a trabalhar.

O episódio mostra que o Diogo inicia a resolução da questão, apresentando a primeira proposta de resolução [fala 123], que a Sara completa ao mencionar o resultado da adição [fala 124].

Quando o Carlos intervém, referindo a adição “9 + 5” [fala 129], rapidamente a Beatriz menciona que “*Não dá. Não dá*” [fala 130], mas não apresenta qualquer tipo de



justificação para o seu argumento. Já o Diogo justifica que a operação nomeada está incorrecta, uma vez que corresponde à junção de dois números ímpares [fala 131].

A partir da fala 132 a professora vai colocando questões aos elementos do grupo, de forma a tomar conhecimento do trabalho já realizado por eles e, simultaneamente, lhes proporcionar um momento de reflexão conjunta. Com base nesta sequência de perguntas e respostas o Diogo esboça e apresenta uma conclusão referente ao que observam quando adicionam um número par e um ímpar. Assim, o aluno refere “*Se juntarmos um número par e um número ímpar dá sempre ímpar*” [fala 145]. Esta conclusão encontra-se também expressa na figura que se segue (figura 32), a qual traduz o registo realizado pelo grupo.

Figura 32 – Registo da resolução da terceira questão da tarefa 8

P3 • Escolham **um número par e um número ímpar** e somem-nos?

O que observam? Tentem com mais alguns números.

$7 + 2 = 9$   
 $4 + 5 = 9$   
 $2 + 3 = 5$   
 $5 + 2 = 7$

*Se juntarmos um número par e um ímpar dá sempre um número ímpar.*

Na continuação da tarefa e para finalizar a sua resolução, os alunos utilizaram uma estratégia de resolução na forma de texto escrito, limitando-se a copiar para o espaço correspondente as conclusões mencionadas em cada uma das questões anteriores, como é possível comprovar através da figura 33, referente ao registo apresentado pelo grupo.

Figura 33 – Registo da resolução da quarta questão da tarefa 8

P4 • Conseguem identificar regras?

*par + par = a par.*  
*Se juntar dois números ímpares dá um número par.*  
*Ímpar + Ímpar = a par.*  
*Se juntarmos um número par e um ímpar dá sempre um número ímpar.*

## **Reflexões gerais**

### Desenvolvimento da investigação

A interacção ocorrida ao longo da tarefa revela que os alunos, ao trabalharem num grupo cooperativo, co-elaboram resoluções entre si criando, assim, uma dinâmica interactiva. Os alunos resolveram com êxito esta tarefa de investigação e apesar de não ser possível saber se chegariam ao mesmo resultado se estivessem a trabalhar individualmente, acredita-se que essa co-elaboração beneficiou todos os parceiros da relação (como referem Gilly, Fraisse e Roux, 1988).

O padrão de actuação foi, de um modo geral, o seguinte: efectuar as adições nas folhas de registo e reflectir sobre os resultados obtidos.

O ritmo da interacção foi rápido, pois os alunos resolveram a tarefa num curto período de tempo. Assim, a rapidez com que chegaram às respostas, referentes às diversas questões da tarefa, parece traduzir a compreensão, por parte dos alunos, dos conteúdos inerentes à sua resolução (números pares e ímpares), os quais haviam sido, previamente, trabalhados na sala de aula. O facto de, na fase de apresentação da tarefa, a professora ter ajudado os alunos a recordar os conceitos matemáticos subjacentes à tarefa, parece também ter assumido um importante contributo para o sucesso na resolução da mesma.

A análise dos resultados das adições efectuadas permite, ao grupo, encontrar regularidades, como é evidente através do registo escrito apresentado.

À semelhança das tarefas anteriormente referidas, o registo escrito desta tarefa foi efectuado simultaneamente ao desenvolvimento da investigação.

### Discussão final

Nesta fase final do trabalho, relativamente ao grupo estudo de caso, não se verificaram alterações a nível dos resultados nem do uso de diferentes estratégias.

## **CAPÍTULO 6 – CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES**

Neste trabalho descreve-se um estudo realizado com uma turma do 1º ano de escolaridade, em contexto de sala de aula, em que se valorizou o ensino-aprendizagem em grupos cooperativos, privilegiando-se tarefas de natureza investigativa.

O principal objectivo deste estudo é o de analisar as interacções e o desempenho dos alunos quando trabalham, em grupos cooperativos, sobre investigações matemáticas. Para focar e contextualizar o problema definiram-se as seguintes questões:

- Que interacções ocorrem quando os alunos trabalham, de acordo com o modelo de aprendizagem cooperativa, em investigações matemáticas?
- Como se caracteriza o desempenho dos alunos perante tarefas de investigação matemática realizadas em grupos cooperativos?

Assim, neste capítulo, apresenta-se um resumo do estudo, recordando os seus objectivos, a metodologia seguida e a realização das tarefas. Posteriormente, são apresentadas as principais conclusões a que este estudo conduziu, no que se refere às interacções e desempenho dos alunos. A finalizar são feitas algumas recomendações para futuras investigações que surjam relacionadas com os temas: aprendizagem cooperativa e investigações matemáticas.

### **6.1. RESUMO DO ESTUDO**

A investigação feita, de natureza qualitativa, assentou num estudo de caso de um grupo constituído por quatro alunos. Os alunos foram escolhidos com base nos seguintes critérios: serem de sexos diferentes, dois rapazes e duas raparigas; possuírem diferentes capacidades matemáticas (raciocínio, resolução de problemas, comunicação, argumentação); e não haver conflitos entre eles.

A recolha de dados, com recurso à observação participante (apoiada por gravações áudio e vídeo), ao questionário e à entrevista, foi orientada tendo em vista uma análise qualitativa. Utilizaram-se, ainda, como fonte de dados os materiais produzidos pelo grupo, relativamente às oito tarefas de investigação que lhe foram propostas.

A observação participante, ao aliar a observação à participação, “permitiu compreender o fenómeno como alguém que está por dentro (*insider*) e descrevê-lo como alguém que está por fora (*outsider*)” (Segurado, 1997, p.127). Por sua vez, os questionários e as entrevistas permitiram obter informação específica, dificilmente acessível utilizando outras técnicas de recolha de dados. Ambos foram essenciais para aceder às opiniões dos alunos e permitiram conhecer se o que foi enunciado por eles tinha correspondência no seu desempenho aquando da realização das tarefas de investigação.

Os dados recolhidos, depois de analisados, possibilitaram, de algum modo, perceber como interagem e qual o desempenho dos elementos do grupo neste tipo de tarefas e forma de trabalho.

As tarefas de investigação foram sempre entregues por escrito aos alunos (um enunciado por grupo). Antes de estes darem início à sua resolução, a professora deu as explicações que considerou necessárias e teceu algumas considerações sobre este tipo de tarefas, de modo a estimular a curiosidade dos alunos levando a que se sentissem predispostos para a sua realização. Durante a consecução das tarefas a professora apoiou e incentivou os alunos a progredirem, sempre que necessário, desbloqueou situações de impasse e levou-os a reflectir sobre o trabalho que estavam a efectuar. Na fase de discussão final procurou-se dar sentido ao trabalho desenvolvido pelos grupos. A professora procurou, ainda, promover a interacção entre os elementos dos grupos e entre estes e a professora, com o intuito de desenvolver as suas capacidades de comunicar matematicamente. A partilha de diferentes formas de abordagem de uma mesma tarefa foi importante para estimular a comunicação. Também o erro foi aproveitado de forma a levar os alunos a analisá-lo, sendo eles próprios a descobrir onde estava a correcção. Contudo, procurou-se, sempre, valorizar o raciocínio que lhe estava subjacente.

## **6.2. SÍNTESE DAS PRINCIPAIS CONCLUSÕES**

### **Que interacções ocorrem quando os alunos trabalham, de acordo com o modelo de aprendizagem cooperativa, em investigações matemáticas?**

Relativamente à primeira questão-problema a que este estudo procurou dar resposta, salienta-se que, desde o início do estudo, os quatro alunos que constituem o grupo estudo

de caso revelaram gostar de trabalhar em grupo e de resolver tarefas de investigação matemática, manifestando as suas opiniões relativamente ao assunto.

No que se refere ao trabalho em grupos cooperativos, aquando da resposta ao questionário, todos deram destaque às interações valorizando, dentro deste, a interajuda que esta metodologia promove. Quanto às tarefas de investigação, enquanto o Carlos e a Beatriz salientam o seu carácter divertido, o Diogo e a Sara focam aspectos relacionados com a aprendizagem facultada por este tipo de tarefas.

As opiniões dos alunos sobre o trabalho em grupos cooperativos continuaram a perdurar no final do estudo, já que, na entrevista, voltam a destacar a interajuda proporcionada por esta metodologia, como forma de contribuir para um trabalho mais rico. Porém, as convicções que os alunos revelam possuir sobre o trabalho em grupos cooperativos nem sempre se ajustam ao desempenho de todos os alunos, pois o grupo sentiu necessidade de incentivar o Carlos a cooperar e a contribuir com as suas ideias para a resolução de algumas das tarefas propostas.

No que se refere às tarefas de investigação, o Diogo continua a dar destaque à aprendizagem facultada por este tipo de tarefas, pois considera que “(...) *podemos aprender mais coisas*”. Por sua vez, os parceiros focam o lado menos habitual e, portanto, mais divertido de tarefas desta natureza.

As tarefas de investigação, aliadas ao trabalho cooperativo, permitiram aos alunos envolver-se nelas sem receio, adquirindo maior confiança nas suas próprias capacidades e nas dos parceiros. O Diogo, a Beatriz e a Sara, revelaram, através da sua atitude activa e persistente, ao longo da consecução das tarefas investigativas, terem adquirido gosto por este tipo de trabalho. Já a atitude e desempenho do Carlos, aquando da realização das tarefas de investigação nas aulas de matemática, não permitem chegar a uma conclusão precisa relativamente a este assunto, embora no questionário e na entrevista tenha referido que gosta de realizar estas tarefas. A opinião manifestada pelo aluno, em dois momentos distintos (no início e no fim do estudo), nem sempre está em consonância com a atitude que assumiu no decurso das oito tarefas, isto é, bastante menos interventivo que os seus parceiros do grupo. Relativamente a este aluno salienta-se que não se verificou uma evolução significativa na sua atitude/postura no desenrolar das tarefas de investigação.

A observação em torno dos quatro elementos do grupo, quando se encontravam envolvidos na execução das tarefas de investigação, permitiu perceber que os alunos reagem de maneiras diferentes às tarefas propostas. Em determinados momentos, o Carlos revela uma atitude algo passiva e, consequentemente, alguma dificuldade em interagir com

os seus parceiros, contribuindo pouco para o desenvolvimento das ideias dos colegas. Contudo, uma ou outra vez, envolve-se em discussões realizadas no grupo. Por sua vez, o Diogo, a Beatriz e a Sara, desenvolvem grande parte do trabalho em cooperação entre si, partilhando o seu pensamento matemático, isto é, as ideias de um(a) são aproveitadas pelos outros elementos do grupo, dando, assim, continuidade ao trabalho.

Apesar do atrás enunciado, na maioria das tarefas, o grupo conseguiu trabalhar cooperativamente. No entanto, o contrato didáctico, que previa a cooperação e interajuda entre todos os elementos do grupo e a partilha de ideias, nem sempre foi cumprido. Por um lado, o Carlos, apesar de incentivado pelos colegas, nem sempre participou na resolução das tarefas. Por outro lado, os colegas nem sempre lhe deram o tempo de que este necessitava para participar e cooperar.

### **Como se caracteriza o desempenho dos alunos perante tarefas de investigação matemática realizadas em grupos cooperativos?**

1) Uma vez que esta investigação envolve crianças do 1º ano de escolaridade, não familiarizadas com o trabalho cooperativo e as investigações matemáticas, durante a fase de preparação do estudo, estabeleceu-se um contacto inicial do grupo com este tipo de tarefas e forma de trabalho e verificou-se que os alunos possuíam a concepção de que uma questão apenas tem uma resposta. Encontrada essa resposta paravam de trabalhar, por considerarem que o trabalho estava concluído. Revelaram, também, ter a percepção de que uma resposta ou está certa ou está errada e que cabe à professora fazer a sua validação. Assim, procurou-se contribuir para que os alunos comesçassem a assumir outra atitude perante este tipo de trabalho. Deste modo, a postura da professora, ao longo de todo o estudo, foi sempre a de apoiar os alunos de forma a manter em movimento o processo de aprendizagem, levando-os a pensar por si próprios. Essa postura, aliada à estrutura do trabalho cooperativo, contribuiu para que, progressivamente, os alunos encarassem de uma maneira diferente o trabalho realizado. A pouco e pouco, foram-se apercebendo que o trabalho se torna mais produtivo se interagirem com os colegas, podendo ir mais além na resolução das tarefas. Para além disso, demonstraram ter adquirido uma maior autonomia.

Porém, no decurso da fase de recolha de dados, em que o grupo se envolveu na resolução das oito tarefas de investigação, verifica-se que há, ainda, certos aspectos que falham relativamente à dependência face à professora. Em determinados momentos do

desenvolvimento das investigações propostas, os alunos manifestaram necessidade de verem validadas as suas respostas e continuaram a sentir que é a professora que tem de decidir quem tem razão ou não em caso de discórdia ou conflito no grupo.

Salienta-se, no entanto, que algumas intervenções efectuadas pela professora, no desenvolvimento das tarefas de investigação, não ocorreram por esta ser solicitada, mas porque a mesma considerou fundamental intervir, no sentido de colocar questões ao grupo. Esse levantamento de questões tinha dois objectivos distintos. Por um lado, permitir à professora tomar conhecimento do trabalho já efectuado pelo grupo (tarefa 5, 6 e 7) e, por outro lado, levar os alunos a reflectir sobre o trabalho realizado, possibilitando a sua progressão na resolução das tarefas, principalmente no momento da descoberta de regularidades (tarefa 2 e 8).

2) Quanto à resolução das tarefas de investigação, destaca-se que o grupo utilizou diversas estratégias que lhe permitiram resolvê-las com êxito. As estratégias mais utilizadas foram o desenho, o processo de tentativa e erro e a descoberta de uma lei de formação que, conseqüentemente, lhes facultou o estabelecimento de regularidades (tarefa 2, 3, 5 e 8).

Na maioria das tarefas, no decurso da fase de desenvolvimento, verifica-se a repetição do padrão de actuação, por parte do grupo, que, geralmente, consiste em construir as figuras com o auxílio de material manipulável, reproduzi-las para o papel e reflectir sobre o trabalho realizado. Este padrão só não se verifica nas tarefas que são apenas de natureza numérica. Nestes casos, o padrão de actuação é o seguinte: efectuar as adições e reflectir sobre os resultados obtidos.

3) Uma grande parte das tarefas de investigação propostas neste estudo foi resolvida pelos alunos com recurso a materiais manipuláveis (tarefa 1, 2, 3, 5 e 7). Assim, com base nos materiais, os alunos resolveram as tarefas e efectuaram os registos. Posteriormente, reflectiram sobre o trabalho realizado e descobriram algumas regularidades. Neste sentido, um dos resultados que sobressai desta investigação é o papel facilitador que o material manipulável teve na resolução, com sucesso, das tarefas.

Com a passagem do tempo e uma maior aproximação dos alunos a este tipo de trabalho verificou-se, por parte do grupo, uma evolução a nível do estabelecimento de regularidades. Esta evolução é já bem visível na tarefa 5, em que no seio do grupo, os alunos descobriram três regularidades existentes na construção das escadas com os

quadrinhos de papel. Mais uma vez aqui, o material manipulável representou uma mais-valia.

4) Algumas das tarefas de investigação propostas possibilitaram uma estreita relação entre os conteúdos leccionados e os processos de raciocínio. Estas tarefas, ao mobilizarem conhecimentos previamente adquiridos dão-lhes um outro significado, ao mesmo tempo que contribuem para uma melhor apropriação destes conhecimentos pelos alunos.

Os conhecimentos adquiridos assumem valor para os alunos, quando eles sentem que precisam deles para poderem realizar as tarefas que lhe são propostas. Desta forma, durante a realização das tarefas, foi possível perceber o domínio que os alunos tinham de alguns conceitos leccionados anteriormente, nomeadamente: figuras geométricas e números pares e ímpares. Salienta-se, ainda, que foi visível o interesse com que, na fase de apresentação, o grupo se apropriou de conceitos necessários à consecução da própria tarefa, como foi o caso da tarefa referente aos números em escada, em que se introduziram termos como números em escada e números consecutivos.

Ao longo da realização das tarefas de investigação, os elementos do grupo foram-se apercebendo da sua própria importância para a consecução da tarefa. O facto de terem de ser eles a observar, argumentar, validar, permitiu-lhes valorizar os processos em detrimento das respostas.

O Diogo e a Beatriz sentindo que podem dar azo à sua criatividade matemática e que esta é valorizada pela professora, envolvem-se na realização das tarefas mostrando um certo domínio das ideias matemáticas. A Sara, que no ambiente de trabalho em pequeno grupo se sente mais “liberta”, adere com entusiasmo às tarefas propostas, observando, testando, argumentando e, assim, deixando transparecer a sua capacidade de raciocínio e criatividade. Por sua vez, o Carlos, que, geralmente, assume uma postura menos interventiva, foi desafiado pelos colegas a colaborar nas tarefas, vindo a manifestar algum prazer pela actividade investigativa, de acordo com o que enunciou no questionário e na entrevista. Deste modo, poder-se-á dizer que as tarefas propostas, de natureza investigativa, levaram estes quatro alunos a desenvolver, de algum modo, a sua capacidade matemática.

5) Como havia referido anteriormente, o grupo revelou êxito quanto ao resultado final das investigações que realizou. Por isso, na fase de discussão, que envolveu todos os grupos, verificaram-se dois aspectos distintos, no que se refere aos resultados conseguidos



na fase de desenvolvimento. Foca-se, novamente, que estes resultados são sempre analisados da óptica do grupo estudo de caso. Assim, na generalidade das tarefas, esta fase não trouxe qualquer acréscimo ao trabalho realizado pelo grupo, mas permitiu que o mesmo contribuísse para a discussão em grande grupo (turma) e para o enriquecimento do trabalho dos outros grupos, ao transmitir-lhes novas informações. Em algumas tarefas, a discussão permitiu, ao grupo estudo de caso, ter conhecimento de diferentes estratégias utilizadas pelos outros grupos no desenvolvimento das tarefas.

Estes momentos de discussão colectiva entre os grupos, numa primeira fase, eram bastante orientados pela professora e, gradualmente, foram perdendo esse carácter. Nesta fase do trabalho também se verificaram mudanças nas atitudes dos alunos. Inicialmente, coexistia o medo de se exporem, em virtude do trabalho poder conter erros, pelo facto de não ter sido validado pela professora. Assim, estes momentos permitiram a estes alunos perceber que o esforço desenvolvido era valorizado e o erro aproveitado para estimular a discussão, o que lhes possibilitou adquirir maior à vontade. Em cada uma das tarefas havia um elemento do grupo que desempenhava a função de porta-voz, função que era rotativa. No entanto, sempre que, na fase de discussão final, o porta-voz manifestava alguma dificuldade os seus colegas de grupo podiam intervir, com o intuito de tornar a apresentação do trabalho mais clara. Também, em nome pessoal, eram expressas, sem medo, ideias que surgissem no decorrer da discussão, o que significa que a validação da investigação era feita por todos os alunos e não, exclusivamente, pela professora.

Relativamente aos momentos de discussão, realça-se que estes foram valorizados pelo Diogo no final do estudo. Na entrevista, o aluno referenciou esta fase como vantajosa para o processo de aprendizagem, pois considera que *“quando vamos apresentar ficamos a saber todas as coisas que todos os grupos descobriram”*.

6) Finalmente, outra conclusão que emerge deste estudo é que foram visíveis progressos nos desempenhos do grupo, principalmente na fase de desenvolvimento da investigação. Estes progressos surgiram com o passar do tempo, implicaram um trabalho prévio a nível do estabelecimento de regras de cooperação e da resolução de investigações matemáticas, mas este trabalho mostra que, com algum esforço por parte do professor e com um trabalho contínuo na sala de aula, é possível que os alunos trabalhem em grupos cooperativos na resolução de investigações matemáticas. Portanto, pretende-se realçar a ideia de que é verdadeiramente possível realizar este tipo de trabalho com crianças tão

pequenas, a iniciar a sua escolaridade e que, desta forma, poderão mais rapidamente desenvolver o seu poder matemático.

### **6.3. IDEIAS E RECOMENDAÇÕES PARA FUTURAS INVESTIGAÇÕES**

As recomendações aqui enunciadas dirigem-se não só aos investigadores mas, essencialmente, aos professores e têm como principal finalidade abrir o espaço para a reflexão.

A documentação a que a investigadora teve acesso, aquando da realização deste estudo, revelou que não existem estudos com alunos do 1º ano de escolaridade, aliando o trabalho cooperativo às investigações matemáticas. Esta investigação cingiu-se a alunos do 1º ano de escolaridade, que não se pretende, de alguma forma, serem representativos dos alunos em geral. Assim, a primeira recomendação vai no sentido de que seria útil haver mais investigação sobre os contributos da aprendizagem cooperativa na resolução de tarefas investigativas, com alunos do 1º ano de escolaridade. A segunda recomendação recai no estudo dos mesmos temas envolvendo alunos de outros anos de escolaridade, do 1º ciclo.

Uma outra recomendação, que se julga importante aqui enunciar, visa a análise dos contributos da aprendizagem cooperativa noutra tipo de actividades, no âmbito da Matemática.

Os processos interactivos têm sido estudados por alguns autores. Assim, outra recomendação recai sobre este domínio, por se considerar que há, ainda, aspectos que podem ser analisados, nomeadamente, o papel da comunicação (vocabulário utilizado, capacidade de argumentar).

O presente estudo, apesar de ter representado o primeiro contacto destes alunos com as tarefas de investigação e com o trabalho cooperativo, revelou progressos nos seus desempenhos. Portanto, parece realmente importante que este tipo de tarefas passem a fazer parte efectiva das práticas dos professores. As actividades de investigação surgem enunciadas nos currículos de Matemática e, se considerarmos que estas podem proporcionar aos alunos momentos de verdadeira actividade matemática, é pertinente pensar na sua efectiva concretização na sala de aula. No entanto, um elemento fundamental para essa concretização é o próprio professor, que deve envolver-se em experiências

inovadoras. Assim, na sua formação inicial ou contínua, (por exemplo, através da Formação Contínua para Professores do 1º ciclo do Ensino Básico), os professores deveriam ter a possibilidade de contactar directamente com actividades desta natureza e de as promover na sala de aula, para que possam observar o desempenho dos seus alunos e, conseqüentemente, reflectir sobre as vantagens das tarefas de investigação para o ensino e aprendizagem da Matemática.

Esta investigação mostra que é possível e desejável começar desde cedo a envolver os alunos em grupos de trabalho cooperativo e que é, igualmente, possível estes realizarem pequenas tarefas de investigação matemática. A experiência com estes alunos foi muito gratificante, por isso, é um desejo que ela sirva de incentivo para que outros professores experimentem proporcionar aos seus alunos tarefas de investigação, contribuindo com as suas experiências e reflexões para um melhor conhecimento das potencialidades educativas deste tipo de actividade matemática.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a matemática: a experiência do projecto MAT789* (tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Amaral, H. (2003). *Actividades investigativas na aprendizagem da matemática no 1º ciclo* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM. [Documento recuperado a 12/03/2007 em <http://ia.fc.ul.pt>]

APM (1988). *Renovação do currículo de matemática*. Lisboa: APM.

APM (1998). *Matemática 2001: diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da matemática*. Lisboa: APM.

Arends, R. (1995). *Aprender a ensinar*. Lisboa: McGraw-Hill.

Bishop, A. e Goffree, F. (1986). Classroom organisation and dynamics. In B. Christiansen, A. Howson e M. Otte (Orgs.), *Perspectives on mathematics education* (pp.309-365). Doedrecht: D. Reidel.

Bogdan, R. e Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Branco, J.; Angelino, N. e César, M. (1995). Tarefas matemáticas – trabalho em díade vs. Trabalho individual. In A. Pinheiro, A. Canavarro, L. Leal e P. Abrantes (Eds.), *Actas do ProfMat 95* (pp.175-181). Lisboa: APM.

Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula de matemática: um projecto curricular no 8º ano* (tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Carvalho, C. (2001). *Interações entre pares: contributos para a promoção do desenvolvimento lógico e do desempenho estatístico, no 7º ano de escolaridade* (tese de doutoramento). Lisboa: Universidade de Lisboa.

Carvalho, C. e César, M. (2002). Interações sociais, desenvolvimento cognitivo e matemática. In M. Fernandes, J. Gonçalves, M. Bolina, T. Salvado e T. Vitorino (Eds.), *O particular e o global no virar do milénio: cruzar saberes em educação. Actas do 5º Congresso da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação* (pp.407-416). Porto: Edições Colibri e SPCE.

Cebolo, V. (2006). *Influência das actividades de investigação nas atitudes de alunos do 5º ano face à matemática* (tese de mestrado, Universidade do Minho). Braga: IEC - Universidade do Minho.

Cebolo, V.; Alves, B. e Cruz, O. (2006). Actividades de investigação. In P. Palhares e A. Gomes (Coords.), *Mat 1C: desafios para um novo rumo* (pp.18-38). Braga: IEC - Universidade do Minho.

César, M. (1996). Interações entre pares e resolução de tarefas matemáticas. In *Actas do VI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp.225-240). Lisboa: APM.

César, M.; Castelhana, A.; Fonseca, S.; Martins, H.; e Malheiro, L (1999). Um mar de ideias: o trabalho em interacção entre pares. In *Actas do ProfMat 99* (pp.288-296). Portimão: APM.

César, M. (2000a). Interações sociais e apreensão de conhecimentos matemáticos: a investigação contextualizada. In J. Ponte e L. Serrazina (Orgs.), *Educação matemática em Portugal, Espanha e Itália - Actas da Escola de Verão em Educação Matemática - 1999* (pp.5-46). Lisboa: SPCE – Secção de Educação Matemática.

César, M. (2000b). Interações na aula de matemática: um percurso de 20 anos de investigação e reflexão. In C. Monteiro, F. Tavares, J. Almiro, J. Ponte, J. Matos e L. Menezes (Eds.), *Interações na aula de matemática* (pp.13-34). Viseu: SPCE.

Christiansen, B. e Walter, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. Howson e M. Otte (Orgs.), *Perspectives on mathematics education* (pp.243-307). Doedrecht: D. Reidel.

Cohen, L. e Manion, L. (1994). *Research methods in education*. London: Routledge.

Costa, J. (1991). *Gestão escolar: participação, autonomia, projecto educativo da escola*. Lisboa: Texto Editora.

Davidson, N. (1990). *Cooperative learning in mathematics. A handbook for teachers*. New York: Addison-Wesley.

Davidson, N. e Kroll, D. (1991). An overview of research on cooperative learning related to mathematics. *Journal for research in mathematics education*, Vol.22, n.º 5, 362-365.

DEB (1998). *Organização curricular e programas: ensino básico - 1º ciclo*. Mem Martins: Ministério da Educação.

DEB (2001). *Currículo nacional do ensino básico: competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação – Departamento da Educação Básica.

DES (1997). *Matemática: Programas - 10º, 11º e 12º anos*. Lisboa: Ministério da Educação.

DGIDC (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação – Departamento da Educação Básica. [Documento recuperado a 20/05/2009 em [http://sitio.dgicd.min-edu.pt/matematica/Paginas/Reajustamento\\_matematica.aspx](http://sitio.dgicd.min-edu.pt/matematica/Paginas/Reajustamento_matematica.aspx)]

Díaz-Aguado, M. (1996). *Escuela y tolerancia*. Madrid: Ediciones Pirámide.

Duarte, T. (2004). *A estatística no 1º ciclo: uma abordagem no 3º ano de escolaridade* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: [s.n.]. [Documento recuperado a 12/03/2007 em <http://ia.fc.ul.pt>]

Ernest, P. (1996). Investigações, resolução de problemas e pedagogia. In P. Abrantes, L. Leal e J. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender matemática* (pp.25-47). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Fonseca, C. (1999). *Interações em pequenos grupos em resolução de problemas e actividades investigativas na aula de matemática: uma experiência no 8º ano de escolaridade* (tese de mestrado, Universidade do Porto). Porto: [s/n.].

Fonseca, H. (2000). *Os processos matemáticos e o discurso dos alunos em actividades de investigação na sala de aula* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM. [Documento recuperado a 12/03/2007 em <http://ia.fc.ul.pt>]

Fontana, A. e Frey, J. (1994). Interviewing: The art of science. In N. Denzin e Y. Lincoln (Orgs.), *Handbook of qualitative research* (pp.361-376). London: Sage.

Freitas, C. (1997). A aprendizagem cooperativa. In M. Patrício (Org.), *Formar professores para a escola cultural no horizonte dos anos 2000* (pp.163-175). Porto: Porto Editora.

Gilly, M.; Fraisse, J; e Roux, J.P. (1988). Résolution de problèmes en dyades et progrès cognitifs chez des enfants de 11 à 13 ans: dynamiques interactives et sócio-cognitives. In A. Perret-Clermont e M. Nicolet (Eds.), *Interagir et connaître: Enjeux et régulations sociales dans le développement cognitifs* (pp.73-92). Fribourg: Del Val.

González-Tejero, J. e López, M. (1996). *Cooperar para aprender: cómo implementar el aprendizaje cooperativo en el aula?* Murcia: DM Librero Editor.

Guerreiro, M. (2005). *O trabalho cooperativo nas aulas de matemática numa turma do 5º ano: uma experiência curricular* (tese de doutoramento, Universidade de Santiago de Compostela). Santiago de Compostela: Universidade de Santiago de Compostela.

Johnson, D. e Johnson, R. (1990). Using cooperative learning in math. In N. Davidson (Ed.), *Cooperative learning in mathematics*. Reading Mass: Addison-Wesley.

Ludke, M. e André, M. (1986). *Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas*. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária.

Machado, V. (1997). *Interações em grupos em matemática: uma experiência no 7º ano de escolaridade* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Matos, J. e Serrazina, M. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Merriam, S. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. San Francisco: Jossey-Bass Publishers.

National Council of Teachers of Mathematics (1994). *Normas profissionais para o ensino da matemática*. Lisboa: APM. [Tradução portuguesa do original em inglês, publicado em 1991].

Oliveira, H. (1998). *Actividades de investigação na aula de matemática: aspectos da prática do professor* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Oliveira, M. (2008). A importância dos materiais manipuláveis. In E. Mamede (Coord.), *Matemática - Ao encontro das práticas - 1º ciclo* (pp.25-30). Braga: IEC - Universidade do Minho.

Oliveira, P. (2002). *A investigação do professor, do matemático e do aluno: uma discussão epistemológica* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM. [Documento recuperado a 12/03/2007 em <http://ia.fc.ul.pt>]

Ovejero, A. (1990). *El aprendizaje cooperativo: una alternativa eficaz a la enseñanza tradicional*. Barcelona: Promociones y Publicaciones Universitarias.

Ponte, J.; Boavida, A.; Graça, M. e Abrantes, P. (1997). *Didáctica da matemática*. Lisboa: Ministério da Educação.

Ponte, J.; Matos, P. e Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática: implicações curriculares*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.



Ponte, J. e Serrazina, M. (2000). *Didáctica da matemática do 1º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J.; Brocardo, J. e Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Porfírio, J. (1993). *A resolução de problemas na aula de matemática: uma experiência no 7º ano de escolaridade* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Porfírio, J. e Oliveira, H. (1999). Uma reflexão em torno das tarefas de investigação. In P. Abrantes, J. Ponte, H. Fonseca e L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp.111-118). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Rocha, C. (2003). *Uma experiência com actividades de investigação na aula de matemática: competências matemáticas, atitudes e concepções de dois alunos do 7º ano de escolaridade* (tese de mestrado, Universidade do Porto). Porto: [s/n].

Rodrigues, M. (2000). Interacções sociais na aprendizagem da matemática. In *Quadrante*, vol.9, n.º1 (pp.3-47). Lisboa: APM.

Romão, M. (2000). O papel da comunicação na aprendizagem da matemática. In C. Monteiro *et al*, *Interacções na aula de matemática* (pp.163-178). Viseu: SPCE.

Segurado, M. (1997). *A investigação como parte da experiência matemática dos alunos do 2º ciclo* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa. APM.

Sousa, R. (2006). *A prática lectiva perspectivada como actividade de resolução de problemas* (tese de mestrado, Universidade do Minho). Braga: IEC - Universidade do Minho.

Torres, M. (1996). *Educación y competencia social: un programa en el aula*. Archidona: Ediciones Aljibe.

Tudella, A.; Ferreira, C.; Bernardo, C.; Pires, F.; Fonseca, H.; Segurado I. e Varandas, J. (1999). Dinâmica de uma aula com investigações. In P. Abrantes, J. Ponte, H. Fonseca e L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp.87-96). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Vale, I. (2000). *Didáctica da matemática e formação inicial de professores num contexto de resolução de problemas e de materiais manipuláveis* (tese de doutoramento, Universidade de Aveiro). Lisboa: APM.

Varandas, J. (2000). *A avaliação de investigações matemáticas: uma experiência*. (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: [s/n]. [Documento recuperado a 12/03/2007 em <http://ia.fc.ul.pt>]

Wood, T.; Merkel, G. e Uerkwitz, J. (1996). Criar um ambiente na aula para falar sobre matemática. *Educação e Matemática*, n.º 40 (pp.39-43).

Yin, R. (1989). *Case study research: Design and methods*. Newbury Park: Sage Publications.

## **Anexos**

## Cartaz das regras negociadas com os grupos

# Regras de Trabalho em Grupo



Para se poder realizar trabalhos em grupo é preciso cumprir algumas regras.

- Discute com os teus colegas as regras a cumprir no trabalho em grupo.

## Regras

1. Falar baixo e um de cada vez.
2. Levantar o dedo quando quisermos falar.
3. Não sair dos grupos nem andar em pé na sala de aula.
4. Respeitar a professora e colegas e sermos amigos uns dos outros.
5. Ajudar os colegas a resolver as tarefas.
6. Quando não percebermos alguma coisa perguntamos aos colegas de grupo e só depois à professora.
7. Tentar chegar a um acordo quando há opiniões diferentes.
8. Trabalhar com os colegas de grupo e não estar na brincadeira com eles.



Crachás identificativos da função desempenhada  
por cada elemento do grupo, em cada uma das tarefas

| Grupo: <u>Detectives</u>          |                  |
|-----------------------------------|------------------|
| Aluno(a): <u>Carlos</u>           |                  |
| Função                            | Data             |
| 1ª tarefa: <u>porta-voz</u>       | <u>23/5/2008</u> |
| 2ª tarefa: <u>ajudante</u>        | <u>27/5/2008</u> |
| 3ª tarefa: <u>secretário</u>      | <u>30/5/2008</u> |
| 4ª tarefa: <u>distr. material</u> | <u>4/6/2008</u>  |
| 5ª tarefa: <u>porta-voz</u>       | <u>6/6/2008</u>  |
| 6ª tarefa: <u>ajudante</u>        | <u>11/6/2008</u> |
| 7ª tarefa: <u>secretário</u>      | <u>16/6/2008</u> |
| 8ª tarefa: <u>distr. material</u> | <u>20/6/2008</u> |

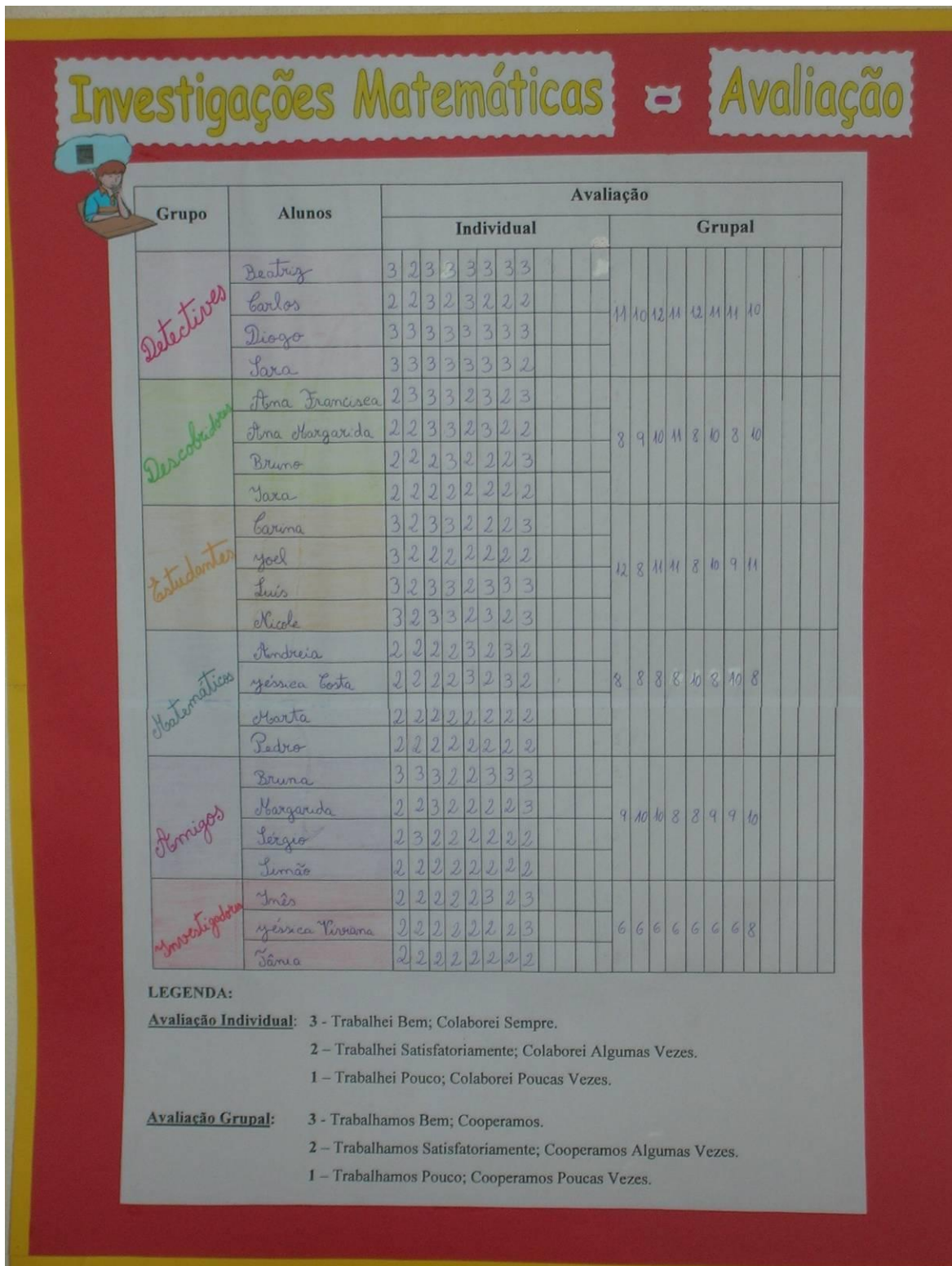
| Grupo: <u>Detectives</u>          |                   |
|-----------------------------------|-------------------|
| Aluno(a): <u>Beatriz</u>          |                   |
| Função                            | Data              |
| 1ª tarefa: <u>distr. material</u> | <u>23/05/2008</u> |
| 2ª tarefa: <u>porta-voz</u>       | <u>27/05/2008</u> |
| 3ª tarefa: <u>ajudante</u>        | <u>30/05/2008</u> |
| 4ª tarefa: <u>secretário</u>      | <u>4/6/2008</u>   |
| 5ª tarefa: <u>distr. material</u> | <u>6/6/2008</u>   |
| 6ª tarefa: <u>porta-voz</u>       | <u>11/06/2008</u> |
| 7ª tarefa: <u>ajudante</u>        | <u>16/6/2008</u>  |
| 8ª tarefa: <u>secretário</u>      | <u>20/6/2008</u>  |

| Grupo: <u>Detectives</u>          |                   |
|-----------------------------------|-------------------|
| Aluno(a): <u>Diego</u>            |                   |
| Função                            | Data              |
| 1ª tarefa: <u>secretário</u>      | <u>23/05/2008</u> |
| 2ª tarefa: <u>distr. material</u> | <u>27/05/2008</u> |
| 3ª tarefa: <u>porta-voz</u>       | <u>30/05/2008</u> |
| 4ª tarefa: <u>ajudante</u>        | <u>4/6/2008</u>   |
| 5ª tarefa: <u>secretário</u>      | <u>6/06/2008</u>  |
| 6ª tarefa: <u>distr. material</u> | <u>11/6/2008</u>  |
| 7ª tarefa: <u>porta-voz</u>       | <u>16/6/2008</u>  |
| 8ª tarefa: <u>ajudante</u>        | <u>20/6/2008</u>  |

| Grupo: <u>Detectives</u>          |                   |
|-----------------------------------|-------------------|
| Aluno(a): <u>Lara</u>             |                   |
| Função                            | Data              |
| 1ª tarefa: <u>ajudante</u>        | <u>23/05/2008</u> |
| 2ª tarefa: <u>secretário</u>      | <u>27/05/2008</u> |
| 3ª tarefa: <u>distr. material</u> | <u>30/05/2008</u> |
| 4ª tarefa: <u>porta-voz</u>       | <u>4/6/2008</u>   |
| 5ª tarefa: <u>ajudante</u>        | <u>6/6/2008</u>   |
| 6ª tarefa: <u>secretário</u>      | <u>11/6/2008</u>  |
| 7ª tarefa: <u>distr. material</u> | <u>16/6/2008</u>  |
| 8ª tarefa: <u>porta-voz</u>       | <u>20/6/2008</u>  |

## Cartaz da avaliação individual e grupal

## Investigações Matemáticas = Avaliação



| Grupo         | Alunos         | Avaliação  |   |   |   |   |        |   |   |  |  |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---------------|----------------|------------|---|---|---|---|--------|---|---|--|--|----|----|----|----|----|----|----|----|
|               |                | Individual |   |   |   |   | Grupal |   |   |  |  |    |    |    |    |    |    |    |    |
| Detectives    | Beatriz        | 3          | 2 | 3 | 3 | 3 | 3      | 3 |   |  |  | 11 | 10 | 12 | 11 | 12 | 11 | 11 | 10 |
|               | Carlos         | 2          | 2 | 3 | 2 | 3 | 2      | 2 |   |  |  |    |    |    |    |    |    |    |    |
|               | Diogo          | 3          | 3 | 3 | 3 | 3 | 3      | 3 |   |  |  |    |    |    |    |    |    |    |    |
|               | Lara           | 3          | 3 | 3 | 3 | 3 | 3      | 2 |   |  |  |    |    |    |    |    |    |    |    |
| Descobertas   | Ana Francisca  | 2          | 3 | 3 | 3 | 2 | 3      | 2 | 3 |  |  | 8  | 9  | 10 | 11 | 8  | 10 | 8  | 10 |
|               | Ana Margarida  | 2          | 2 | 3 | 3 | 2 | 3      | 2 | 2 |  |  |    |    |    |    |    |    |    |    |
|               | Bruno          | 2          | 2 | 2 | 3 | 2 | 2      | 2 | 3 |  |  |    |    |    |    |    |    |    |    |
|               | Yara           | 2          | 2 | 2 | 2 | 2 | 2      | 2 | 2 |  |  |    |    |    |    |    |    |    |    |
| Estudantes    | Carina         | 3          | 2 | 3 | 3 | 2 | 2      | 2 | 3 |  |  | 12 | 8  | 11 | 11 | 8  | 10 | 9  | 11 |
|               | Joel           | 3          | 2 | 2 | 2 | 2 | 2      | 2 |   |  |  |    |    |    |    |    |    |    |    |
|               | Luis           | 3          | 2 | 3 | 3 | 2 | 3      | 3 | 3 |  |  |    |    |    |    |    |    |    |    |
|               | Nicole         | 3          | 2 | 3 | 3 | 2 | 3      | 2 | 3 |  |  |    |    |    |    |    |    |    |    |
| Matemáticas   | Andreia        | 2          | 2 | 2 | 2 | 3 | 2      | 3 | 2 |  |  | 8  | 8  | 8  | 8  | 10 | 8  | 10 | 8  |
|               | Jessica Costa  | 2          | 2 | 2 | 2 | 3 | 2      | 3 | 2 |  |  |    |    |    |    |    |    |    |    |
|               | Marta          | 2          | 2 | 2 | 2 | 2 | 2      | 2 | 2 |  |  |    |    |    |    |    |    |    |    |
|               | Pedro          | 2          | 2 | 2 | 2 | 2 | 2      | 2 | 2 |  |  |    |    |    |    |    |    |    |    |
| Amigos        | Bruna          | 3          | 3 | 3 | 2 | 2 | 3      | 3 | 3 |  |  | 9  | 10 | 10 | 8  | 8  | 9  | 9  | 10 |
|               | Margarida      | 2          | 2 | 3 | 2 | 2 | 2      | 2 | 3 |  |  |    |    |    |    |    |    |    |    |
|               | Sergio         | 2          | 3 | 2 | 2 | 2 | 2      | 2 | 2 |  |  |    |    |    |    |    |    |    |    |
|               | Lumão          | 2          | 2 | 2 | 2 | 2 | 2      | 2 | 2 |  |  |    |    |    |    |    |    |    |    |
| Investigadora | Inês           | 2          | 2 | 2 | 2 | 2 | 3      | 2 | 3 |  |  | 6  | 6  | 6  | 6  | 6  | 6  | 6  | 8  |
|               | Jessica Kusana | 2          | 2 | 2 | 2 | 2 | 2      | 2 | 3 |  |  |    |    |    |    |    |    |    |    |
|               | Tânia          | 2          | 2 | 2 | 2 | 2 | 2      | 2 | 2 |  |  |    |    |    |    |    |    |    |    |

**LEGENDA:**

**Avaliação Individual:** 3 - Trabalhei Bem; Colaborei Sempre.  
 2 - Trabalhei Satisfatoriamente; Colaborei Algumas Vezes.  
 1 - Trabalhei Pouco; Colaborei Poucas Vezes.

**Avaliação Grupal:** 3 - Trabalhamos Bem; Cooperamos.  
 2 - Trabalhamos Satisfatoriamente; Cooperamos Algumas Vezes.  
 1 - Trabalhamos Pouco; Cooperamos Poucas Vezes.



**Questionário aplicado a todos os alunos da turma,  
previamente à fase de recolha de dados**

**QUESTIONÁRIO**



Com este questionário pretende-se obter a tua opinião acerca do projecto de investigação relativo à Aprendizagem Cooperativa e Investigações Matemáticas, que está a ser realizado na tua turma. Portanto, é importante que respondas, às questões que te são colocadas, com o máximo de sinceridade.

Tenta responder às questões que se seguem assinalando com uma cruz (X) apenas uma das respostas.

**1. Gostas de trabalhar em grupo nas aulas de Matemática?**

Nunca

Poucas Vezes

Muitas Vezes

Sempre

**2. Preferes trabalhar...**

Em grupo?

Sozinho?

Porquê? \_\_\_\_\_

**3. Gostas de resolver tarefas de investigação nas aulas de Matemática?**

Nunca

Poucas Vezes

Muitas Vezes

Sempre

Porquê? \_\_\_\_\_

**4. O que tens gostado mais e menos nestas aulas?**

mais: \_\_\_\_\_

menos: \_\_\_\_\_

5. Qual é a tua opinião acerca das tarefas de investigação que tens realizado nas aulas?

Muito interessantes

Pouco Interessantes

Fáceis

Difíceis

Outro: \_\_\_\_\_

6. Tens sentido dificuldades na realização destas tarefas?

Nunca

Poucas Vezes

Muitas Vezes

Sempre

Quais? \_\_\_\_\_

7. Os teus colegas de grupo, normalmente, ajudam-te a perceber/resolver as tarefas quando sentes dificuldades?

Nunca

Poucas Vezes

Muitas Vezes

Sempre

Porquê? \_\_\_\_\_

8. E tu tens conseguido ajudar os teus colegas quando eles não compreendem as tarefas?

Nunca

Poucas Vezes

Muitas Vezes

Sempre

Como? \_\_\_\_\_

☺ Obrigado pela tua colaboração!!!

Aluno: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_



## Grelha de registo de comportamentos observáveis

Nome do Aluno:

| <b>Comportamentos</b>                  | <b>1ª Tarefa</b><br>23/05/2008 | <b>2ª Tarefa</b><br>27/05/2008 | <b>3ª Tarefa</b><br>30/05/2008 | <b>4ª Tarefa</b><br>04/06/2008 | <b>5ª Tarefa</b><br>06/06/2008 | <b>6ª Tarefa</b><br>11/06/2008 | <b>7ª Tarefa</b><br>16/06/2008 | <b>8ª Tarefa</b><br>20/06/2008 |
|--|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| Pede ajuda aos colegas de grupo.       |                                |                                |                                |                                |                                |                                |                                |                                |
| Ajuda os colegas de grupo.             |                                |                                |                                |                                |                                |                                |                                |                                |
| Respeita os outros.                    |                                |                                |                                |                                |                                |                                |                                |                                |
| Aceita as ideias dos colegas.          |                                |                                |                                |                                |                                |                                |                                |                                |
| Contribui com as suas próprias ideias. |                                |                                |                                |                                |                                |                                |                                |                                |
| Incentiva os colegas a trabalharem.    |                                |                                |                                |                                |                                |                                |                                |                                |
| Cumpre as regras negociadas.           |                                |                                |                                |                                |                                |                                |                                |                                |
| Empenha-se na realização da tarefa.    |                                |                                |                                |                                |                                |                                |                                |                                |

Comentário:

Legenda: N = Nunca; PV = Poucas Vezes; MV = Muitas Vezes; S = Sempre

**Guião da entrevista realizada, no final da fase de recolha de dados,  
aos alunos que constituíram o grupo objecto do estudo**

**GUIÃO DE ENTREVISTA**

Ao longo deste ano lectivo tiveste a oportunidade de realizar tarefas de investigação em algumas aulas de Matemática.

**1.** Qual a tua opinião acerca das tarefas de investigação que realizaste nas aulas de Matemática?

**1.1.** Gostaste de realizar este tipo de trabalho (investigações matemáticas)? Porquê?

**2.** Quais te pareceram ser as grandes diferenças entre as aulas em que se realizaram actividades de investigação em comparação com as outras?

**3.** Das tarefas que realizaste houve alguma(s) em que sentiste mais dificuldade? Que tipo de dificuldade sentiste?

**3.1.** Sentiste dificuldades na realização das tarefas? Quais?

**4.** O que aprendeste de novo nestas aulas?

**5.** De que é que mais gostaste nestas aulas? E menos?

**6.** O que pensas do trabalho em grupo? É uma boa forma de aprender ou é preferível trabalhar sozinho?

**7.** Achas que é mais fácil agora, do que no início do ano, falar com os elementos do teu grupo, ouvir as suas explicações, ouvir os seus argumentos?

**8.** Os teus colegas de grupo, normalmente, ajudaram-te a resolver as tarefas quando sentias dificuldades? Como?

**9.** E tu, conseguiste ajudar os teus colegas quando eles não compreendiam as tarefas? Como?

**10.** Preferias ter trabalhado noutro(s) grupo(s)? Porquê?

**11.** Vês alguma vantagem, para a tua aprendizagem, no trabalho colaborativo que fizeste nas aulas? Quais/Porquê?

**12.** No próximo ano lectivo gostarias de continuar este tipo de trabalho? Indica algumas razões.

**13.** Se quisesses contar alguém como foram as aulas em que realizaste investigações matemáticas, segundo o modelo da aprendizagem cooperativa, o que dirias?

## Enunciado da tarefa 1

**TAREFA 1: O ANIVERSÁRIO**

A Margarida e o Pedro estão a organizar uma festa de anos surpresa para a mãe. Convidaram toda a família e alguns amigos e agora estão a colocar as mesas para a festa!

Eles decidiram o seguinte: vão dispor 3 mesas quadradas (todas do mesmo tamanho), de tal forma que as mesas tenham sempre, pelo menos, um lado comum.

Exemplo:

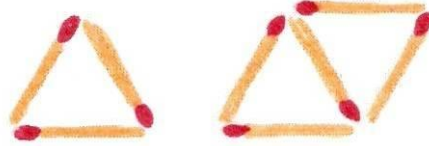


**P1** • De que formas diferentes podem as 3 mesas ser colocadas?

**P2** • E se forem 4 mesas?

**P3** • E 5 mesas?

## Enunciado da tarefa 2

**TAREFA 2: TRIÂNGULOS DE FÓSFOROS**

Com 3 fósforos podem construir um triângulo.

Com 5 fósforos podem construir uma figura formada por dois triângulos.

**P1** • Quantos triângulos conseguem formar utilizando 7 fósforos?

**P2** • Quantos fósforos são precisos para construir uma figura formada por:

— 4 triângulos?

— 5 triângulos?

— 6 triângulos?

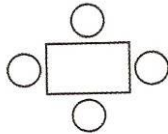
— 7 triângulos?

**P3** • Conseguem encontrar algumas regularidades entre o número de fósforos que utilizaram e o número de triângulos construídos?

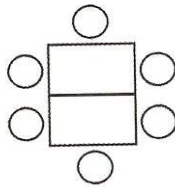
## Enunciado da tarefa 3

**TAREFA 3: AS MESAS DA CANTINA DA ESCOLA**

Na cantina da escola podem sentar-se a uma mesa 4 pessoas. As mesas são todas iguais.



Se se juntarem duas mesas podem sentar-se 6 pessoas.



**P1** • Quantas pessoas se podem sentar em **3 mesas**?

**P2** • E em **4 mesas**?

**P3** • E em **5 mesas**?

**P4** • E em **6 mesas**?

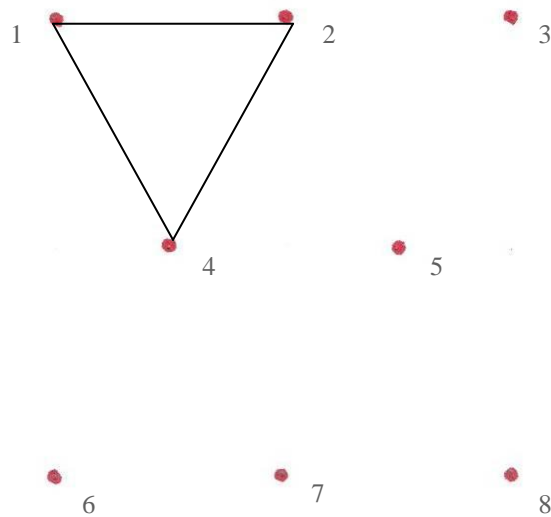
**P5** • Conseguem encontrar alguma regularidade?

## Enunciado da tarefa 4

**TAREFA 4: OITO PONTOS**

Observem os oito pontos assinalados na figura.

A figura exemplifica uma das figuras geométricas que se podem obter unindo alguns desses pontos.



**P1** • Unindo outros pontos da figura é possível obter mais triângulos? Quantos?

Descrevam o processo que utilizaram.

**P2** • É possível obter outras figuras geométricas unindo outros pontos dessa figura?

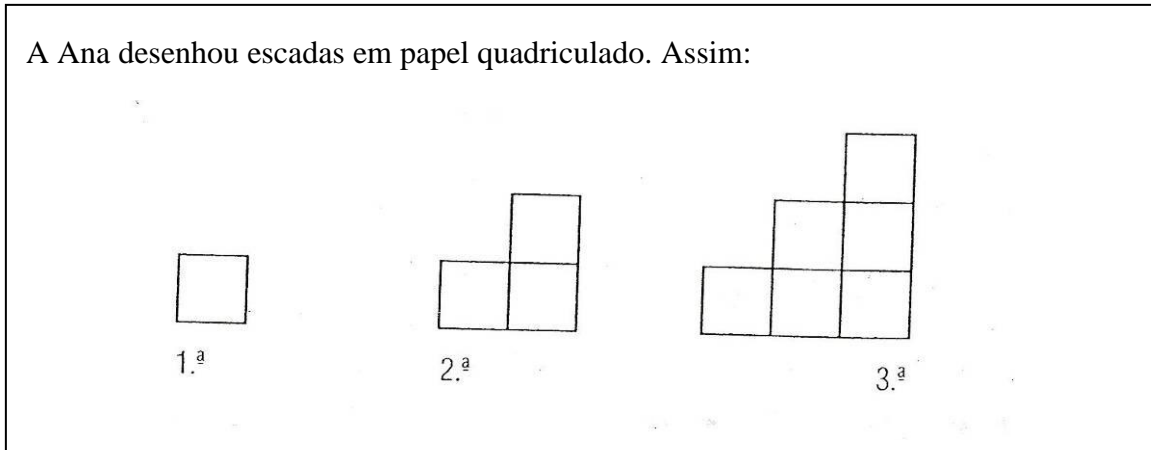
Quais/Quantas?

Descrevam o processo que utilizaram.

## Enunciado da tarefa 5

**TAREFA 5: ESCADAS EM PAPEL QUADRICULADO**

A Ana desenhou escadas em papel quadriculado. Assim:



**P1** • Quantos quadradinhos compõem **cada uma das escadas**?

**P2** • Quantos quadradinhos são precisos para construir a **quarta escada**? E para a **quinta escada**?

**P3** • Procurem descobrir quantos quadradinhos compõem **outras escadas**?

**P4** • Procurem descobrir **regularidades numéricas**.



## Enunciado da tarefa 6

**TAREFA 6: NÚMEROS EM ESCADA**

Chamam-se números em escada aos números que podem ser escritos com a soma de números naturais consecutivos.

Por exemplo:

o **3** é um número em escada, pois pode escrever-se como **1+2**;

o **5** também é pois pode escrever-se como **2 + 3**.

**P1 •** Que números, até 15, podem ser escritos como uma **soma de dois números consecutivos**?

**P2 •** Quais podem ser expressos como uma soma de **três números consecutivos**?

**P3 •** Que números **têm mais do que uma representação em escada**?

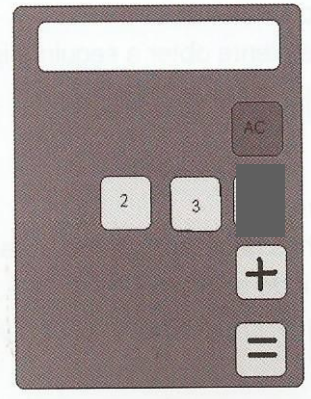
**P4 •** Descobriram números que **não sejam em escada**?

## Enunciado da tarefa 7

**TAREFA 7: UMA CALCULADORA DIFERENTE**

Apenas com estas teclas da calculadora tentem obter os seguintes números:

|   |    |    |    |   |
|---|----|----|----|---|
| 4 | 5  | 6  | 7  | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |   |



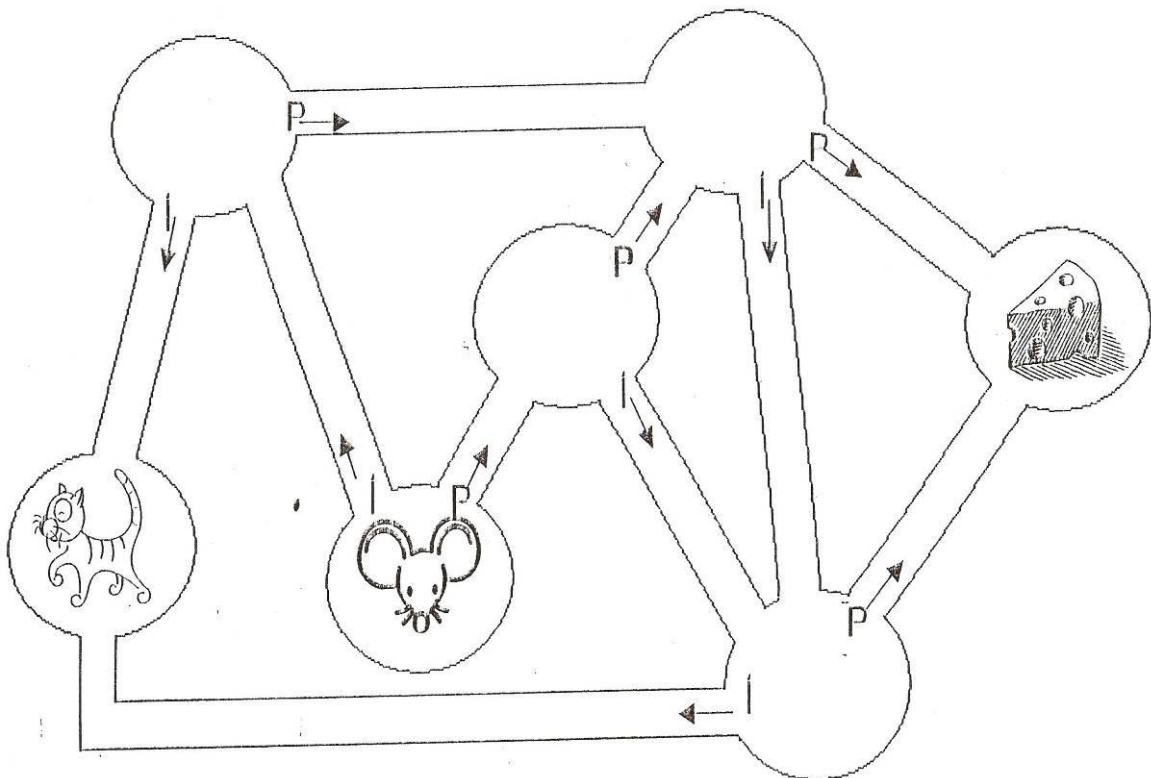
**P1** • Conseguiram obter todos os números acima indicados?

**P2** • Conseguiram descobrir mais do que uma forma para obter alguns desses números?  
Investiguem e registem-nas.

## Jogo: “O rato e o queijo”

**Regras do jogo:**

- Cada jogador coloca uma marca na casa em que se encontra o rato.
  - O jogo desenrola-se do seguinte modo:
    - ✓ Lançar o dado.
    - ✓ Mover o rato (representado pela marca) da seguinte forma:
      - Se sair par, segue o caminho assinalado por P.
      - Se sair ímpar, segue o caminho assinalado por I.
    - ✓ Ganha o rato que primeiro chegar ao queijo. Perde o rato que atingir a casa do gato.
- (Qualquer uma destas situações implica o fim do jogo)



## Enunciado da tarefa 8

**TAREFA 8: PARES E ÍMPARES**

Utilizem apenas os números indicados:

**1    2    3    4    5    6    7    8    9    10**

**P1 •** Escolham **dois números pares** e somem-nos.

O que observam? Tentem com mais alguns números.

**P2 •** Escolham **dois números ímpares** e somem-nos.

O que observam? Tentem com mais alguns números.

**P3 •** Escolham **um número par** e **um número ímpar** e somem-nos?

O que observam? Tentem com mais alguns números.

**P4 •** Conseguem identificar regras?