



INFLUÊNCIA DO ENSINO NOS RACIOCÍNIOS DE ALUNOS DO 12º ANO EM PROBABILIDADE CONDICIONADA

José António Fernandes
Universidade do Minho
jfernandes@ie.uminho.pt

Maria do Carmo Fernandes
Escola Secundária/3 Alberto Sampaio
carmo.fernandes@gmail.com

Resumo

No presente texto relatam-se alguns resultados de um estudo realizado sobre as respostas e os raciocínios apresentados por alunos do 12º ano em situações de probabilidade condicionada, bem como a influência do ensino regular do conceito de probabilidade condicionada sobre essas respostas e raciocínios. No estudo participaram os alunos de cinco turmas do 12º ano, num total de 115 alunos, a quem foram aplicadas várias questões de probabilidade condicionada na forma de teste escrito. Em termos de resultados do estudo salienta-se uma aquisição do conceito de probabilidade condicionada muito pouco profunda, quer antes do ensino do conceito quer depois, o que revela, por um lado, a sua natureza contra-intuitiva e, por outro lado, um impacto muito limitado do ensino regular sobre o seu desenvolvimento.

Palavras-chave: ensino, probabilidade condicionada, 12º ano de escolaridade.

1. Introdução

Heitele (1975) inclui a independência e a probabilidade condicionada no conjunto das ideias estocásticas fundamentais e Batanero, Fernandes e Contreras (2009) consideram que “a compreensão e a correcta aplicação da probabilidade condicionada é fundamental na vida diária e nas aplicações de Estatística” (p. 11), pois ela permite alterar o nosso grau de crença acerca dos sucessos aleatórios a partir da aquisição de nova informação (Díaz & de la Fuente, 2005).

Também, ao nível escolar, a importância do conceito de probabilidade condicionada é reconhecida ao fazer parte dos programas de Matemática do ensino secundário (Ministério da Educação, 2002) e ao constar frequentemente dos Exames Nacionais e Testes Intermédios de Matemática.

No entanto, essa importância contrasta com a existência de grandes dificuldades na aquisição dos conceitos ligados à probabilidade condicionada, tal como a prática de ensino e a investigação têm demonstrado. Gras e Totahasina (1995) consideram que os



conceitos de probabilidade condicionada e de independência estocástica são muito difíceis de ensinar e que o que se verifica, historicamente, é que o primeiro é definido muito tardiamente e com recurso ao segundo. Para estes autores “é preciso entender a axiomática de Kolmogorov (1933) para que o conceito de probabilidade condicional seja formalizado” (p. 337).

Fischbein e Gazit (1984) mostraram que os problemas de probabilidade condicionada são mais difíceis em experiências sem reposição do que em experiências com reposição, identificando duas concepções erróneas fundamentais no raciocínio em probabilidade condicionada dos alunos: (1) não consideram que o espaço amostral se altera em experiências sem reposição; e (2) determinam a probabilidade de acontecimentos onde não há reposição fazendo uma simples comparação entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis antes e depois da primeira tentativa, em vez de fazer a comparação entre o número total de saídas.

Segundo Tarr e Lannin (2005), em situações sem reposição, a probabilidade condicionada torna-se particularmente explícita porque a redução do espaço amostral do acontecimento condicionado será um subconjunto do espaço original, ou seja, a redução do espaço amostral é visível, enquanto em situações com reposição isso não acontece.

Tarr e Jones (1997), considerando estas dificuldades, definem quatro níveis de progressão na compreensão da probabilidade condicionada em alunos do 4º ao 8º ano de escolaridade: no nível 1, os alunos tendem a confiar em julgamentos subjectivos e a acreditarem que podem controlar o resultado de um acontecimento, ignorando a informação quantitativa; no nível 2, os alunos encontram-se numa fase de transição entre um pensamento subjectivo e um pensamento quantitativo informal; no nível 3, os alunos estão conscientes do papel da informação quantitativa nos julgamentos de probabilidade condicionada, apesar de não atribuírem probabilidades numéricas precisas; no nível 4, os alunos usam o raciocínio numérico para interpretar situações de probabilidade condicionada.

Tarr e Lannin (2005) consideram que os níveis de dificuldade mencionados são comuns a todos os alunos e agrupam-nos nas quatro categorias apresentadas no Quadro 1. Também Gras e Totohasina (1995) identificaram três concepções de carácter cognitivo, apresentadas no Quadro 2.



Quadro 1 – Níveis de dificuldade na aquisição do conceito de probabilidade condicionada

Dificuldade	Descrição
Condicionamento e causalidade	Algumas pessoas identificam como similares a condicionalidade e a causalidade, ainda que a relação $P(A B)$ seja devida a uma relação diagnóstica (Tversky & Kahneman, 1982).
Falácia do eixo temporal	Crença de que um sucesso não pode condicionar outro que ocorreu antes (Falk, 1989).
Situações sincrónicas e diacrónicas	Quando o problema se coloca em situações sequenciais (situações diacrónicas) ou em situações simultâneas (sincrónicas) (Falk, 1989).
Resolução de problemas bayesianos	As pessoas não usam o teorema de Bayes de forma intuitiva, considerando que uma das dificuldades nesta resolução é devida à representação não correcta dos dados do problema.
Compreender o conceito de independência	Acreditar que é mais provável a intersecção de dois acontecimentos do que cada um dos seus acontecimentos constituintes (Tversky & Kahneman, 1983) e a confusão das duas probabilidades $P(A B)$ e $P(B A)$ (Falk, 1989).

Destas concepções, que podem constituir entraves ao correcto raciocínio em probabilidade condicionada, as duas primeiras são mais susceptíveis de constituir um entrave de carácter epistemológico e a terceira mais de carácter didáctico.

Quadro 2 – Concepções de carácter cognitivo que podem constituir entraves ao correcto raciocínio em probabilidade condicionada

Concepção	Descrição
Concepção cronológica da probabilidade condicionada $P(A B)$	Nesta concepção a probabilidade condicionada é vista como impondo sistematicamente uma relação temporal entre os dois acontecimentos A e B . Se o acontecimento B se realiza necessariamente antes do acontecimento A , uma questão que inverta a sequência temporal, pedindo a probabilidade do acontecimento passado, conhecido o futuro, parece totalmente desprovida de sentido para os alunos.
Concepção causal da probabilidade condicional $P(A B)$	Esta concepção manifesta-se pela introdução, ainda que implícita, de uma relação de causa-efeito entre o acontecimento condicionante B e o acontecimento condicionado A . Neste caso, perguntar a um aluno para inverter esta relação e calcular a probabilidade de uma causa conhecendo a consequência pode também ser considerado desprovida de sentido.
Concepção cardinal da probabilidade condicionada	Esta concepção consiste na tendência sistemática de representar a probabilidade condicionada $P(A B)$ pela quantificação proporcional $card(A \cap B) / card B$, que é correcta no caso particular de equiprobabilidade, e não pela razão $card A / card B$, que é geralmente falsa.



Em geral, os autores que têm centrado as suas investigações no ensino da probabilidade condicionada (e não só) são unânimes em considerar de extrema importância as concepções que os alunos têm, mesmo que erróneas, como base para a aquisição do conceito de probabilidade condicionada e de acontecimentos independentes. Segundo Fernandes (1990), o conhecimento da existências de concepções erradas nas pessoas em geral e nos alunos em particular pode ter uma influência muito importante no processo ensino-aprendizagem e a sua importância é realçada na medida em que aceitamos que o sujeito tem um papel activo na construção do seu conhecimento.

Por outro lado, em geral, o ensino regular de probabilidades tem um impacto reduzido na alteração das ideias erróneas dos alunos. No estudo referido, Fernandes (1990) verificou que os alunos com experiência de ensino de probabilidades não se distinguiram dos alunos sem experiência de ensino de probabilidades relativamente aos erros cometidos em situações probabilísticas contra-intuitivas. Ora, este resultado recomenda a exploração das concepções erróneas dos alunos no ensino.

Neste contexto, estudaram-se no presente estudo as duas questões de investigação: “Que respostas e justificações apresentam os alunos do 12º ano na resolução de problemas de probabilidade condicionada antes e depois de este conceito ter sido leccionado?” e “O ensino do conceito de probabilidade condicionada no 12º ano altera as respostas dadas pelos alunos?”.

2. Metodologia do Estudo

O estudo das questões de investigação referidas desenvolveu-se no âmbito de um estudo mais amplo, de natureza, fundamentalmente, quantitativa e com desenho descritivo e comparativo.

Participaram na parte do estudo, a que aqui nos referimos, os alunos de cinco turmas do 12º ano de uma mesma escola secundária do distrito de Braga, num total de 115 alunos. Na Tabela 1 caracterizam-se os alunos que participaram no estudo, considerando as variáveis idade, desempenho a Matemática (avaliado através da média das classificações obtidas pelos alunos no 10º e 11º anos a Matemática) e número de repetências.



Tabela 1 – Caracterização da amostra do estudo

	Mínimo	Máximo	Média	Desvio padrão
Idade	16	20	17,0	0,6
Desempenho a Matemática	7,5	20	12,7	3,2
Nº de repetências	0	2	0,12	0,38

A estes alunos foi aplicado um teste escrito constituído por 14 questões, 10 de resposta curta e quatro de escolha múltipla, sobre o conceito de probabilidade condicionada e independência, algumas delas com mais do que uma alínea. Este teste foi administrado em contexto de sala de aula, em dois momentos distintos, tendo por referência o ensino do tema de probabilidades condicionadas: no pré-ensino, imediatamente antes da leccionação do tema; e no pós-ensino, imediatamente depois da leccionação do tema. Os alunos dispuseram de 90 minutos para responder ao teste, o que se revelou um tempo suficiente.

O ensino do tema de probabilidades condicionadas decorreu ao longo de duas aulas de 90 minutos e nele intervieram dois professores, tendo um leccionado em duas turmas e o outro nas restantes três turmas.

Neste texto apresentamos apenas os resultados relativos a quatro das 14 questões do teste, cujo conteúdo primário é descrito na Tabela 2.

Tabela 2 – Conteúdo primário avaliado em cada questão

Questão/alínea	Conteúdo do item
1a); 1b); 1c); 1d)	Calcular uma probabilidade simples, conjunta e condicionada
2 a)	Calcular uma probabilidade conjunta numa experiência com reposição
2 b), 3a)	Calcular uma probabilidade conjunta numa experiência sem reposição
3b)	Calcular uma probabilidade condicionada quando o eixo temporal é invertido
4	Calcular uma probabilidade condicionada conhecidas as probabilidades simples e conjunta

Finalmente, o tratamento e a análise de dados centraram-se no estudo das respostas (correctas e incorrectas) e dos raciocínios referidos pelos alunos nas suas resoluções, tendo sido determinadas percentagens, resumida a informação em tabelas e aplicado o teste de McNemar para verificar a significância estatística (ao nível de significância de



0,05) das alterações ao nível das respostas correctas/erradas entre o pré-ensino e o pós-ensino.

3. Apresentação de resultados

Seguidamente apresentam-se os resultados obtidos em cada uma das quatro questões antes referidas.

3.1. Questão 1

1. Realizou-se uma entrevista a um grupo de homens de uma determinada população, e obtiveram-se os seguintes resultados:			
	Tem menos de 55 anos	Tem mais de 55 anos	Total
Sofreu um ataque cardíaco	29	75	104
Não sofreu ataque cardíaco	401	275	676
Total	430	350	780
Se escolhermos ao acaso uma destas pessoas: a) Qual a probabilidade que tenha sofrido um ataque cardíaco? b) Qual a probabilidade que tenha mais de 55 anos e tenha sofrido um ataque cardíaco? c) Sabendo que a pessoa escolhida tem mais de 55 anos, qual a probabilidade que tenha sofrido um ataque cardíaco? d) Sabendo que a pessoa escolhida sofreu um ataque cardíaco, qual a probabilidade que tenha mais de 55 anos?			

Esta questão, constituída por quatro alíneas, envolve os conceitos de probabilidade simples, conjunta e condicionada em dados apresentados numa tabela de dupla entrada. Na Tabela 3 apresentam-se as respostas dadas pelos alunos nesta questão.

Considerando os acontecimentos “ A : ter sofrido um ataque cardíaco”, “ B : ter mais de 55 anos” e “ C : ter menos de 55 anos”, pretendia-se determinar $P(A)$ em 1a), $P(A \cap B)$ em 1b), $P(A|B)$ em 1c) e $P(B|A)$ em 1d).



Tabela 3 – Respostas, em percentagem, dos alunos à questão 1

Respostas	1a)		1b)		1c)		1d)	
	Pré-ensino	Pós-ensino	Pré-ensino	Pós-ensino	Pré-ensino	Pós-ensino	Pré-ensino	Pós-ensino
Correctas	93,0	98,3	74,8	64,3	78,3	66,9	82,6	69,6
Incorrectas	7,0	1,7	24,3	34,8	20,0	32,2	13,1	28,7
Não respostas	–	–	0,9	0,9	1,7	0,9	4,3	1,7

Por observação da Tabela 3 verificamos que, exceptuando a alínea 1a), em todas as outras a percentagem de respostas correctas diminui do pré-ensino para o pós-ensino, o que permite concluir da pouca eficácia da experiência de ensino sobre probabilidade condicionada por que os alunos tinham passado. Do pré-ensino para o pós-ensino, o teste de McNemar não determinou diferenças estatisticamente significativas nas alíneas 1a), 1b) e 1c), e determinou diferenças estatisticamente significativas na alínea 1d) ($p < 0,05$).

No conjunto das quatro alíneas, tanto no pré-ensino como no pós-ensino, as respostas erradas dos alunos deveram-se às dificuldades que tiveram em extrair do quadro a informação adequada, seja ao nível dos casos favoráveis, dos casos possíveis ou de ambos (53 alunos no pré-ensino e 49 no pós-ensino). Por exemplo, o aluno A98 apresentou a seguinte resolução da alínea 1a):

$$P(\text{que tenha sofrido um ataque cardíaco}) = \frac{104}{1560}$$
$$C.P = 1560$$
$$C.F = 104$$

Figura 1. Resolução da alínea 1a) pelo aluno A98 no pré-ensino.

Mesmo depois do ensino muitos alunos revelaram possuir um conceito de probabilidade condicionada muito pouco aprofundado, ao não questionarem a obtenção de um valor de probabilidade superior a 1 (8 alunos no pré-ensino e 5 alunos no pós-ensino), ao confundirem a probabilidade conjunta com a probabilidade condicionada (11 alunos no pós-ensino), ao não aplicarem correctamente a fórmula da probabilidade condicionada (36 alunos no pós-ensino) e ao inverterm a probabilidade condicionada (5 alunos no



pré-ensino e 4 alunos nos pós-ensino). No caso da alínea 1b), o aluno A42 calculou a probabilidade condicionada $P(A|B)$ em vez de $P(A \cap B)$.

c: tenha mais de 55 anos e tenha sofrido um ataque cardíaco.

$$p(e) = \frac{75}{350}$$

Figura 2. Resolução da questão 1b) pelo aluno A42 no pré-ensino.

O facto da aplicação incorrecta da fórmula da probabilidade condicionada ter acontecido apenas no pós-ensino contribuiu consideravelmente para a diminuição da percentagem de respostas correctas. Na Figura 3 exemplifica-se a aplicação incorrecta da fórmula pelo aluno A52 nas alíneas 1c) e 1d).

c) Sabendo que a pessoa escolhida tem mais de 55 anos, qual a probabilidade que tenha sofrido um ataque cardíaco?

$$P(T|M) = \frac{P(T \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{75}{350}}{\frac{104}{780}} = \frac{\frac{3}{14}}{\frac{2}{15}} = \frac{45}{28}$$

T - mais de 55 anos
M - ataque cardíaco
 $P(M) = \frac{104}{780}$

d) Sabendo que a pessoa escolhida sofreu um ataque cardíaco, qual a probabilidade que tenha mais de 55 anos?

$$P(M|T) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{\frac{104}{780}}{\frac{75}{350}} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{3}{14}} = \frac{28}{45}$$

M - ataque cardíaco
T - mais de 55 anos
 $P(T) = \frac{75}{350}$

Figura 3. Resolução das alíneas 1c) e 1d) pelo aluno A52 no pós-ensino.

3.2. Questão 2

2. Num saco há três bolas brancas e quatro bolas pretas. As bolas são todas iguais excepto na cor. Sem ver, tiram-se sucessivamente duas bolas do saco.
- a) Supondo que a primeira bola extraída é colocada de novo no saco antes de se extrair a segunda, determina a probabilidade de obter duas bolas brancas.
- b) Supondo que a primeira bola extraída não é colocada de novo no saco antes de se extrair a segunda, determina a probabilidade de obter duas bolas brancas.

Esta questão envolve o conceito de probabilidade conjunta em dois tipos de experiências: em 2a) a tiragem é feita com reposição (acontecimentos independentes) e



em 2b) sem reposição (acontecimento dependentes). Na Tabela 4 apresentam-se as respostas dadas pelos alunos à questão 2.

Tabela 4 – Respostas, em percentagem, dos alunos à questão 2

Respostas	2a)		2b)	
	Pré-ensino	Pós-ensino	Pré-ensino	Pós-ensino
Correctas	55,7	57,4	53,1	60,9
Incorrectas	41,7	40,0	41,7	35,6
Não respostas	2,6	2,6	5,2	3,5

Observando a Tabela 4 constata-se que do pré-ensino para o pós-ensino se verifica um aumento pouco significativo da percentagem de respostas correctas, que corresponde a 2 alunos em 2a) e a 9 alunos em 2b). Em ambas as alíneas a aplicação do teste de McNemar não determinou diferenças estatisticamente significativas.

Em termos de respostas correctas, tanto no pré-ensino como no pós-ensino, os alunos recorreram à regra do produto para determinar as probabilidades pedidas, apoiando-se alguns deles na construção de um diagrama de árvore (3 alunos no pré-ensino e 16 no pós-ensino) ou de uma tabela de dupla entrada (1 aluno no pré-ensino).

Das respostas incorrectas, salientou-se a não consideração da conjunção de dois acontecimentos simples, determinando a probabilidade de um acontecimento simples (28 alunos no pré-ensino e 24 alunos no pós-ensino). Na Figura 4 apresenta-se o exemplo de resolução apresentada pelo aluno A55 em 2a).

3 B
4 P
A: "ocorrer dois bolos brancos"
 $p(A) = \frac{3}{7}$

Figura 4. Resolução da alínea 2a) pelo aluno A55 no pós-ensino.

Na origem dos erros dos alunos encontram-se também a adição das probabilidades simples em vez da sua multiplicação (21 alunos no pré-ensino e 14 alunos no pós-ensino), a determinação incorrecta do número de casos favoráveis ou possíveis (16 alunos no pré-ensino e 19 alunos no pós-ensino), a não consideração da reposição da primeira bola extraída no caso de 2a) (1 aluno no pré-ensino e 3 alunos no pós-ensino) e a aplicação incorrecta da fórmula da probabilidade condicionada (5 alunos no pós-



ensino). Na Figura 5 pode observar-se a resposta apresentada pelo aluno A11, que adicionou as probabilidades simples em vez de as multiplicar.

$$P(B, B) = \frac{3}{7} + \frac{2}{6} = \frac{18}{42} + \frac{14}{42} = \frac{32}{42} = \frac{16}{21}$$

(x6) (x7) (÷2)

Figura 5. Resolução da alínea 2b) pelo aluno A11 no pré-ensino.

Por fim, um número considerável de alunos parece não ter feito uma interpretação correcta do enunciado (30 alunos no pré-ensino e 24 alunos no pós-ensino). Na Figura 6 pode observar-se a resolução do aluno A43 à alínea 2a).

3 bolas brancas
4 bolas pretas -
Tem 7 bolas, retiram-se duas então fica 5 bolas.

$$P(B, B) = \frac{3 \times 2}{6 \times 5} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

Se há 6 bolas no saco, se tiramos duas fica 6 x 5 e há 3 bolas brancas então é 3 x 2.

Figura 6. Resolução da alínea 2a) pelo aluno A43 no pós-ensino.

3.3. Questão 3

- 3.** Uma urna contém duas bolas brancas e duas bolas pretas. Extraímos ao acaso duas bolas da urna, uma a seguir à outra, sem repor a primeira.
- a)** Qual a probabilidade da segunda bola extraída ser branca, sabendo que a primeira bola extraída é branca?
- b)** Qual a probabilidade da primeira bola extraída ser branca, sabendo que a segunda bola extraída é branca?

Esta questão centra-se no conceito de probabilidade condicionada, em que os acontecimentos surgem numa sequência temporal natural em 3a) e numa sequência temporal invertida em 3b). Na Tabela 5 apresentam-se as respostas dadas pelos alunos à questão 3.

Tal como na questão 2, por observação da Tabela 5, verifica-se um aumento pouco significativo da percentagem de respostas correctas do pré-ensino para o pós-ensino, que corresponde a 1 aluno em 3a) e a 10 alunos em 3b).



Tabela 5 – Respostas, em percentagem, dos alunos à questão 3

Respostas	3a)		3b)	
	Pré-ensino	Pós-ensino	Pré-ensino	Pós-ensino
Correctas	59,1	60,9	10,4	20,0
Incorrectas	38,3	37,4	81,8	73,1
Não respostas	2,6	1,7	7,8	7,8

Entre as duas alíneas, constata-se que a inversão da sequência temporal (da alínea b) repercutiu-se numa muito menor percentagem de respostas correctas. Nesta questão, a aplicação do teste de McNemar determinou diferenças estatisticamente significativas em 3b) ($p < 0,05$) mas não em 3a).

Na alínea 3a) a resposta correcta foi apresentada sem qualquer justificação (52 alunos no pré-ensino), recorrendo ao diagrama de árvore (7 alunos no pré-ensino), aplicando a lei de Laplace (10 alunos no pré-ensino) e aplicando a fórmula da probabilidade condicionada (17 alunos no pós-ensino). Na Figura 7 exemplifica-se o uso da lei de Laplace para determinar a probabilidade em 3a).

total de bolas = casos possíveis = ~~2~~ + 2 = 4 bolas

$$P(2^{\text{ª}} B) = \frac{1}{3}$$

Como não há reposição e a 1ª extraída é branca e na ^{urna} ~~urna~~ só havia 2 brancas, agora na urna só há 1 branca e 3 bolas no total, porque a 1ª já tinha sido extraída.

Figura 7. Resolução da questão 3 pelo aluno A27 no pré-ensino.

As respostas erradas resultaram, principalmente, da multiplicação das probabilidades simples, considerando os acontecimentos independentes (22 alunos no pré-ensino e 15 no pós-ensino) e da aplicação incorrecta da fórmula da probabilidade condicionada (16 alunos no pós-ensino).

Na alínea b) a resposta correcta foi apresentada sem qualquer justificação (12 alunos no pré-ensino e 13 no pós-ensino) e recorrendo à aplicação da fórmula da probabilidade condicionada (10 alunos no pós-ensino).



Nas respostas incorrectas considerou-se que a segunda extracção não influencia o resultado da primeira, pelo que a probabilidade pedida era igual ao valor da probabilidade simples da primeira extracção (65 alunos no pré-ensino e 38 no pós-ensino) e a aplicação incorrecta da fórmula da probabilidade condicionada (19 alunos no pós-ensino). Na Figura 8 exemplifica-se a primeira destas duas estratégias.

$$p = \frac{2}{4}$$

É indiferente que a segunda bola seja branca, por isso o n° de bolas na primeira extracção é o completo.

Figura 8. Resolução da questão 3b) pelo aluno A29 no pré-ensino.

3.4. Questão 4

4. A probabilidade de uma mulher de mais de 40 anos ter um resultado positivo numa mamografia é 10,3%. A probabilidade de uma mulher de mais de 40 anos ter cancro de mama e uma mamografia positiva é 0,8%. Uma mulher de mais de 40 anos fez uma mamografia e deu resultado positivo. Qual a probabilidade da mulher ter realmente cancro de mama?

Esta questão trata da determinação da probabilidade condicionada, quando são dados os valores da probabilidade simples e da probabilidade conjunta. Na tabela 6 apresentam-se as respostas dadas pelos alunos a esta questão.

Tabela 6 – Respostas, em percentagem, dos alunos à questão 4

Respostas	4	
	Pré-ensino	Pós-ensino
Correctas	26,1	31,3
Incorrectas	49,6	41,7
Não respostas	24,3	27,0

Pela Tabela 6 constata-se que do pré-ensino para o pós-ensino se verifica um aumento pouco significativo da percentagem de respostas correctas, que corresponde a 6 alunos. Também a aplicação do teste de McNemar não determinou diferenças estatisticamente significativas entre o pré-ensino e o pós-ensino.



Em termos de respostas correctas salientou-se o recurso à divisão das probabilidades dadas no enunciado sem apresentarem a fórmula da probabilidade condicionada (29 alunos no pré-ensino e 26 no pós-ensino) e à fórmula da probabilidade condicionada (10 alunos no pós-ensino). Na Figura 9 exemplifica-se o recurso à divisão das probabilidades.

+ho positivo = 10,3%
+ho cancro e positiva = 9,8%
 $P(\text{mulher ter cancro de mama}) = \frac{9,8}{10,3}$

Figura 9. Resolução da questão 4 pelo aluno A48 no pré-ensino.

Nas respostas incorrectas destacou-se a apresentação do valor da probabilidade conjunta indicada no enunciado do problema (39 alunos no pré-ensino e 21 no pós-ensino), o produto dos valores das probabilidades dadas (3 alunos no pré-ensino e 12 no pós-ensino) e a soma dos valores das probabilidades dadas para valor dos casos possíveis (7 alunos no pré-ensino e 3 no pós-ensino). Na Figura 10 exemplifica-se o caso do produto dos valores das probabilidades dadas.

$0,103\%$ → ter resultado positivo → $0,8 \times \text{cancro}$
 $9,89\% + x$ → não ter resultado positivo → $9,2\% \text{ não cancro}$
 $P(\text{da mulher ter realmente cancro de mama}) = 0,8 \times 10,3 = 8,24\%$

Figura 10. Resolução da questão 4 pelo aluno A96 no pós-ensino.

4. Conclusão

Os resultados obtidos nas quatro questões aqui estudadas levam a concluir que o conceito de probabilidade condicionada se revelou um conceito difícil para estes alunos, tal como é referido na literatura (e.g., Fischbein & Gazit, 1984; Tarr & Jones, 1997; Tarr & Lannin, 2005).

Estas dificuldades ocorreram não só nas situações contra-intuitivas (alínea 3b), que foi aquela em que se verificou uma menor percentagem de respostas correctas, mas também em outras perguntas que habitualmente são exploradas em sala de aula. Por exemplo, na exploração de uma tabela de dupla entrada (questão 1), que constitui um tipo de tarefa



presente na vida diária (Batanero, Fernandes & Contreras, 2009), na aceitação acrítica de um valor superior a 1 para a probabilidade (em várias questões) e na substituição dos valores dados das probabilidades conjunta e simples na fórmula da probabilidade condicionada (questão 4).

As dificuldades e os erros dos alunos conduzem-nos à conclusão de que muitos alunos possuíam um conceito de probabilidade condicionada pouco aprofundado, apontando a evidência obtida para os níveis 2 e 3 de progressão na compreensão deste conceito (Tarr & Jones, 1997). No nível 2, ao atribuírem valores superiores a 1 a uma probabilidade, ao aderirem à falácia do eixo temporal, ao não seleccionarem do enunciado a informação relevante e ao não distinguirem claramente situações com e sem reposição; no nível 3, ao reconhecerem a influência da reposição ou não reposição na probabilidade, ao produzirem a composição completa do espaço amostral e ao não atribuírem probabilidades numéricas precisas (confundindo a probabilidade conjunta com a probabilidade condicionada e invertendo a probabilidade condicionada).

O ensino do conceito de probabilidade condicionada nas aulas de Matemática não alterou substancialmente as respostas e as justificações apresentadas pelos alunos nas várias questões. Em geral, em alguns casos verificaram-se aumentos das percentagens de respostas correctas pouco significativos e noutros casos verificaram-se mesmo diminuições das percentagens de respostas correctas, como aconteceu no caso das alíneas 1b), 1c) e 1d). A aplicação do teste de McNemar às respostas correctas e erradas no pré-ensino e no pós-ensino corroborou isso mesmo ao não determinar diferenças estatisticamente significativas, excepto na alínea 1d), com uma maior percentagem de respostas correctas no pré-ensino, e na alínea 3b), com uma maior percentagem de respostas correctas no pós-ensino.

Por um lado, o facto do ensino da probabilidade condicionada não se ter repercutido num melhor desempenho dos alunos constitui um resultado problemático do presente estudo e, por outro lado, o facto de Gras e Totohasina (1995) considerarem difícil o ensino dos conceitos de probabilidade condicionada e independência mostram a importância de estudar como decorreu o ensino deste conceito na sala de aula, tendo em vista descobrir razões que expliquem tão baixo impacto do ensino nas suas aprendizagens.



Referências bibliográficas

- Batanero, C., Fernandes, J. A. & Contreras, J. M. (2009). Un análisis semiótico del problema de Monty Hall e implicaciones didácticas. *Suma*, 62, 11-18.
- Díaz, C. & de la Fuente, I. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Epsilon*, 59, 245-260.
- Falk, R. (1989). Inference under uncertainty via conditional probabilities. In R. Morris (Ed.), *Teaching statistics in schools* (Vol. 7 de *Studies of mathematics education*, pp. 174-184). Paris: UNESCO.
- Fernandes, J. A. (1990). *Concepções erradas na aprendizagem de conceitos probabilísticos*. Dissertação de mestrado, Universidade do Minho, Braga.
- Fischbein, E. & Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, 15, 1-24.
- Gras, R. & Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15(1), 49-95.
- Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 187-205.
- Ministério da Educação (2002). *Programa de Matemática A* (10º, 11º e 12º anos). Lisboa: Autor.
- Tarr, J. E. & Jones, G. A. (1997). A framework for assessing middle school students' thinking in conditional probability. *Mathematics Education Research Journal*, 9, 39-59.
- Tarr, J. E. & Lannin, J. (2005). How can teachers build notions of conditional probability and independence? In A. J. Graham (Eds.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 215 -238). Netherlands: Springer.
- Tversky, A. & Kahneman, D. (1982). Causal schemas in judgment under uncertainty. In D. Kahneman, P. Slovic & A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 117-128). Cambridge: Cambridge University Press.
- Tversky, A. & Kahneman, D. (1983). Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment. *Psychological Review*, 90(4), 293-315.