

# EQUILÍBRIO LIMITE (ELU) DE MACIÇOS TERROSOS CARREGADOS. MODELOS NUMÉRICOS 2D E 3D PARA OBTER $F_s$

## LIMIT EQUILIBRIUM OF LOADED GROUND MASSES. 2D AND 3D NUMERICAL MODELS TO OBTAIN THE FACTOR OF SAFETY $F_s$

Martins, Júlio B., *Universidade do Minho, Guimarães, Portugal, jbm@civil.uminho.pt*  
Gomes Correia, António, *Universidade do Minho, Guimarães, Portugal, agc@civil.uminho.pt*  
Miranda, Tiago, *Universidade do Minho, Guimarães, Portugal, tmiranda@civil.uminho.pt*  
Cunha, José P., *Universidade do Minho, Guimarães, Portugal, jpcunha@civil.uminho.pt*

### RESUMO

É apresentada uma comparação sobre a aplicação dos métodos elástico-plásticos e dos métodos rígido-plásticos para o cálculo do coeficiente de segurança  $F_s$  em relação ao equilíbrio limite (ELU) de massas terrosas com sobrecargas e de massas rochosas com juntas. São apresentados e utilizados programas de carácter geral para o cálculo de  $F_s$  por vários métodos das fatias e pelo método dos blocos, com ligação aos métodos de programação linear e não linear. Ilustram-se vários exemplos de aplicação a casos de interesse prático, incluindo um túnel urbano, e feitas comparações com  $F_s$  obtido com vários programas de Elementos Finitos (FEM) usando métodos elástico-plásticos e outros de alguns autores internacionais usando métodos de programação linear e não linear.

### ABSTRACT

An comparison on the application of elastic-plastic methods and of rigid-plastic methods to the calculation of the limit equilibrium (ELU) factor of safety ( $F_s$ ) of loaded soil and jointed rock masses is presented. General computer programs for the calculation of  $F_s$  by slices and the method of blocs with connection to non-linear programming methods are presented and used. Comparisons of the  $F_s$  obtained both ways, with several programs using elastic-plastic FE methods and with linear and non-linear programming methods used by some international authors are done, for a number of cases with practical interest including a shallow tunnel.

### 1. INTRODUÇÃO

O cálculo do coeficiente de segurança  $F_s$  em relação ao equilíbrio limite (ELU) de massas terrosas com sobrecargas de qualquer tipo é hoje, como sempre, fundamental para o projecto geotécnico.  $F_s$  pode ser calculado por métodos numéricos elástico-plásticos (Elementos Finitos, Diferenças Finitas e Elementos de Fronteira) e dos métodos rígido-plásticos. O mecanismo de colapso não é explícito nestes métodos. Também a convergência não é assegurada “a priori”. O mecanismo de colapso pode não ser único. Nesse caso, deve procurar-se o mecanismo que dá o mínimo  $F_s$ . No método dos blocos apresentado, o mecanismo de colapso é explícito “a priori”. Este método é uma espécie de método de programação não linear permitindo obter o  $F_s$  mínimo iterativamente.

Os métodos rígido-plásticos para o cálculo à rotura precederam os métodos elástico-plásticos (Coulomb 1776 e Rankine 1857).

Por outro lado, visto que a componente elástica da deformação é irrelevante na fase de rotura, teoricamente, o  $F_s$  obtido por métodos elástico-plásticos deveria ser igual ao obtido por métodos rígido-plásticos.

Para o cálculo de  $F_s$  por métodos rígido-plásticos há vários programas para computador, mas eles são aplicados somente à estabilidade de taludes (incluindo barragens de aterro). A estabilidade de túneis pouco profundos, de fundações superficiais ou profundas e os problemas de estabilidade de obras de suporte em geral não têm sido considerados nesses programas.

O trabalho que é apresentado é uma comparação entre  $F_s$  calculado com um programa geral para computador para vários métodos das fatias (Martins 2006), incluindo os casos particulares de Fellenius (1936) e de Bishop (1955) para superfícies de deslizamento de directriz circular e os de Morgenstern e Price (1965) e Correia (1988) para superfícies de deslizamento de directriz não circular. Além disso, o  $F_s$  é calculado com um programa que usa o método dos blocos acima referido.

O programa geral elaborado inspira-se no método geral das fatias apresentado por Zhu et al. (2003). Partindo de um valor inicial  $F_{s0}$ , razoável, para  $F_s$ , escolhido arbitrariamente, são estabelecidas as equações de equilíbrio para cada fatia e incluídas as equações de cedência de Mohr-Coulomb. Visto que o número de incógnitas é maior que o de equações, estabelece-se uma relação linear  $T(x) = G_1(x).E(x) + G_2(x)$  entre as forças vertical  $T(x)$  e horizontal  $E(x)$  em cada fatia de posição  $x$ . Morgenstern e Price (1965) consideraram  $T(x)/E(x) = \lambda \cdot f(x)$ , onde  $f(x)$  é uma função prescrita de  $x$ , tendo os valores zero no primeiro e no último ponto da massa deslizante. Várias experiências numéricas, realizadas por muitos autores internacionais, mostraram que tanto uma função linear com máximo para  $x$  médio, como a função seno, dão na prática os mesmos resultados. Correia (1988) estabeleceu  $T(x) = \lambda \cdot f(x)$ , Martins (1979) e Martins e Marques (1984) consideraram  $\Delta T(x) = \lambda \cdot f(x)$ , onde  $\Delta T(x)$  é a diferença entre a força vertical numa interface e a da interface anterior. Em conjunto com estas hipóteses, tem de assumir-se uma distribuição de tensões normais na superfície de deslizamento. Depois disso fica estabelecido um sistema não linear de  $n$  equações a  $n$  incógnitas, que incluem, além das componentes das forças nas fatias, os valores de  $F_s$  e de  $\lambda$ . Esse sistema é resolvido iterativamente. Quando o valor absoluto da diferença entre o  $F_s$  de uma dada iteração e o da iteração anterior é da ordem de 0,001 o cálculo cessa.

## 2. DEFINIÇÃO DE SEGURANÇA E POSIÇÃO DO PROBLEMA

A segurança em relação ao equilíbrio limite (EQU) é avaliada através de dois coeficientes parciais, um  $\gamma_Q$ , que aumenta as acções e o outro, que diminui as características de resistência dos materiais, o qual, no caso das massas terrosas é  $F_{s\phi}$  para a tangente do ângulo de atrito,  $\tan\Phi'$ , e  $F_{sc}$  para a coesão  $c'$ . Usualmente toma-se  $F_{sc} = F_{s\phi} = F_s$ .

Hoje há muitos métodos rígido-plásticos para o cálculo de  $F_s$ . Não obstante, há ainda lugar para investigação, visto que nenhum dos métodos é suficientemente geral, rigoroso e não sujeito a dificuldades numéricas nas suas aplicações. Os métodos que usam a condição de cedência de Mohr-Coulomb estão divididos em dois grandes grupos: Aqueles que tratam as massas terrosas como corpos rígidos, havendo nas ligações entre os corpos e com o exterior atrito e coesão, e os que tratam as massas terrosas como corpos elástico-plásticos. Na formulação rígido-plástica pode usar-se uma solução que satisfaz as equações de equilíbrio (estática) e as condições de cedência (condições de plastificação) tais que a “estrutura” (massa terrosa) se torna hipostática como um todo, a despeito de, antes disso, nalguns pontos poder haver plastificação. Neste caso obtém-se um equilíbrio limite superior.

Pode usar-se também uma solução que satisfaz as equações de equilíbrio (estática) e as condições de cedência (condições de plastificação) tais que a “estrutura” (massa terrosa) se torna hipostática como um todo, não se admitindo que antes disso haja plastificação em qualquer ponto. Nesse caso, obtém-se um equilíbrio limite inferior.

Em qualquer caso na fase plástica o campo das velocidades de extensão (ou velocidade de deslocamento e rotação) define um campo de tensões (ou de forças e momentos), mas a inversa não é verdadeira. Na interface entre elementos tem de existir continuidade das tensões normais (ou das forças normais) e as tensões normais (ou as forças normais) têm de ser de compressão. Contudo, a componente tangencial da extensão (ou velocidade de deslocamento) é, necessariamente, descontínua, visto que há deslocamento relativo entre as duas faces da interface. Este deslocamento relativo é a condição indispensável para mobilizar a tensão de corte do material (Martins 2006).

### 3. APLICAÇÕES

#### 3.1. 1º Exemplo (Figura 1)

O problema consiste em calcular a força mínima  $\gamma_Q \cdot 300 \text{ kN}$  a ser aplicada no centro de massa do bloco I num sistema de dois blocos com juntas preenchidas com um sol brando (Martins 2006).

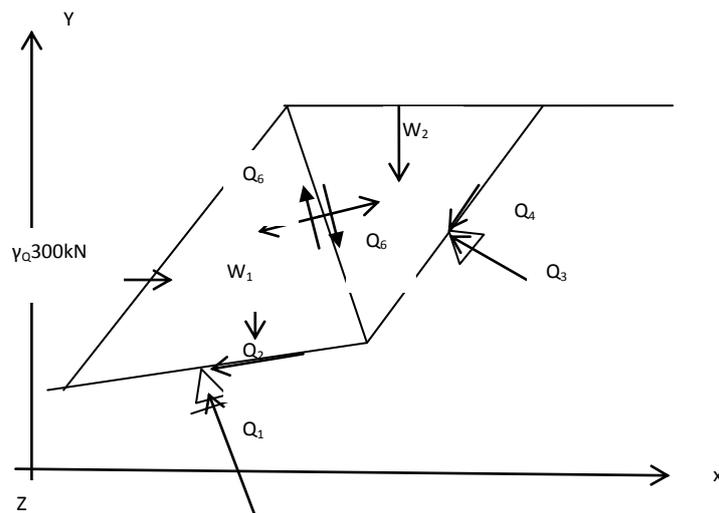


Figura 1 - Coeficiente de segurança de sistema de dois blocos com juntas cheias de um sol brando

Admite-se que o peso volúmico da rocha é  $\gamma = 22 \text{ kN/m}^3$ , a coesão do solo é  $c' = 30 \text{ kN/m}^2$  e o ângulo de atrito é  $\phi' = 20^\circ$ . As coordenadas dos nós em metros são: A(0.,0.); B(11.,2.); C(13.,12.); D(3.,12.). A força mínima  $\gamma_Q \cdot 300 \text{ kN}$  que é necessário aplicar no centro de massa do bloco I para obter um equilíbrio limite e os correspondentes valores de  $F_s$  estão no Quadro 1, para os vários métodos que constam do programa geral agora elaborado.

Usando programação linear (Martins 2006) encontrou-se  $\gamma_Q \cdot 300 \text{ kN} = 550 \text{ kN}$ .

Quadro 1 - Valores da força mínima  $\gamma_Q \cdot 300 \text{ kN}$  e correspondentes  $F_s$

Fellenius	Bishop	Morgenstern e Price	Correia
$F_s = 1,67$	$F_s = 1,80$	$F_s = 1,67$	$F_s = 1,67$
500	540	500	500

### 3.2. 2º Exemplo (Zhang 1999, Figura 2)

Estabilidade de um talude com  $\beta=60^\circ$  e altura  $H=10,0$  m, peso volúmico do solo  $\gamma=20$  kN/m<sup>3</sup>, a coesão do solo  $c'=15.8$  kN/m<sup>2</sup> e o ângulo de atrito  $\varphi'=25^\circ$ .

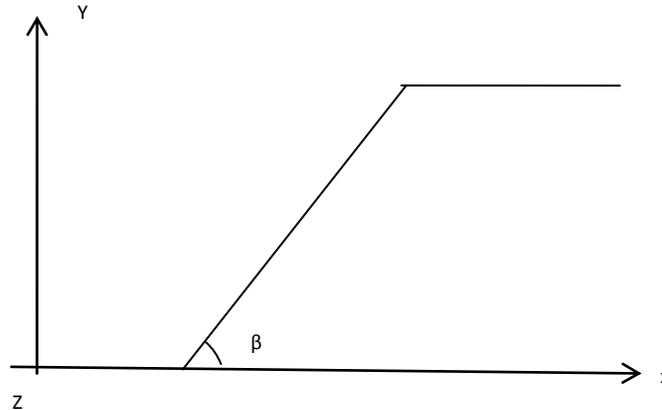


Figura 2 Estabilidade de um talude com  $\beta=60^\circ$  e altura  $H=10,0$  m

Os resultados para  $\gamma H/c'$  na rotura e os correspondentes valores de  $F_s$  obtidos usando os vários métodos que constam do programa geral agora elaborado, estão no Quadro 2.

Quadro 2 - Valores de  $\gamma H/c'$  e correspondentes  $F_s$

Fellenius	Bishop	Morgenstern & Price	Correia
$F_s=1,01$	$F_s=1,03$	$F_s=1,03$	$F_s=1,03$
12,78	13,04	13,00	13,00

Zhang (1999) usando RFEM (Elementos Finitos Rígidos) e Programação Matemática encontraram  $\gamma H/c'=13,68$ , a que corresponde  $F_s=1,08$  e por vários outros métodos clássicos acharam  $12,20 < \gamma H/c' < 12,74$ , a que corresponde  $0,96 < F_s < 1,01$ .

Usando o programa de estabilidade de taludes SLIDE encontrou-se  $12,35 < \gamma H/c' < 12,67$  a que corresponde  $0,98 < F_s < 1,00$  pelos os métodos de Fellenius, Bishop e Morgenstern e Price.

Usando o programa de elementos finitos DIANA encontrou-se  $\gamma H/c'=11,17$ , a que corresponde  $F_s=0,89$ .

### 3.3. 3º Exemplo (Chen et al. 2005)

Estabilidade de um talude infinito com  $\tan\beta=V/H=1/2$ , peso volúmico do solo  $\gamma=19,8$  kN/m<sup>3</sup>, a coesão não drenada do solo  $c_u=49,8$  kN/m<sup>2</sup> e o ângulo de atrito  $\varphi_u=0,0^\circ$ . Para uma superfície de deslizamento a 25 metros do talude e raio de 50 m os valores de  $F_s$  obtidos usando os vários métodos que constam do programa geral agora elaborado, estão no Quadro 3.

Quadro 3 - Valores de  $F_s$

Fellenius	Bishop	Morgenstern e Price	Correia
1,134	1,119	1,131	0,969

Chen et al. (2005) usando RFEM e Programação Matemática encontraram, para uma superfície esférica de igual raio e o mesmo centro,  $F_s=1.430$ , e por vários outros métodos clássicos acharam  $1,388 < F_s < 1,480$ . Observa-se que é fácil demonstrar (Martins 1991) que uma superfície de deslizamento tridimensional dá sempre um  $F_s$  maior que a correspondente superfície de deslizamento bidimensional.

Usando o programa SLIDE encontrou-se  $F_s=1,115$  pelos os métodos de Fellenius e Bishop, enquanto que com o programa DIANA obteve-se  $F_s=0,84$ .

### 3.4. 4º Exemplo (Chen et al. 2005, Figura 3)

Estabilidade de um talude não homogêneo com  $\tan\beta=V/H=1/2$ , peso volúmico do solo  $\gamma=18,8$   $\text{kN/m}^3$ , a coesão do solo  $c'=29,0$   $\text{kN/m}^2$  e o ângulo de atrito  $\phi'=20,0^\circ$  na camada superior e  $c'=0$ ,  $\phi'=10,0^\circ$  na camada inferior.

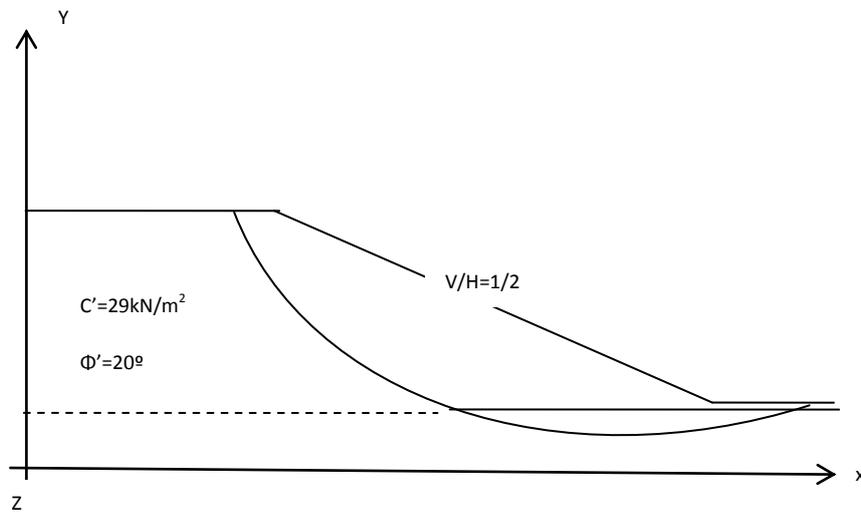


Figura 3 - Superfície de deslizamento composta num solo com atrito e coesão

Os resultados no Quadro 4 foram obtidos usando os vários métodos que constam do programa geral agora elaborado para uma superfície de deslizamento com raio  $R=24,4$  m.

Quadro 4 - Valores de  $F_s$

Fellenius	Bishop	Morgenstern e Price	Correia
1,342	1,342	1,256	1,373

Chen et al. (2005) usando RFEM e Programação Matemática encontraram, para uma superfície esférica de igual raio e o mesmo centro,  $F_s=1.656$ , e por vários outros métodos tridimensionais acharam  $1,607 < F_s < 1,620$ . Estes valores são consistentes com a afirmação anterior que uma superfície de deslizamento tridimensional dá sempre um  $F_s$  maior que a correspondente superfície de deslizamento bidimensional (Martins 1991).

Usando o programa SLIDE encontrou-se  $1,294 < F_s < 1,341$  pelos os métodos de Fellenius, Bishop e Morgenstern e Price, enquanto que com o programa DIANA obteve-se  $F_s=1,17$ .

### 3.5. 5º Exemplo (Túnel Urbano. Estabilidade Lateral, Figura 4)

O Túnel Urbano foi escavado numa formação de granito alterado e saibro granítico. Tem cerca de 134 m de comprimento e uma secção recta de cerca de 95 m<sup>2</sup>. A profundidade do fecho varia entre 5 e 13 m. Na construção foi usado o “Novo Método Austríaco” (NATM). As características mecânicas e os parâmetros adoptados para definir o estado de tensão inicial foram os obtidos por Martins et al. (2003) e estão indicados no Quadro 5 e Figura 4. Além disso, considerou-se  $K_0$  igual a 0.4 para todos os materiais. O critério de plastificação adoptado foi o de Mohr-Coulomb.

Quadro 5. Características do terreno

Solos	$c'$ (kPa)	$\phi'$ (°)	$\gamma$ (kN/m <sup>3</sup> )
Aterro	0	30	19
Granito W5	10	38	19
Granito W3 “Base Rígida”	300	52	25

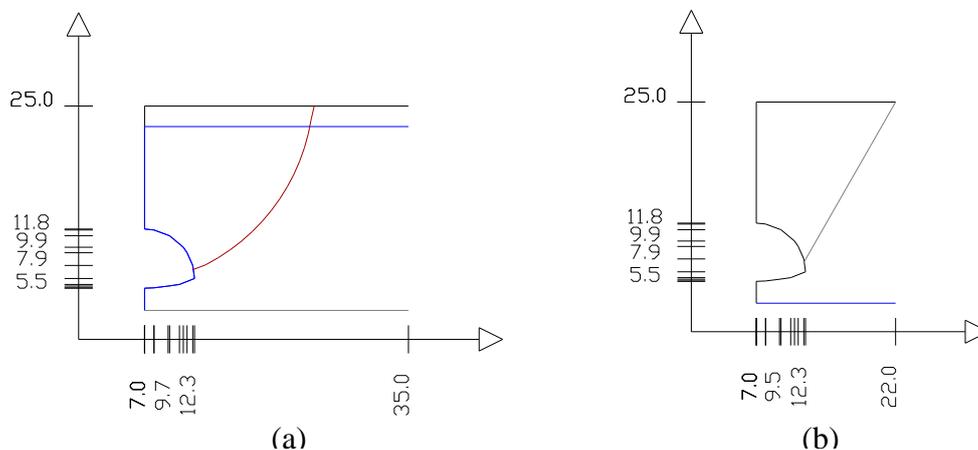


Figura 4 - Superfície de deslizamento lateral mais desfavorável. a) circular; b) poligonal

Os resultados do Quadro 6 foram obtidos usando os vários métodos que constam do programa geral agora elaborado para rotura lateral com a superfície circular de deslizamento mais desfavorável (Figura 4a) pelos métodos clássicos de Fellenius e de Bishop.

Quadro 6 -  $F_s$  para rotura lateral (superfície circular de deslizamento)

Fellenius	Bishop
1,95	2,76

Procurando a superfície não circular (poligonal) de deslizamento mais desfavorável (Figura 4b) pelos mesmos métodos clássicos, obtiveram-se os resultados do Quadro 7.

Quadro 7 -  $F_s$  para rotura lateral (superfície poligonal de deslizamento)

Fellenius	Bishop	Morgenstern e Price	Correia
2,32	1,59	1,33	1,33

A resistência do revestimento (anel de Betão Armado de 0,25 m de espessura) e ancoragens passivas, foram tomadas em consideração, por uma estimativa da resistência à rotura do anel.

### 3.5. Resultados com o programa de blocos

Um outro programa para computador para o cálculo de  $F_s$  foi elaborado pelo primeiro autor da forma seguinte:

1 – Em primeiro lugar obtém-se a superfície circular de deslizamento mais desfavorável pelos métodos clássico de Fellenius e de Bishop acima referidos.

2 – A massa de terreno definida por essa superfície circular de deslizamento mais desfavorável (massa de terreno “crítica”), é dividida em blocos (triangulares e/ou quadrilaterais). Entre dois blocos (e nos contactos com o exterior) é considerada uma junta. No ponto médio de cada junta supõe-se a existência de um par rotacional dotado de resistência de atrito e coesão. Concebe-se desta forma dentro da massa deslizante do terreno uma estrutura isostática de blocos estável, á partida.

3 – As forças “internas” normal e tangencial nas juntas devidas às forças externas (peso próprio dos blocos e sobrecargas exteriores, se existirem) são de imediato calculadas pelas condições de equilíbrio estático.

4 – As forças normal,  $Q(n,k)$ , e tangencial,  $Q(t,k)$ , em cada junta  $k$  assim calculadas, são comparadas com a resistência disponível na junta em causa, de acordo com o critério de plastificação de Mohr-Coulomb. A resistência disponível na junta  $k$  é:

$$R(k) = Q(n,k) \cdot \left( \frac{\tan \phi'}{F_s} \right) + LJ(k) \cdot \frac{c'}{F_s} \quad (1)$$

onde  $Q(n,k)$  é a força “interna” normal na junta  $k$  e  $LJ(k)$  é o comprimento dessa junta.

Dos valores das diferenças  $r(k)$  para todas as juntas tira-se o  $F_s$  mínimo.

$$r(k) = R(k) - Q(t,k) \quad (2)$$

Este mínimo está do lado da segurança. Se a menor das diferenças (2) não for muito pequena (1%, diga-se), então projecta-se uma nova estrutura isostática de bloco de maneira a transferir cargas internas para as juntas com maior resistência disponível. Assim, por iteração, obtém-se rapidamente o  $F_s$  final.

O valor obtido por este método para a rotura lateral do túnel foi  $F_s=1,38$ , dividindo a massa de terreno definida pela superfície poligonal de deslizamento mais desfavorável em 8 blocos quadrilaterais.

## 4. CONCLUSÕES

1. Os métodos teoricamente mais rigorosos para o cálculo do coeficiente de segurança em relação ao Equilíbrio Limite (EQU) são os que usam a Programação Matemática não Linear.

2. Contudo, sabe-se que a Programação Matemática não Linear pode dar para cada problema uma, várias ou nenhuma solução.

3. No caso do cálculo do coeficiente de segurança em relação ao Equilíbrio Limite (EQU) para massas de terreno carregadas, o tipo de solução depende da forma como o problema é posto. Visto que, na prática, as massas terrosas são heterogéneas e têm uma geometria complicada, para o cálculo de  $F_s$  sempre se tem de dividir as massas em blocos. O  $F_s$  obtido com qualquer

sistema isostático estável de blocos projectado no interior da massa “crítica” será uma solução de “limite inferior”, isto é, o valor de  $F_s$  estará do lado da segurança. Visto que o cálculo de  $F_s$  por esta forma leva apenas alguns segundos, pode testar-se um grande número de sistemas isostáticos estáveis. No caso de massas rochosas com juntas, o sistema de juntas entre blocos deve ser escolhido de forma a incluir o sistema real de juntas do maciço. No caso de massas de solo deve-se dividi-las com um sistema de juntas que incluam os solos mais fracos.

4. O método geral das fatias agora programado para todas as situações dá resultados que são muito próximos dos da programação matemática, para fins práticos. Nos casos reais de terrenos heterogéneos e com geometria complexa os métodos da programação matemática falham, frequentemente. Com algumas precauções o método geral das fatias tem, até agora, dado sempre bons resultados.

## REFERÊNCIAS

- Bishop, A. W. (1955). “The Use of the Circle Slip Surface in the Stability Analysis of Earth Slopes.” *Géotechnique* 5, Nº.1., 7-17.
- Chen J., Yin, J-H & Lee C. F. A. (2005). “Three-Dimensional Upper-bound Approach to Stability Analysis based on RFEM.” *Géotechnique* 55, Nº.7, 549-556.
- Correia, R. M. (1988). “A Limit Equilibrium Method of Slope Stability Analysis.” *Proc. 5<sup>th</sup> Int. Symp. Landslides*. Lausanne, . 595-598.
- Coulomb, C.A. (1776). "Essais sur une Application des Regles des Maximis et Minimis a Quelques Problemes de Statique Relatives à l'Architecture." *Memoirs Academie Royal Press Division Sav.*7, Paris.
- Fellenius, W. (1936). “Calculation of the stability of earth dams.” *Proc. 2<sup>nd</sup> Cong. Large Dams*, Washington, 4, pp. 445-462.
- Martins, F. F., da Costa F. & Almeida e Sousa, J. (2003). “Túnel 4 (Porto) – Análise tridimensional por elementos finitos.” *Geotecnia*, n.º 99, pp.65-80.
- Martins, J. B. (1979). “State of the art of the methods to solve the problem of the limit equilibrium of earth and rock masses with joints.” *I.U.T.A.M. National Congress*, Lisbon, LNEC, October.
- Martins, J. B. (1991), *Fundações*, Univ of Minho, Guimarães, Portugal, Livro de texto para o 5º ano de Engª Civil, 380 p.
- Martins, J. B. (2006). “Limit equilibrium of ground loaded masses. a general pc program for the factor of safety by rigid-plastic methods.” *5<sup>th</sup> Int. Conf. Mech.&M.Design*, FEUP July, OPorto.
- Martins, J. B. & Marques, P. S. (1984). "Calcul par Programmation Linéaire des Murs de Soutènement Renforcés." *Coloque "Renforcement en place des sols et des roches*, ENPC, DFCAI (Direction de la Formation Continue et de l'Action Internacionale), Oct. Paris, 9-11.
- Morgenstern, N. R. and Price, V. E. (1965). “The Analysis of the Stability of General Slip Surfaces”. *Géotechnique* 15, Nº.1, 1965, 79-93.
- Rankine, W. J. M. (1857). “Earth Pressure Theory.” *Phil. Trans. of the Royal Soc.*, London.
- Zhang, X. (1999.) “Slope Stability Analysis Based on Rigid Finite Element Method.” *Géotechnique*, 49, Nº.5, 1999, 585-593.
- Zhu, D. Y., Lee C. F. & Jiang H. D.(2003). "Generalized Framework of Limit Equilibrium Methods for the Stability Analysis.” *Géotechnique* 53, Nº.4, 2003, 377-395.