

**Universidade do Minho**  
Escola de Ciências

Maria da Conceição Gonçalves Nogueira Rodrigues

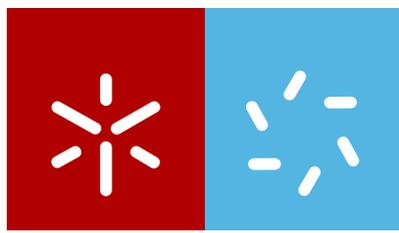
## **Física dos Neutrinos e Unificação das Interações**

Outubro de 2006

View metadata, citation and similar papers at [core.ac.uk](http://core.ac.uk)

brought to you by  **CORE**

provided by Universidade do Minho: RepositoriUM



**Universidade do Minho**

Escola de Ciências

Maria da Conceição Gonçalves Nogueira Rodrigues

## **Física dos Neutrinos e Unificação das Interações**

Dissertação de Mestrado  
Mestrado em Física - Ensino

Trabalho efectuado sob a Co-Orientação de  
**Doutor Gustavo Castelo Branco**  
e  
**Doutora Cacilda Maria Lima de Moura**

## DECLARAÇÃO

**Nome:** Maria da Conceição Gonçalves Nogueira Rodrigues

**Endereço electrónico:** mc.rodrigues.17gmail.com

**Telefone:** 251666532 / 961210874

**Número do Bilhete de Identidade:** 11448096

**Título da Dissertação**

*Física dos Neutrinos e Unificação das Interações*

**Co-Orientadores:**

Doutor Gustavo Castelo Branco

Doutora Cacilda Maria Lima de Moura

**Ano de conclusão:** 2006

**Designação do Mestrado:**

Mestrado em Física - Ensino

1. É AUTORIZADA A REPRODUÇÃO INTEGRAL DESTA TESE/TRABALHO APENAS PARA EFEITOS DE INVESTIGAÇÃO, MEDIANTE DECLARAÇÃO ESCRITA DO INTERESSADO, QUE A TAL SE COMPROMETE.

Universidade do Minho, 4/10/2006

**Assinatura:** Maria da Conceição Gonçalves Nogueira Rodrigues

*“We shall not cease from exploration  
And the end of all of our exploring  
Will be to arrive where we started  
And know the place for the first time.”*

T.S. Elliot in “The Four Quartet’s”



*Aos meus Pais*  
*e*  
*aos meus Padrinhos*



# Agradecimentos

*Quando queremos muito uma coisa, todo o Universo se junta para que ela aconteça.*

Paulo Coelho

Jamais devemos desistir dos nossos objectivos. Devemos sempre acreditar que a sua realização é difícil, mas possível, mas não nos devemos esquecer que para alcançá-los é preciso a ajuda do outro, apesar da última decisão ser nossa.

A força está no acreditar que somos capazes. Com certeza que iremos encontrar dificuldades. É normal. Já outros antes de nós as encontraram, mas aí é preciso ter coragem e dizer: vou trabalhar e alcançarei a meta. Importante não é só a meta, mas o caminho percorrido para alcançá-la. É o caminho que dá força e coragem para seguir em frente.

Ao **Professor Gustavo Castelo Branco**, Professor Catedrático do Departamento de Física do Instituto Superior Técnico (IST), quero agradecer a disponibilidade em assumir a Co-Orientação desta Dissertação de Mestrado. Agradeço-lhe ainda todo o incentivo, coragem e boa disposição com que sempre me recebeu, a sua disponibilidade e abertura por todas as conversas e conhecimentos transmitidos ao longo da realização deste trabalho, assim como o facto de me ter integrado no CFTP (Centro de Física Teórica de Partículas) do IST.

À **Professora Cacilda Moura**, Professora Auxiliar do Departamento de Física da Universidade do Minho (UM), e Co-Orientadora desta Dissertação de Mestrado, agradeço a sua insistência para eu não desistir da vontade em estudar Física de Partículas. Por isso, desde já o meu cabal agradecimento por todo o apoio e por esse incentivo, sem o qual esta dissertação não se teria tornado realidade. Agradeço, ainda a sua disponibilidade para a leitura desta dissertação, bem como as sugestões e correcções apontadas.

Agradeço ao **Professor Jorge Romão**, Professor Catedrático do Departamento de Física do Instituto Superior Técnico (IST), pelo modo afável e encorajador como me recebeu aquando do primeiro contacto para me inteirar se era possível a realização desta Dissertação de Mestrado no IST, em conjunto com a UM. Agradeço ainda a sua disponibilidade e abertura por todas as conversas e conhecimentos transmitidos ao longo da realização deste trabalho. Estou, também, grata pelo facto de ter revelado disponibilidade para a leitura desta dissertação e ter apontado algumas correcções e sugestões.

Do mesmo modo, agradeço a forma amável e simpática com que o CFTP me acolheu, nomeadamente à **Doutora Margarida M. Rebelo**, ao **Doutor Joaquim Silva Marcos**, ao **Doutor Ricardo Gonzalez**, ao **Doutor David Emmanuel-Costa** e às funcionárias da secretaria: **D.Fátima Casquilho** e **D.Sandra Oliveira**.

Agradeço, ainda, ao **David Emmanuel-Costa** toda a disponibilidade revelada em ler a dissertação, dar sugestões e também pelo esclarecimento de dúvidas

e conhecimentos transmitidos, bem como pela sua colaboração ao nível da estruturação, formatação e organização deste trabalho.

Ao **André Ribeiro** quero agradecer a primeira leitura da dissertação, todas as sugestões que me forneceu, bem como a disponibilidade com que me tirou dúvidas. Estou também grata ao **Ricardo Gonzalez** pelo esclarecimento de dúvidas.

Agradeço à **Berta Alves** e ao **João Oliveira** a boa vontade que revelaram em me facultar o programa informático para a escrita desta dissertação, assim como a disponibilidade em me tirar dúvidas relativamente à formatação da mesma.

Ao Professor **Augusto Rodrigues** agradeço o incentivo e entusiasmo que me proporcionou, bem como o auxílio com algum material bibliográfico.

Deixo também um agradecimento aos **Conselhos Executivos das Escolas EB2,3 de Monção, EB2,3/S de Melgaço e EB2,3/S de Ourique** pelo facto de terem tido compreensão na elaboração dos meus horários.

Quero também agradecer a toda a **Família**, bem como à **D.Carminho** e ao **Sr.Araújo** pelo apoio e incentivo que me deram ao longo do Mestrado. Agradeço ao meu primo **Pedro** o facto de me ter facultado a *Diciopédia* que tanto me ajudou na tradução de artigos e livros.

Agradeço ainda aos meus amigos: **Estela de Sousa, Luís Almeida, Vanessa Ferreira, Ana Pereira, Paula Faria, Teresa Simões e Isabel Araújo** todo o apoio e incentivo dados ao longo do Mestrado.

Aos meus **Padrinhos** agradeço a forma como educaram os filhos e os netos, transmitindo-nos sempre ensinamentos de coragem e luta.

Aos meus **Pais** agradeço todo o apoio, encorajamento e incentivo dados ao longo do Mestrado.

Ao **Hugo** agradeço, de um modo especial, todo o apoio e força que sempre me deu, bem como toda a compreensão demonstrada ao longo do Mestrado.

Finalmente, expresso aqui os meus mais sinceros agradecimentos a todos aqueles, que de uma forma directa ou indirecta, participaram e apoiaram desinteressadamente com o seu contributo ou com palavras de amizade e motivação, tornando assim possível este trabalho.

## Resumo

Como educadores, temos sempre necessidade de nos actualizarmos, de termos conhecimento das últimas teorias, das últimas descobertas. De facto, é nosso dever fornecer aos alunos uma visão global dos últimos desenvolvimentos, nomeadamente, da Física Fundamental.

Compreender as teorias de *gauge*, que constituem o tratamento actual das interacções fundamentais, são aspectos fundamentais da Física de Partículas, nomeadamente no estudo do Modelo Standard, na compreensão da estrutura da massa dos fermiões, em particular dos neutrinos. As recentes indicações em favor das oscilações dos neutrinos massivos constituem a evidência mais sólida de física para além do Modelo Standard. Ao mesmo tempo, o problema da origem da massa dos neutrinos encontra-se entre os problemas mais estimulantes da Física de Partículas.

Esta dissertação é constituída por três capítulos. No primeiro, são tratadas as teorias de *gauge*, a quebra espontânea de simetria e o Mecanismo de Higgs que explica a massa dos bosões  $W_\mu^\pm$  e do bosão  $Z_\mu^0$ . No capítulo seguinte, é feita uma abordagem do Modelo Standard das interacções fundamentais. Finalmente, no último capítulo, é tratada a fenomenologia da Física dos Neutrinos, onde é feita uma extensão do Modelo Standard que incorpora neutrinos massivos. Os dados experimentais recentes mostram haver oscilações dos sabores dos neutrinos, o que só é possível se os neutrinos possuírem massa, ainda que pequena. O Mecanismo See-saw, que pode ser facilmente implementado em extensões simples do Modelo Standard, relaciona de forma elegante a pequenez da massa dos neutrinos com a existência de nova física a uma escala de energia elevada. De facto, a Física dos Neutrinos pode abrir uma janela sobre escalas presentemente inacessíveis.

**Palavras-chave:** Teorias de *Gauge*; Quebra Espontânea de Simetria; Mecanismo de Higgs; Modelo Standard; Neutrino; Mecanismo See-saw; Oscilações dos Neutrinos; Mistura de Neutrinos; Massa dos Neutrinos.



# Abstract

As educators we always have the need to be updated, to know everything about the last theories and the last discoveries. In fact, it is our duty to give to the students a global vision of the last developments, namely the Fundamental Physics.

Understanding the gauge theories, as the nowadays mathematical description of the fundamental interactions, are the crucial aspects of Particle Physics, namely in the study of the Standard Model, on the explanation of the fermion mass structures and especially concerning the neutrinos. The recent information favouring the variations of massive neutrinos is the most solid evidence of physics beyond the Model Standard. At the same time, the problem of the origin of the of the neutrino masses is among the most stimulating problems in Particle Physics.

This dissertation is organized into three chapters. The first one concerns gauge theories, the spontaneous symmetry breaking and the Higgs Mechanism that explains the  $W_{\mu}^{\pm}$  boson mass and the  $Z_{\mu}^0$  boson mass. In the following chapter it is presented an approach to the Standard Model of the fundamental interactions. Finally, the last chapter deals with the phenomenology of Neutrino Physics, in which an extension of the Model Standard that incorporates massive neutrinos it is made. Recent experimental data show the existence of variations of the neutrino flavours which is only possible if the neutrinos have masses even in a small amount. The See-saw Mechanism, which may be easily implemented in simple extensions of the Standard Model, connects elegantly the smallness of the neutrino masses to the existence of new physics at a high energy scale. In fact, the Neutrino Physics may opens the future's path to the nowadays inaccessible scales.

**Key-words:** Gauge Theory; Spontaneous Symmetry Breaking; Higgs Mechanism, Standard Model; Neutrino; Mechanism See-saw; Neutrinos Oscillations; Neutrino Mixing; Neutrino Mass.



# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Teorias de <i>Gauge</i></b>	<b>5</b>
2.1	Formulação Lagrangeana . . . . .	5
2.1.1	O Lagrangeano na Mecânica Clássica . . . . .	5
2.1.2	O Lagrangeano na Teoria do Campo . . . . .	7
2.2	Invariância de <i>Gauge</i> . . . . .	10
2.2.1	Transformação de <i>Gauge</i> Global . . . . .	11
2.2.2	Transformação de <i>Gauge</i> Local . . . . .	15
2.3	O Termo de Massa . . . . .	21
2.4	Quebra Espontânea de Simetria . . . . .	24
2.5	Mecanismo de Higgs . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Da Teoria de Fermi ao Modelo Standard</b>	<b>35</b>
3.1	Teoria de Fermi . . . . .	35
3.1.1	As Interações Fracas dos Leptões . . . . .	38
3.1.2	As Interações Fracas dos Hadrões . . . . .	39
3.1.3	Charm e o Mecanismo de GIM . . . . .	44
3.2	O Modelo Standard . . . . .	48
3.2.1	Massa dos Fermiões do SM . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Física dos Neutrinos</b>	<b>63</b>
4.1	Breve Introdução Histórica dos Neutrinos . . . . .	63
4.2	Motivações para a Existência de Massa dos Neutrinos . . . . .	67
4.3	Massa dos Neutrinos em Extensões do Modelo Standard . . . . .	69
4.3.1	Massa de Dirac . . . . .	70
4.3.2	Massa de Majorana . . . . .	72
4.3.3	Massa dos Neutrinos em $SU(2)_L \times U(1)_Y$ . . . . .	74
4.3.4	O Mecanismo See-saw . . . . .	76
4.4	Oscilações dos Neutrinos no Vácuo . . . . .	79
4.5	Dados Experimentais da Física dos Neutrinos . . . . .	88
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>95</b>

**CONTEÚDO** **vi**

---

<b>6 Anexos</b>	<b>97</b>
6.1 Anexo 1 . . . . .	97
6.2 Anexo 2 . . . . .	98
<b>Bibliografía</b>	<b>101</b>

# Lista de Figuras

2.1	Energia Potencial. . . . .	23
2.2	Mínimo de potencial para $\mu^2 > 0$ . . . . .	26
2.3	Mínimo de potencial para $\mu^2 < 0$ . . . . .	26
2.4	Mínimo de potencial para $\mu^2 < 0$ . . . . .	29
3.1	Dispersão electrão-protão. . . . .	36
3.2	Decaimento $\beta$ . . . . .	36
3.3	Decaimento $\beta$ . . . . .	37
3.4	Decaimento $\beta$ do neutrão. . . . .	41
3.5	Decaimento para $\Lambda^0$ . . . . .	41
3.6	Decaimento $K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ , com o quark $u$ . . . . .	47
3.7	Decaimento $K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ , com o quark $c$ . . . . .	47
3.8	Vértices que originam correntes carregadas. . . . .	56
3.9	Decaimento do muão. . . . .	56
3.10	Corrente neutra no processo $\bar{\nu}_\mu e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu e^-$ , mediada pelo bosão vectorial $Z_\mu^0$ . . . . .	57

# Lista de Tabelas

2.1	Lagrangeanos para partículas de spin 0, 1/2 e 1. . . . .	7
3.1	Características dos leptões [18]. . . . .	39
3.2	Características dos quarks [18, 19]. . . . .	40
3.3	Corrente leptónica e corrente hadrónica em função da intensidade. . .	42
4.1	Previsão do fluxo dos neutrinos solares na ausência de oscilações. . . .	90
4.2	Resultados de experiências com neutrinos solares. . . . .	91
4.3	Razões duplas para várias experiências [78]. . . . .	92

## Siglas

<b>SM</b>	Standard Model (Modelo Standard)
<b>LHC</b>	Large Hadron Collider (Grande Colisor Hadrónico) Conseil Européen pour la Recherche
<b>CERN</b>	Nucléaire, actualmente é designado por: European Laboratory for Particle Physics
<b>BBN</b>	Big-Bang Nucleosynthesis (Big-Bang Nucleossíntese)
<b>IVB</b>	Intermediate Vector Boson (bosão vectorial intermédio ( $W_{\mu}^{\pm}$ ))
<b>V – A</b>	Vector-Axial (Vectorial-Axial)
<b>GIM</b>	Glashow-Iliopoulos-Maiani
<b>QED</b>	Quantum Electrodynamics (Electrodinâmica Quântica)
<b>QCD</b>	Quantum Chromodynamics (Cromodinâmica Quântica)
<b>CKM</b>	Cabibbo - Kobayashi - Maskawa
<b>CP</b>	Charge-Parity (Carga-Paridade)
<b>LEP</b>	Large Electron-Positron Collider (Grande Colisor Electrónico)
<b>LSS</b>	Large Scale Structure (Estrutura de Grande Escala) Cosmic Microwave Background Radia-
<b>CMBR</b>	tion (Radiação de fundo de micro-ondas cósmicas)
<b>GUT</b>	Grand Unified Theory (Teorias de Grande Unificação)
<b>SSM</b>	Standard Solar Model (Modelo Solar Standard)



# Capítulo 1

## Introdução

Como educadores, temos sempre necessidade de nos actualizarmos, de termos conhecimento das últimas teorias, das últimas descobertas. De facto, é nosso dever fornecer aos alunos uma visão global dos últimos desenvolvimentos, nomeadamente, da Física Fundamental. *”A ligação da ciência a contextos do dia-a-dia não só motiva os alunos como facilita a compreensão de muitas ideias científicas, facilitando a transferência de conhecimentos para outros contextos”* [1]. O Currículo Nacional do Ensino Secundário [1] acrescenta ainda que *”o ensino dos conteúdos de Física devem ter uma ligação directa com contextos reais. Estes não devem ser apenas explicações de fenómenos imediatamente acessíveis, mas devem igualmente contemplar cenários não disponíveis no imediato por se tratar de tecnologias recentes ou em desenvolvimento, ou mesmo questões para as quais a ciência ainda não tem resposta cabal. Os contextos históricos são também muito úteis por proporcionarem uma visão concreta do modo como a ciência avança”*.

Por esta razão optou-se por fazer uma dissertação num tema actual, relacionado com a Física de Partículas. De facto, quando nos debruçamos sobre o novo programa da disciplina de Física 12<sup>o</sup> Ano, verificamos que inclui uma unidade designada por *”Física Moderna”*. A inclusão desta unidade justifica-se por vários motivos: *”por um lado, permite dar uma visão mais realista ao aluno do que é a Física neste início de século XXI, uma vez que na Física do ensino secundário só abordou, até ao 12<sup>o</sup> Ano, temas da Física Clássica. Por outro lado, o ensino da Física Moderna permite destacar aspectos essenciais da construção do conhecimento científico, ao apresentar e confrontar ideias e teorias científicas que revolucionaram a Física e a própria ciência”* [1]. Neste contexto,

considera-se de todo pertinente a opção feita por uma investigação nesta área.

Nos últimos anos, tem emergido uma teoria que descreve as interacções de todas as partículas elementares conhecidas, excepto a interacção gravítica. Esta teoria - que incorpora a Electrodinâmica Quântica (QED), a teoria dos processos electrofracos de Glashow-Weinberg-Salam e a Cromodinâmica Quântica (QCD) - chama-se o Modelo Standard (SM). Desde 1978, que o SM tem conhecido muitos testes experimentais. Contudo, o SM tem uma característica estética atractiva: todas as interacções fundamentais derivam de um princípio geral: o requerimento da invariância de *gauge* local.

Neste sentido, este trabalho tem como objectivo introduzir o modelo proposto por Glashow, Salam e Weinberg nos anos 60, que tem sido testado durante os últimos 35 anos, bem como uma introdução à Física dos Neutrinos. A descoberta das interacções fracas neutras e a produção dos bósons vectoriais mediadores ( $W_{\mu}^{\pm}$  e  $Z_{\mu}^0$ ), com as propriedades esperadas, aumentou a confiança no modelo. Até ao momento, com excepções das oscilações dos neutrinos, não há resultados experimentais que contradigam as previsões do SM.

Apesar do grande sucesso do SM em explicar a fenomenologia da física das partículas elementares, é necessário estender o SM, devido a problemas conceptuais do mesmo, para além das recentes indicações experimentais das oscilações dos neutrinos.

Nos últimos 70 anos, os neutrinos têm tido um papel importante para entender as partículas elementares e as suas interacções. O neutrino foi a primeira partícula proposta por um teórico para garantir a validade do princípio de simetria: Pauli [2], em 1930, sugeriu que os neutrinos são emitidos juntamente com electrões no decaimento  $\beta$  para manter a conservação da energia e do momento nesse processo. Em 1932, Enrico Fermi estabeleceu um modelo para o decaimento  $\beta$ , na qual incluía o neutrino, que só foi detectado experimentalmente 25 anos depois. Em 1957, Frederick Reines e Clyde Cowan [3] fizeram a primeira observação de um antineutrino livre através da reacção inversa do decaimento  $\beta$ , utilizando o fluxo de  $\bar{\nu}$ , a partir do reactor nuclear Savannah River. Tal descoberta deu a Reines o Prémio Nobel da Física (1995). O neutrino do muão foi detectado por Lederman, Schwartz e Steinberger em 1961, que foram laureados com o Prémio Nobel (1998). Em 2001, a existência do  $\nu_{\tau}$  foi confirmada no Fermi DONUT. Sete décadas depois do postulado de Pauli, foi estabelecido, experimentalmente, que há três neutrinos associados com o sabor

das suas interações leptónicas.

Mais recentemente, em 2002, o Prémio Nobel da Física, foi atribuído a Davis e Koshiba pelas suas pesquisas na astrofísica dos neutrinos (juntamente com Giacomini para os raios X, em astrofísica).

O sucesso da nucleossíntese do Big-Bang (BBN) e a descoberta da radiação do fundo cósmico, tornaram claro que os neutrinos desempenharam um papel importante na história do universo primitivo. A crescente evidência para a existência da matéria escura no universo conduz à hipótese que os neutrinos, com uma massa pequena mas finita, podem fornecer a massa para explicar essa matéria. No entanto, esta questão ainda não foi esclarecida, o que coloca um desafio experimental na questão da massa dos neutrinos e o seu papel na cosmologia. De notar que há outras partículas, para além dos neutrinos, que são candidatas a "matéria escura". De facto, as evidências experimentais obtidas na última década, para a massa finita dos neutrinos e da mistura entre gerações, é forte e irreduzível. A escala da diferença de massa dos neutrinos motiva novas pesquisas experimentais para o decaimento  $\beta$ , bem como o estudo do fenómeno das oscilações usando aceleradores, reactores nucleares e fontes astrofísicas de neutrinos.

Uma das pesquisas mais importantes tem sido a massa dos neutrinos através das suas oscilações, em teorias além do SM, que prevêem que os neutrinos têm massa. Se os neutrinos são massivos e misturados, os estados dos sabores dos neutrinos  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  e  $\nu_\tau$  são misturas de sobreposições coerentes de estados de neutrinos com massa definida. Actualmente, têm sido encontradas algumas evidências em experiências com oscilações dos neutrinos.

Neste trabalho, o primeiro capítulo tem como objectivo fornecer o suporte teórico para a compreensão do surgimento do SM, bem como da Física dos Neutrinos.

No capítulo dois é feita uma descrição das interações fracas que são implementadas pela teoria de *gauge* baseada no grupo  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ , em que a simetria é quebrada espontaneamente pelo Mecanismo de Higgs.

Finalmente, no último capítulo, são tratados os argumentos teóricos a favor da massa dos neutrinos e da sua mistura em modelos para além do SM, que incorporam neutrinos massivos. Os dados experimentais recentes mostram haver oscilações dos sabores dos neutrinos, o que só é possível se os neutrinos possuírem massa, ainda que pequena. O Mecanismo See-saw, que pode ser facil-

mente implementado em extensões simples do SM, relaciona de forma elegante a pequenez da massa dos neutrinos com a existência de nova física a uma escala elevada.

# Capítulo 2

## Teorias de *Gauge*

Este capítulo introduz as teorias de *gauge*<sup>1</sup> que, actualmente, se acredita estarem por trás de todas as interacções das partículas elementares. Vamos começar pela formulação lagrangeana da Mecânica Clássica, passando para o Lagrangeano da Teoria Quântica do Campo, a invariância de *gauge*, a quebra espontânea de simetria e o Mecanismo de Higgs, que explica a massa dos bosões  $W_\mu^\pm$  e do bosão  $Z_\mu^0$ . Estas ferramentas parecem um pouco abstractas, mas são fundamentais na Teoria Quântica do Campo, constituindo a base das teorias modernas.

### 2.1 Formulação Lagrangeana

#### 2.1.1 O Lagrangeano na Mecânica Clássica

De acordo com a 2ª Lei de Newton, uma partícula de massa constante  $m$ , submetida à força  $\vec{F}$ , sofre uma aceleração  $\vec{a}$  dada por [4]:

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad (2.1)$$

Se a força for conservativa, pode-se relacionar com o gradiente da energia potencial  $U$ , ou seja:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U \quad (2.2)$$

e a 2ª Lei de Newton vem:

---

<sup>1</sup>Em português pode dizer-se *padrão*.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}U \quad (2.3)$$

onde  $\vec{v}$  é a velocidade da partícula.

Uma formulação alternativa à Mecânica de Newton, para as leis do movimento, é dada pelo princípio da acção mínima. Este, para cada sistema mecânico, caracteriza-se por uma função, chamada função de Lagrange, determinada por:

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, s) \quad (2.4)$$

onde  $i$  corresponde ao número de graus de liberdade do sistema. Se o sistema evoluir de um estado  $(q_1, t_1)$  para um estado  $(q_2, t_2)$ , então nesses estados, o sistema mover-se-á de tal modo que minimize o integral:

$$S = \int_{t_2}^{t_1} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt \quad (2.5)$$

onde  $S$  designa-se por acção. Da condição de minimização resulta a lei fundamental do movimento, isto é, a equação de Euler-Lagrange, dada por:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.6)$$

A 2ª Lei de Newton, dada pela equação 2.3, pode agora ser derivada no formalismo lagrangeano, se identificarmos o Lagrangeano por:

$$L = T - U \quad (2.7)$$

onde  $T$  é a energia cinética da partícula.

O Lagrangeano é função das coordenadas  $q_i$  ( $q_1 = x$ ,  $q_2 = y$  e  $q_3 = z$ ) e das suas derivadas em ordem ao tempo  $\dot{q}_i$  ( $\dot{q}_1 = v_x$ ,  $\dot{q}_2 = v_y$  e  $\dot{q}_3 = v_z$ ). Usando o sistema da equação 2.6, em termos de coordenadas cartesianas, reproduz-se:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial v_i} = mv_i \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (2.9)$$

$$m \frac{dv_i}{dt} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (2.10)$$

ou seja, a 2ª Lei de Newton, tal como na equação 2.3.

Spin	Densidade Lagrangeana	Exemplos
0	$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi^2$	bosão de Higgs, mesões
$\frac{1}{2}$	$\mathcal{L} = i (\hbar c) \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (mc^2) \bar{\psi} \psi$	leptões, quarks
1	$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 A^\nu A_\nu$	fotão, $G_\mu^a$ , $W_\mu^\pm$ , $Z_\mu^0$

Tabela 2.1: Lagrangeanos para partículas de spin 0, 1/2 e 1.

### 2.1.2 O Lagrangeano na Teoria do Campo

Uma partícula, por um lado, é uma entidade localizada e em Mecânica Clássica estamos interessados em calcular a sua posição como função do tempo:  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$ . Por outro, um campo ocupa uma região do espaço e em Teoria do Campo estamos interessados em calcular uma ou mais funções da posição e do tempo:  $\phi_i(t, x, y, z)$ . Na Mecânica Clássica introduzimos o Lagrangeano, que é uma função das coordenadas  $q_i$  e das suas derivadas no tempo,  $\dot{q}_i$ . Em Teoria do Campo, começamos com o Lagrangeano  $L$ , ou melhor, com a densidade Lagrangeana  $\mathcal{L}^2$ , que é uma função dos campos  $\phi_i$  e das suas derivadas:

$$\partial_\mu \phi_i \equiv \frac{\partial \phi_i}{\partial x^\mu} \quad (2.11)$$

O lado esquerdo da equação 2.6 envolve somente derivadas em ordem ao tempo. Uma teoria relativística deve tratar as coordenadas do espaço e do tempo de igual forma, sendo a equação de Euler-Lagrange generalizada dada por:

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \quad (i = 1, 2, 3...) \quad (2.12)$$

Conforme o spin das partículas, o Lagrangeano que as caracteriza é diferente.

Na tabela 2.1 encontram-se as expressões dos Lagrangeanos para partículas de spin 0,  $\frac{1}{2}$  e 1.

<sup>2</sup>Apesar de  $\mathcal{L}$  ser uma densidade Lagrangeana, para facilitar a escrita, no seguimento deste trabalho, designaremos  $\mathcal{L}$  apenas por Lagrangeano, como é habitual na literatura.

A seguir, são analisados três exemplos<sup>3</sup> [5] para os Lagrangeanos apresentados na tabela 2.1.

Notar que os Lagrangeanos  $L$  têm unidades de energia e a densidade Lagrangeana  $\mathcal{L}$  tem unidades de energia por unidades de volume. Os campos tratados nos exemplos seguintes têm as dimensões:

- $\phi$  (campo escalar):  $\sqrt{ML}/T$ ;
- $\psi$  (campo complexo):  $L^{-3/2}$ ;
- $A^\mu$  (campo vectorial):  $\sqrt{ML}/T$ .

Estas escolhas foram feitas de modo que  $\psi$  seja a função de onda de Schrödinger, no limite não relativístico e  $A^\mu$  seja o vector potencial de Maxwell, no limite não quântico.

**Exemplo 1** *Lagrangeano para um campo escalar de spin 0*

O Lagrangeano para um campo escalar  $\phi$  é dado por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi^2 \quad (2.13)$$

Então

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi \quad (2.14)$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = - \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi \quad (2.15)$$

A equação de Euler-Lagrange requer que:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi = 0 \quad (2.16)$$

e obtemos, assim, a equação de Klein-Gordon, que descreve a partícula de spin 0 e massa  $m$ , em Teoria Quântica do Campo.

**Exemplo 2** *Lagrangeano para um campo complexo de spin  $\frac{1}{2}$*

---

<sup>3</sup>Nos exemplos, que a seguir se apresentam, foram consideradas, explicitamente, as constantes  $c$  e  $\hbar$ . Depois destes exemplos, ao longo deste trabalho, vamos considerar  $c = \hbar = 1$ , como é habitual na literatura.

Consideremos o seguinte Lagrangeano para o campo  $\psi^4$ :

$$\mathcal{L} = i(\hbar c) \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (mc^2) \bar{\psi} \psi \quad (2.17)$$

Vamos tratar o campo  $\psi$  e o adjunto  $\bar{\psi}$  como campos de variáveis independentes. Aplicando a equação de Euler-Lagrange a  $\bar{\psi}$ , temos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = i\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc^2 \psi \quad (2.18)$$

ou seja:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \left(\frac{mc}{\hbar}\right) \psi = 0 \quad (2.19)$$

Esta é a equação de Dirac que descreve uma partícula de spin  $\frac{1}{2}$  e massa  $m$ , em Teoria Quântica do Campo.

Por outro lado, se aplicarmos a equação de Euler-Lagrange a  $\psi$  obtemos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} = i\hbar c \bar{\psi} \gamma^\mu \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -mc^2 \bar{\psi} \quad (2.21)$$

ou seja:

$$i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right) \bar{\psi} = 0 \quad (2.22)$$

que é a equação de Dirac para o campo adjunto.

### **Exemplo 3** *Lagrangeano para um campo vectorial de spin 1 com massa*

Consideremos um campo vectorial  $A_\mu$  descrito pelo Lagrangeano:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu A_\nu \quad (2.23)$$

onde

$$F_{\mu\nu} \equiv (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \quad (2.24)$$

dando como resultado:

---

<sup>4</sup>Onde  $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$ .

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu A_\nu \quad (2.25)$$

As derivadas são:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{2}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu \quad (2.27)$$

A equação de Euler-Lagrange é então dada por:

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu = 0 \quad (2.28)$$

Esta é a equação de Proca que descreve uma partícula de spin 1 e massa  $m$ .

O Lagrangeano para um sistema particular não tem um significado único. Podemos sempre multiplicar  $\mathcal{L}$  por uma constante, ou adicionar uma divergência,  $(\partial_\mu M^\mu)$ , onde  $M^\mu$  é qualquer função de  $\phi_i$  e de  $\partial_\mu \phi_i$ . Estes termos cancelam quando aplicamos a equação de Euler-Lagrange, não afectando as equações de campo.

Nos exemplos apresentados somente existem campos livres, ou seja, as partículas que eles representam não sofrem interações nem se encontram na presença de quaisquer fontes.

## 2.2 Invariância de *Gauge*

Desde a simetria espaço-tempo da relatividade geral, até à invariância de *gauge*, as simetrias têm determinado a maioria das teorias físicas do último século.

Um resultado importante para Teoria do Campo e Física de Partículas provem do Teorema de Noether: *"Se uma acção é invariante sob um grupo de transformações (simetria), então há uma ou mais quantidades conservadas (constantes do movimento) que são associadas a estas transformações"*. Neste sentido, o Teorema de Noether estabelece que a simetria implica a conservação das leis.

Há dois tipos de simetria para os sistemas físicos: simetria global, onde a mesma transformação de simetria é aplicada a um campo em todos os pontos do espaço-tempo; e simetria local, onde as transformações de simetria para os

pontos do espaço-tempo são diferentes para diferentes pontos do espaço-tempo. A existência de simetrias globais exactas implica sempre relações entre as massas e as constantes de acoplamento entre partículas. A importância da simetria local está há muito tempo ligada com a teoria electromagnética, e é a pedra angular na Física de Partículas moderna.

Nesta secção, serão analisadas as transformações de *gauge* para alguns exemplos.

Primeiro, tratam-se as transformações de *gauge* globais, isto é, transformações invariantes para todos os pontos do espaço.

Em seguida, será analisado um exemplo de uma transformação de *gauge* local. Neste tipo de transformação, a fase da função de onda depende do ponto espaço-tempo. Numa transformação de *gauge* local, o Lagrangeano só se torna invariante com a introdução da derivada covariante, exigindo que esta se transforme de determinada forma.

O último caso tratado, nesta secção, será a invariância de *gauge* local para um grupo não-abeliano, isto é, grupos em que as transformações não comutam. Também neste caso, é necessário introduzir a derivada covariante para que o Lagrangeano seja invariante sob estas transformações.

### 2.2.1 Transformação de *Gauge* Global

Dizemos que há uma invariância de *gauge* global sempre que é possível uma transformação infinitesimal do tipo:

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi + \delta\phi \quad (2.29)$$

deixando o Lagrangeano invariante,  $\mathcal{L}(\phi') = \mathcal{L}(\phi)$ , para todos os pontos do espaço-tempo.

A seguir, são analisados dois exemplos de uma transformação de *gauge* para os grupos de transformações  $U(1)$  e  $SU(2)$ .

**Exemplo 4** *Lagrangeano para descrever um campo escalar carregado*

Consideremos o seguinte Lagrangeano [6]:

$$\mathcal{L}(x) = \partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi^*(x) - \mu^2\phi(x)\phi^*(x) \quad (2.30)$$

Este Lagrangeano é invariante para a transformação:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{-i\varepsilon}\phi(x) \quad (2.31)$$

Esta transformação pertence ao grupo de transformações unitárias a uma dimensão,  $U(1)$ <sup>5</sup>. Notar que numa transformação de *gauge* global,  $\varepsilon$  não depende de  $x$ .

Numa transformação infinitesimal:

$$\delta\phi(x) = -i\varepsilon\phi(x) \quad (2.32)$$

em que

$$e^{-i\varepsilon}\phi(x) \cong (1 - i\varepsilon)\phi(x) = \phi(x) - i\varepsilon\phi(x) \quad (2.33)$$

Para que o Lagrangeano seja invariante devemos ter:

$$\delta\mathcal{L} = 0 \quad (2.34)$$

ou seja:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) = 0 \quad (2.35)$$

Recorrendo à equação 2.12 vem:

$$\delta\mathcal{L} = 0 = \left(\partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)}\right)(-i\varepsilon\phi) + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)}(-i\varepsilon)\partial_\mu\phi \quad (2.36)$$

Portanto,

$$\partial_\mu \left(i \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)}\phi\right) = 0 \quad (2.37)$$

Se definirmos as correntes como:

$$J^\mu = i \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)}\phi \quad (2.38)$$

---

<sup>5</sup>O grupo unitário,  $U(n)$ , é o conjunto de todas as matrizes unitárias  $n \times n$  em que  $UU^\dagger = U^\dagger U = 1$ . É não abeliano para  $n > 1$ . O grupo abeliano  $U(1)$  consiste nas matrizes unitárias  $1 \times 1$ , isto é, elas são transformações de fase. O grupo das matrizes unitárias  $n \times n$  com  $\det(U) = 1$  é chamado grupo unitário ortogonal  $SU(n)$ .

Qualquer matriz unitária de dimensão  $n$  pode ser escrita como:  $U = e^{iH}$ , em que  $H$  é uma matriz hermítica. Portanto, como o  $\det(U)$  é um número complexo de módulo 1, pode ser escrito como:  $\det(U) = e^{i\alpha}$ . Por outro lado,  $\det(e^{iH}) = e^{i\text{tr}H}$ , se  $\text{tr}H = 0$ , então  $\det U = 1$ . Devido ao constrangimento  $\text{tr}H = 0$ ,  $SU(n)$  é caracterizado por  $(n^2 - 1)$  parâmetros.

então as correntes são conservadas, uma vez que:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (2.39)$$

A existência de correntes conservadas implica que as cargas sejam também conservadas. Se definirmos a carga  $Q$  como:

$$Q = \int d^3x J^0(x) \quad (2.40)$$

então

$$\frac{dQ}{dt} = \int d^3x \partial^0 J^0(\vec{x}, t) \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} &= \int d^3x \left( \partial_\mu J^\mu(\vec{x}, t) - \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \right) \\ &= - \int d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Pelo teorema da divergência, vem que:

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \quad (2.43)$$

**Exemplo 5** *Transformação de gauge global para um singleto não-abeliano, em  $SU(2)$* <sup>6</sup>

Consideremos o campo  $\phi$  que se transforma da forma [6]:

$$\phi \rightarrow e^{-i\vec{L} \cdot \vec{\alpha}} \phi \quad (2.44)$$

em que  $\phi$  é dado pelo vector coluna:

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

---

<sup>6</sup>O grupo  $SU(2)$  é gerado pelo conjunto das matrizes hermiticas  $2 \times 2$  linearmente independentes com traço nulo. Uma escolha possível são as matrizes de Pauli:  $\tau_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\tau_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$  e  $\tau_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ , em que as matrizes  $\tau_i$  satisfazem as relações de comutação:  $\left[ \frac{1}{2}\tau_j, \frac{1}{2}\tau_k \right] = i\varepsilon_{jkl} \left( \frac{\tau_l}{2} \right)$ , onde  $\varepsilon_{jkl}$  é o Tensor Levi-Civita completamente anti-simétrico, com  $\varepsilon_{123} = 1$ .

e  $\vec{L}$  é uma matriz de representação  $SU(2)$  e obedece à álgebra de Lie:

$$[L_i, L_j] = i\varepsilon_{ijk}L_k \quad (2.46)$$

Para um duplete, a matriz  $\vec{L}$  é dada por:

$$\vec{L} = \frac{1}{2}\vec{\tau} \quad (2.47)$$

onde  $\vec{\tau}$  são as matrizes de Pauli.

Numa transformação infinitesimal:

$$\delta\phi_\alpha = -i\left(\vec{L} \cdot \vec{\varepsilon}\right)_{\alpha\beta} \phi_\beta \quad (2.48)$$

substituindo  $\vec{L}$ , vem que:

$$\delta\phi_\alpha = -\frac{i}{2}(\vec{\tau} \cdot \vec{\varepsilon})_{\alpha\beta} \phi_\beta \quad (2.49)$$

Para que esta transformação seja invariante, o Lagrangeano também deve ser invariante, ou seja,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= 0 \\ 0 &= \delta\mathcal{L} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} \delta\phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)} \delta(\partial_\mu\phi) \\ 0 &= \left[ \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)} \right] \left[ -\frac{i}{2}(\vec{\tau} \cdot \vec{\varepsilon})_{\alpha\beta} \phi_\beta \right] \\ &\quad + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)} \left[ -\frac{i}{2}(\vec{\tau} \cdot \vec{\varepsilon})_{\alpha\beta} \partial_\mu\phi_\beta \right] \end{aligned} \quad (2.50)$$

Portanto,

$$\partial_\mu \left[ -i \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)} \left( \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{\varepsilon} \right)_{\alpha\beta} \phi_\beta \right] = 0 \quad (2.51)$$

Se identificarmos

$$-i \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)} \left( \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{\varepsilon} \right)_{\alpha\beta} \phi_\beta \quad (2.52)$$

com a corrente  $J^\mu$ , então, a corrente é conservada, ou seja:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (2.53)$$

E as cargas são conservadas, pois:

$$Q = \int d^3x J^0(x) \quad (2.54)$$

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \quad (2.55)$$

ou seja, a existência de correntes conservadas implica a existência de cargas conservadas.

### 2.2.2 Transformação de *Gauge* Local

Numa transformação de *gauge* local, a fase depende de  $x$ , ou seja, a transformação de *gauge* depende do ponto espaço-tempo, isto é:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{-iq\theta(x)}\phi(x) \quad (2.56)$$

**Exemplo 6** *Transformação de gauge local para um grupo abeliano (grupo em que as transformações comutam)*

Consideremos o Lagrangeano [6]:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi^*(x) - \mu^2\phi(x)\phi^*(x) \quad (2.57)$$

Começemos por analisar a invariância de cada termo do Lagrangeano, sob a transformação de *gauge* anterior.

■ termo  $\phi(x)\phi^*(x)$ :

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{-iq\theta(x)}\phi(x) \quad (2.58)$$

$$\phi^*(x) \rightarrow \phi'^*(x) = e^{iq\theta(x)}\phi^*(x) \quad (2.59)$$

Então, este termo vem:

$$\begin{aligned} & e^{-iq\theta(x)}\phi(x) \cdot e^{iq\theta(x)}\phi^*(x) \\ = & e^{-iq\theta(x)}e^{iq\theta(x)}\phi(x)\phi^*(x) = \phi(x)\phi^*(x) \end{aligned} \quad (2.60)$$

ou seja:

$$\phi'(x) \phi'^*(x) = \phi(x) \phi^*(x). \quad (2.61)$$

Assim, este termo do Lagrangeano é invariante sob esta transformação de *gauge* local.

■ termo  $\partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi^*(x)$ :

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{-iq\theta(x)} \phi(x) \quad (2.62)$$

para que este termo seja invariante:

$$\partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi^*(x) = \partial_\mu \phi'(x) \partial^\mu \phi'^*(x) \quad (2.63)$$

Então vamos determinar  $\partial_\mu \phi'(x) \partial^\mu \phi'^*(x)$ :

$$\begin{aligned} \partial_\mu \phi'(x) &= \partial_\mu [e^{-iq\theta(x)} \phi(x)] \\ &= -iq \partial_\mu \theta(x) e^{-iq\theta(x)} \phi(x) + e^{-iq\theta(x)} \partial_\mu \phi(x) \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu \phi'^*(x) &= \partial_\mu [e^{iq\theta(x)} \phi^*(x)] \\ &= iq \partial^\mu \theta(x) e^{iq\theta(x)} \phi^*(x) + e^{iq\theta(x)} \partial^\mu \phi^*(x) \end{aligned} \quad (2.65)$$

Assim,  $\partial_\mu \phi'(x) \partial^\mu \phi'^*(x)$  vem:

$$\begin{aligned} &[-iq \partial_\mu \theta(x) e^{-iq\theta(x)} \phi(x) + e^{-iq\theta(x)} \partial_\mu \phi(x)] \cdot \\ &\cdot [iq \partial^\mu \theta(x) e^{iq\theta(x)} \phi^*(x) + e^{iq\theta(x)} \partial^\mu \phi^*(x)] \\ &= \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi^*(x) + q^2 \partial_\mu \theta(x) \partial^\mu \theta(x) \phi(x) \phi^*(x) \\ &\quad + iq \partial^\mu \theta(x) \partial_\mu \phi(x) \phi^*(x) - iq \partial_\mu \theta(x) \phi(x) \partial^\mu \phi^*(x) \end{aligned} \quad (2.66)$$

Pelo que este termo do Lagrangeano não é invariante, sob esta transformação de *gauge* local.

Então, para tornar este termo invariante é necessário introduzir o conceito de derivada covariante,  $D_\mu$ , dada pela prescrição mínima<sup>7</sup>. Numa transformação de *gauge*, a derivada covariante define-se da seguinte maneira:

<sup>7</sup>A prescrição mínima consiste na substituição  $p^\mu \rightarrow p^\mu - eA^\mu$ , para uma partícula de carga  $e$ .

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = (\partial_\mu + ieqA_\mu) \phi \quad (2.67)$$

onde  $A_\mu$  representa o campo que é trocado entre as partículas que interagem.  $A_\mu$  é ainda um campo de *gauge*, pois foi introduzido para garantir uma invariância de fase local.

A transformação de  $A_\mu$  é escolhida de forma a compensar o termo proporcional a  $\partial_\mu \theta(x)$  do Lagrangeano. Assim, pretende-se que  $A_\mu$  se transforme de tal forma que:

$$(\partial_\mu + ieqA'_\mu) \phi'(x) = e^{-iq\theta(x)} (\partial_\mu + ieqA_\mu) \phi(x) \quad (2.68)$$

de modo a tornar o Lagrangeano invariante nos dois termos. Então, resolvendo a equação vem:

$$\begin{aligned} e^{-iq\theta(x)} \partial_\mu \phi(x) + iq \partial_\mu \theta(x) e^{-iq\theta(x)} \phi(x) + ieqA'_\mu \phi(x) e^{-iq\theta(x)} = \\ e^{-iq\theta(x)} \partial_\mu \phi(x) + ieqA_\mu \phi(x) e^{-iq\theta(x)} \end{aligned} \quad (2.69)$$

Por isso

$$ieqA'_\mu \phi(x) e^{-iq\theta(x)} = ieqA_\mu \phi(x) e^{-iq\theta(x)} + iq \partial_\mu \theta(x) e^{-iq\theta(x)} \phi(x) \quad (2.70)$$

ou seja:

$$ieqA'_\mu = iq \partial_\mu \theta(x) + ieqA_\mu \quad (2.71)$$

Então

$$A'_\mu = \frac{1}{e} \partial_\mu \theta(x) + A_\mu \quad (2.72)$$

e

$$\delta A_\mu(x) = \frac{1}{e} \partial_\mu \theta(x) \quad (2.73)$$

A introdução do campo  $A_\mu$  obriga ao aparecimento de novos termos no Lagrangeano, em particular os termos de energia cinética para esse campo. A única combinação quadrática nas primeiras derivadas do campo  $A_\mu$  que é invariante para  $\delta A_\mu$  é:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.74)$$

em que  $F_{\mu\nu}$  é o tensor de Maxwell (tensor antissimétrico) [7], e a energia cinética do campo electromagnético é dada por:

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (2.75)$$

Note-se que nenhum termo com massa é permitido pela transformação de *gauge* local. Ou seja,  $m^2 A_\mu A^\mu$  não é invariante [demonstração em Anexo 1].

O facto do fóton não ter massa é exigido pela invariância de *gauge* local, isto é, é exigido para que haja conservação da carga eléctrica.

No exemplo seguinte é analisada uma transformação de *gauge* local para um grupo não-abeliano.

**Exemplo 7** *Transformação de gauge local para um grupo não-abeliano*

Consideremos, um grupo arbitrário  $G$  com  $T_i$  geradores que obedecem à álgebra de Lie, tal que [6]:

$$[T_i, T_j] = ic_{ijk}T_k. \quad (2.76)$$

Numa transformação de *gauge*,  $\phi$  transforma-se da seguinte maneira:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = U(\theta(x))\phi(x) \quad (2.77)$$

Contudo, agora  $\phi(x)$  não é um único campo, mas representa um vector coluna de vários campos, ou seja:

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

Cada campo  $\phi_i(x)$  é dado por:

$$\theta_i(x) = \left( e^{-i\vec{L} \cdot \vec{\theta}(x)} \right)_{ij} \phi_j(x) \quad (2.79)$$

e

$$\vec{L} \cdot \vec{\theta} = \sum_m L_m \theta_m(x) \quad (2.80)$$

Sendo o Lagrangeano definido por:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger(x) \partial^\mu \phi(x) - \mu^2 \phi^\dagger(x) \phi(x) \quad (2.81)$$

que é invariante sob a transformação anterior se os seus membros forem invariantes, ou seja:

$$\partial_\mu \phi^\dagger(x) \partial^\mu \phi(x) = \partial_\mu \phi'^\dagger(x) \partial^\mu \phi'(x) \quad (2.82)$$

e

$$-\mu^2 \phi^\dagger(x) \phi(x) = -\mu^2 \phi'^\dagger(x) \phi'(x) \quad (2.83)$$

Então, resolvendo cada uma destas igualdades vem:

- Termo:  $-\mu^2 \phi'^\dagger(x) \phi'(x)$ :

$$\begin{aligned} -\mu^2 \phi'^\dagger(x) \phi'(x) &= -\mu^2 \phi^\dagger U^\dagger(\theta) U(\theta) \\ &= -\mu^2 \phi^\dagger(x) \phi(x) \end{aligned} \quad (2.84)$$

pelo que este termo é invariante.

- Termo:  $\partial_\mu \phi'^\dagger(x) \partial^\mu \phi'(x)$ :

$$\begin{aligned} \partial_\mu \phi'(x) &= \partial_\mu [U(\theta(x)) \phi(x)] \\ &= [\partial_\mu U(\theta(x))] \phi(x) + U(\theta(x)) \partial_\mu \phi(x) \end{aligned} \quad (2.85)$$

$$\begin{aligned} \partial^\mu \phi'^\dagger(x) &= \partial^\mu [\phi^\dagger(x) U^\dagger(\theta(x))] \\ &= \partial^\mu \phi^\dagger U^\dagger(\theta) + \phi^\dagger \partial^\mu U^\dagger(\theta) \end{aligned} \quad (2.86)$$

ou seja:

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \phi'^\dagger(x) \cdot \partial^\mu \phi'(x) &= [\partial^\mu \phi^\dagger U^\dagger(\theta) + \phi^\dagger \partial^\mu U^\dagger(\theta)] \\
&\quad \cdot [[\partial_\mu U(\theta(x))] \phi(x) + U(\theta(x)) \partial_\mu \phi(x)] \\
&= \partial^\mu \phi^\dagger U^\dagger(\theta) [\partial_\mu U(\theta(x))] \phi(x) \\
&\quad + \partial^\mu \phi^\dagger U^\dagger(\theta) U(\theta(x)) \partial_\mu \phi(x) \\
&\quad + \phi^\dagger \partial^\mu U^\dagger(\theta) [\partial_\mu U(\theta(x))] \phi(x) \\
&\quad + \phi^\dagger \partial^\mu U^\dagger(\theta) U(\theta(x)) \partial_\mu \phi(x)
\end{aligned} \tag{2.87}$$

pelo que não é invariante.

Tal como para o caso abeliano, é necessário tornar este termo invariante. Para isso, introduz-se a derivada covariante, que neste caso é definida por:

$$D_\mu \phi(x) = \left( \partial_\mu - ig \vec{L} \cdot \vec{A}_\mu(x) \right) \phi(x) \tag{2.88}$$

transformando-se da seguinte forma:

$$D_\mu \phi \rightarrow D'_\mu \phi' = U(\theta) D_\mu \phi \tag{2.89}$$

Agora, a questão é saber como  $\vec{A}_\mu$  se transforma, de forma a que o Lagrangeano seja invariante nesta transformação. Sabendo que:

$$D'_\mu \phi'(x) = \partial_\mu \phi'(x) - ig \left( \vec{A}'_\mu \cdot \vec{L} \right) \phi'(x) \tag{2.90}$$

e

$$\phi'(x) = U(\theta) \phi(x) \tag{2.91}$$

vem:

$$\begin{aligned}
D'_\mu \phi'(x) &= U(\theta) \partial_\mu \phi(x) + [\partial_\mu U(\theta)] \phi(x) - ig \left( \vec{A}'_\mu \cdot \vec{L} \right) U(\theta) \phi(x) \\
&= U(\theta) \left[ \partial_\mu - ig \left( \vec{A}_\mu \cdot \vec{L} \right) \right] \phi(x)
\end{aligned} \tag{2.92}$$

Notar que  $D'_\mu \phi'$  deve ser igual a  $U(\theta) \partial_\mu \phi(x) - ig U(\theta) \left( \vec{A}'_\mu \cdot \vec{L} \right) \phi(x)$ . Então, para isso se verificar vem que:

$$[\partial_\mu U(\theta)] \phi(x) - ig \left( \vec{A}'_\mu \cdot \vec{L} \right) U(\theta) \phi(x) = -ig U(\theta) \left( \vec{A}_\mu \cdot \vec{L} \right) \phi(x) \tag{2.93}$$

ou seja, (o objectivo é determinar  $\vec{A}'_\mu$ ):

$$\begin{aligned} -igU(\theta) \left( \vec{A}'_\mu \cdot \vec{L} \right) \phi(x) &= -igU(\theta) \left( \vec{A}_\mu \cdot \vec{L} \right) \phi(x) - [\partial_\mu U(\theta)] \phi(x) \\ &= -igU(\theta) \left( \vec{A}_\mu \cdot \vec{L} \right) U^{-1}(\theta) U(\theta) \phi(x) \\ &\quad - [\partial_\mu U(\theta)] U^{-1}(\theta) U(\theta) \phi(x) \end{aligned} \quad (2.94)$$

Eliminado os termos comuns em todos os membros, vem:

$$\begin{aligned} \vec{A}'_\mu \cdot \vec{L} &= U(\theta) \left( \vec{A}_\mu \cdot \vec{L} \right) U^{-1}(\theta) - \frac{i}{g} [\partial_\mu U(\theta)] U^{-1}(\theta) \\ &= U(\theta) \left[ \left( \vec{A}_\mu \cdot \vec{L} \right) - \frac{i}{g} U^{-1}(\theta) \partial_\mu U(\theta) \right] U^{-1}(\theta) \end{aligned} \quad (2.95)$$

Esta relação define como é que  $A_\mu$  se deve transformar numa transformação de *gauge*.

A ideia de invariância de *gauge* local remonta aos trabalhos de Hermann Weyl, em 1913 [8, 9]. Contudo a sua generalização e a sua potencialidade só foram apreciadas no início dos anos 50.

## 2.3 O Termo de Massa

O princípio da invariância de *gauge* local funciona muito bem para as interacções fortes e electromagnéticas. Este princípio dá-nos uma forma para determinar os acoplamentos. Além disso, como 't Hooft e outros provaram no início dos anos 70 [10], as teorias de *gauge* são automaticamente renormalizáveis. Mas, a sua aplicação nas interacções fracas não parece possível pelo facto de os campos de *gauge* não terem massa. No exemplo 6, o termo de massa não é invariante de *gauge* local, visto que o fóton e os gluões não têm massa, os  $W_\mu^\pm$  e o  $Z_\mu^0$  certamente também não. Mas será que não podemos ter uma teoria de *gauge* que acomode campos de *gauge* massivos? Podemos, mas o procedimento é subtil (quebra espontânea de simetria e Mecanismo de Higgs - estudados a seguir) e é importante compreender como identificar o termo de massa no Lagrangeano.

Suponhamos o seguinte Lagrangeano para um campo escalar  $\phi$ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + e^{-(\alpha\phi)^2} \quad (2.96)$$

onde  $\alpha$  é uma constante real. Numa primeira análise, deste Lagrangeano, não encontramos vestígios do termo de massa, mas se expandirmos o exponencial,  $\mathcal{L}$  vem:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + 1 - \alpha^2\phi^2 + \frac{1}{2}\alpha^4\phi^4 - \frac{1}{6}\alpha^6\phi^6 + \dots \quad (2.97)$$

O termo de ordem um é irrelevante, já que os termos constantes no Lagrangeano não afectam as equações do campo, mas o termo de ordem dois é semelhante ao termo de massa do Lagrangeano de Klein-Gordon, do exemplo 1, com  $\alpha^2 = 1/2(mc/\hbar)^2$ . Assim, este Lagrangeano descreve uma partícula de massa:

$$m = \sqrt{2}\alpha\hbar/c \quad (2.98)$$

Os termos de ordem superior a três representam acoplamentos. Este exemplo apenas serviu para mostrar como é que o termo de massa deve ser distinguido no Lagrangeano.

No entanto, algo mais subtil é ilustrado no seguinte Lagrangeano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda^2\phi^4 \quad (2.99)$$

onde  $\mu$  e  $\lambda$  são constantes reais. O segundo termo é semelhante ao termo de massa e o último termo é uma interacção. Mas, agora, o sinal do termo de massa é positivo enquanto que no Lagrangeano do exemplo 1 é negativo. Então se este termo representa a massa, esta é imaginária, o que é um contra-senso. Para interpretar o Lagrangeano, devemos começar com o estado base, ou vácuo, e tratar os campos como flutuações em torno desse estado [5]. Para determinar o estado de energia mínima, devemos escrever o Lagrangeano em função dos termos da energia cinética  $\left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi\right)$  e da energia potencial ( $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$ ) e analisarmos o mínimo para a energia potencial, representada graficamente na figura 2.1. Neste caso:

$$\mathcal{V}(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda^2\phi^4 \quad (2.100)$$

e o mínimo ocorre para:

$$\langle 0|\phi|0\rangle = \pm\frac{\mu}{\lambda} \quad (2.101)$$

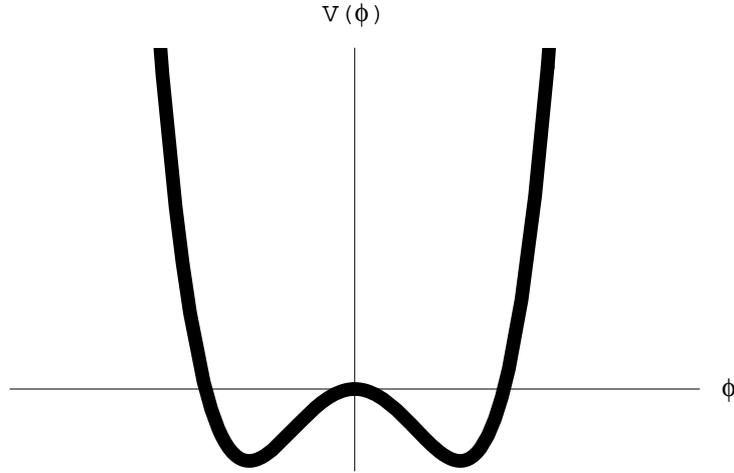


Figura 2.1: Energia Potencial.

Devemos introduzir um novo campo  $\eta$  definido por:

$$\eta \equiv \phi \pm \frac{\mu}{\lambda} \quad (2.102)$$

O Lagrangeano vem agora como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta - \mu^2 \eta^2 \pm \lambda \eta^3 - \frac{1}{4} \lambda^2 \eta^4 + \frac{1}{4} \left( \frac{\mu^2}{\lambda} \right)^2 \quad (2.103)$$

O termo de ordem dois é um termo de massa, agora com o sinal correcto. A massa da partícula que este Lagrangeano descreve é:

$$m = \sqrt{2} \mu \hbar / c \quad (2.104)$$

e os termos de ordem superior representam acoplamentos.

Ou seja, para identificar o(s) termo(s) de massa no Lagrangeano, devemos localizar o estado de vácuo da teoria, cuja configuração do campo corresponde ao mínimo de energia potencial e, reescrever o Lagrangeano em função do(s) novo(s) campo(s) de desvio, a partir do mínimo. Expandindo as potências desse(s) novo(s) campo(s) obtemos a massa da(s) partícula(s), a partir dos termos quadráticos do(s) campo(s).

## 2.4 Quebra Espontânea de Simetria

Na Natureza, encontramos muitas simetrias: uma bola redonda, uma estrela-do-mar, um objecto e a sua imagem no espelho, contudo a maior parte delas não são exactas. Por exemplo, fazendo uma rotação de  $90^\circ$  num quadrado, no final da rotação não é possível distinguir se houve ou não rotação. Contudo, fazendo uma rotação de  $90^\circ$  num triângulo, no final da rotação, verifica-se que o triângulo não apresenta a mesma posição. Nesta situação, o triângulo não exhibe simetria sob a rotação de  $90^\circ$ .

O matemático H.Weyl deu uma definição de simetria que é muito importante para a Física: *"uma coisa é simétrica se é possível exercer sobre ela uma operação - ou «transformações» - finda a qual a coisa ficou igual, permaneceu «invariante»"*<sup>8</sup>.

A simetria tem tido um papel fundamental na compreensão da Física de Partículas. Começando com o grupo de simetria de Poincaré<sup>9</sup> das transformações espaço-tempo para o grupo de invariância de isospin de  $SU(2)$  na física nuclear e o grupo de simetria  $SU(3)$  de Gell-Mann e Neéman para a física hadrónica, a compreensão da Física tem quase sempre sido associada com a identificação de um grupo de invariância num sistema [12].

Os Lagrangeanos que descrevem as partículas físicas têm que violar certas simetrias, de modo a estarem de acordo com os resultados experimentais.

Nesta secção pretende-se estudar a quebra espontânea de simetria, em que o Lagrangeano é simétrico sob a acção dum grupo de transformação, mas o estado base, o de menor energia, não o é. Para isso, vamos estudar dois exemplos: i) uma teoria com um campo escalar real; ii) uma teoria com dois campos escalares.

### Exemplo 8 Teoria com um campo escalar real

O Lagrangeano invariante para esta teoria é definido por [6]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 - \frac{1}{4} \lambda \phi^4 \quad (2.105)$$

Normalmente, para determinarmos o espectro de massa, analisamos os termos bilineares da teoria, o que pressupõe que o estado base corresponda à con-

<sup>8</sup>Q. Ho-Kim, N. Kumar e C. S. Lam citado por [11]

<sup>9</sup>O grupo de Poincaré engloba as transformações de Lorentz e as translações no espaço-tempo a 4 dimensões.

figuração em que os valores de expectação dos campos no vácuo são nulos. Notemos que este Lagrangeano exibe a simetria dada pela transformação seguinte:

$$\phi \rightarrow \phi' = -\phi \quad (2.106)$$

Contudo, pode acontecer que o estado de energia mínima ocorra para:

$$\langle 0 | \phi | 0 \rangle \equiv v \quad (2.107)$$

Neste caso, as partículas são associadas com oscilações de  $\phi$  em torno do valor do mínimo  $v$ .

Como já foi referido, os estados de energia mínima correspondem a um valor para  $\phi$  que minimizem o potencial  $V$ .

Sabendo que  $V$  é dado por:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \quad (2.108)$$

então a equação de minimização é dada por:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 = \mu^2\phi + \lambda\phi^3 = \phi(\mu^2 + \lambda\phi^2) \quad (2.109)$$

Há duas situações possíveis:

i)  $\mu^2 > 0$  - o mínimo ocorre para  $\phi = 0$ , sendo a situação descrita pela figura 2.2 (não há quebra de simetria);

ii)  $\mu^2 < 0$  - o mínimo ocorre quando:  $\phi_{\min} \equiv \pm v = \pm \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$ , sendo a situação descrita pela figura 2.3 (há quebra espontânea de simetria).

Estudemos o potencial para valores de  $\phi$  em torno do valor de expectação do vácuo, quando  $\mu^2 < 0$ . Ambos os valores + ou - são bons, mas vamos escolher o valor +.

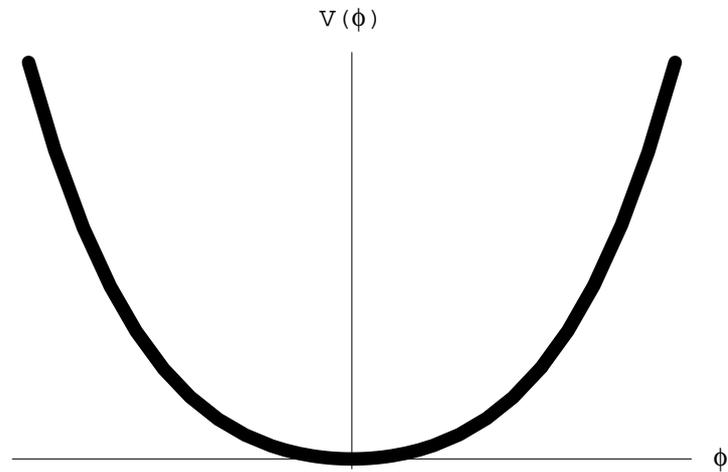
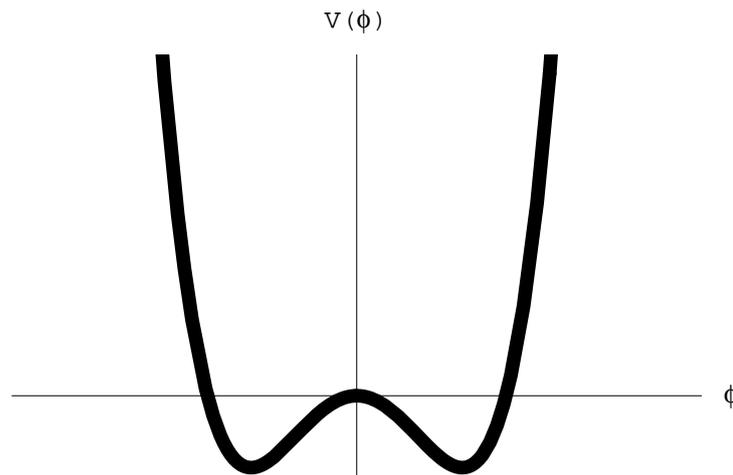
Considerando, agora, um novo campo,  $\phi'$ , definido por:

$$\phi' = \phi - v \Rightarrow \phi = \phi' + v \quad (2.110)$$

vem que:

$$\langle 0 | \phi' | 0 \rangle = 0 \quad (2.111)$$

Então o Lagrangeano, dado pela expressão 2.105, em termos de  $\phi'$ , é escrito da seguinte forma:

Figura 2.2: Mínimo de potencial para  $\mu^2 > 0$ .Figura 2.3: Mínimo de potencial para  $\mu^2 < 0$ .

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi' \partial_\mu \phi') - \frac{1}{2} \mu^2 (\phi' + v)^2 - \frac{1}{4} \lambda (\phi' + v)^4 \\
&= \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi' \partial_\mu \phi') - \frac{1}{2} \mu^2 (\phi'^2 + 2\phi'v + v^2) \\
&\quad - \frac{1}{4} \lambda (\phi'^4 + 4\phi'^3 v + 6\phi'^2 v^2 + 4\phi'v^3 + v^4)
\end{aligned} \tag{2.112}$$

que expandindo resulta:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi' \partial_\mu \phi') - \frac{1}{2} \mu^2 \phi'^2 - \mu^2 \phi'v - \frac{1}{2} \mu^2 v^2 \\
&\quad - \frac{1}{4} \lambda \phi'^4 - \lambda \phi'^3 v - \frac{3}{2} \lambda \phi'^2 v^2 - \lambda \phi'v^3 - \frac{1}{4} \lambda v^4
\end{aligned} \tag{2.113}$$

Os coeficientes dos termos lineares,  $\phi'$ , anulam-se no mínimo:

$$-\mu^2 v - \lambda v^3 = -v (\mu^2 + \lambda v^2) = 0 \tag{2.114}$$

onde

$$v^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} \tag{2.115}$$

Resulta, daqui, que o Lagrangeano para o campo escalar em torno do valor de expectação do vácuo toma a forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi' \partial_\mu \phi' + \frac{1}{4} \mu^2 + \mu^2 \phi'^2 - \lambda v \phi'^3 - \frac{1}{4} \lambda \phi'^4 \tag{2.116}$$

revelando que  $\phi'$  é um campo associado a uma partícula com massa dada por:

$$m^2 = -2\mu^2 \tag{2.117}$$

O Lagrangeano não exhibe, agora, simetria para a transformação dada na equação 2.106, o que é uma indicação da quebra espontânea de simetria no Lagrangeano. Quando  $\langle 0 | \phi | 0 \rangle = v$ , e  $v \neq 0$ , ocorre quebra espontânea de simetria [demonstração no Anexo 1].

**Exemplo 9** *Teoria para dois campos escalares  $\sigma$  e  $\pi$*

O Lagrangeano para esta teoria é definido por [6]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi] - \frac{1}{2} \mu^2 (\sigma^2 + \pi^2) - \frac{1}{4} \lambda (\sigma^2 + \pi^2)^2 \quad (2.118)$$

e

$$V = \frac{1}{2} \mu^2 (\sigma^2 + \pi^2) + \frac{1}{4} \lambda (\sigma^2 + \pi^2)^2 \quad (2.119)$$

Este Lagrangeano é invariante para o grupo das rotações no plano  $O(2)$ <sup>10</sup>, isto é para o grupo abeliano das rotações em torno de um eixo de simetria [7].

As transformações podem escrever-se como:

$$\begin{bmatrix} \sigma' \\ \pi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma \\ \pi \end{bmatrix} \quad (2.120)$$

Para analisarmos a quebra de simetria determinamos onde ocorre o mínimo. Sendo assim, as equações de minimização são:

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} = 0 = \mu^2 \sigma + \lambda \sigma (\sigma^2 + \pi^2) = \sigma [\mu^2 + \lambda (\sigma^2 + \pi^2)] \quad (2.121)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \pi} = 0 = \mu^2 \pi + \lambda \pi (\sigma^2 + \pi^2) = \pi [\mu^2 + \lambda (\sigma^2 + \pi^2)] \quad (2.122)$$

Estudando a situação em que  $\mu^2 < 0$ , esquematizada na figura 2.4, o mínimo absoluto ocorre na circunferência:

$$(\sigma^2 + \pi^2)^{1/2} = \left( -\frac{\mu^2}{\lambda} \right)^{1/2} = v \quad (2.123)$$

Substituindo a igualdade anterior na expressão do potencial, vem:

$$\begin{aligned} V_{(\sigma^2 + \pi^2)^{1/2} = (-\mu^2/\lambda)^{1/2}} &= \frac{1}{2} \mu^2 \left( -\frac{\mu^2}{\lambda} \right) + \frac{1}{4} \lambda \left( -\frac{\mu^2}{\lambda} \right)^2 \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\mu^4}{\lambda} + \frac{1}{4} \lambda \frac{\mu^4}{\lambda^2} = \frac{-2\mu^4 + \mu^4}{4\lambda} = -\frac{1}{4} \frac{\mu^4}{\lambda} \end{aligned} \quad (2.124)$$

Para vermos o espectro tomemos os eixos no plano  $\sigma - \pi$ , de tal forma que:

$$\langle \sigma \rangle = \left( -\frac{\mu^2}{\lambda} \right)^{1/2} \quad (2.125)$$

<sup>10</sup>Grupo das matrizes ortogonais  $2 \times 2$ , com  $\det = 1$ .

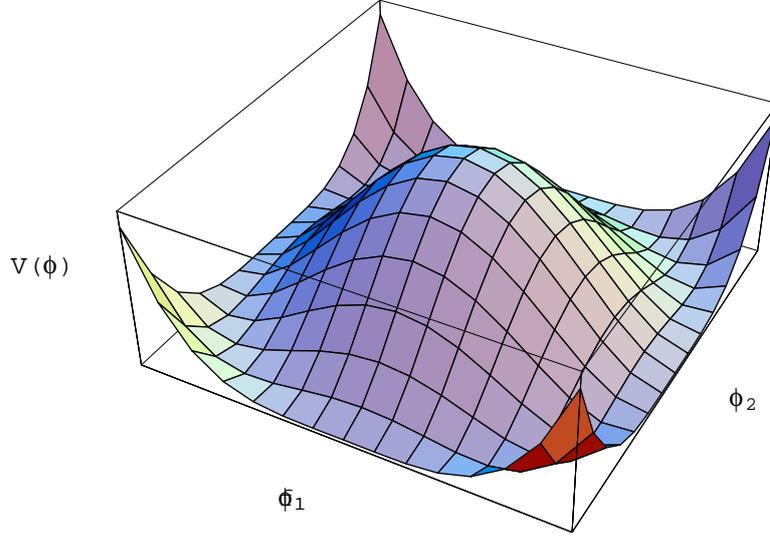


Figura 2.4: Mínimo de potencial para  $\mu^2 < 0$ .

$$\langle \pi \rangle = 0 \quad (2.126)$$

Se definirmos:

$$\sigma = s + \langle \sigma \rangle \Leftrightarrow s = \sigma - \langle \sigma \rangle \quad (2.127)$$

podemos escrever o Lagrangeano em termos de  $s$  e  $\pi$ .

Então, substituindo vem:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} [\partial_\mu s \partial^\mu s + \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi] - \left\{ \frac{1}{2} \mu^2 [(s + \langle \sigma \rangle)^2 + \pi^2] \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \lambda [(s + \langle \sigma \rangle)^2 + \pi^2]^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.128)$$

Após expandir os termos do Lagrangeano resulta:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\partial_\mu s \partial^\mu s + \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi] + \mu^2 s^2 - \lambda \langle \sigma \rangle s (s^2 + \pi^2) - \frac{1}{4} \lambda (s^2 + \pi^2)^2 \quad (2.129)$$

O espectro de massa das partículas descrito pelo Lagrangeano anterior é:

- ao campo  $s$  está associada uma partícula com massa:  $m_s^2 = -2\mu^2$ ;
- ao campo  $\pi$  está associada uma partícula sem massa, pois não há o termo quadrático  $\pi^2$ .

O aparecimento de partículas de massa zero, designadas por bosões de Nambu-Goldstone, é uma consequência do teorema de Goldstone, que pode ser enunciado da seguinte forma [citado por [7]]: *"Seja uma teoria invariante sob a acção dum grupo de transformação  $G$ , com  $n$  geradores. Se houver uma quebra espontânea de simetria, de tal forma que o vácuo, estado base, seja invariante somente sob a acção de  $G'$  com  $m$  geradores ( $G' \subset G$ ), aparecerão partículas de spin zero, sem massa, em número igual ao dos geradores de  $G$  que não deixam o vácuo invariante, isto é, há  $n - m$  bosões de Nambu-Goldstone"*. Este teorema não só nos diz que há partículas sem massa, mas também nos informa a cerca do seu número.

Na secção seguinte, veremos como o Mecanismo de Higgs permite usar estas partículas sem massa para dar massa aos campos de *gauge*.

## 2.5 Mecanismo de Higgs

As interacções fracas, como iremos ver, dado ao seu curto alcance, são descritas por bosões de *gauge* massivos. Contudo, a introdução explícita de um termo de massa quebra a simetria de *gauge*, resultando numa teoria não consistente. Então, para resolver este problema devemos ter uma teoria com invariância de *gauge* local espontaneamente quebrada. Como veremos, os bosões de Nambu-Goldstone não aparecem e é possível dar massa aos bosões vectoriais desta teoria [7]. A este fenómeno dá-se o nome de Mecanismo de Higgs, embora tenha sido descoberto por vários físicos [13].

**Exemplo 10** *Teoria, invariante de gauge, para um campo escalar carregado*

O Lagrangeano para esta teoria é dado por:

$$\mathcal{L} = [(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi^* (\partial^\mu - ieA^\mu)\phi] - \mu^2\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (2.130)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.131)$$

Numa transformação de *gauge* local, os campos  $\phi(x)$  e  $A_\mu(x)$  transformam-se da seguinte forma:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{-i\theta(x)}\phi(x) \quad (2.132)$$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x) \quad (2.133)$$

Vamos considerar a situação em que  $\mu^2 < 0$ , estudando, para este caso, o mínimo de potencial.

O valor de expectação do vácuo ocorre para:

$$\langle\phi\rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} \quad (2.134)$$

Como o potencial é dado por:

$$V(v^2) = +\frac{\mu^2}{2}v^2 + \frac{\lambda}{4}v^4 \quad (2.135)$$

então o mínimo de potencial ocorre para:

$$v^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} \quad (2.136)$$

Parametrizando  $\phi$ , exponencialmente, em termos de novos campos reais,  $\xi$  e  $\eta$ , vem [7]:

$$\begin{aligned} \phi &= e^{i\xi/v} \cdot \frac{v+\eta}{\sqrt{2}} \\ \phi &= \frac{v+\eta}{\sqrt{2}} + \frac{i\xi}{v} \frac{v}{\sqrt{2}} + \text{termos de ordem superior} \end{aligned} \quad (2.137)$$

Como o Lagrangeano é invariante para estas transformações devemos ter:

$$\mathcal{L}(\phi, A_\mu) = \mathcal{L}(\phi', A'_\mu) \quad (2.138)$$

Resolvendo cada membro do Lagrangeano, separadamente, e substituindo  $A_\mu$ ,  $\phi^*$  e  $\phi$ , vem:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial^\mu\eta\partial_\mu\eta + \frac{1}{2}\partial_\mu\xi\partial^\mu\xi \\ &+ \frac{1}{2}e^2v^2A_\mu A^\mu - evA_\mu\partial^\mu\xi + \mu^2\eta^2 \\ &+ \text{termos de ordem superior} \end{aligned} \quad (2.139)$$

O espectro de massa fica, então, descrito como:

- ao campo  $\eta$  está associada uma partícula com massa:  $m_\eta^2 = -2\mu^2$ ;
- relativamente ao campo  $\xi$ , não há termos em  $\xi^2$  (termos de massa),  $\xi$  é bóson de Goldstone;
- o termo  $\frac{1}{2}e^2v^2A_\mu A^\mu$  aparece como um fóton que tenha adquirido massa.

O campo não massivo real  $\xi$  pode ser absorvido recorrendo à invariância de *gauge* local do Lagrangeano, dado pela expressão 2.130, fazendo a seguinte transformação [6], designada por transformação de *gauge* unitária:

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{-i\xi(x)/v} \phi = \frac{v + \eta}{\sqrt{2}} \quad (2.140)$$

Sob uma transformação de *gauge*,  $A_\mu$  transforma-se como:

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{ev} \partial_\mu \xi \quad (2.141)$$

Após esta transformação, os termos do Lagrangeano, dado pela expressão 2.130, simplificam-se, dando origem a:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} + \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + \frac{1}{2}e^2v^2A'_\mu A'^\mu + 2ve^2A'_\mu A'^\mu \eta \\ & + e^2A'_\mu A'^\mu \eta^2 + \mu^2\eta^2 - \lambda v\eta^3 - \frac{1}{4}\lambda\eta^4 \end{aligned} \quad (2.142)$$

Nesta transformação de *gauge* não há, para os termos quadráticos, mistura entre os diferentes campos, e o espectro de massa pode ser lido facilmente, ou seja:

- ao campo escalar  $\eta$  está associada uma partícula de massa:  $m_\eta^2 = -2\mu^2$ ;
- ao campo vectorial  $A_\mu$  está associada uma partícula de massa:  $m_A^2 = e^2v^2$ ;
- o campo  $\xi$  desapareceu da teoria, pelo que não há nenhuma partícula associada ao campo  $\xi$ .

A contagem dos graus de liberdade antes e depois da transformação é útil para perceber o que aconteceu ao campo  $\xi$ . Assim, antes da transformação de *gauge*, temos:

- 1 campo escalar complexo  $\phi^*$  (2 graus de liberdade: equivalente a 2 campos escalares reais,  $\eta$  e  $\xi$ );
- 1 campo vectorial sem massa  $A_\mu$  (2 graus de liberdade).

o que totaliza 4 graus de liberdade. Depois da transformação, temos:

- 1 campo escalar real  $\eta$  (1 grau de liberdade);
- 1 campo vectorial com massa  $A_\mu$  (3 graus de liberdade).

conservando-se, deste modo, o número de graus de liberdade. Assim, a interpretação é que o grau de liberdade associado ao campo  $\xi$  corresponde à polarização longitudinal do campo vectorial  $A_\mu$ , agora massivo.

Em teorias de campo com invariância de *gauge* é sempre possível absorver os bosões de Nambu-Goldstone de forma a que os campos vectoriais adquiram massa. Esta é a essência do Mecanismo de Higgs que generaliza o teorema de Goldstone.



# Capítulo 3

## Da Teoria de Fermi ao Modelo Standard

A primeira tentativa para uma fenomenologia das interacções fracas data desde Fermi, em 1933 [14–16]. Nesta época, eram conhecidos o protão, o electrão e o neutrão. O anti-neutrino foi introduzido para que a conservação da energia e do momento linear fossem satisfeitas.

Conforme mencionamos anteriormente, o SM unifica as interacções electro-magnéticas, fortes e fracas (a interacção gravítica não está incluída). Apesar do grande sucesso do SM em explicar a fenomenologia da Física das Partículas elementares, é necessário estender o SM devido a problemas conceptuais do mesmo e às recentes indicações experimentais das oscilações dos neutrinos.

Neste capítulo abordaremos as interacções electrofracas dos leptões e dos hadrões, pois como veremos no capítulo seguinte, A Física dos Neutrinos, as interacções fortes não têm lugar. Aplicaremos as ideias das teorias de *gauge* com quebra espontânea de simetria e do Mecanismo de Higgs às interacções fracas e electromagnéticas.

### 3.1 Teoria de Fermi

Fermi fez uma analogia entre as interacções verificadas no decaimento  $\beta$  e as interacções electromagnéticas. A amplitude invariante para a dispersão electrão-protão, considerando o protão como uma partícula pontual de Dirac [6] (ver exemplo 2, na secção 2.1.2), é dada por:

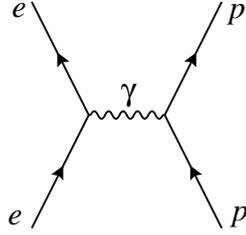
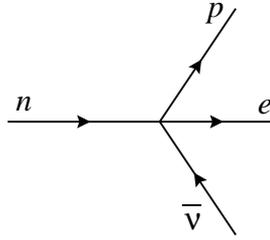


Figura 3.1: Dispersão electrão-protão.

Figura 3.2: Decaimento  $\beta$ .

$$M = e\bar{\psi}_p\gamma^\mu\psi_p\left(-\frac{1}{q^2}\right)(-e\bar{\psi}_e\gamma_\mu\psi_e) \quad (3.1)$$

sendo representada, esquematicamente, pela figura 3.1.

Comparando esta amplitude para o caso do decaimento  $\beta$ , Fermi [14, 15] propôs que a amplitude invariante para as interacções fracas seria dada por:

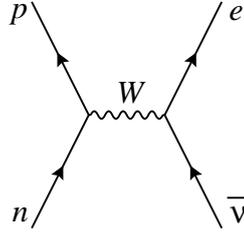
$$M = G(\bar{\psi}_p\gamma^\mu\psi_n)(\bar{\psi}_e\gamma_\mu\psi_{\bar{\nu}_e}) \quad (3.2)$$

sendo representada, esquematicamente, pela figura 3.2.

O valor numérico de  $G$  pode ser determinado experimentalmente em decaimentos  $\beta$  nucleares. Tem dimensões de  $[M]^{-2}$  e tem o valor aproximado de:

$$G \simeq 1.16 \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2} \quad (\hbar = c = 1) \quad (3.3)$$

Actualmente, sabe-se que o decaimento  $\beta$ , representado esquematicamente na figura 3.3, não é uma interacção pontual, como Fermi supôs.

Figura 3.3: Decaimento  $\beta$ .

Assim, surgiu a ideia de que deveria existir o análogo do fóton para as interações fracas, o bóson vectorial intermédio (IVB) -  $W_\mu^\pm$ . O campo  $W_\mu^\pm$  deveria ser vectorial e carregado, pois as correntes consideradas até então eram carregadas. As interações fracas seriam mediadas por  $W_\mu^\pm$ , assim como as interações electromagnéticas são mediadas pelo fóton,  $\gamma$ . Este foi o primeiro passo para uma eventual unificação entre as forças fracas e electromagnéticas [7].

Fermi sugeriu a forma de uma amplitude,  $M$ , fraca. É uma escolha muito específica entre a possibilidade de formas do Lagrangeano que admitem invariância de Lorentz. Note-se que, no tempo de Fermi, não se conhecia a violação da paridade, e por isso ele não introduziu os termos  $\gamma_\mu \gamma_5$ .

Em 1958, Feynman e Gell-Mann [17], generalizaram o trabalho de Fermi e fizeram a síntese de todos os conhecimentos até então, propondo que as interações fracas deveriam ser descritas pelo seguinte Lagrangeano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\sqrt{2}} G_F J_\mu^\dagger(x) J^\mu(x) \quad (3.4)$$

onde

$$J_\mu(x) = l_\mu(x) + h_\mu(x) \quad (3.5)$$

sendo  $l_\mu$  e  $h_\mu$  as partes leptónica e hadrónica dessa corrente, respectivamente. Além disso, as correntes carregadas que medeiam a interacção fraca são  $V - A$ , ou seja, nelas tomam parte somente a componente de helicidade esquerda dos leptões carregados e dos quarks. Então, temos que tratar de forma diferente as duas helicidades [7].

Em seguida, iremos estudar, separadamente, as interações fracas dos leptões e dos hádrões.

### 3.1.1 As Interacções Fracas dos Leptões

O electrão, o muão, o tau e os respectivos neutrinos constituem os leptões. Estas três famílias de leptões têm propriedades idênticas, diferindo apenas na sua massa, conforme se ilustra na tabela 3.1. Os resultados experimentais mostraram que a corrente leptónica deveria ser do tipo  $V - A$ , sendo dada por:

$$l_\mu(x) = \bar{e}_L(x) \gamma_\mu \nu_{eL}(x) + \bar{\mu}_L(x) \gamma_\mu \nu_{\mu L}(x) + \bar{\tau}_L(x) \gamma_\mu \nu_{\tau L}(x) \quad (3.6)$$

Este resultado é conhecido por universalidade da corrente fraca leptónica. Usou-se a decomposição dos spinores de Dirac em spinores de direita e de esquerda. Um campo de Dirac decompõe-se nas componentes:

$$\psi_L = \gamma_L \psi, \quad \psi_R = \gamma_R \psi \quad (3.7)$$

onde

$$\gamma_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), \quad \gamma_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \quad (3.8)$$

e obedecem a:

$$\gamma_L \gamma_L = \gamma_L, \quad \gamma_R \gamma_R = \gamma_R \quad e \quad \gamma_L \gamma_R = 0 \quad (3.9)$$

Notemos ainda que algumas combinações de spinores de esquerda e de direita estão proibidas, visto que:

$$\bar{\psi}_L \gamma_\mu \psi_R = \bar{\psi}_R \gamma_\mu \psi_L = \bar{\psi}_L \psi_L = \bar{\psi}_R \psi_R = 0. \quad (3.10)$$

Definindo um isospin esquerdo para os leptões, agrupando o leptão carregado e o seu neutrino num duplete, vem:

$$\ell_{1L} = \begin{bmatrix} \nu_e \\ e \end{bmatrix}_L; \quad \ell_{2L} = \begin{bmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{bmatrix}_L \quad e \quad \ell_{3L} = \begin{bmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{bmatrix}_L \quad (3.11)$$

Então, a corrente leptónica pode reescrever-se na forma [6]:

$$l^\mu = \bar{\ell}_{1L} \gamma^\mu \tau^- \ell_{1L} + \bar{\ell}_{2L} \gamma^\mu \tau^- \ell_{2L} + \bar{\ell}_{3L} \gamma^\mu \tau^- \ell_{3L} \quad (3.12)$$

onde

Nome	Símbolo	Massa	Carga (Q)
electrão	$e$	0.511MeV	-1
neutrino do electrão	$\nu_e$	< 2 eV	0
muão	$\mu$	105.658 MeV	-1
neutrino do muão	$\nu_\mu$	< 0.19 MeV	0
tau	$\tau$	1776.99 MeV	-1
neutrino do tau	$\nu_\tau$	< 18.2 MeV	0

Tabela 3.1: Características dos leptões [18].

$$\tau^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(\tau_1 - i\tau_2); \quad \tau_i - \text{Matrizes de Pauli} \quad (3.13)$$

Contudo, a parte leptónica das interacções fracas não é invariante para  $SU(2)$ , pois falta o termo  $l_\mu^{3\dagger}l^{3\mu}$ . Notar que este termo viola a paridade. Todos os resultados experimentais conhecidos até à década de sessenta indicavam que a corrente fraca era carregada, ou seja,  $\Delta Q \neq 0$ . Todavia, um termo como  $l_\mu^{3\dagger}l^{3\mu}$  implicava a existência de correntes fracas neutras, o que só foi descoberto mais tarde [7].

### 3.1.2 As Interacções Fracas dos Hadrões

Os hadrões são partículas constituídas por quarks. A variedade dos hadrões depende do tipo de quarks que os formam. Assim, os hadrões, tal como os leptões, são fermiões, isto é, obedecem ao princípio de exclusão de Pauli e têm spin não inteiro. Hoje, sabemos que existem seis sabores diferentes para os quarks, cujas características são apresentadas na tabela 3.2, tendo, cada um, uma carga eléctrica fraccionária. Embora, os quarks individuais tenham cargas eléctricas fraccionárias, quando se combinam para formar hadrões, estes possuem carga eléctrica inteira. Para cada sabor, os quarks aparecem em três cores distintas, mas os hadrões são singletos de cor. As correntes electromagnéticas e as correntes fracas são singletos de cor e actuam apenas no espaço dos sabores [7].

Nome	Símbolo	Massa	Carga (Q)
up	$u$	$1.5 < m_u < 3 \text{ MeV}$	$2/3$
down	$d$	$3 < m_d < 7 \text{ MeV}$	$-1/3$
charm	$c$	$1.25 \pm 0.09 \text{ GeV}$	$2/3$
strange	$s$	$95 \pm 25 \text{ MeV}$	$-1/3$
bottom	$b$	$4.20 \pm 0.07 \text{ GeV}$	$-1/3$
top	$t$	$174.2 \pm 3.3 \text{ GeV}$	$2/3$

Tabela 3.2: Características dos quarks [18, 19].

Nos hádrões, além das interações fracas, também se verificam as interações fortes e a propriedade de confinamento. Isto é, os quarks não são partículas livres, mas aparecem ligados, pelo que o estudo das interações fracas dos hádrões é mais complicado do que no caso dos léptões [7], mas esse estudo está fora do âmbito deste trabalho.

Em 1963, Cabibbo [20] postulou que a força das interações fracas hadrónicas é dividida entre transições de estranheza com  $\Delta S = 0$  e  $\Delta S = 1$ . Em termos do conteúdo dos quarks, as amplitudes para as transições permitidas situam-se na razão:

$$e \rightarrow \nu : g \quad (3.14)$$

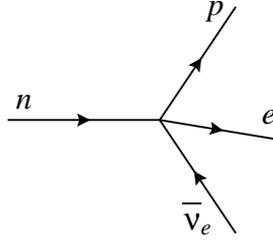
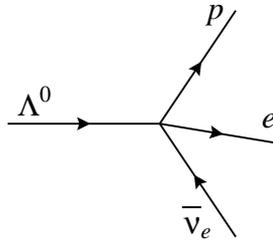
$$d \rightarrow u : g \cos \theta_C \quad (3.15)$$

$$s \rightarrow u : g \sin \theta_C \quad (3.16)$$

onde  $\theta_C$  é o ângulo de Cabibbo, sendo:

$$\sin \theta_C \simeq 0.23 \quad (3.17)$$

A ideia de universalidade começou com a observação de que a força de acoplamento, para processos puramente leptónicos do decaimento do múon, era a mesma do decaimento  $\beta$  do neutrão. No entanto, a comparação de pormenores

Figura 3.4: Decaimento  $\beta$  do neutrão.Figura 3.5: Decaimento para  $\Lambda^0$ .

experimentais mostra que: a conservação da estranheza hadrônica nos decaimentos fracos é muito mais fraca que as partes leptônicas correspondentes. Contudo, a mudança de estranheza hadrônica nas interações fracas é ainda mais fraca [16].

Relativamente às interações fracas, há dois tipos principais de correntes hadrônicas:

i) Decaimento  $\beta$  do neutrão:  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ , esquematizado na figura 3.4. Neste decaimento não há variação do número quântico de estranheza, ou seja,  $\Delta S = 0$ , para todas as partículas envolvidas;

ii) Decaimento para  $\Lambda^0$ :  $\Lambda \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ , esquematizado na figura 3.5. Neste decaimento há variação do número quântico de estranheza, ou seja,  $\Delta S = \pm 1$ . A parte da corrente leptônica é igual, mas a parte hadrônica tem  $\Delta S = 1$  ( $\Lambda^0 = uds$ ). A parte hadrônica também é carregada, tal como para o decaimento do neutrão.

A corrente hadrônica é dada por [7]:

$$h_\mu = g_V h_\mu^{(0)} + g_S h_\mu^{(1)} \quad (3.18)$$

Corrente	Intensidade
$l_\mu$	1
$h_\mu^{(0)}$	$\cos \theta_C$
$h_\mu^{(1)}$	$\sin \theta_C$

Tabela 3.3: Corrente leptónica e corrente hadrónica em função da intensidade.

ou seja, a corrente hadrónica tem duas partes: uma referente a  $\Delta S = 0$  e outra para  $\Delta S = 1$ , onde:

$$\Delta S = 0 \rightarrow h_\mu^{(0)} \quad (3.19)$$

$$\Delta S = 1 \rightarrow h_\mu^{(1)} \quad (3.20)$$

que é a forma  $V - A$ , verificada experimentalmente, ou seja:

$$h_\mu^{(0)} = V_\mu^{(0)} - A_\mu^{(0)} \quad (3.21)$$

$$h_\mu^{(1)} = V_\mu^{(1)} - A_\mu^{(1)} \quad (3.22)$$

Em 1963, Cabibbo [22] propôs que:

$$g_V^2 + g_S^2 = 1 \quad (3.23)$$

tendo esta hipótese sido verificada experimentalmente.

Esta proposta de Cabibbo foi feita tendo em conta as simetrias do grupo  $SU(3)$ <sup>1</sup> para as interacções fortes dos quarks  $u$ ,  $d$  e  $s$ . Também é usual escrever:

$$g_V = \cos \theta_C \quad \text{e} \quad g_S = \sin \theta_C \quad (3.24)$$

Daqui, conclui-se que há uma diferença de intensidade entre a corrente leptónica e as duas partes da corrente hadrónica, conforme se ilustra na tabela 3.3. A universalidade é menos perfeita no sector hadrónico. A nossa referência foi a corrente leptónica.

Ao nível dos quarks, a corrente hadrónica é dada por:

<sup>1</sup>O grupo  $SU(3)$  consiste no conjunto de matrizes unitárias  $3 \times 3$  com determinante 1.

$$h^\mu = \cos \theta_C \bar{u} \gamma^\mu \left( \frac{1 - \gamma_5}{2} \right) d + \sin \theta_C \bar{u} \gamma^\mu \left( \frac{1 - \gamma_5}{2} \right) s \quad (3.25)$$

Por exemplo, o neutrão é formado por:  $n = (udd)$ , onde:

$$Q_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 \quad (3.26)$$

e o próton é formado por:  $p = (uud)$ , onde:

$$Q_p = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 1 \quad (3.27)$$

Então, a interacção que transforma um neutrão num próton é aquela que leva um quark  $d$  a transformar-se num quark  $u$ , ou seja,  $\Delta Q = 1$ .

Os quarks  $u$  e  $d$  diferem de uma unidade de carga, logo as correntes  $h_\mu^{(0)}$  e  $h_\mu^{(1)}$  são carregadas, tal como as correntes leptónicas, sendo também correntes esquerdas.

Agora, estamos interessados em que as correntes hadrónicas apresentem simetria em  $SU_L(2)$ . Então, reescrevendo a expressão da corrente hadrónica, vem que [21]:

$$h^\mu = \bar{u} \gamma^\mu \left( \frac{1 - \gamma_5}{2} \right) (d \cos \theta_C + s \sin \theta_C) \quad (3.28)$$

Introduzindo, agora, um spinor de quark a duas componentes da forma:

$$Q_{1L} = \begin{bmatrix} u \\ d \cos \theta_C + s \sin \theta_C \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} u \\ d_C \end{bmatrix}_L \quad (3.29)$$

onde,  $d_C$  é a rotação de Cabibbo para o quark  $d$ , sendo dada por:

$$d_C = d \cos \theta_C + s \sin \theta_C \quad (3.30)$$

O índice em  $Q_1$  é  $L$ , pois as componentes esquerdas são as activas nas interacções fracas.

Assim, a corrente pode ser escrita como:

$$h^\mu = \bar{Q}_{1L} \gamma^\mu \tau^+ Q_{1L} \quad (3.31)$$

ou seja:

$$h^\mu = \begin{bmatrix} \bar{u} & \bar{d} \cos \theta_C + \bar{s} \sin \theta_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ d \cos \theta_C + s \sin \theta_C \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

sendo

$$\tau^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\tau_1 + i\tau_2}{2} \quad (3.33)$$

Mas, também nas correntes hadrônicas, tal como nas correntes leptônicas, falta o termo  $h_\mu^{3\dagger} h^{3\mu}$ , a componente neutra, de modo a que o Lagrangeano de Feynmann e Gell-Mann seja invariante para  $SU_L(2)$ .

### 3.1.3 Charm e o Mecanismo de GIM

Como vimos, anteriormente, a teoria de Cabibbo permite escrever as correntes hadrônicas na forma de matriz.

Quando a corrente aumenta com a carga, a corrente hadrônica carregada é dada por [7]:

$$h_\mu^+ = \bar{Q}_{1L} \gamma_\mu \tau^+ Q_{1L}, \quad \Delta Q = Q(u) - Q(d) = +1 \quad (3.34)$$

Então a corrente hadrônica que diminui com a carga é dada por:

$$h_\mu^- = \bar{Q}_{1L} \gamma_\mu \tau^- Q_{1L} \quad (3.35)$$

O Lagrangeano de Feynman e Gell-Mann é escrito como:

$$\mathcal{L} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\mu^\dagger J^\mu, \quad \text{com} \quad J_\mu = l_\mu + h_\mu \quad (3.36)$$

Então o Lagrangeano para a parte hadrônica é:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_h &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} h_\mu^\dagger h^\mu \\ &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} h_\mu^- h^{+\mu} \\ &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} (h_\mu^1 h^{1\mu} + h_\mu^2 h^{2\mu}) \end{aligned} \quad (3.37)$$

onde

$$h_\mu^i = \bar{Q}_{1L} \gamma_\mu \tau^i Q_{1L}, \quad i = 1, 2 \quad (3.38)$$

Notar que apenas estamos a considerar os quarks  $u$ ,  $d$  e  $s$ .

Como já foi referido, o Lagrangeano para ser invariante em  $SU_L(2)$ , falta-lhe o termo  $h_\mu^{3\dagger} h^{3\mu}$ .

A corrente  $h_\mu^3$  é dada por:

$$\begin{aligned} h_\mu^3 &= \bar{Q}_{1L} \gamma_\mu \tau_3 Q_{1L} \\ &= \bar{u}_L \gamma_\mu u_L - \bar{d}_{CL} \gamma_\mu d_{CL} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Notar que  $\tau_3$  é dado pelo comutador:

$$[\tau^+, \tau^-] = \tau_3 \quad (3.40)$$

Esta corrente é neutra, tendo  $\Delta Q = 0$ .

Experimentalmente, verificou-se que existem correntes neutras na parte hadrónica das interacções fracas, mas só com  $\Delta S = 0$ , isto é, sem mudança de estranheza [7]. Contudo, o segundo termo da corrente  $h_\mu^3$ ,  $\bar{d}_{CL} \gamma_\mu d_{CL}$ , contém partes com  $\Delta S \neq 0$ , pois:

$$\begin{aligned} \bar{d}_{CL} \gamma_\mu d_{CL} &= \cos^2 \theta_C \bar{d}_L \gamma_\mu d_L + \sin^2 \theta_C \bar{s}_L \gamma_\mu s_L \\ &\quad + \sin \theta_C \cos \theta_C (\bar{d}_L \gamma_\mu s_L + \bar{s}_L \gamma_\mu d_L) \end{aligned} \quad (3.41)$$

e os dois primeiros termos têm  $\Delta S = 0$ , mas o último termo tem  $\Delta S \neq 0$ , uma vez que tem  $\Delta S = 1$  [7].

Este problema, da corrente neutra, foi resolvido em 1970, por Glashow, Iliopoulos e Maiani, através do Mecanismo de GIM<sup>2</sup> [22], conseguindo que a simetria fosse  $SU_L(2)$ .

Conhecendo o duplete  $Q_{1L}$ , GIM [22] postularam a existência de um segundo duplete, envolvendo um novo quark, *charm*, e a combinação ortogonal dos quarks  $d$  e  $s$ , ou seja:

$$Q_2 = \begin{bmatrix} c \\ s_C \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

---

<sup>2</sup>Como é habitual na literatura, passaremos a usar a sigla GIM como sinónimo dos nomes dos investigadores associados ao Mecanismo de GIM.

com  $Q_c = +\frac{2}{3}$  e  $Q_{s_C} = -\frac{1}{3}$ .

A componente esquerda deste duplete é:

$$Q_{2L} = \begin{bmatrix} c \\ s_C \end{bmatrix}_L \quad (3.43)$$

onde

$$s_C = -d \sin \theta_C + s \cos \theta_C \quad (3.44)$$

Então, de acordo com GIM, a corrente neutra total é dada por:

$$\begin{aligned} h_\mu^3 &= \bar{Q}_{1L} \gamma_\mu \tau_3 Q_{1L} + \bar{Q}_{2L} \gamma_\mu \tau_3 Q_{2L} \\ &= \bar{d}_L \gamma_\mu d_L + \bar{s}_L \gamma_\mu s_L \end{aligned} \quad (3.45)$$

Agora, esta corrente já apresenta  $\Delta S = 0$ .

Quando GIM propuseram o quark  $c$ , este ainda não tinha sido observado experimentalmente. GIM atribuíram a não observação de  $c$  ao facto de este ter uma massa relativamente grande [21]. Para estimarem a massa de  $c$ , GIM basearam-se no decaimento:

$$K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^- \quad (3.46)$$

Contudo, este decaimento apresenta corrente neutra e  $\Delta S \neq 0$ , o que não estaria de acordo com o Mecanismo de GIM. Mas, experimentalmente, verifica-se que existe, embora seja muito raro. Então, o Mecanismo de GIM foi violado? Não, pois o Mecanismo de GIM proíbe interacções de corrente neutra com  $\Delta S \neq 0$ , somente ao nível árvore. Em ordem superior, tais processos podem existir [7].

Para o decaimento dado por 3.46 temos dois diagramas [21]:

i) Decaimento  $K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ , com o quark  $u$ , representado esquematicamente na figura 3.6;

ii) Decaimento  $K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ , com o quark  $c$ , representado esquematicamente na figura 3.7.

Comparando os acoplamentos nos vértices, o diagrama com o quark  $u$ , na figura 3.6, tem uma amplitude:

$$M_u \propto \sin \theta_C \cos \theta_C \quad (3.47)$$

e o diagrama com o quark  $c$ , na figura 3.7, tem uma amplitude:

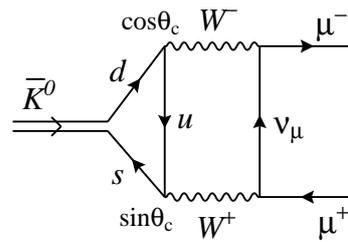


Figura 3.6: Decaimento  $K_L^0 \rightarrow \mu^+\mu^-$ , com o quark  $u$ .

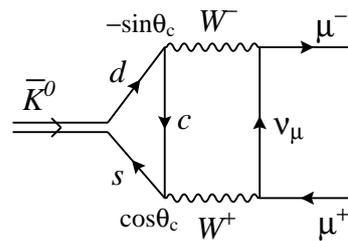


Figura 3.7: Decaimento  $K_L^0 \rightarrow \mu^+\mu^-$ , com o quark  $c$ .

$$M_c \propto -\sin \theta_C \cos \theta_C \quad (3.48)$$

No limite, quando  $m_u = m_c$  os dois diagramas cancelariam, dando uma contribuição nula. Se  $m_c \gg m_u$ , o diagrama da figura 3.7 será muito pequeno e o diagrama da figura 3.6 dá um valor demasiado grande, comparativamente ao observado. Então, GIM estimaram um valor para  $m_c$ , de modo a satisfazer os valores experimentais dos diagramas, obtendo que:

$$1 \text{ GeV} < m_c < 3 \text{ GeV} \quad (3.49)$$

O valor, actualmente aceite, é  $m_c = 1.25 \pm 0.09 \text{ GeV}$  [18] (PDG, 2006) Assim, com o Mecanismo de GIM foi possível promover a simetria da parte hadrónica do Lagrangeano fraco ao grupo  $SU_L(2)$ .

## 3.2 O Modelo Standard

Nas últimas três décadas, uma unificação parcial de três das quatro forças fundamentais da natureza, a electromagnética, a fraca e a forte, foi conseguida. Isto levou ao surgimento do SM das partículas elementares (1967-74), inicialmente proposto por Glashow [23], Weinberg [24] e Salam [25], tendo, também, contribuições importantes de outros físicos.

A estrutura do SM é uma generalização da Electrodinâmica Quântica (QED), no sentido em que é uma teoria de campo renormalizável<sup>3</sup> e baseia-se na simetria local, que estende a invariância de *gauge* da electrodinâmica para um grande conjunto de correntes e cargas conservadas. O grupo de *gauge* do SM obedece à álgebra do grupo  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ .

Os mediadores das forças de spin 1 são: o fóton  $\gamma$  - forças electromagnéticas; os bosões  $W_\mu^\pm$  e  $Z_\mu^0$  - força fraca; e os gluões - força forte. Os bosões  $W_\mu^\pm$  e  $Z_\mu^0$  têm uma massa elevada ( $m_{W_\mu^\pm} = 80.403 \text{ GeV}$  [18] e  $m_{Z_\mu^0} = 91.1876 \text{ GeV}$  [18]), indicando que a simetria foi quebrada. No SM, a quebra espontânea de simetria é induzida pela Mecanismo de Higgs que prevê a existência de uma (ou mais) partícula de spin 0, o bosão de Higgs, que ainda não foi observado.

Para construir o SM devemos ter em conta alguns aspectos:

---

<sup>3</sup>Mostra-se que uma teoria com campos escalares é renormalizável se a potência máxima em campos for quatro.

- o fenómeno das interacções fracas deve ser mediado por uma partícula de spin 1 (campo) com massa (devido ao curto alcance das interacções fracas);
- pode mostrar-se que as únicas teorias renormalizáveis e unitárias com partículas de spin 1 com massa, são as teorias de *gauge* com quebra espontânea de simetria;
- a estrutura das correntes fracas sugere, como vimos, a ideia de um grupo de isospin fraco  $SU_L(2)$  para as componentes esquerdas que participam na corrente carregada. Então, as componentes esquerdas devem ser agrupadas num duplete. As componentes direitas dos campos carregados devem ser singletos de  $SU_L(2)$ , pois não participam nas interacções fracas das correntes carregadas;
- o grupo de simetria não pode ser apenas  $SU_L(2)$ , pois a estrutura das correntes de  $SU_L(2)$  é  $V - A$ , pelo que a componente três (neutra) teria também essa estrutura e não poderia ser identificada com a corrente electromagnética que tem acoplamento vectorial ao fóton, pelo que o bosão  $A_\mu^3$  não pode ser o fóton;
- o grupo de simetria da forma mínima é alargado com o produto por um grupo Abelian, obtendo-se  $SU(2) \times U(1)$ , havendo, neste caso, dois bosões  $A_\mu^3$  e  $B_\mu$  que se misturam para dar um campo com massa:  $Z_\mu^0$ , e outro sem massa:  $A_\mu$ , que se identifica com o fóton.

No SM, os hádrões e os leptões são campos fermiónicos, com spin  $\frac{1}{2}$ , e constituem os fermiões, que podem ser agrupados em três gerações ou famílias, com iguais números quânticos, mas com diferentes massas:

$$\left. \begin{array}{ll}
 Q_{1L} = \begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix}_L, & \ell_{1L} = \begin{bmatrix} \nu_e \\ e \end{bmatrix}_L \\
 Q_{2L} = \begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}_L, & \ell_{2L} = \begin{bmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{bmatrix}_L \\
 Q_{3L} = \begin{bmatrix} t \\ b \end{bmatrix}_L, & \ell_{3L} = \begin{bmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{bmatrix}_L
 \end{array} \right\} \text{dupletos} \quad (3.50)$$

e

$$\left. \begin{array}{l} u_R \\ d_R \\ c_R \\ s_R \\ t_R \\ b_R \end{array} \right\} \begin{array}{l} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} u_R \\ d_R \\ c_R \\ s_R \\ t_R \\ b_R \end{array}} \right\} \text{singletos} \quad (3.51)$$

Actualmente, ainda não há uma explicação para a repetição destas três famílias. Os números quânticos dos dupletos e singletos representados são:

$$Q_{iL} \rightarrow \left(3, 2, \frac{1}{3}\right) \quad (3.52)$$

$$\ell_{iL} \rightarrow (1, 2, -1) \quad (3.53)$$

$$u_{iR} \rightarrow \left(3, 1, +\frac{4}{3}\right) \quad (3.54)$$

$$d_{iR} \rightarrow \left(3, 1, -\frac{2}{3}\right) \quad (3.55)$$

$$e_{iR} \rightarrow (1, 1, -2) \quad (3.56)$$

onde  $i = (1, 2 \text{ e } 3)$  é o número de famílias.

Os números quânticos estão parametrizados em termos ordenados, onde a primeira componente refere-se à dimensão da representação em  $SU(3)$ , a segunda a  $SU(2)$  e a última é simplesmente a hipercarga ( $U(1)$ ) do multipletto.

A hipercarga fraca é definida por:

$$Y = 2(Q - T_3) \quad (3.57)$$

sendo o isospin fraco dado por:

$$T_3 = \frac{T_3}{2} \quad (3.58)$$

Uma vez conhecidos os multipletos da teoria, o modelo de Glashow - Weinberg - Salam é então construído com uma teoria de *gauge* invariante para  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ , (não trataremos aqui a contribuição da QCD, uma vez que não faz parte do âmbito deste trabalho) cujo Lagrangeano é dado por [22–24]:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_\Phi + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} \quad (3.59)$$

sendo  $\mathcal{L}_0$  o Lagrangeano inicial das interações, antes da quebra de simetria e do Mecanismo de Higgs e sem ter em conta as interações de Yukawa, dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = & \sum_{i=1}^3 i \left( \bar{\ell}_{iL} \gamma^\mu D_\mu \ell_{iL} + \bar{Q}_{iL} \gamma^\mu D_\mu Q_{iL} + \bar{e}_{iR} \gamma^\mu D_\mu e_{iR} \right. \\ & \left. + \bar{u}_{iR} \gamma^\mu D_\mu u_{iR} + \bar{d}_{iR} \gamma^\mu D_\mu d_{iR} \right) \\ & - \frac{1}{4} F_{a\mu\nu} F^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} G_{b\mu\nu} G^{b\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.60)$$

onde  $a = 1, 2$  e  $3$ ,  $b = 1, \dots, 8$  e as derivadas covariantes, para cada multipletto, são dadas por:

$$D_\mu \ell_{iL} = \left( \partial_\mu + ig W_\mu^a \frac{\tau_a}{2} + i(-1) \frac{g'}{2} B_\mu \right) \ell_{iL} \quad (3.61)$$

$$D_\mu Q_{iL} = \left( \partial_\mu + ig_s G_\mu^b \frac{\lambda^b}{2} + ig W_\mu^a \frac{\tau_a}{2} + i \left( \frac{1}{3} \right) \frac{g'}{2} B_\mu \right) Q_{iL} \quad (3.62)$$

$$D_\mu e_{iR} = \left( \partial_\mu + i(-2) \frac{g'}{2} B_\mu \right) e_{iR} \quad (3.63)$$

$$D_\mu u_{iR} = \left( \partial_\mu + ig_s G_\mu^b \frac{\lambda^b}{2} + i \left( \frac{4}{3} \right) \frac{g'}{2} B_\mu \right) u_{iR} \quad (3.64)$$

e

$$D_\mu d_{iR} = \left( \partial_\mu + ig_s G_\mu^b \frac{\lambda^b}{2} + i \left( -\frac{2}{3} \right) \frac{g'}{2} B_\mu \right) d_{iR} \quad (3.65)$$

Notemos ainda que os tensores dos campos  $F_{\mu\nu}$ ,  $G_{\mu\nu}$  e  $B_{\mu\nu}$  são dados pelas expressões:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g \varepsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c \quad (3.66)$$

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - g \varepsilon^{abc} G_\mu^b G_\nu^c \quad (3.67)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (3.68)$$

Introduziu-se o Lagrangeano  $\mathcal{L}_\Phi$ , dado por:

$$\mathcal{L}_\Phi = (D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi - V(\Phi^\dagger \Phi) \quad (3.69)$$

de modo a quebrar espontaneamente a simetria de *gauge* e, pelo Mecanismo de Higgs, dar massa aos bosões de *gauge* (aqueles que pelo Teorema de Goldstone correspondem a geradores quebrados) e aos fermiões. Os números quânticos de  $\Phi$  são:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{bmatrix} \rightarrow (1, 2 - 1) \quad (3.70)$$

onde, o potencial, mais geral, do duplete escalar  $\Phi$  se escreve como:

$$V(\Phi^\dagger\Phi) = \mu^2\Phi^\dagger\Phi + \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2 \quad (3.71)$$

e a derivada covariante para  $\Phi$  é dada por:

$$D_\mu\Phi = \left( \partial_\mu + igW_\mu^a \frac{\tau^a}{2} + i(-1) \frac{g'}{2} B_\mu \right) \Phi \quad (3.72)$$

Para completar as interacções do duplete escalar com os fermiões, introduz-se ainda o Lagrangeano de Yukawa, sendo dado por:

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -(h_e)_{ij} \bar{l}_{iL} \Phi e_{jR} - (h_u)_{ij} \bar{Q}_{iL} \tilde{\Phi} u_{jR} - (h_d)_{ij} \bar{Q}_{iL} \Phi d_{jR} + \text{h.c.} \quad (3.73)$$

onde o duplete  $\tilde{\Phi}$  é definido como:

$$\tilde{\Phi} = i\tau_2\Phi^* = \begin{bmatrix} \phi^0 \\ -\phi^- \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \phi^- = (\phi^+)^* \quad (3.74)$$

Do potencial do duplete escalar  $\Phi$  determinamos, a partir do vácuo da teoria, o espectro de massa da teoria de *gauge*. Devido aos requisitos de invariância de Lorentz, só o campo escalar pode ter um valor constante diferente de zero e minimizar a energia. Isto ocorre para  $\mu^2 < 0$ . Será escolhido o eixo de isospin fraco, tal que:

$$\langle \Phi \rangle_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ v \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}. \quad (3.75)$$

Escolhemos ainda uma *gauge* unitária, onde:

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ v + H \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

A *gauge* unitária tem a vantagem de escrever o Lagrangeano da teoria em termos de campos que correspondem a graus físicos. Substituindo  $\Phi(x)$  nos vários termos do Lagrangeano dado pela expressão 3.69, vem:

■ termo  $(D_\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi)$ :

$$\begin{aligned}
(D_\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi) &= \frac{1}{2}\partial_\mu H\partial^\mu H + \frac{1}{8}(v+H)^2 g^2 (W_\mu^1 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu}) \\
&\quad + \frac{1}{8}(v+H)^2 (gW_\mu^3 - g'B_\mu) (gW^{3\mu} - g'B^\mu) \\
&= \frac{1}{2}\partial_\mu H\partial^\mu H + \frac{1}{8}(gv)^2 (W_\mu^1 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu}) \\
&\quad + \frac{1}{8}v^2 (gW_\mu^3 - g'B_\mu) (gW^{3\mu} - g'B^\mu) \\
&\quad + \text{termos de ordem superior}
\end{aligned} \tag{3.77}$$

Então, deste termo resultam as massas para os bosões de *gauge* da teoria. A massa dos dois campos vectoriais,  $W_\mu^\pm$ , obtém-se a partir da relação:

$$M_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} = \frac{1}{8}(gv)^2 (W_\mu^1 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu}) \tag{3.78}$$

Assim,

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2) \tag{3.79}$$

pelo que

$$M_{W_\mu^\pm}^2 = \frac{g^2 v^2}{4} \tag{3.80}$$

Os graus de liberdades destes bosões carregados são agora 3 + 3, como esperado do Mecanismo de Higgs, isto é, ganharam componente longitudinal.

Resultam ainda, termos cruzados de  $W_\mu^3$  e  $B_\mu$ . Assim, para determinar o espectro de massa dos bosões de *gauge*  $Z_\mu^0$  e  $A_\mu$  temos que diagonalizar a matriz de massa:

$$M_{A_\mu, Z_\mu}^2 = \frac{1}{2}v^2 \begin{bmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{bmatrix} \tag{3.81}$$

onde os valores próprios de  $M^2$  são: 0 e  $\frac{1}{4}v^2(g^2 + g'^2)$ . Os correspondentes vectores próprios são:

$$A_\mu = \sin \theta_W W_\mu^3 + \cos \theta_W B_\mu \quad (3.82)$$

$$Z_\mu^0 = \cos \theta_W W_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu \quad (3.83)$$

Assim, o campo vectorial,  $Z_\mu^0$ , tem massa:

$$M_{Z_\mu^0}^2 = \frac{1}{4} v^2 (g^2 + g'^2) \quad (3.84)$$

o que implica que possui três graus de liberdade, indicando que adquiriu, pelo Mecanismo de Higgs, um grau de liberdade longitudinal. Ao campo vectorial,  $A_\mu$ , corresponde uma partícula sem massa, pelo que tem dois graus de liberdade. O ângulo  $\theta_W$ , ângulo fraco, é determinado pela condição de que  $A_\mu$  seja o vector próprio de massa nula:

$$\frac{1}{2} v^2 \begin{bmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \theta_W \\ \cos \theta_W \end{bmatrix} = 0 \quad (3.85)$$

Então,

$$g^2 \sin \theta_W - gg' \cos \theta_W = 0 \quad (3.86)$$

ou seja:

$$\tan \theta_W = \frac{g'}{g} \quad (3.87)$$

A partir de  $M_{Z_\mu^0}$   $M_{W_\mu^\pm}$  e sabendo que:

$$\sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad \text{e} \quad \cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (3.88)$$

obtem-se:

$$M_{W_\mu^\pm} = M_{Z_\mu^0} \cos \theta_W \quad (3.89)$$

■ termo  $V(\Phi^\dagger \Phi)$ :

$$V(\Phi^\dagger \Phi) = V(H) = -\frac{\mu^2 v^2}{4} + \frac{1}{2} (-2\mu^2) H^2 + \text{termos de ordem superior} \quad (3.90)$$

Então deste termo resulta um campo escalar,  $H$ , cuja partícula associada tem massa:  $m_H^2 = -2\mu^2$ ;

Em síntese, o espectro de massa desta teoria é:

- um campo escalar,  $H$ , cuja partícula associada tem massa:  $m_H^2 = -2\mu^2$ , com um grau de liberdade - é o bóson de Higgs (ainda não foi descoberto experimentalmente);
- dois campos vectoriais,  $W_\mu^\pm$ , cujas partículas associadas têm massa:  $M_{W_\mu^\pm}^2 = \frac{1}{4}g^2v^2$ , com 3 + 3 graus de liberdade;
- um campo vectorial, cuja partícula associada tem massa:  $M_{Z_\mu^0}^2 = \frac{1}{4}v^2(g^2 + g'^2)$ , com três graus de liberdade;
- um campo vectorial,  $A_\mu$ , sem massa, com dois graus de liberdade.

### Correntes Carregadas

As correntes carregadas dos leptões e dos quarks no SM vêm directamente dos termos das derivadas do Lagrangeano dado pela expressão 3.60, sendo dadas por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{CC} = & \sum_{i=1}^3 i \left[ \bar{\ell}_{iL} \gamma^\mu \left( \frac{ig}{2} W_\mu^1 \tau_1 + \frac{ig}{2} W_\mu^2 \tau_2 \right) \ell_{iL} \right. \\ & \left. + \bar{Q}_{iL} \gamma^\mu \left( \frac{ig}{2} W_\mu^1 \tau_1 + \frac{ig}{2} W_\mu^2 \tau_2 \right) Q_{iL} \right] \end{aligned} \quad (3.91)$$

Usando a relação dada pela expressão 3.79, as correntes carregadas vêm:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{CC} = & \sum_{i=1}^3 -\frac{g}{2\sqrt{2}} \left[ \bar{\nu}_{iL} \gamma^\mu e_{iL} W_\mu^+ - \bar{e}_{iL} \gamma^\mu \nu_{iL} W_\mu^- \right. \\ & \left. + \bar{u}_{iL} \gamma^\mu d_{iL} W_\mu^+ - \bar{d}_{iL} \gamma^\mu u_{iL} W_\mu^- \right] \end{aligned} \quad (3.92)$$

Os vértices correspondentes às correntes carregadas são dados pela figura 3.8. Um exemplo é o decaimento do múon, representado na figura 3.9 e dado por:

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_{e^-} + \nu_{\mu^-} \quad (3.93)$$

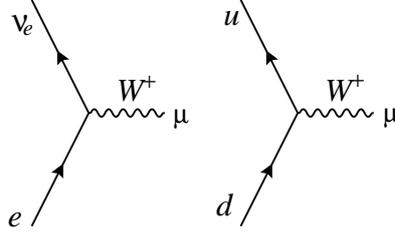


Figura 3.8: Vértices que originam correntes carregadas.

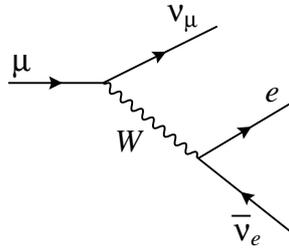


Figura 3.9: Decaimento do muão.

### Correntes Neutras

Para tratar as correntes neutras estamos interessados no acoplamento do  $Z^0_\mu$  e do  $A_\mu$  ( $W^3_\mu$  e  $B_\mu$ ) com os leptões e com os quarks. Estas correntes vêm directamente dos termos das derivadas do Lagrangeano dado pela expressão 3.60, sendo dadas por:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{CN} = & \sum_{i=1}^3 -\frac{1}{2} \left[ \bar{\ell}_{iL} \gamma^\mu (gW^3_\mu \tau_3 + (-1) g' B_\mu) \ell_{iL} \right. \\
 & + \bar{Q}_{iL} \gamma^\mu \left( gW^3_\mu \tau_3 + \frac{1}{3} g' B_\mu \right) Q_{iL} \\
 & + \bar{e}_{iR} \gamma^\mu (-2) g' B_\mu e_{iR} + \bar{u}_{iR} \gamma^\mu \frac{3}{4} g' B_\mu u_{iR} \\
 & \left. + \bar{d}_{iR} \gamma^\mu \left( -\frac{2}{3} \right) g' B_\mu d_{iR} \right] \quad (3.94)
 \end{aligned}$$

Invertendo o sistema da relação dada na equação 3.82, vem:

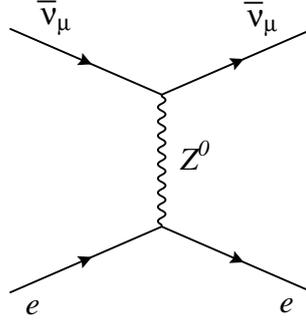


Figura 3.10: Corrente neutra no processo  $\bar{\nu}_\mu e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu e^-$ , mediada pelo bóson vectorial  $Z_\mu^0$ .

$$B_\mu = \cos \theta_W A_\mu - \sin \theta_W Z_\mu^0 \quad (3.95)$$

pelo que as correntes neutras podem ser escritas da forma:

$$\mathcal{L}_{CN} = -\frac{g}{2 \cos \theta_W} [\bar{u}_{iL} \gamma^\mu u_{iL} - \bar{d}_{iL} \gamma^\mu d_{iL} \quad (3.96)$$

$$+ \bar{\nu}_{iL} \gamma^\mu \nu_{iL} - \bar{e}_{iL} \gamma^\mu e_{iL} \quad (3.97)$$

$$- 2 \sin^2 \theta_W J_{EM}^\mu] Z_\mu^0 - e J_{EM}^\mu A_\mu \quad (3.98)$$

onde a corrente electromagnética é dada por:

$$J_{EM}^\mu = \frac{2}{3} \bar{u}_i \gamma^\mu u_i - \frac{1}{3} \bar{d}_i \gamma^\mu d_i - \bar{e}_i \gamma^\mu e_i \quad (3.99)$$

A descoberta de eventos de corrente neutra foram importantes no fornecimento da primeira evidência a favor do modelo unificado das interações fracas e electromagnéticas [16]. As correntes neutras foram descobertas com as características do SM.

O bóson vectorial com massa,  $Z_\mu^0$ , medeia as correntes neutras fracas (figura 3.10), tendo sido descoberto em 1973.

Os dados experimentais mostram, ainda, que as correntes neutras fracas deviam ser uma mistura de uma corrente vectorial e de uma corrente vectorial axial, devendo ser devidamente parametrizadas nos termos da direita e da esquerda nos acoplamentos dos leptões e dos quarks [21].

A corrente neutra obedece à regra de selecção  $\Delta S = 0$ , isto é, o Mecanismo de GIM está incorporado no modelo. Por isso, o Lagrangeano, dado pela expressão

3.60, descreve as interacções fracas e electromagnéticas dos leptões e dos quarks, para o grupo de simetria  $SU_L(2) \times U_Y(1)$ . As interacções fortes dos quarks são explicadas pelas Cromodinâmica Quântica (QCD), em que a teoria de *gauge* da cor tem simetria no grupo  $SU(3)_{cor}$ . Os geradores de  $SU(3)_{cor}$  devem comutar com os de  $SU_L(2) \times U_Y(1)$  [7] (mas, como já foi referido, as interacções fortes estão fora do âmbito deste estudo).

### 3.2.1 Massa dos Fermiões do SM

#### Massa dos Leptões

Como já foi referido, o Lagrangeano que é invariante de Lorentz e invariante para  $SU_L(2) \times U(1)_Y$  é o Lagrangeano de Yukawa, dado pela equação 3.73. Para os leptões, depois da quebra espontânea de simetria e de uma transformação de *gauge* unitária, o Lagrangeano de Yukawa é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} &= - (h_e)_{ij} \begin{bmatrix} \bar{\nu}_{iL} & \bar{e}_{iL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ v + H \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} e_{jR} + \text{h.c.} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ - (h_e)_{ij} v \bar{e}_{iL} e_{jR} - (h_e)_{ij} \bar{e}_{iL} e_{jR} H \right] + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (3.100)$$

Visto que não existe contribuição para a massa dos neutrinos, podemos ir para a base onde a matriz  $h_e$  é diagonal, isto é:

$$h_e = \begin{bmatrix} y_e & 0 & 0 \\ 0 & y_\mu & 0 \\ 0 & 0 & y_\tau \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

Assim, a massa do electrão é dada por:

$$m_e = \frac{y_e v}{\sqrt{2}} \quad (3.102)$$

Da mesma forma, obtem-se:

$$m_\mu = \frac{y_\mu v}{\sqrt{2}} \quad (3.103)$$

$$m_\tau = \frac{y_\tau v}{\sqrt{2}} \quad (3.104)$$

### Massa dos Quarks

A determinação da massa dos quarks é mais complicada, comparativamente aos leptões, uma vez que é impossível diagonalizar, simultaneamente, as matrizes de massa e as interacções.

Para os quarks, depois da quebra espontânea de simetria e de uma transformação de *gauge* unitária, o Lagrangeano de Yukawa, a partir do Lagrangeano dado pela expressão 3.73, vem como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} &= - (h_u)_{ij} \begin{bmatrix} \bar{u}_{iL} & \bar{d}_{iL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{v+H}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} u_{jR} \\
&\quad - (h_d)_{ij} \begin{bmatrix} \bar{u}_{iL} & \bar{d}_{iL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v+H}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} d_{jR} + \text{h.c.} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (h_u)_{ij} v \bar{u}_{iL} u_{jR} + (h_u)_{ij} \bar{u}_{iL} u_{jR} H \right. \\
&\quad \left. + (h_d)_{ij} v \bar{d}_{iL} d_{jR} + (h_d)_{ij} \bar{d}_{iL} d_{jR} H \right] + \text{h.c.} \quad (3.105)
\end{aligned}$$

Do Lagrangeano, dado pela expressão 3.105, extraem-se directamente os termos de massa, dados por:

$$-\mathcal{L}_{\text{Massa dos quarks}} = \bar{u}_{iL} (M_u)_{ij} u_{jR} + \bar{d}_{iL} (M_d)_{ij} d_{jR} + \text{h.c.} \quad (3.106)$$

onde

$$M_u = \frac{v}{\sqrt{2}} h_u \quad (3.107)$$

$$M_d = \frac{v}{\sqrt{2}} h_d \quad (3.108)$$

Em contraste com o sector leptónico, já não é possível diagonalizar em simultâneo as matrizes de massa  $M_u$  e  $M_d$ , de modo a manter invariante as correntes carregadas. Para se diagonalizar as matrizes de massa  $M_u$  e  $M_d$  procedemos ao seguinte conjunto de transformações unitárias:

$$\begin{aligned}
u_L &= U_{uL}u'_L \\
u_R &= U_{uR}u'_R \\
d_L &= U_{dL}d'_L \\
d_R &= U_{dR}d'_R
\end{aligned} \tag{3.109}$$

onde  $U_{uL}$ ,  $U_{uR}$ ,  $U_{dL}$  e  $U_{dR}$  são matrizes unitárias de forma a que  $u'_L$ ,  $u'_R$ ,  $d'_L$  e  $d'_R$  correspondam a campos cujas matrizes de massa sejam diagonais, isto é:

$$U_{uL}^\dagger M_u U_{uR} = \begin{bmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{bmatrix} \tag{3.110}$$

e

$$U_{dL}^\dagger M_d U_{dR} = \begin{bmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{bmatrix} \tag{3.111}$$

Os únicos termos do Lagrangeano do SM, dado pela expressão 3.59 , que sofrem alterações ao realizarmos o conjunto de operações unitárias dadas pelas expressões 3.110 e 3.111 , são os que correspondem às correntes carregadas dos quarks, uma vez que são os únicos termos que misturam quarks de esquerda do tipo *up* e do tipo *down*, resultando na seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{CC} &= -\frac{g}{2\sqrt{2}}\bar{u}'_{iL}\gamma^\mu U_{uL}^\dagger U_{dL}d'_{iL}W_\mu^+ + \text{h.c.} \\
&= -\frac{g}{2\sqrt{2}}\bar{u}'_{iL}\gamma^\mu V_{\text{CKM}}d'_{iL}W_\mu^+ + \text{h.c.}
\end{aligned} \tag{3.112}$$

onde a matriz  $V_{\text{CKM}} \equiv U_{uL}^\dagger U_{dL}$ , designada por matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa [20, 26], é uma medida da mistura dos sabores dos quarks, cujos elementos são convencionalmente escritos como:

$$V_{\text{CKM}} = \begin{bmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{bmatrix} \tag{3.113}$$

A matriz  $V_{\text{CKM}}$  pode ser parametrizada por três ângulos e uma fase independentes com significado físico e sem perda de generalidade. Os valores experimentais actuais para os vários elementos da matriz CKM são [27]:

$$|V_{\text{CKM}}| = \begin{bmatrix} 0.97383_{-0.00023}^{+0.00024} & 0.2272_{-0.0010}^{+0.0010} & (3.96_{-0.09}^{+0.09}) \times 10^{-3} \\ 0.2271_{-0.0010}^{+0.0010} & 0.97296_{-0.00024}^{+0.00024} & (42.21_{-0.80}^{+0.10}) \times 10^{-3} \\ (8.14_{-0.64}^{+0.32}) \times 10^{-3} & (41.61_{-0.78}^{+0.12}) \times 10^{-3} & 0.999100_{-0.000004}^{+0.000034} \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

A fase independente da matriz está codificada na expressão do invariante de Jarlskog dado por:

$$J = \Im(V_{us}V_{cs}^*V_{ub}^*V_{cb}) \quad (3.115)$$

cujo valor experimental actual é:

$$J = (3.08_{-0.18}^{+0.16}) \times 10^{-5} \quad (3.116)$$

Apesar da fenomenologia da violação de  $CP$  não se integrar nesta dissertação, notemos o facto de  $J \neq 0$  implicar que no SM há violação de  $CP$  no sector dos quarks [28].

Neste capítulo fizemos uma breve análise do SM. Estudamos, em particular, os termos de massa dos leptões e dos quarks, contudo, os neutrinos permanecem sem massa depois da quebra de simetria e do Mecanismo de Higgs. As experiências recentes indicam que o sabor dos neutrinos oscila, o que só é compatível se os neutrinos tiveram massa, sendo por isso necessária uma física para além do SM. No próximo capítulo estudaremos extensões do SM de forma a obter neutrinos massivos e compatíveis com os resultados experimentais das oscilações dos neutrinos.



# Capítulo 4

## Física dos Neutrinos

Neste capítulo trataremos os argumentos teóricos a favor da massa dos neutrinos não nula e da sua mistura, que são baseados em modelos para além do SM. A geração de massa para os neutrinos tem a ver com mecanismos para além do usual Mecanismo de Higgs do SM que, como vimos, permite gerar massa aos quarks e leptões carregados. É sem dúvida, o surgimento do Mecanismo See-saw, proposto em 1977, por Minkowski [29] que conduziu a grandes avanços na explicação das massas dos neutrinos. Este mecanismo explica, naturalmente, a pequenez da massa dos neutrinos conduzindo a uma possível violação da conservação do número leptónico e violação de  $CP$ , para escalas de energia maiores das actualmente alcançadas nos geradores. Abordaremos, ainda, as oscilações dos neutrinos no vácuo como consequência das suas massas e das suas misturas.

### 4.1 Breve Introdução Histórica dos Neutrinos

A enorme quantidade de neutrinos que passam através dos nossos corpos, a cada segundo, são quase todos produzidos nas reacções de fusão no núcleo do Sol. Contudo, a produção dos neutrinos não está confinada à nossa galáxia. Quando as estrelas maciças morrem, a maioria de sua energia é libertada, como neutrinos, em explosões violentas de supernovas.

Os físicos detectaram os primeiros neutrinos de uma supernova em 1987, quando uma estrela, situada a 150 000 anos-luz, colapsou na *Large Magellanic Cloud*. Duas grandes experiências, uma no detector Kamiokande, situado no Japão e outra da IMB, perto de Cleveland em Ohio, nos EUA, detectaram neutrinos a partir da supernova 1987A, três horas antes da luz da explosão alcançar

a Terra. O evento marcou o nascimento da astronomia do neutrino [30].

Contudo, os neutrinos são as partículas fermiônicas fundamentais menos compreendidas. Ainda durante a última metade do século passado os físicos pensavam que os neutrinos, como os fótons, eram desprovidos de massa. As evidências experimentais das oscilações dos neutrinos que têm sido obtidas em várias experiências:

- neutrinos atmosféricos: Kamiokande [31], IBM [32], Soudan [33], K2K [34], MACRO [35] e MINOS [36];
- neutrinos solares: KamLAND [37], Homestake [38], Kamiokande [39], GALLEX [40], SAGE [41] e Super-Kamiokande [42], SNO [43];
- neutrinos de aceleradores: LSND [44], KARMEN [45] e MiniBooNE [46];
- neutrinos de reatores: CHOOZ [47].

sugerem que os neutrinos sejam massivos. Estes dados constituem a primeira observação de processos que não conservam o número leptônico. Então, tais fenômenos confirmam que o SM da Física de Partículas está incompleto. Daí a grande necessidade teórica em estender o SM, de modo a incorporar termos de massa para os neutrinos e suas misturas. Na literatura, várias são as tentativas teóricas para solucionar este problema: modelos baseados no Mecanismo See-saw (parte integrante deste trabalho), modelos de grande unificação ( $SO(10)$ ) e modelos onde são introduzidas dimensões espaciais extras. Demais, os neutrinos poderão dar um enorme contributo para a explicação da assimetria bariônica do nosso Universo (excesso de matéria sobre anti-matéria), via leptogénesis, um elemento chave para explicar a nossa existência.

Historicamente, os neutrinos foram sugeridos pela primeira vez por Wolfgang Pauli, em 1930. Na altura, os físicos foram confundidos porque o decaimento nuclear  $\beta$  apareceu para quebrar a lei da conservação da energia. Num decaimento  $\beta$ , figura 3.2, um neutrão de um núcleo instável desintegra-se num próton e num electrão. Verificou-se que a energia do electrão emitido tinha um espectro contínuo, o que foi uma grande surpresa para a comunidade científica. Este facto conduziu Niels Bohr a especular que a energia poderia não ser conservada nos núcleos. Pauli, incapaz de assistir a uma conferência de Física, em Dezembro

de 1930, escreveu<sup>1</sup>: ”*Dear Ladies and Gentlemen, ... as a desperate remedy to save the principle of energy conservation in  $\beta$  decay, ... I propose the idea of a neutral particle of spin  $\frac{1}{2}$* ”. Pauli designou essa nova partícula por “neutrão”, que seria emitida juntamente com o electrão no decaimento  $\beta$ , de modo que a energia total fosse conservada [16].

Dois anos mais tarde, James Chadwick descobriu o neutrão, mas essa partícula era demasiado pesada para ser o ”neutrão” que Pauli tinha previsto. Entretanto, a partícula proposta por Pauli teve um papel crucial na primeira teoria do decaimento  $\beta$  nuclear, formulada por Enrico Fermi (ver secção 3.1), em 1933, e que se tornou, mais tarde, conhecida como a força fraca. Fermi, sendo italiano, denominou essa nova partícula por neutrino, que parecia a escolha óbvia para um neutrão pequeno [30]. Originalmente, Pauli considerou o neutrino como uma partícula com uma massa pequena, menor que a massa do electrão, mas não nula [48] e o método para a medição da massa dos neutrinos, através da investigação do espectro  $\beta$  próximo do ponto final, foi proposto nos primeiros artigos teóricos de Fermi [14, 15] e Perrin [49] sobre o decaimento  $\beta$ , dando um limite superior de 500 eV, que foi aperfeiçoado nos anos 50 para 250 eV [50]. Tornou-se evidente que a massa do neutrino é muito menor que a massa do electrão. Com o estabelecimento do SM, tendo em conta a descoberta, em 1957, da violação de paridade no decaimento  $\beta$ , Landau [51], Lee e Yang [52] e Salam [53], assumiram que o neutrino é uma partícula sem massa.

O primeiro método de detecção dos neutrinos foi sugerido por Pontecorvo [54], que propôs a reacção cloro-árgon e discutiu a possibilidade de registar os neutrinos solares. Esta difícil experiência foi realizada por Davies e seus colaboradores [55], em 1968, e marcou a observação dos neutrinos provenientes do Sol (neutrinos solares). A descoberta experimental dos neutrinos foi levada a cabo por Reines e Cowan [57], em 1956, um quarto de século depois da sua existência ter sido prevista.

Em 1943, Sakata e Inoué [58] sugeriram que poderia haver mais que uma espécie de neutrinos. Pontecorvo [59], em 1959, fez uma conjectura semelhante, afirmando que os neutrinos emitidos no decaimento  $\beta$  e no decaimento do muão podiam ser diferentes. Esta hipótese foi confirmada, em 1962, por Danby e seus colaboradores [60], que descobriram que os neutrinos produzidos no decaimento

---

<sup>1</sup>Conforme o original: ”*Dear Radiactive Ladies and Gentlemen, ... as a desperate remedy to save the principle of energie conservation in  $\beta$  decay, ... I propose the idea of a neutral particle of spin half*” [2].

do muão podiam criar, em interações secundárias, somente muões mas não electrões. Foi, então, estabelecido que há pelo menos três tipos diferentes ou sabores de neutrinos: electrónicos  $\nu_e$ , muónicos  $\nu_\mu$  e tautónicos  $\nu_\tau$  e as suas antipartículas. Os resultados do LEP (Large Electron-Positron Collider) [61], baseados na medição da largura do decaimento do bosão  $Z_\mu^0$ , deram o seguinte número de espécies de neutrinos diferentes:  $N_\nu = 2.993 \pm 0.011$ , incluindo todos os fermiões neutros com acoplamento normal fraco com  $Z_\mu^0$  e massa inferior a  $m_{Z_\mu^0}/2 \approx 45$  GeV.

As implicações cosmológicas da Física dos Neutrinos foram inicialmente consideradas por Alpher e seus colaboradores [65] mencionando que os neutrinos poderiam existir no equilíbrio térmico no universo primitivo. A possibilidade da densidade cosmológica de energia de neutrinos poder ser maior que a densidade de energia da matéria bariónica, e as implicações cosmológicas desta hipótese, foram discutidas por Pontecorvo e Smorodinskii [66]. Mais tarde, Zeldovich e Smorodinskii [67] derivaram um limite superior para a densidade de neutrinos a partir da sua acção gravitacional. Em 1966, Gerstein e Zeldovich [68] deduziram o limite cosmológico para a massa dos neutrinos. Desde então, a interacção entre a Física dos Neutrinos e a cosmologia tem sido discutida em centenas de artigos, onde os limites nas propriedades dos neutrinos e o uso dos neutrinos na resolução de alguns problemas cosmológicos têm sido considerados. Os neutrinos podem ter sido importantes na formação da estrutura de grande escala (*large-scale structure* - LSS) do universo, na nucleossíntese do big-bang (BBN) e na anisotropia da radiação de fundo cósmico (*cosmic microwave background radiation* - CMBR).

A ideia dos neutrinos de vários sabores oscilarem remonta aos primeiros trabalhos de Pontecorvo [62], em 1957, que propôs, em analogia com as oscilações do  $K^0 - \bar{K}^0$ , que os neutrinos também podiam oscilar devido a transformações ( $\bar{\nu} - \nu$ ). Mais tarde, em 1962, depois da confirmação de que  $\nu_e$  e  $\nu_\mu$  eram partículas diferentes [60], Maki, Nakagawa e Sakata [64] sugeriram também a possibilidade dos sabores dos neutrinos oscilarem,  $\nu_e \longleftrightarrow \nu_\mu$ .

Gribov e Pontecorvo [69], em 1969, propuseram a primeira teoria fenomenológica de mistura e oscilações de neutrinos. Nesta teoria, as duas componentes esquerdas dos campos dos neutrinos  $\nu_{eL}$  e  $\nu_{\mu L}$  são combinações lineares das componentes esquerdas dos campos dos neutrinos de Majorana, com massa definida. Os termos de massa contêm somente os campos de componentes esquerda  $\nu_{eL}$  e

$\nu_{\mu L}$ .

Em 1976, as oscilações dos neutrinos foram consideradas no plano da mistura de dois neutrinos de Dirac, baseadas na analogia entre quarks e leptões, e no mesmo ano no plano geral Dirac-Majorana. Em 1998, na colaboração do Super-Kamiokande [42] foram encontradas fortes evidências a favor das oscilações dos neutrinos atmosféricos. Assim, começou uma nova era na Física de Partículas, bem como na astrofísica e na cosmologia.

## 4.2 Motivações para a Existência de Massa dos Neutrinos

Vimos no capítulo anterior, que o SM é um modelo que descreve, com sucesso, processos físicos envolvendo neutrinos nas correntes neutras e carregadas. Contudo, não existe forma de gerar massas para os neutrinos, de modo a estar consistente com as indicações experimentais das oscilações dos neutrinos. Experimentalmente, conhecem-se os seguintes limites superiores para a massa dos neutrinos:

- $m_{\nu_e} < 2 \text{ eV}$  [18] (PDG 2006);
- $m_{\nu_\mu} < 0.19 \text{ MeV}$  [18] (PDG 2006);
- $m_{\nu_\tau} < 18.2 \text{ MeV}$  [18] (PDG 2006).

Na literatura existem inúmeras formas de incorporar neutrinos massivos no contexto de modelos para além do SM. A inexistência de componente direita para os neutrinos no SM é uma propriedade particularmente desejável, visto que conduz ao cancelamento anômalo implicando a quantização da carga. Esta propriedade é perdida quando se introduzem componentes de direita para os neutrinos, o que é um dos argumentos mais usados em desfavor de neutrinos com componente de direita. Não obstante, tem sido salientado que a inclusão das componentes de direita dos neutrinos permite entender a quantização da carga, se assumirmos que os neutrinos sejam partículas de Majorana [12].

A unificação das interações fundamentais tem motivação extra para os neutrinos massivos, visto que alguns dos modelos de unificação mais interessantes atribuem massa aos neutrinos. Por exemplo, se tivermos em conta uma Teoria

da Grande Unificação (GUT) das interações electrofracas e fortes, em que cada família de fermiões é contida numa única representação dum grupo de *gauge*, então  $SO(10)$  é o grupo mínimo para GUT. Em  $SO(10)$  cada família de fermiões está unificada numa representação de spinores de 16 dimensões onde, juntamente com quinze fermiões quirais do SM, a componente direita do neutrinos está incluída. Assim, a existência de massa para neutrino é inevitável [28].

Resta salientar que, embora tenhamos a necessidade de estender o SM com vista a incluir neutrinos massivos, devemos também resolver um dos problemas já existente no SM: a hierarquia das massas dos fermiões fundamentais. Por exemplo, a massa do quark *top* é pelo menos cinco ordens de grandeza maior que a massa do electrão ( $m_{top} = 175$  GeV e  $m_e = 0,511$  MeV). Existe, realmente, uma grande discrepância entre as massas dos fermiões distribuídos nas três famílias. A terceira família é mais pesada do que a segunda e esta mais pesada do que a primeira (ver resumo em [12]). Acrescido a este problema, a massa dos neutrinos é várias ordens de grandeza menor do que a massa dos respectivos leptões carregados. Assim, uma boa teoria para a massa dos neutrinos deverá ser capaz de explicar toda essa hierarquia das massas.

Terminamos esta secção fazendo uma breve referência à importância da massa dos neutrinos na astrofísica e na cosmologia, que reforçam a fenomenologia das oscilações dos neutrinos. A relevância dos neutrinos para a astrofísica foi salientada por Beth [12], em 1939, através de uma lista das reacções em cadeia, que são responsáveis pela combustão do hidrogénio em hélio, no núcleo, onde são produzidos muitos neutrinos. Visto que os neutrinos só têm interações fracas, as suas secções eficazes na interacção com a matéria são baixas. Assim, uma vez produzidos, os neutrinos vêm das estrelas quase sem obstáculos, pelo que transportam informação acerca das coroas estelares.

Os cálculos detalhados para o fluxo dos neutrinos dos electrões emitidos a partir do Sol estão em desacordo com os detectores experimentais, onde apenas  $\frac{1}{3}$  dos neutrinos esperados foram medidos. Este *puzzle* de neutrinos solares resolve-se se o  $\nu_e$ , produzido nos processos fracos, não for um estado próprio de massa, mas sim uma sobreposição de diversos estados próprios de massa. Assim, na passagem do Sol até à Terra, o  $\nu_e$  pode oscilar noutros sabores de neutrinos [62].

Várias experiências, por exemplo a colaboração do Super-Kamiokande, têm medido a razão entre o número de neutrinos do muão e o número de neutrinos do electrão, produzidos na atmosfera, a partir do decaimento dos píões e dos kaões

originados nos raios cósmicos. A razão medida é muito menor que o previsto. A razão dupla,  $R$ , dada por:

$$R \equiv \frac{(n_{\nu\mu})_{obs} (n_{\nu e})_{prev}}{(n_{\nu e})_{obs} (n_{\nu\mu})_{prev}} \quad (4.1)$$

é em média 60% e depende da direcção a partir da qual os neutrinos vêm. Esta anomalia pode ser explicada pelas oscilações dos neutrinos do muão, no seu caminho até a Terra, para outro tipo de neutrinos [28].

Também os neutrinos observados resultantes da desintegração de partículas pesadas na atmosfera indicam discrepâncias com os cálculos teóricos, mais uma vez se recorre às oscilações dos neutrinos para resolver as diferenças.

Se os neutrinos tiverem massa de alguns eVs, podem ser muito importantes para a cosmologia. A cosmologia Standard do Big Bang prevê a existência de vestígios de fundo de neutrinos em todo o universo. A densidade deste fundo de neutrinos é cerca de oito ordens de grandeza maior que a média da densidade de bárions no universo. Por isso, ainda que os neutrinos tenham uma massa de cerca de 10 eV, eles podem contribuir para a enorme quantidade de densidade de energia do universo, e assim afectar a evolução do universo como um todo [12].

### 4.3 Massa dos Neutrinos em Extensões do Modelo Standard

Na análise do SM vimos que todos os fermiões presentes no modelo apresentam termos de massa de Dirac, excepto o neutrino, visto que um termo de Dirac requer ambos os estados de helicidade: de esquerda e de direita. Poderíamos ter escrito um termo de Majorana para os neutrinos envolvendo apenas estados de helicidade de esquerda, mas tal termo está proibido pela simetria de *gauge* do SM. A inclusão de termos de massa de Majorana para neutrinos de helicidade de direita no SM violaria o número leptónico  $L$ . Sabe-se que no SM, efeitos não-perturbativos induzem a violação dos números leptónico  $L$  e bariónico  $B$ , conservando a combinação  $B - L$ . Assim, nenhum termo de massa para os neutrinos pode ocorrer [12], e estes serão não massivos para qualquer ordem na teoria de perturbações e mesmo tendo em conta efeitos não-perturbativos.

Uma vez estendido o SM, de forma a acomodar massa para os neutrinos, em geral, os estados próprios de *gauge*  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  e  $\nu_\tau$  são sobreposição de estados

próprios de massa, em analogia com a mistura dos quarks no SM. Obviamente, se a mistura de neutrinos ocorre, os números de sabores leptónicos não podem permanecer como simetrias globais. Uma consequência da mistura dos vários sabores dos neutrinos, em analogia com o sector dos quarks, é o surgimento de uma matriz de mistura no sector leptónico que, em geral, pode ser complexa, o que implica o fenómeno de violação de CP no sector leptónico [12], em contraste com o SM.

Se analisarmos, em mais detalhe, a estrutura de Lorentz dos spinores dos neutrinos, que por natureza são neutros, constatamos que existe uma maior variedade, em contraste com os outros fermiões carregados. Caso os neutrinos estejam desprovidos de massa, estes podem ser descritos por spinores complexos de duas componentes, chamados spinores de Weyl, assim o  $\nu_L$  mover-se-ia à velocidade da luz. No caso de terem massa, além do termo de Dirac, que aparece naturalmente em todos os fermiões carregados, existe a possibilidade de considerarmos um termo de Majorana para os neutrinos, uma vez que não têm carga eléctrica. Os fermiões de Majorana, onde não há nenhum número quântico que distinga o estado de partícula e da anti-partícula, são idênticos às suas próprias anti-partículas.

Seguidamente, analisaremos os dois possíveis termos de massa para os neutrinos: Massa de Dirac e Massa de Majorana.

### 4.3.1 Massa de Dirac

A massa de Dirac para um fermião  $\psi$  é, como foi visto, dada por:

$$m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L) \quad (4.2)$$

Se estendermos o SM com os neutrinos de componente de direita, os termos de massa de Dirac podem ser construídos para os neutrinos, da mesma forma que o são para os quarks e leptões carregados. Por analogia, a massa para os neutrinos vem dada por:

$$m_D\bar{\nu}\nu = m_D(\bar{\nu}_L\nu_R + \bar{\nu}_R\nu_L) \quad (4.3)$$

Tendo em conta a estrutura de sabor dos vários neutrinos, em geral, podemos escrever o Lagrangeano de massa da seguinte forma [28]:

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = -\bar{\nu}_L M_D \nu_R + \text{h.c.} \quad (4.4)$$

onde

$$\nu_{L,R} = \begin{bmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{bmatrix}_{L,R} \quad (4.5)$$

e  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  e  $\nu_\tau$  são estados próprios da interação fraca, que têm mistura através do termo de massa. Podemos encontrar o estado próprio de massa para o neutrino através da bi-diagonalização de  $M_D$ :

$$V_L^\dagger M_D V_R = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

onde  $V_L$  e  $V_R$  são matrizes unitárias referentes às transformações dos estados próprios fracos para os estados próprios de massa:

$$\begin{bmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{bmatrix}_L = V_L \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{bmatrix}_L \quad (4.7)$$

$$\begin{bmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{bmatrix}_R = V_R \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{bmatrix}_R \quad (4.8)$$

Devido à presença da matriz  $M_D$ , os números leptónicos  $L_e$ ,  $L_\mu$  e  $L_\tau$  não são conservados individualmente, mas o número leptónico total  $L = L_e + L_\mu + L_\tau$  permanece conservado, como no SM. Notar, contudo, que  $L$  é violado pela anomalia electrofraca global, apenas  $B - L$  é conservado [28]. De facto,  $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$  é invariante numa transformação global em  $U(1)_{L_e+L_\mu+L_\tau}$ :

$$\nu_{L,R} \rightarrow e^{i\alpha} \nu_{L,R} \quad (4.9)$$

Esta situação é inteiramente análoga à do sector dos quarks. Os sabores dos quarks, individualmente, são violados pela interação da corrente fraca carregada, enquanto que o número bariónico é conservado ao nível perturbativo.

Historicamente, o termo de Dirac para os neutrinos foi postulado não existir porque se sabia que  $m_{\nu_e} \ll m_e$ , pelo que não foi introduzido o  $\nu_{eR}$  no SM.

### 4.3.2 Massa de Majorana

Como referimos, os neutrinos gozam da propriedade de poderem ter massa de Majorana, visto que são os únicos fermiões fundamentais conhecidos electricamente neutros. O termo de massa de Majorana, para um fermião, é dado por:

$$\frac{1}{2}m_M\psi^T C^{-1}\psi \quad (4.10)$$

onde  $C$  é a matriz de conjugação da carga. O factor  $\frac{1}{2}$  foi inserido para que, na equação do movimento,  $m_M$  possa ser interpretado como a massa de  $\psi$ . Este termo, como foi referido, é só válido quando o fermião  $\psi$  não possui cargas, visto que na transformação de *gauge*, para um grupo genérico:

$$\psi \rightarrow e^{iQ\cdot\Theta(x)}\psi \Rightarrow \psi^T C^{-1}\psi \rightarrow e^{2iQ\cdot\Theta(x)}\psi^T C^{-1}\psi \quad (4.11)$$

onde  $Q$  é o conjunto das cargas correspondentes ao grupo. No SM, em geral, este termo de Majorana não é invariante sobre uma transformação de *gauge*.

A seguir, é derivada a equação de Dirac para um fermião  $\psi$  com massa de Majorana na ausência de interações, com a finalidade de mostrar que  $\psi = e^{i\zeta}\psi^c$ . O Lagrangeano geral é dado por [28]:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma_\mu(\partial^\mu\psi) - \frac{i}{2}(\partial^\mu\bar{\psi})\gamma_\mu\psi + \frac{|m|}{2}e^{i\zeta}\psi^T C^{-1}\psi - \frac{|m|}{2}e^{-i\zeta}\bar{\psi}C\bar{\psi}^T \quad (4.12)$$

onde  $\zeta$  é a fase de  $m$ . A equação do movimento é derivada pela maneira usual:

$$0 = \partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\delta (\partial^\mu \bar{\psi})} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \bar{\psi}} \quad (4.13)$$

ou seja:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial^\mu \left( -\frac{i}{2}\gamma_\mu\psi \right) - \frac{i}{2}\gamma_\mu(\partial^\mu\psi) + me^{-i\zeta}C\bar{\psi}^T \\ &= -i\gamma_\mu\partial^\mu\psi + me^{-i\zeta}C\bar{\psi}^T \end{aligned} \quad (4.14)$$

Verificamos que a equação do movimento para  $\bar{\psi}$  dá origem à condição dos spinores de Majorana, isto é, o campo fermiónico  $\psi$  é idêntico ao conjugado de carga:

$$\psi = e^{-i\zeta} C \bar{\psi}^T \quad (4.15)$$

Assim, os termos de massa de Majorana conduzem naturalmente a fermiões de Majorana.

Como exemplo, vamos considerar a adição ao SM de  $n_R$  números de neutrinos de componente de direita. Então, os termos de massa de Majorana são escritos como [28]:

$$\mathcal{L}_{\text{Majorana}} = \frac{1}{2} \nu_R^T C^{-1} M_R \nu_R + \text{h.c.} \quad (4.16)$$

onde  $\nu_R$  indica, como antes, a matriz coluna com os estados próprios fracos dos neutrinos, e  $M_R$  é uma matriz  $n_R \times n_R$ . Visto que os números quânticos do  $\nu_R$  correspondentes ao grupo do SM são:

$$\nu_{lR} \rightarrow (1, 1, 0) \quad (4.17)$$

onde  $l = 1, \dots, n_R$ , deduz-se que  $n_R$  não está constrangido pelo número de neutrinos indicados pelo LEP [61]. Sem perda de generalidade,  $M_R$  é simétrica, visto que  $C$  é uma matriz antissimétrica e que os campos dos fermiões anticomutam:

$$(\nu_R^T C^{-1} M_R \nu_R)^T = \nu_R^T C^{-1} M_R^T \nu_R \Rightarrow M_R^T = M_R \quad (4.18)$$

Em geral, a matriz simétrica pode ser diagonalizada pela seguinte transformação:

$$V_R^T M_R V_R = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{n_R} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

onde  $V_R$  é a matriz unitária que relaciona os estados próprios fracos com os estados próprios de massa:

$$\nu_R = V_R \nu'_R \quad (4.20)$$

e  $\nu'_{lR}$  correspondem aos estados próprios de massa. As massas  $M_1, M_2, \dots, M_{n_R}$  são reais e não-negativas. O termo de massa de Majorana pode ser escrito

como<sup>2</sup> [28]:

$$\mathcal{L}_{\text{Majorana}} = -\frac{M_l}{2} \left( \bar{\nu}'_{lR} \nu'_{lR} + \bar{\nu}'_{lR} \nu'_{lR} \right) \quad (4.21)$$

### 4.3.3 Massa dos Neutrinos em $SU(2)_L \times U(1)_Y$

Interessa-nos incorporar termos massivos para os neutrinos na dinâmica das interacções electrofracas, baseadas no grupo de *gauge*  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ . Sabemos, à partida, que no SM tais termos não existem devido à simetria  $B - L$ , que é conservada a nível quântico no modelo, não sendo gerados dinamicamente na teoria de perturbações e mesmo tendo em conta efeitos não-perturbativos.

Existem várias formas de estender o SM de forma a acomodar massas para os neutrinos. Poderíamos estender o sector de Higgs do modelo, o conteúdo fermiónico ou ainda estender o grupo de *gauge* ( $SO(10)$ ), ou qualquer combinação destas extensões. No entanto, iremos simplesmente adicionar fermiões com helicidade de direita que identificaremos como os neutrinos de direita:  $\nu_{lR}$ , singletos de  $SU(2)_L$  (como se vê da correspondência 4.17), e em que  $l = 1, \dots, n_R$ . Como vimos na secção anterior, o número de helicidade de direita não está restringido pela dinâmica do SM (LEP [61]). Assim, os termos do Lagrangeano mais gerais invariantes do grupo de *gauge* de  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  e que proporcionam termos de massa para os neutrinos são dados por [12]:

$$-\mathcal{L}_\nu = \sum_{i,l} (h_D)_{il} \bar{\ell}_{iL} \tilde{\Phi} \nu_{lR} + \sum_{l,l'} \frac{1}{2} (M_R)_{ll'} \nu_{lR}^T C^{-1} \nu_{l'R} + \text{h.c.} \quad (4.22)$$

onde  $h_D$  é a matriz de acoplamento de Yukawa, que dará origem, após a quebra espontânea de simetria de *gauge*, ao termo de massa de Dirac para os neutrinos, de acordo com o Lagrangeano dado pela expressão 4.4.  $M_R$  é, simplesmente, a matriz de massa de Majorana que relaciona os vários sabores de  $\nu_{lR}$ . Quando o duplete de Higgs,  $\Phi$ , adquire o valor de expectativa no vácuo,

$$\langle \Phi \rangle_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ v + H \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

obtemos o seguinte Lagrangeano de massa para os neutrinos:

---

<sup>2</sup>Por convenção  $\nu_L^c = (\nu_L)^c$ .

$$-\mathcal{L}_{massa} = \bar{\nu}_L M_D \nu_R + \frac{1}{2} \nu_R^T C^{-1} M_R \nu_R + \text{h.c.} \quad (4.24)$$

onde no espaço do sabor,  $M_D$  corresponde a uma matriz com elementos:

$$(M_D)_{il} = \frac{v}{\sqrt{2}} (h_D)_{il} \quad (4.25)$$

Em geral, como a matriz  $M_D$  não é diagonal, os campos  $\nu_{iL}$  e  $\nu_{lR}$  não correspondem a projecções quirais dos campos físicos dos fermiões. Para obter o campo físico, temos que encontrar os vectores próprios da matriz  $M_D$ . Para isso, diagonaliza-se  $M_D$  com uma transformação biunitária, exactamente da mesma forma como na expressão 4.6.

Só os neutrinos de helicidade de esquerda acoplam com os bosões,  $W_\mu^\pm$  e  $Z_\mu^0$ , como no SM:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{W^\pm, Z^0, \nu} = & - \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{g}{2\sqrt{2}} [\bar{\nu}_{iL} \gamma^\mu e_{iL} W_\mu^+ - \bar{e}_{iL} \gamma^\mu \nu_{iL} W_\mu^-] \right. \\ & \left. + \frac{g}{2 \cos \theta_W} \bar{\nu}_{iL} \gamma^\mu \nu_{iL} Z_\mu^0 \right\} \end{aligned} \quad (4.26)$$

No que se segue, consideramos, por conveniência, que se fizeram as transformações unitárias necessárias, de modo que os  $e_{iL}$  e  $e_{iR}$  sejam já estados de massa. Quando se reescreve o Lagrangeano de interacção, dado pela expressão 4.26, em função de estados próprios de massa, os termos de interacção com os bosões  $W_\mu^\pm$  sofrem a seguinte modificação:

$$\mathcal{L}_{W^\pm, \nu} = - \sum_{i,j=1}^3 \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{\nu}'_{iL} \gamma^\mu U_{ij} e_{jL} W_\mu^+ + \text{h.c.} \quad (4.27)$$

Em paralelo com o sector dos quarks, a matriz de mistura  $U$  dos neutrinos desempenha o mesmo papel da matriz  $V_{CKM}$ . Para obtermos a matriz  $U$  na base de neutrinos físicos é necessário diagonalizar  $M_D$  na base onde os estados de  $\nu_{lR}$  sejam estados próprios de massa, visto que a matriz  $M_D$  envolve estados de helicidade de esquerda e de direita. Procederemos, de seguida, à diagonalização da matriz  $M_R$ , e em simultâneo explicaremos a pequenez da massa dos neutrinos. A razão deve-se ao facto que a matriz  $M_R$  não está submetida a nenhum constrangimento pelo que pode, à partida, tomar valores grandes: esta é a essência do Mecanismo See-saw que descreveremos a seguir.

### 4.3.4 O Mecanismo See-saw

A forma mais simples de apresentar o Mecanismo See-saw é reescrevendo o Lagrangeano, dado pela expressão 4.24, em spinores de esquerda. Tomando os termos hermíticos conjugados da equação 4.24, vem [70]:

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_{massa} &= \bar{\nu}_R M_D^\dagger \nu_L - \frac{1}{2} \bar{\nu}_R M_R^\dagger C \bar{\nu}_R^T + \text{h.c.} \\
&= \frac{1}{2} \nu_L^T C M_D^* (\nu_R)^c + \frac{1}{2} [(\nu_R)^c]^T C M_D^\dagger \nu_L \\
&\quad + \frac{1}{2} [(\nu_R)^c]^T C M_R^* (\nu_R)^c + \text{h.c.}
\end{aligned} \tag{4.28}$$

que escrito na forma matricial resulta em:

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_{massa} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \nu_L^T & (\nu_L^c)^T \end{bmatrix} C \begin{bmatrix} 0 & M_D^* \\ M_D^\dagger & M_R^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_L \\ \nu_L^c \end{bmatrix} + \text{h.c.} \\
&= \frac{1}{2} n_L^T C \mathcal{M} n_L + \text{h.c.}
\end{aligned} \tag{4.29}$$

onde se usou o facto de  $(\nu_R)^c = \nu_L^c$  e se identificou:

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 0 & M_D^* \\ M_D^\dagger & M_R^* \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

e

$$n_L = \begin{bmatrix} \nu_L \\ \nu_L^c \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

As matrizes  $M_D$ ,  $M_R$  e  $\mathcal{M}$  têm dimensões, respectivamente,  $3 \times n_R$ ,  $n_R \times n_R$  e  $(3 \times n_R) (3 \times n_R)$ . Vamos, primeiro, diagonalizar a matriz  $\mathcal{M}$  por blocos.

$$W^T \mathcal{M} W = W^T \begin{bmatrix} 0 & M_D^* \\ M_D^\dagger & M_R^* \end{bmatrix} W = \begin{bmatrix} \tilde{m}_L & 0 \\ 0 & \tilde{M}_R \end{bmatrix} \tag{4.32}$$

onde  $W$  é uma matriz unitária  $(3 \times n_R) (3 \times n_R)$ , que relaciona os estados de interacção,  $n_L$ , com os estados de massa,  $\chi_L$ :

$$n_L = W \chi_L \tag{4.33}$$

Parametrizando, aproximadamente, a matriz  $W$  da forma:

$$W \approx \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}\rho\rho^T & \rho \\ -\rho^\dagger & 1 - \frac{1}{2}\rho^T\rho \end{bmatrix}, \text{ com } W^\dagger W = 1 + \mathcal{O}(\rho^4) \quad (4.34)$$

A matriz  $\rho$  tem dimensão  $(3 \times n_R)$   $(3 \times n_R)$  e é, à partida, um factor de expansão. Por simplicidade, vamos desprezar a possível violação de  $CP$  no sector leptónico e considerar  $M_D$  e  $M_R$  matrizes reais, sendo  $\rho$  também uma matriz real. Assim, da diagonalização de  $\mathcal{M}$ , a partir da expressão 4.32, obtemos a fórmula de see-saw dada por:

$$\tilde{m}_L \simeq -M_D^* (M_R^*)^{-1} M_D^\dagger \quad (4.35)$$

onde a matriz  $\tilde{m}_L$  é chamada *matriz efectiva* dos neutrinos de helicidade esquerda, cujo Lagrangeano efectivo é dado por:

$$-\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{2}\chi^T C \tilde{m}_L \chi \quad (4.36)$$

que corresponde a um termo de massa de Majorana, isto é,  $\chi$  é um spinor de Majorana:

$$\chi = e^{-i\xi} \chi^c \quad (4.37)$$

Trata-se de uma característica geral. Mesmo existindo um termo de Dirac, a presença de um termo de massa de Majorana é suficiente para que os estados de massa do fermião sejam de natureza de Majorana.

A matriz  $\tilde{m}_L$  é, em geral, não diagonal e complexa, codificando informação relevante para a mistura dos sabores dos neutrinos de esquerda leves. De facto, a diagonalização de  $\tilde{m}_L$  conduz à expressão da matriz  $U$  dada pela equação 4.27. Esta matriz  $U$  de dimensão  $3 \times 3$  é a matriz que mede as misturas leptónicas, sendo conhecida como a matriz de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (PMNS) [64], e dada por:

$$U = U_{e_L}^\dagger K \quad (4.38)$$

onde  $U_{e_L}^\dagger$  é a matriz unitária que diagonaliza a matriz de massa dos leptões carregados, ou seja:

$$U_{eL}^\dagger M_e U_{eR} = \begin{bmatrix} m_e & 0 & 0 \\ 0 & m_\mu & 0 \\ 0 & 0 & m_\tau \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

e  $K$  é a matriz que diagonaliza a matriz  $\tilde{m}_L$ , ou seja:

$$K^T \tilde{m}_L K = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

onde  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$  são as massas dos neutrinos de esquerda leves. A matriz  $U$  pode ser sempre parametrizada com três ângulos ( $\theta_{12}$ ,  $\theta_{23}$  e  $\theta_{13}$ ), uma fase de Dirac ( $\delta$ ) e duas fases de Majorana ( $\alpha$  e  $\beta$ ), fases essas violadoras de  $CP$ . A fase de Dirac induz efeitos de violação de  $CP$  nas oscilações dos neutrinos, em contraste com as fases de Majorana, que não intervêm nos processos de oscilações, mas são sensíveis aos processos de decaimento  $\beta$  duplo sem neutrinos.

A matriz  $\rho$ , obtida pelo processo de diagonalização por blocos, toma a seguinte forma:

$$\rho \simeq M_D^* (M_R^*)^{-1} \quad (4.41)$$

No limite em que  $M_R \gg M_D$  a matriz  $\rho$  é suprimida, o que justifica a aproximação, à unitariedade de  $U$ , realçada na equação 4.34. Nesse limite, os estados de massa pesados não sofrem alterações, ou seja:

$$\tilde{M}_R \simeq M_R^* \quad (4.42)$$

Observando a fórmula de see-saw dada pela equação 4.35 verificamos que no limite em que  $M_R \gg M_D$  temos que a matriz dos neutrinos de esquerda leves também é suprimida, o que consiste numa explicação natural para a pequenez das massas dos neutrinos. O Mecanismo See-saw foi historicamente proposto por Minkowski [29], Gell-Mann e seus colaboradores [71], Yanagida [72], Mohapatra e Senjanović [73]. Este mecanismo assenta no facto simples de não haver constrangimentos para a magnitude da matriz  $M_R$ , pelo que os seus elementos podem ser grandes, visto que os neutrinos de helicidade de direita não participam nas interações dos bósons do grupo de *gauge*  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ . [No anexo 2 é feita uma análise do Mecanismo See-saw para o caso simples de uma geração.]

É interessante notar que com o maior valor próprio da massa de Dirac da ordem da escala electrofraca,  $M_D \sim 200$  GeV, a escala da massa de Majorana,  $M_R \sim 10^{15}$  GeV, que é perto da escala típica das GUT, e assumindo que os termos da massa  $\tilde{m}_L \sim M_D^2/M_R$ , obtemos a massa dos neutrinos leves  $m_\nu \sim (10^{-2} - 10^{-1})$  eV, o que é compatível com a escala que é esperada para esses neutrinos [18]. Demais, argumentos cosmológicos restringem a massa de qualquer neutrino estável, devendo esta ser menor que cerca de 30 eV, conseqüentemente:

$$M_R \gtrsim 10^8 \text{ GeV} \quad (4.43)$$

reforçando que a implementação bem sucedida do Mecanismo See-saw requer uma escala de massa maior que a escala fraca  $\sim 200$  GeV. Em geral, modelos com escalas muito elevadas sofrem problemas teóricos de estabilização da massa dos escalares. Este problema, chamado problema da hierarquia, dificulta as Teorias da Grande Unificação (GUT).

A natureza de Dirac ou de Majorana dos neutrinos continua ainda um dos grandes mistérios na actual Física Fundamental. Experimentalmente, não existem indicações relativas a essa natureza, já que as oscilações dos sabores dos neutrinos não permitem distinguir neutrinos de Dirac ou de Majorana. O único processo envolvendo neutrinos, que pode determinar essa natureza, é o decaimento  $\beta$  duplo sem neutrinos, pois esse só ocorre na presença de neutrinos de Majorana. Várias são as experiências que procuram indícios de tais decaimentos, nomeadamente: CUORICINO ( $^{130}\text{Te}$ ) [74], Heidelberg-Moscow ( $^{76}\text{Ge}$ ) [75], IGEX ( $^{76}\text{Ge}$ ) [76] e NEMO ( $^{100}\text{Mo}$  e  $^{82}\text{Se}$ ) [77].

## 4.4 Oscilações dos Neutrinos no Vácuo

As oscilações dos neutrinos são indicadores sensíveis da massa dos neutrinos. Em quase todas as experiências que são realizadas com neutrinos, estes são produzidos pelas interações das correntes electrofracas. Vemos, a partir da corrente carregada da equação 4.27, onde existe mistura dos vários sabores de neutrinos, que é possível produzir qualquer sabor de neutrino em conjugação com um dado leptão carregado. Assim, um feixe de neutrinos produzido com um determinado sabor electrofraco, que é uma sobreposição de estados próprios de massa diferentes, propaga-se no tempo em outros sabores, visto que os diferentes componentes do feixe evoluem diferenciadamente. Pelo que a probabilidade

de encontrar neutrinos com um dado sabor electrofraco no feixe varia com o tempo. Esta consequência da mistura de neutrinos, considerada por Pontecorvo, em 1957, [62], é chamada oscilação dos neutrinos e resulta, naturalmente, dos neutrinos serem massivos.

Em seguida, iremos discutir a formulação teórica da propagação dos neutrinos no vácuo. O formalismo é importante também para os experimentalistas, uma vez que estes têm observado as oscilações dos neutrinos.

Consideremos um feixe de neutrinos criados numa interacção de corrente carregada juntamente com o anti-leptão  $l_L^c$ . O neutrino de sabor  $\alpha$ ,  $\nu_\alpha$ , é, em geral, uma sobreposição de estados de massa  $\nu_l$  com diferentes massas  $m_\alpha$  [12]:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_\alpha U_{\alpha l} |\nu_l\rangle \quad (4.44)$$

onde  $U$  é a matriz unitária PMNS dada pela equação 4.38, os índices  $\alpha = e, \mu$  e  $\tau$  e  $l = 1, \dots, n_R$ . Note-se que a natureza do índice  $\alpha$  ou  $l$  serve para distinguir, respectivamente, os estados próprios das interacções electrofracas dos estados próprios de massa. Assumimos um feixe de partículas paralelas, com momento  $\vec{p}$ . Para cada componente  $\nu_l$ , a energia é dada pela relação relativística da energia-momento:

$$E_l = \sqrt{\vec{p}^2 + m_l^2} \simeq |\vec{p}| + \frac{m_l^2}{2|\vec{p}|} \quad (4.45)$$

onde se aproximou a relação energia-momento, visto que os neutrinos têm massa pequena,  $|\vec{p}| \gg m_l$ , podendo assim ser considerados ultra-relativísticos.

Depois de um tempo  $t$ , a evolução do feixe inicial da equação 4.44, e assumindo que os neutrinos  $\nu_\alpha$  são partículas estáveis [12], dá:

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_l e^{-iE_l t} U_{\alpha l} |\nu_l\rangle \quad (4.46)$$

Massas  $m_l$  diferentes correspondem a  $E_l$  diferentes. Então, a equação 4.46 representa uma sobreposição de diferentes estados próprios de  $\nu_l$ , comparativamente à equação 4.44. Assim, este estado inicial  $\nu_\alpha$  não se mantém constante, e em geral, após um tempo  $t$  evolui para outro estado de sabor. A amplitude para encontrar um  $\nu_\beta$  no feixe original de  $\nu_\alpha$  é dada por:

$$\begin{aligned}
\langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle &= \sum_l \langle \nu_\beta | e^{-iE_l t} U_{\alpha l} | \nu_l \rangle \\
&= \sum_{l,m} \langle \nu_m | (U^\dagger)_{m\beta} e^{-iE_l t} U_{\alpha l} | \nu_l \rangle \\
&= \sum_{l,m} e^{-iE_l t} U_{\alpha l} U_{\beta m}^* \langle \nu_m | \nu_l \rangle
\end{aligned} \tag{4.47}$$

e usando o facto dos estados próprios de massa serem ortonormados:

$$\langle \nu_l | \nu_m \rangle = \delta_{lm} \tag{4.48}$$

concluimos que a amplitude se escreve como:

$$\langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle = \sum_l e^{-iE_l t} U_{\alpha l} U_{\beta l}^* \tag{4.49}$$

Para  $t = 0$ , como esperado, a amplitude é  $\delta_{\alpha\beta}$ , devido à unitariedade da matriz  $U$ . Noutro tempo  $t$ , a probabilidade para encontrar um  $\nu_\beta$  no feixe original de  $\nu_\alpha$  é dada por [12]:

$$\begin{aligned}
P_{\alpha \rightarrow \beta}(t) &= |\langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle|^2 \\
&= \sum_{l,m} |U_{\alpha l} U_{\beta l}^* U_{\alpha m}^* U_{\beta m}| \cos[(E_l - E_m)t - \varphi_{\alpha\beta lm}]
\end{aligned} \tag{4.50}$$

onde

$$\varphi_{\alpha\beta lm} = \arg(U_{\alpha l} U_{\beta m}^* U_{\alpha m}^* U_{\beta l}) \tag{4.51}$$

Substituindo  $t$  pela distância  $x$  percorrida pelo feixe, obtemos:

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}(x) = \sum_{l,m} |U_{\alpha l} U_{\beta l}^* U_{\alpha m}^* U_{\beta m}| \cos\left(\frac{2\pi x}{L_{lm}} - \varphi_{\alpha\beta lm}\right) \tag{4.52}$$

onde

$$L_{ij} = \frac{4\pi |\vec{p}|}{\Delta m_{ij}^2} \tag{4.53}$$

com

$$\Delta m_{ij}^2 \equiv m_i^2 - m_j^2 \quad (4.54)$$

As quantidades  $|L_{lm}|$  são chamadas comprimentos de oscilação, dando a escala da distância sobre a qual o efeito da oscilação pode ser apreciável [12]. Além disso, na equação 4.52, devemos notar que quando a distância é um múltiplo inteiro de todos  $L_{ml}$ , obtemos  $P_{\alpha \rightarrow \beta} = \delta_{\alpha\beta}$ , como no feixe original, e as oscilações dos neutrinos não têm lugar. O objectivo das experiências de oscilações de neutrinos é observar os efeitos quando a distância  $x$ , na equação 4.52, é maior que um múltiplo inteiro de  $L_{ml}$ . Assim, a sensibilidade em todas as experiências de oscilações depende do parâmetro:

$$\bar{m}^2 = \frac{|\vec{p}|}{x} \quad (4.55)$$

designado por *figura de mérito* da experiência [12]. Notar que os elementos da matriz  $U$  e os valores próprios das massas  $m_l$  e  $m_m$  vêm dos parâmetros do Lagrangeano fundamental e não temos controlo sobre eles. Assim, as amplitudes dos termos no argumento do coseno,  $m_l^2 - m_m^2$  e  $\varphi_{\alpha\beta lm}$ , na equação 4.52, são fixadas para todas as experiências. A equação 4.52 pode então ser reescrita como:

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}(x) = \sum_{l,m} |U_{\alpha l} U_{\beta l}^* U_{\alpha m}^* U_{\beta m}| \cos \left( \frac{m_l^2 - m_m^2}{2\bar{m}^2} - \varphi_{\alpha\beta lm} \right) \quad (4.56)$$

A partir desta equação, se a *figura de mérito* de uma experiência particular é muito maior que os valores de  $|m_l^2 - m_m^2|$ , qualquer efeito da oscilação será difícil de observar [12]. Uma experiência de oscilações de neutrinos é sensível para valores de  $m_l^2 - m_m^2$  que satisfaçam a seguinte relação:

$$\bar{m}^2 \lesssim |m_l^2 - m_m^2| \quad (4.57)$$

Se assim for, haverá dois tipos de consequências [12]:

- Experiências de desaparecimento, ou seja:

$$P_{\alpha \rightarrow \alpha}(x) < 1 \quad (4.58)$$

pelo que alguns dos  $\nu_\alpha$  do feixe original desapareceram. Numa experiência típica deste tipo temos, por exemplo, um feixe de  $\nu_e^c$  que percorre uma determinada

distância e choca num alvo. Devido às interações ditadas pelo Lagrangeano das correntes carregadas, dado pela expressão 4.27, o feixe de  $\nu_e^c$  produzirá positrões pelo processo inverso do decaimento  $\beta$ :

$$\nu_e^c + X \rightarrow e^+ + Y \quad (4.59)$$

onde  $X$  e  $Y$  são dois núcleos. Se o fluxo de positrões observado for menor que o esperado, implica que alguns dos  $\nu_e^c$  desapareceram do feixe original, resultando assim uma evidência para as oscilações dos neutrinos;

- Experiências de aparecimento: cada desaparecimento deve ser compensado pelo aparecimento de outro sabor, isto é, pelo facto que:

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}(x) > 0, \quad \alpha \neq \beta \quad (4.60)$$

Por exemplo, começando com um feixe de  $\nu_\mu^c$  que percorre alguma distância e choca depois com um alvo, vemos se produz um positrão. Na ausência de oscilações isto é impossível [12].

Poderá parecer que as experiências de aparecimento são muito simples, visto que a observação de um evento deste tipo poderá proporcionar uma evidência para as oscilações dos neutrinos, pelo facto que na experiência de desaparecimento devemos observar um desvio significativo de uma certa probabilidade a partir da unidade. Mas, há outro aspecto a ter em conta: numa experiência de aparecimento podemos observar, para um canal específico, uma oscilação de  $\nu_\mu$  para  $\nu_e$ . Se  $\nu_\mu$  se mistura muito pouco com  $\nu_e$ , mas muito fortemente com outro estado, a experiência de aparecimento  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$  será difícil de fazer. Por outro lado, supondo que estamos a fazer uma experiência de desaparecimento num feixe de  $\nu_e$ , se há um efeito observável, isto mostrará no vácuo quer as oscilações de  $\nu_e$  para  $\nu_\mu$ , ou  $\nu_\tau$ , ou para qualquer outro neutrino.

Alguns modelos para a massa dos neutrinos prevêm neutrinos estéreis que não têm interações mediadas por bosões de *gauge* do SM. Se o  $\nu_e$ , por exemplo, se mistura significativamente com neutrinos estéreis, uma experiência de aparecimento será infrutífera, visto que a secção eficaz para a produção do leptão carregado deve ser extremamente pequena se usarmos o neutrino estéril. Por outro lado, uma experiência de aparecimento pode ainda registar um esvaziamento na probabilidade do feixe  $\nu_e$ . Em resumo, podemos dizer que uma experiência

de aparecimento mede oscilações  $\nu_l \rightarrow \nu_{l'}$  para neutrinos específicos, ao passo que as experiências de desaparecimento são sensíveis a oscilações  $\nu_l \rightarrow \nu_X$ , onde  $\nu_X$  pode ser qualquer sabor, incluindo os neutrinos estéreis.

Nas experiências do primeiro tipo, os neutrinos de um certo sabor, por exemplo  $\nu_\mu$ , são produzidos e o aparecimento de neutrinos de sabor diferente, por exemplo  $\nu_\tau$ , são pesquisados numa dada distância.

Nas experiências do segundo tipo, neutrinos de um certo sabor, por exemplo  $\nu_\mu$ , são produzidos a uma dada distância e neutrinos desse sabor,  $\nu_\mu$ , são detectados. Neste último caso, se o número de neutrinos detectados é menor do que o número esperado (com a suposição que não há oscilações), temos o sinal de que alguns neutrinos se transformaram em neutrinos de outros sabores.

Experiências em reactores em que são pesquisadas as transições  $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e$  são tipicamente experiências de desaparecimento, enquanto que nos aceleradores podem ocorrer os dois tipos de experiências.

A probabilidade das oscilações para neutrinos puramente de Majorana (sem termo de massa de Dirac) é exactamente a mesma para o caso onde os neutrinos têm apenas um termo de massa de Dirac. Daí, não haver maneira de distinguir neutrinos puramente de Majorana de neutrinos de Dirac através do estudo das oscilações dos neutrinos. Essencialmente, a razão desta propriedade deve-se ao facto do número total leptónico  $L$  não ser violado pelas oscilações dos neutrinos. A situação é um pouco diferente no caso mais geral onde existem em simultâneo termos de massa de Dirac e de Majorana, uma vez que na presença destes dois termos o número total leptónico  $L$  não é conservado. Daí as oscilações dos neutrinos permitirem distinguir, à partida, neutrinos com termos de massa de Dirac ou Majorana dos neutrinos com termos de massa de Dirac+Majorana [56]. Enquanto que os decaimentos  $\beta$  duplos sem neutrinos permitem seleccionar os neutrinos com termos de massa do tipo de Dirac dos neutrinos com termos de massa de Majorana ou Dirac+Majorana. Conhecer a natureza das massas dos neutrinos: de Dirac, Majorana ou Dirac + Majorana, implica, de facto, conjugar os resultados das experiências do decaimento  $\beta$  duplo sem neutrinos com os dados experimentais das oscilações dos neutrinos.

### Caso de Oscilação com Dois Sabores de Neutrinos

A título ilustrativo e com relevância prática para exemplos onde uma das gerações de neutrinos desacopla, consideremos o caso da mistura de dois tipos

de neutrinos:

$$\begin{aligned}\nu_{eL} &= \cos \theta \nu_{1L} + \sin \theta \nu_{2L} \\ \nu_{\mu L} &= -\sin \theta \nu_{1L} + \cos \theta \nu_{2L}\end{aligned}\quad (4.61)$$

onde  $\theta$  é o ângulo de mistura. A partir da equação 4.52, a probabilidade de transição é dada por [78]:

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \left( 1 - \cos \frac{\Delta m^2 L}{2p} \right) \quad (4.62)$$

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} = 1 - P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \left( 1 - \cos \frac{\Delta m^2 L}{2p} \right) \quad (4.63)$$

onde  $\Delta m_{12}^2 = m_2^2 - m_1^2$ .

O parâmetro de mistura,  $\sin^2 2\theta$ , é a amplitude da oscilação. Assim, para uma energia fixa, a probabilidade de transição é uma função periódica da distância.

Para as oscilações dos neutrinos serem observadas é necessário que  $\Delta m_{12}^2$  satisfaça a seguinte condição:

$$\Delta m_{12}^2 \gtrsim \frac{E}{L} \quad (4.64)$$

Esta condição estabelece uma linha-guia para encontrar a sensibilidade das experiências de oscilações de neutrinos para  $\Delta m_{12}^2$ , para grandes valores de  $\sin^2 2\theta$ .

### Caso de Oscilação com Três Sabores de Neutrinos

Consideremos agora o caso de oscilação de três sabores de neutrinos. O estado próprio do sabor do neutrino e o estado próprio de massa são dados por [70]:

$$\begin{bmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \\ \nu_{3L} \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

Em geral, no caso de neutrinos de Dirac, a matriz de mistura leptônica  $U$  depende de três ângulos de mistura  $\theta_{12}$ ,  $\theta_{13}$  e  $\theta_{23}$  e uma fase de violação de  $CP$ ,  $\delta$ . É conveniente parametrizar a matriz  $U$ , que coincide com a parametrização usual da matriz de mistura dos quarks, ou seja [70]:

$$U = \begin{bmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

onde  $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$  e  $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ . As probabilidades de oscilação entre vários estados de sabores são dadas pela expressão:

$$P(\nu_a \rightarrow \nu_b) = |A(\nu_a \rightarrow \nu_b; t)|^2 = |U_{bj}e^{-iEj t}U_{aj}^*|^2 \quad (4.67)$$

Ao contrário do caso de oscilações de dois sabores, as probabilidades, agora, não têm uma forma simples. Há, contudo, diversos casos de limitação prática importante nos quais podemos obter uma simples aproximação das expressões para as probabilidades de oscilação em termos de dois sabores. Vamos assumir que  $\Delta m_{ij}^2$  apresenta a hierarquia:

$$|\Delta m_{21}^2| \ll |\Delta m_{31}^2| \simeq |\Delta m_{32}^2| \quad (4.68)$$

Isto significa que em qualquer caso  $m_1 \ll (\lesssim) m_2 \ll m_3$  (hierarquia directa) ou  $m_3 \ll m_1 \approx m_2$  (hierarquia da massa invertida). Estes casos têm interesse prático, pois os dados dos neutrinos solares indicam que devemos ter um  $\Delta m_{\text{solar}}^2 \sim 10^{-10} \text{ eV}^2$  para a solução do problema dos neutrinos solares, através das oscilações dos neutrinos no vácuo, visto que a explicação das experiências com neutrinos atmosféricos, através das oscilações dos neutrinos, requer  $\Delta m_{\text{atm}}^2 \sim 10^{-3} \text{ eV}^2$ , muito menor do que  $\Delta m_{\text{solar}}^2$ . Consideremos as oscilações sobre a *baseline*  $L$  para a qual:

$$\frac{\Delta m_{21}^2 L}{2E} \ll 1 \quad (4.69)$$

Este caso tem relevância para experiências com neutrinos atmosféricos, em reactores e em aceleradores. Então, a partir da relação 4.69, as oscilações devidas a pequenos  $\Delta m_{21}^2$  são efectivamente bloqueadas neste caso, e podemos considerar o limite  $\Delta m_{21}^2 \rightarrow 0$ . A probabilidade da oscilação de  $\nu_a \rightarrow \nu_b$  é então dada simplesmente por:

$$P(\nu_a \rightarrow \nu_b) = 4 |U_{a3}^2| |U_{b3}^2| \sin^2 \left( \frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \quad (4.70)$$

Isto assemelha-se à probabilidade de oscilação de dois sabores. As probabilidades de oscilação entre  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  e  $\nu_\tau$  são dadas por [70]:

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = 4 |U_{e3}^2| |U_{\mu3}^2| \sin^2 \left( \frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) = s_{23}^2 \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left( \frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \quad (4.71)$$

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\tau) = 4 |U_{e3}^2| |U_{\tau3}^2| \sin^2 \left( \frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) = c_{23}^2 \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left( \frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \quad (4.72)$$

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau) = 4 |U_{\mu3}^2| |U_{\tau3}^2| \sin^2 \left( \frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) = c_{13}^4 \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \left( \frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \quad (4.73)$$

com  $P(\nu_a \rightarrow \nu_b) = P(\nu_b \rightarrow \nu_a)$ . As probabilidades dependem apenas dos elementos da terceira coluna da matriz de mistura leptónica  $U$  e de  $\Delta m_{ij}^2$ . A probabilidade residual dos neutrinos do electrão é dada simplesmente por:

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e) = 1 - \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left( \frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \quad (4.74)$$

isto é, coincide com a probabilidade residual para o neutrino do electrão no caso da oscilação de dois sabores, com  $\Delta m^2 = \Delta m_{31}^2$  e o ângulo de mistura  $\theta_0 = \theta_{13}$ .

Consideremos agora outro caso limite, que é relevante para as oscilações dos neutrinos solares e também para muitas experiências em reactores *long baseline*, tal como o KamLAND [37]. Assumindo a hierarquia dada pela relação 4.68 e na adição:

$$\frac{\Delta m_{31}^2}{2E} L \simeq \frac{\Delta m_{32}^2}{2E} L \gg 1 \quad (4.75)$$

visto que a condição 4.69 não é muito necessária. Neste caso a oscilação devida a  $\Delta m_{31}^2$  e  $\Delta m_{32}^2$  é muito firme e conduz a um efeito na medição; a probabilidade residual do electrão é dada por:

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e) \simeq c_{13}^4 P + s_{13}^4 \quad (4.76)$$

onde  $P$  é a probabilidade residual no caso da oscilação de dois sabores com  $\Delta m^2 = \Delta m_{21}^2$  e o ângulo de mistura  $\theta_0 = \theta_{12}$ . No caso das oscilações dos neutrinos no vácuo temos:

$$P = 1 - \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \left( \frac{\Delta m_{21}^2}{4E} L \right) \quad (4.77)$$

Finalmente, consideremos o limite  $U_{e3} = 0$  (o resultado será também válido, aproximadamente, para  $|U_{e3}| \ll 1$ ). Neste caso obtemos [70]:

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = c_{23}^2 \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \Delta_{21} \quad (4.78)$$

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\tau) = s_{23}^2 \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \Delta_{21} \quad (4.79)$$

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau) = \sin^2 2\theta_{23} (-s_{12}^2 c_{12}^2 \sin^2 \Delta_{21} + s_{12}^2 \sin^2 \Delta_{31} c_{12}^2 \sin^2 \Delta_{32}) \quad (4.80)$$

onde  $\Delta_{ij} \equiv (\Delta m_{ij}^2/4E) L$ . Notar que os casos limite discutidos não são mutuamente excluídos, isto é, têm alguma sobreposição em cada um.

Apesar de neste trabalho apenas ter sido realizado o estudo das oscilações dos neutrinos no vácuo, em geral, quando consideramos a propagação dos neutrinos do Sol até à Terra, devemos ter em conta os efeitos da matéria nas oscilações dos neutrinos. O mesmo se aplica para atmosfera terrestre e para as experiências de oscilações de neutrinos nos aceleradores, nas quais as trajetórias dos neutrinos e as suas porções significativas vão através da matéria na Terra. Os efeitos da matéria nas oscilações  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$  são relativamente pequenos (eles desaparecem quando consideramos a oscilação de dois sabores), mas são apreciáveis para as oscilações  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$  e  $\nu_e \rightarrow \nu_\tau$ .

## 4.5 Dados Experimentais da Física dos Neutrinos

A primeira informação experimental das oscilações dos neutrinos foi obtida há mais de 20 anos, como um produto acessório de uma pesquisa designada para outras medições. Actualmente, a maior parte das experiências com neutrinos são dedicadas à detecção das oscilações dos neutrinos.

Na secção 4.1 já foram referidas as diferentes experiências com neutrinos. Essas experiências usam neutrinos solares, atmosféricos, reactores nucleares ou aceleradores de partículas e têm fornecido informação a cerca dos ângulos de mistura dos neutrinos e das suas  $\Delta m_{ij}^2$  [79, 80].

Os valores mais recentes, relativamente aos dados experimentais dos neutrinos, ângulos de mistura e  $\Delta m_{ij}^2$ , são os apresentados no PDG 2006 [18]. Os

valores desses parâmetros resultam de uma análise dos dados baseados na mistura de três sabores de neutrinos [79] e são:

- Neutrinos solares:

$$\sin^2 2\theta_{12} = 0.86_{-0.04}^{+0.03} \quad (4.81)$$

$$\Delta m_{21}^2 = (8.0_{-0.3}^{+0.4}) \times 10^{-5} \text{ eV}^2 \quad (4.82)$$

- Neutrinos atmosféricos:

$$\sin^2 2\theta_{23} > 0.92 \quad (4.83)$$

$$1.9 \times 10^{-3} \text{ eV}^2 < |\Delta m_{32}^2| < 3.0 \times 10^{-3} \text{ eV}^2 \quad (4.84)$$

- Neutrinos de reactores (CHOOZ):

$$\sin^2 2\theta_{13} < 0.19 \text{ 90\% CL} \quad (4.85)$$

Notar que  $\Delta m_{13}^2$  é obtido a partir de  $\Delta m_{21}^2$  e de  $\Delta m_{23}^2$ . Actualmente, ainda não há conhecimento a cerca do sinal de  $\Delta m_{23}^2$ .

### Neutrinos Solares

Os neutrinos são uma parte essencial da evolução estelar. O Sol brilha devido à energia produzida na reacção de fusão nuclear no interior da coroa solar, do tipo:



Assim, a produção de energia do Sol é acompanhada pela emissão de neutrinos do electrão. Esta reacção representa, de uma forma compacta, uma série de reacções em cadeia. A energia de ligação libertada, 28 MeV, da difusão da partícula  $\alpha$  para fora da coroa solar, obtendo degeneração na frequência do processo, aparece como luz solar. Estamos interessados nos neutrinos que têm uma energia de alguns MeVs. A densidade de uma coroa estelar típica é cerca de  $10^8 \text{ g/m}^3$  e a secção eficaz de um  $\nu_e$  típico é cerca de  $10^{-47} \text{ m}^2$ . O caminho livre para o neutrino é da ordem dos  $10^{15} \text{ m}$ , que é muito maior que o raio solar e das estrelas típicas. Assim, os neutrinos escapam do Sol e das estrelas. A

Fluxo	Reacção	$\Phi_\nu$ ( $10^{10}/\text{cm}^2 \text{ s}$ )	$\langle E_\nu \rangle$ (MeV)	$E_\nu^{\text{max}}$ (MeV)
<i>pp</i>	$pp \rightarrow {}^2\text{H } \bar{e} \nu_e$	$6.0 \pm 1\%$	0.267	0.423
<i>pep</i>	$pep \rightarrow {}^2\text{H } \nu_e$	$0.014 \pm 1\%$	1.445	1.445
<i>hep</i>	${}^3\text{He } p \rightarrow {}^4\text{He } \bar{e} \nu_e$	$\sim 10^{-6}$	9.628	18.8
Be	${}^7\text{Be } e \rightarrow {}^7\text{Li } \nu_e$	$0.477 \pm 9\%$	0.814	0.863
B	${}^8\text{B } \rightarrow {}^8\text{Be } \bar{e} \nu_e$	$0.00050 \pm 20\%$	6.735	16.3
N	${}^{13}\text{N } \rightarrow {}^{13}\text{C } \bar{e} \nu_e$	$0.033 \pm 20\%$	0.706	1.20
O	${}^{15}\text{O } \rightarrow {}^{15}\text{N } \bar{e} \nu_e$	$0.026 \pm 20\%$	0.996	1.73

Tabela 4.1: Previsão do fluxo dos neutrinos solares na ausência de oscilações.  $\Phi$  é o fluxo total de  $\nu_e$  na Terra.  $\langle E_\nu \rangle$  é a energia média do neutrino e ( $E_\nu^{\text{max}}$ ) é a máxima energia do neutrino [82].

partir da observação da luminosidade solar, podemos determinar que o fluxo de neutrinos a partir do Sol é cerca de  $6 \times 10^{14} \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}$  na Terra. Estes neutrinos transportam consigo cerca de 2 – 3% da energia total emitida pelo Sol. Então, os neutrinos, a partir das estrelas, são mensageiros de informação física, em conjunto com a usual radiação electromagnética [12]. Uma vantagem dos neutrinos, relativamente à radiação electromagnética, é que eles transportam informação acerca da coroa estelar e, por isso, um estudo detalhado dos neutrinos solares proporcionará informação útil sobre o interior das estrelas bem como a validade da existência de modelos teóricos para a estrutura e evolução do Sol e das outras estrelas. Com estas motivações, no início dos anos 60 do século XX, Bahcall e os seus colaboradores, bem como Davis e os seus colaboradores abriram caminho a um programa detalhado para estudar os neutrinos solares: Bahcall, os aspectos teóricos e Davis, a detecção experimental [81].

A energia do Sol é produzida em reacções em cadeia termonucleares *pp* e no ciclo CNO. As principais fontes de neutrinos solares são as reacções *pp* que são apresentadas na tabela 4.1.

R.Davis e colaboradores [38] realizaram a primeira experiência com neutrinos

Experiência	Reacção	Razão Observada	Razão Prevista
Homestake	$\nu_e \text{ } ^{37}\text{Cl} \rightarrow \text{}^{37}\text{Ar} e$	$2.56 \pm 0.23$	$7.6 \pm 1.3$
GALLEX	$\nu_e \text{}^{71}\text{Ga} \rightarrow \text{}^{37}\text{Ge} e$	$77.5 \pm 7.7$	$128 \pm 9$
SAGE	$\nu_e \text{}^{71}\text{Ga} \rightarrow \text{}^{37}\text{Ge} e$	$69.1 \pm 5.7$	$128 \pm 9$
GNO	$\nu_e \text{}^{71}\text{Ga} \rightarrow \text{}^{37}\text{Ge} e$	$62.9 \pm 5.9$	$128 \pm 9$
Kamiokande	$\nu e \rightarrow \nu e$	$2.80 \pm 0.36$	$5.05 \pm 0.9$
Super-Kamiokande	$\nu e \rightarrow \nu e$	$2.35 \pm 0.06$	$5.05 \pm 0.9$
SNO	$\nu e \rightarrow \nu e$	$2.31 \pm 0.21$	$5.05 \pm 0.9$
	$nu_e d \rightarrow ppe$	$1.67 \pm 0.08$	$5.05 \pm 0.9$
	$\nu d \rightarrow pn\nu$	$5.17 \pm 0.38$	$5.05 \pm 0.9$

Tabela 4.2: Resultados de experiências com neutrinos solares. Os dados medidos no Homestake, GALLEX, SAGE e GNO são dados em SNU(1SNU= $10^{-36}$  eventos/átomo/segundo) e no Kamiokande, Super-Kamiokande e SNO são dados em  $10^6 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$  [80, 82].

solares no Cholorine, conhecida como *Homestake Experiment*, há mais de 30 anos. Os resultados das cinco experiências com neutrinos solares, que ocorrem actualmente [80], são apresentados na tabela 4.2 [82].

Tal como mostra a tabela 4.2, o fluxo de neutrinos observado nestas experiências é significativamente menor (cerca de metade) que a previsão do SSM. Assim, em todas as experiências de neutrinos solares há um défice nos neutrinos solares observados. Este défice constitui o problema dos neutrinos solares. Qual é a origem deste problema? Há o consenso que este problema deva ser atribuído às propriedades dos neutrinos.

O problema dos neutrinos solares pode ser resolvido se assumirmos que os neutrinos solares  $\nu_e$  se transformam noutra sabor ( $\nu_\mu, \nu_\tau$ ) ou estados estéreis através das oscilações dos neutrinos. Para explicar todos os dados existentes sobre os neutrinos solares, é suficiente assumirmos que existem transições entre dois estados de neutrinos.

### Neutrinos Atmosféricos

A principal fonte dos neutrinos atmosféricos é a cadeia dos decaimentos dos piões, sendo produzidos na interacção dos raios cósmicos com a atmosfera (nas experiências os neutrinos e os antineutrinos não são distinguidos):

$$\pi \rightarrow \mu + \nu_\mu \quad (4.87)$$

$$\mu \rightarrow e + \nu_e + \nu_\mu \quad (4.88)$$

Os detectores subterrâneos dos neutrinos produzidos pelos raios cósmicos na atmosfera têm medido uma razão  $\nu_\mu/\nu_e$  muito menor do que a esperada e também um déficit de neutrinos ascendentes  $\nu_\mu$  comparado com os neutrinos descendentes. Isto pode ser explicado pelas oscilações dos neutrinos que conduzem ao desaparecimento do  $\nu_\mu$  e uma quase mistura completa entre  $\nu_\mu$  e  $\nu_\tau$ . Este efeito tem sido confirmado na experiência K2K, usando aceleradores de neutrinos [83].

Quase todos os muões com energia relativamente baixa ( $\lesssim 1$  GeV) têm tempo suficiente para decair na atmosfera, assim a razão do fluxo dos neutrinos do muão de baixa energia e dos neutrinos do electrão é aproximadamente igual a dois. Para altas energias esta razão torna-se maior.

Experiência	Razão Dupla $R'$
Kamiokande (sub-GeV)	$0.60^{+0.07}_{-0.06} \pm 0.05$
Kamiokande (multi-GeV)	$0.57^{+0.08}_{-0.07} \pm 0.07$
Super-Kamiokande (sub-GeV)	$0.680^{+0.023}_{-0.022} \pm 0.053$
Super-Kamiokande (multi-GeV)	$0.678^{+0.042}_{-0.039} \pm 0.080$
IBM	$0.54 \pm 0.05 \pm 0.11$
Soudan2	$0.68 \pm 0.11 \pm 0.06$

Tabela 4.3: Razões duplas para várias experiências [78].

O fluxo absoluto dos neutrinos do muão e do electrão pode ser calculado com uma exactidão de 20–30%. Contudo, devido a um cancelamento aproximado de

incertezas do fluxo absoluto, a razão do fluxo dos neutrinos do muão e do electrão é prevista com uma incerteza de cerca de 5% [84]. Os resultados das experiências com neutrinos atmosféricos são quase sempre apresentados em termos da razão dupla da razão dos eventos do muão e do electrão observados e a razão dos eventos do muão e do electrão calculados com a Simulação de Monte Carlo, sob a suposição que não há oscilações dos neutrinos:

$$R' = \frac{\left(\frac{N_\mu}{N_e}\right)_{obs}}{\left(\frac{N_\mu}{N_e}\right)_{MC}} \quad (4.89)$$

Conforme se indica na tabela 4.3, os valores observados da razão  $R'$  são significativamente menores do que um, o que pode significar o desaparecimento do  $\nu_\mu$ , ou o aparecimento de  $\nu_e$  ou ainda ambos. Super-Kamiokande encontrou uma forte evidência a favor do desaparecimento do  $\nu_\mu$  na região multi-GeV [85].



# Capítulo 5

## Conclusões

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho aprofundamos o nosso conhecimento sobre as teorias de *gauge* e a sua importância na formulação do SM para a compreensão da Física de Partículas fundamentais. Com a pesquisa realizada sobre a Física dos Neutrinos constatamos, mais uma vez, que em Ciência nada está acabado. Com as novas descobertas, relativamente aos neutrinos, verificamos que são necessárias mudanças no SM, de modo a que os neutrinos com massa, ainda que pequena, sejam incorporados no modelo.

As teorias de *gauge* para as interacções electrofracas, nos últimos 35 anos, têm tido um enorme sucesso. O SM conseguiu previsões novas e cruciais. A existência da corrente neutra fraca e os bosões vectoriais mediadores, com uma relação, entre as suas massas, bem definida, foi confirmada experimentalmente.

As interacções fracas são implementadas pela teoria de *gauge* baseada no grupo  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ , em que a simetria é quebrada espontaneamente pelo Mecanismo de Higgs. Os campos da matéria, leptões e quarks, são organizados em famílias, sendo as componentes esquerdas dos fermiões isodupletos fracos, enquanto que as componentes direitas se transformam como isosingletos fracos. Os bosões vectoriais,  $W_\mu^\pm$ ,  $Z_\mu^0$  e  $\gamma$ , que medeiam as interacções, podem ser produzidos, por exemplo, através de interacções electrão-positrão ou próton-próton. Um ingrediente essencial do modelo é o potencial escalar que é adicionado ao Lagrangeano para gerar a massa do bosão vectorial e do fermião, através do Mecanismo de Higgs. O campo escalar que resta, o bosão de Higgs, faz parte do espectro físico. Esta é a única peça do SM que espera confirmação experimental, talvez no LHC, que está a ser construído no CERN.

A massa do Higgs deve ser menor do que  $\sim 260$  GeV, de acordo com o limite

superior teórico para a sua massa.

No SM, os neutrinos são partículas sem massa, pois está apenas presente um estado de helicidade do neutrino por geração, e os termos de Dirac requerem ambos os estados de helicidade. Inicialmente, pensava-se que os neutrinos não tinham massa, mas hoje sabe-se que têm e que é muito pequena.

Uma explicação natural para a pequenez da massa dos neutrinos tem sido encontrada através do Mecanismo See-saw.

Em quase todas as experiências realizadas com neutrinos, estes são produzidos pelas interações carregadas fracas. Se existir a mistura de neutrinos, a corrente carregada pode produzir qualquer neutrino em conjugação com um lépton carregado. Assim, o feixe de neutrinos produzido é uma sobreposição de partículas de diferentes estados próprios de massa. Como o feixe se propaga, as diferentes componentes do feixe desenvolvem-se diferenciadamente, pelo que a probabilidade de encontrar estados próprios diferentes no feixe varia com o tempo. Esta consequência da mistura de neutrinos, considerada por Pontecorvo em 1957, é chamada oscilação dos neutrinos.

A evidência a favor das oscilações dos neutrinos atmosféricos encontrada no Super-Kamiokande e as indicações a favor das oscilações, noutras experiências com neutrinos atmosféricos, experiências com neutrinos solares abriram um novo capítulo na Física dos Neutrinos: a física dos neutrinos massivos e a sua mistura.

Não há dúvida que o programa de futuras investigações, das oscilações dos neutrinos, conduzirá a um progresso significativo na compreensão da origem da pequenez da sua massa e da sua mistura, que será, certamente, de extrema importância para o futuro da Física de Partículas elementares, da astrofísica e da cosmologia.

# Capítulo 6

## Anexos

### 6.1 Anexo 1

- *Demonstração de que termo  $m^2 A_\mu A^\mu$  não deixa o Lagrangeano invariante*

Para  $m^2 A_\mu A^\mu$  ser invariante:

$$\delta (m^2 A_\mu A^\mu) = 0 \quad (6.1)$$

Como

$$\delta A_\mu (x) = -\frac{1}{e} \partial_\mu \theta (x), \quad (6.2)$$

substituindo vem:

$$\delta (m^2 A_\mu A^\mu) = m^2 \left( -\frac{1}{e} \partial_\mu \theta (x) \right) \left( -\frac{1}{e} \partial^\mu \theta (x) \right) \quad (6.3)$$

$$= -\frac{m^2}{e} (\partial_\mu \theta (x) \partial^\mu \theta (x)) \neq 0, \quad (6.4)$$

logo, o termo  $m^2 A_\mu A^\mu$  não é invariante sob a transformação de *gauge* local considerada.

- *Demonstração de que quando  $\langle 0 | \phi | 0 \rangle = v$ ,  $v \neq 0$ , então ocorre quebra espontânea de simetria*

– Se P for um operador associado com a simetria, então:

$$P\Phi P^{-1} = -\Phi; \quad (6.5)$$

– Se o vácuo é invariante sob  $P$ , então:

$$P|0\rangle = |0\rangle; \quad (6.6)$$

– Se  $\langle 0|\phi|0\rangle = v$ , então:

$$\begin{aligned} \langle 0|\phi|0\rangle &= v = \langle 0|P^{-1}P\phi P^{-1}P|0\rangle = \langle 0| -P^{-1}\phi P|0\rangle \\ &= \langle 0|P\phi P^{-1}|0\rangle = \langle 0|-\phi|0\rangle = -v. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Então,  $v = -v \Rightarrow v = 0$ .

Para  $v \neq 0$ , então devemos ter:

$$P|0\rangle \neq |0\rangle, \quad (6.8)$$

ou seja, o vácuo não é invariante sob esta simetria.

## 6.2 Anexo 2

■ *Caso simples duma geração,  $\mathcal{N} = 1$ , para o Mecanismo See-saw:*

Consideremos o Lagrangeano:

$$-\mathcal{L}_{massa} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \nu_L^T & (\nu_L^c)^T \end{bmatrix} C \begin{bmatrix} 0 & M_D^* \\ M_D^\dagger & M_R^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_L \\ \nu_L^c \end{bmatrix} + \text{h.c.} \quad (6.9)$$

A matriz de massa pode ser escrita como:

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 0 & M_D^* \\ M_D^\dagger & M_R^* \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

onde  $M_D$  e  $M_R$  são números. Além disso, por simplicidade, vamos assumir que ambos  $M_D$  e  $M_R$  são reais e  $M_R > 0$ .

Escolhendo uma matriz ortogonal:

$$O = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

com

$$\tan 2\theta = \frac{2M_D}{M_R} \quad (6.12)$$

Então

$$OMO^T = \begin{bmatrix} -m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

é uma matriz diagonal com:

$$m_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{M_R^2 + 4M_D^2} \mp M_R \right) \quad (6.14)$$

Visto que  $m_{1,2} \geq 0$ , ainda há um pequeno problema, os elementos da matriz diagonal  $OMO^T$  não são todos não-negativos, e por isso não podem ser interpretados como massas de campos físicos. Assim, escrevemos:

$$\begin{bmatrix} -m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv mK^2 \quad (6.15)$$

onde  $m$  contém os valores próprios de massa positiva e  $K^2$  é uma matriz diagonal de sinais positivo e negativo. Logo:

$$\mathcal{M} = O^T m K^2 O \quad (6.16)$$

Definindo os vectores coluna:

$$\begin{bmatrix} n_{1L} \\ n_{2L} \end{bmatrix} = O \begin{bmatrix} \nu_L \\ \nu_L^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_L \\ \nu_L^c \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

e

$$\begin{bmatrix} n_{1R} \\ n_{2R} \end{bmatrix} = K^2 O \begin{bmatrix} \nu_R^c \\ \nu_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_R^c \\ \nu_R \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

então, os termos de massa reduzem-se simplesmente a:

$$-\mathcal{L}_{massa} = m_1 \bar{n}_{1L} n_{1R} + m_2 \bar{n}_{2L} n_{2R} + \text{h.c.} \quad (6.19)$$

Assim, para uma geração obtemos dois estados próprios. Além disso, a partir das equações 6.17 e 6.18, temos que [12]:

$$n_1 = n_{1L} + n_{1R} = \cos \theta (\nu_L - \nu_R^c) - \sin \theta (\nu_L^c - c) \quad (6.20)$$

$$n_2 = n_{2L} + n_{2R} = \sin \theta (\nu_L - \nu_R^c) + \cos \theta (\nu_L^c - N_R) \quad (6.21)$$

Visto que  $\nu_R^c$  é o conjugado de  $\nu_L$  e  $\nu_L^c$  de  $\nu_R$ , então:

$$n_1 = -n_1^c, \quad n_2 = -n_2^c \quad (6.22)$$

pelo que ambos,  $n_1$  e  $n_2$ , são partículas de Majorana. Para  $\mathcal{N}$  gerações, obtemos, em geral,  $2\mathcal{N}$  partículas de Majorana.

O aspecto mais importante deste modelo é o de que pode fornecer uma razão para a pequenez da massa dos neutrinos. Notemos novamente o caso de uma geração. Na matriz de massa, dada pela expressão 6.10, a quantidade  $M_D$  surge a partir do acoplamento  $\Phi$  e, por isso, é natural assumir que seja da mesma ordem de grandeza da massa de outros fermiões da mesma geração. Vamos supor que  $M_R \gg M_D$ , então, os valores próprios de  $m_{1,2}$  reduzem-se a:

$$m_1 \simeq \frac{M_D^2}{M_R} \quad \text{e} \quad m_2 \simeq M_R \quad (6.23)$$

Visto que  $M_R \gg M_D$ , então segue que  $m_1 \ll M_D$ , o que significa que o neutrino é muito mais leve do que os fermiões carregados.

# Bibliografia

- [1] Currículo Nacional do Ensino Secundário - Programa de Física 12º Ano.
- [2] W. Pauli, na carta para os participantes da Conferência em Tübingen (1930), Wolfgang Pauli, *Collected Scientific Papers*, ed R. Kronong & V. Weisskopf (1964).
- [3] F. Reines, C. L. Cowan, *Phys.Rev.* 92, 830 (1953).
- [4] Goldstein, H., Pool,C., Safko,J., *Classical Mechanics*, third edition, Addison Wesley, USA (2002).
- [5] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, John Wiley & Sons, Canada (1987).
- [6] G.C.Branco, *Introdução às Teorias de Unificação*, IST (1994).
- [7] J.C. Romão, *O Modelo Standard das Interação Electrofracas*, IST (1998).
- [8] H. Wely, *Ann. Phys.* 59,101 (1919).
- [9] K. Moriyasu, *An Elementary Primer for Gauge Theory*, Singapore: World Scientific (1983).
- [10] G.t' Hooft, *Nucl. Phys.* B33,173 (1971), B35, 167 (1971).
- [11] J.M.R. Rodrigues, *Introdução à Teoria da Relatividade Restrita*, IST Press (1998) - Q. Ho-Kim, N. Kumar e C. S. Lam, *Invitation to Contemporary Physics*, World Scientific, (1991), p.113.
- [12] Mohapatra, R.N., Pal,B.P., *Massive Neutrinos in Physics and Astrophysics*, Utopia Press, Singapore (1991).

- 
- [13] P.W. Higgs, Phys. Rev.Lett. 12, 132 (1964); Phys. Rev.Lett. 13, 508 (1964), F. Englert and R. Brout, Phys. Rev.Lett. 13, 321 (1964), G.S. Guralnik, C.R. Hagen and T.W.B. Kibble, Phys. Rev.Lett. 13, 585 (1965).
- [14] E.Fermi, Ricerca Scient. 2, 12 (1933).
- [15] E. Fermi, Z. Physik. 88, 161 (1934).
- [16] Perkins,D.H., *Introduction to High Energy Physics*, Cambridge University Press, UK (2000).
- [17] R.P. Feynman and M. Gell-Mann, Phys. Rev. D2, 193 (1958).
- [18] W.-M. Yao et al., J. Phys. G 33, 1 (2006), Particle Data Group, LBNL and CERN.
- [19] <http://particleadventure.org/paticleadventure/>.
- [20] N. Cabibbo, Phys. Rev. Lett. 10, 531 (1963).
- [21] Aitchison,I.J.R., Hey, A.J.G., *Gauge Theories in Particle Physics*, second edition, Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia, USA (1989).
- [22] S.L. Glashow, J.Illiopoulos and Maiani, Phys. Rev. D2, 1285 (1970).
- [23] S.L. Glashow, Nucl. Phys. 22, 579 (1961).
- [24] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 19, 1264 (1967).
- [25] A. Salam, (1968), *Elementary Particle Theory*, ed N. Svartholm, (Stockholm: Almquist an Forlag).
- [26] M. Kobayashi and K. Maskawa, Progr. Theor. Phys. 49, 652 (1973).
- [27] A. Ceccucci (CERN), Z. Ligeti (LBNL), Y. Sakai (KEK), *The CKM Quark-Mixing Matrix*, Particle Data Group, LBNL and CERN, 2006.
- [28] G.C.Branco, J.P. Silva and L.Lavoura, *CP Violation*, Oxford University Press,(1999).
- [29] P. Minkowski, Phys. Lett. B 67, 421 (1977).

- [30] H. Murayama, Phys. World - May , 35 (2002).
- [31] Y. Fukuda et al. (Kamiokande Coll.), Phys. Lett. B 335, 237 (1994).
- [32] R. Becker-Szendy et al. (IMB Coll.), Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 38, 331 (1995).
- [33] M. C. Sanchez et al. [Soudan 2 Collaboration], Phys. Rev. D 68, 113004 (2003) [arXiv:hep-ex/0307069].
- [34] E. Aliu et al. [K2K Collaboration], Phys. Rev. Lett. 94, 081802 (2005) [arXiv:hep-ex/0411038]; L. Ludovici [K2K Collaboration], Nucl. Phys. Proc. Suppl. 155, 160 (2006); S. Yamamoto et al. [K2K Collaboration], Phys. Rev. Lett. 96, 181801 (2006) [arXiv:hep-ex/0603004].
- [35] M. Ambrosio et al. [MACRO Collaboration], Eur.Phys. J. C 36, 323 (2004); H. Gallagher, MACRO, Soudan Nucl. Phys. Proc. Suppl. 143, 79 (2005).
- [36] D. Ayres et al., MINOS Coll., report NUMI-L-63 (1995); N. Tagg [for the MINOS Collaboration], these proceedings.
- [37] K. Eguchi et al. [KamLAND Collaboration], Phys. Rev. Lett. 90, 021802 (2003) [arXiv:hep-ex/0212021]; T. Araki et al. [KamLAND Collaboration], Phys. Rev. Lett. 94, 081801 (2005) [arXiv:hep-ex/0406035].
- [38] B.T. Cleveland et al. (Homestake Coll.), Astrophys. J. 496, 505 (1998).
- [39] K.S. Hirata et al. (Kamiokande Coll.), Phys. Rev. Lett. 77, 1683 (1996).
- [40] W. Hampel et al. (GALLEX Coll.), Phys. Lett. B 447, 127 (1999).
- [41] J.N. Abdurashitov et al. (SAGE Coll.), Phys. Rev. Lett. 77, 4708 (1996); Phys. Rev. C 60, 055801 (1999).
- [42] Y. Fukuda et al. (Super-Kamiokande Coll.), Phys. Rev. Lett. 81, 1158 (1998); Phys.Rev. Lett. 82, 2430 (1999); M.B. Smy (Super-Kamiokande Coll.), hep-ex/9903034; S. Fukuda et al. [Super-Kamiokande Collaboration], Phys. Rev. Lett. 86, 5651 (2001) [arXiv:hep-ex/0103032]; S. Fukuda et al. [Super-Kamiokande Collaboration], Super-Kamiokande Phys. Rev. Lett. 86, 5656 (2001) [arXiv:hep-ex/0103033]; S. Fukuda et al. [Super-Kamiokande

- Collaboration], days of Phys. Lett. B 539, 179 (2002) [arXiv:hep-ex/0205075]; M. B. Smy et al. [Super-Kamiokande Collaboration], variation Phys. Rev. D 69, 011104 (2004) [arXiv:hep-ex/0309011]; J. Hosaka et al. [Super-Kamiokande Collaboration], arXiv:hep-ex/0508053; K. Scholberg (Super-Kamiokande Coll.), hep-ex/9905016, Talk presented at the VIth International Workshop on Neutrino Telescopes, Venice, 23–26 February 1999; T. Kajita (Super-Kamiokande Coll.), Talk presented at BEYOND'99, Castle Ringberg, Tegernsee, Germany, 6–12 June 1999; J. Learned (Super-Kamiokande Coll.), Talk presented at the 23rd Johns Hopkins Workshop on Current Problems in Particle Theory, Neutrinos in the Next Millennium, Johns Hopkins University, Baltimore, USA, 10–12 June 1999 (transparencies available at <http://www.pha.jhu.edu/events/jhwsh99/speakers.html>); M. Nakahata (Super-Kamiokande Coll.), Talk presented at TAUP'99, Paris, France, 6–10 September 1999 (transparencies available at <http://taup99.in2p3.fr/TAUP99/-program.html>).
- [43] Q. R. Ahmad et al. [SNO Collaboration], solar Phys. Rev. Lett. 87, 071301 (2001) [arXiv:nucl-ex/0106015]; Q. R. Ahmad et al. [SNO Collaboration], neutral current Phys. Rev. Lett. 89, 011301 (2002) [arXiv:nucl-ex/0204008]; Q. R. Ahmad et al. [SNO Collaboration], constraints Phys. Rev. Lett. 89, 011302 (2002) [arXiv:nucl-ex/0204009]; B. Aharmim et al. [SNO Collaboration], Phys. Rev. C 72, 055502 (2005) [arXiv:nucl-ex/0502021].
- [44] C. Athanassopoulos et al., LSND Coll., Phys. Rev. Lett. 77, 3082 (1996); C. Athanassopoulos et al., LSND Coll., Phys. Rev. Lett. 81, 1774 (1998); C. Athanassopoulos et al. [LSND Collaboration], Phys. Rev. C 58, 2489 (1998) [arXiv:nucl-ex/9706006].
- [45] B. Armbruster et al. [KARMEN Collaboration], Phys. Rev. D 65, 112001 (2002) [arXiv:hep-ex/0203021]; G. Drexlin, Nucl. Phys. Proc. Suppl. 118, 146 (2003).
- [46] I. Stancu [MiniBooNE Collaboration], Nucl. Phys. Proc. Suppl. 155, 164 (2006).
- [47] M. Apollonio et al. (CHOOZ Coll.), Phys. Lett. B 420, 397 (1998); Phys. Lett. B 466, 415 (1999); M. Apollonio et al., Eur. Phys. J. C 27, 331 (2003) [arXiv:hep-ex/0301017].

- [48] W.Pauli, *Neutrino Physics*, ed K. Winter, Cambridge University Press, 1991,pg 1.
- [49] F. Perrin, Comptes Rendues 197, 1625 (1933).
- [50] S.M. Bilenky, C. Giunti and W. Grimus, TUM-HEP 340 (1998).
- [51] L.Landau, Nucl.Phys. 3, 127 (1957).
- [52] T.D. Lee and C.N. Yang, Phys. Rev. 105, 1667 (1957).
- [53] A. Salam, II Nuovo Cim., 5, 299 (1957).
- [54] B. Pontecorvo, Chalk River Report PD-205, 20 November (1946).
- [55] R. J. Davies, D. S. Harmer, K.C. Hoffman, Phys. Rev. Lett. 20, 1205 (1968).
- [56] S. M. Bilenky, C. Giunti, W. Grimus, Prog. Part. Nucl. Phys. 43, 1, hep-ph/9812360 (1999).
- [57] F. Reines, C.L. Cowan, Nature 178, 446 (1956); F. Reines, C.L. Cowan, F. B. Harrison, H. W. Krise, A. D. McGuire, Science 124, 103 (1956).
- [58] S. Sakata, T. Inouë, Prog. Theor. Phys. 1, 143 (1943).
- [59] B.M. Pontecorvo, ZhETF 37, 1751 (1959).
- [60] G. Danby, J. M. Gaillard, K. Goulianos, L. M. Lederman, N. Mistry, M. Schwartz, J. Steinberger, Phys. Rev. Lett. 9, 36 (1962).
- [61] Particle Data Group, European Physical Journal C 15, 1 (2000).
- [62] B. Pontecorvo, J. Exptl. Theoret. Phys. 33, 549 (1957) [Sov. Phys. JETP 6, 429 (1958)]; B. Pontecorvo, J. Exptl. Theoret. Phys. 34, 247 (1958) [Sov. Phys. JETP 7, 172 (1958)].
- [63] M. Goldhaber, L. Grodzins and A.W. Sunyar, Phys. Rev. 109, 1015 (1958).
- [64] Z. Maki, M. Nakagawa and S. Sakata, Prog.Theor. Phys. **28**, 870 (1962).
- [65] R. A. Alpher, J. W. Follin, R. C. Hermann, Phys. Rev. 92, 1347 (1953) 8, 870 (1962).

- [66] B. Pontecorvo, Ya. Smorodinskii, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 41, 239 (1962) [Sov. Phys. JETP 14, 173 (1962)].
- [67] Ya. B. Zeldovich, Ya. A. Smorodinskii, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 41, 907 (1962) [Sov. Phys. JETP 14, 647 (1962)].
- [68] S. S. Gerstein, Ya. B. Zeldovich, Pis'ma ZhETF. 4, 174 (1966) [JETP Letters 4, 120 (1966)].
- [69] V. Gribov and Pontecorvo, Phys.Lett. B28, 493 (1969).
- [70] E.K.Akhmedov, arXiv:hep-ph/0001264.(2000).
- [71] M. Gell-Mann, P. Ramond and R. Slansky, Supergravity, p. 315, edited by F. van Nieuwenhuizen and D. Freedman, North Holland, Amestardam (1979).
- [72] T. Yanagida, Proc. of the Workshop on Unified Theory and Baryon Number of the Universe, KEK, Japan (1979).
- [73] R.N. Mohapatra and G. Senjanovic, Phys. Rev. Lett. 44, 912 (1980).
- [74] C. Arnaboldi et al., Phys. Rev. Lett. 95, 142501 (2005).
- [75] H.V. Klapdor-Kleingrothaus et al., Eur. Phys.J. A 12, 147 (2001); H.V. Klapdor-Kleingrothaus et al., Phys. Lett. B 586, 198 (2004).
- [76] C.E. Aalseth et al., Phys. Rev. C 65, 09007 (2002).
- [77] R. Arnold et al. (NEMO), Nucl. Phys. A765 (2006) 483, hep-ex/0601021; R. Arnold et al., Phys. Rev. Lett. 95, 182302 (2005); R. Arnold et al., Nucl. Instr. Meth. A 536, 79 (2005); R. Arnold et al. (NEMO), Phys. Rev. Lett. 95 (2005) 182302, hep-ex/0507083; R. Arnold et al., JETP Lett. 80, 377 (2004).
- [78] S.M. Bilenky, C. Giunti, C.W. Kim, *Finally neutrino has mass*, hep-ph/9902462 (2000).
- [79] W.-M. Yao et al., J. Phys. G 33, 1 (2006), Particle Data Group, LBNL and CERN, B. Kayser, *Neutrino mass, mixing, and flavor change*(2005).

- 
- [80] M. D. Messier, *Review of Neutrino Oscillation Experiments*, [arXiv: hep-ex/0606013].
- [81] J.N. Bahcall, *Neutrino Physics and Astrophysics*, Cambridge University Press (1989).
- [82] A. Strumia, F. Vissani, [arXiv: hep-ph/0606054].
- [83] M. H. Ahn *et al.* [K2K Collaboration] , hep-ex/0606032.
- [84] T.K. Gaisser *et al.*, Phys. Rev. D 54, 5578 (1996); T.K. Gaisser, hep-ph/9611301, Proc.of Neutrino '96, Helsinki, June 1996, edited by K. Enqvist *et al.*, p. 211, World Scientific, Singapore, 1997; Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 77, 133 (1999).
- [85] Ver palestra apresentada na TAUP'99 inserida na referência [42].