

FLEXÃO SIMPLES: ANÁLISE COMPARATIVA REBAP VS. EC2



J. Sena Cruz
Prof. Auxiliar
Univ. do Minho
Guimarães



Paulo B. Lourenço
Prof. Associado
Univ. do Minho
Guimarães

SUMÁRIO

O Eurocódigo 2 recomenda a utilização de relações tensões-extensões de cálculo quer para o betão quer para o aço, diferentes das propostas pelo REBAP. Com o objectivo de analisar a influência desta alteração normativa no dimensionamento à flexão simples de secções rectangulares, efectuou-se um estudo comparativo em termos de grandezas adimensionais. Na comunicação descreve-se o estudo efectuado, assim como, as principais conclusões obtidas.

Palavras-chave: Eurocódigo 2; REBAP; flexão simples; secções rectangulares

1. INTRODUÇÃO

No contexto actual nacional, o dimensionamento de estruturas de betão armado tem sido maioritariamente efectuado de acordo com a norma nacional, o Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré Esforçado (REBAP) [1]. Recentemente foi aprovado o Eurocódigo 2 (EC2) [2] a nível europeu que possui inúmeras diferenças face à versão anterior, como pré-norma europeia [3]. Prevê-se para breve a atribuição do estatuto de norma nacional, através da publicação de um texto idêntico ou da sua validação. O EC2 quando comparado com o REBAP, apresenta diferenças significativas na forma e conteúdo do dimensionamento de estruturas de betão armado. Perante este cenário torna-se imperioso efectuar estudos comparativos entre as duas normas aos mais diferentes níveis.

O dimensionamento de secções transversais à flexão, em que se admite a hipótese de Navier-Bernoulli das secções planas antes e após a deformação, recorre a leis tensão extensão, σ - ϵ , de cálculo dos materiais intervenientes: betão e aço. As propostas do REBAP e EC2 para definir estas leis são distintas. Com o objectivo de analisar a influência destas

diferenças no dimensionamento de secções rectangulares à flexão simples, foi efectuado um estudo comparativo. Neste trabalho descreve-se o estudo comparativo efectuado, assim como, as principais conclusões obtidas.

2. MATERIAIS

2.1 Betão

No dimensionamento de secções transversais, o EC2 propõe três leis distintas para as relações tensões-extensões, $\sigma_c - \varepsilon_c$, de cálculo do betão à compressão. No presente trabalho utilizou-se a relação tensão-extensão definida pelas equações (1) e (2) (ver Figura 1).

$$\sigma_c = f_{cd} \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right] \text{ se } 0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2} \quad (1)$$

$$\sigma_c = f_{cd} \text{ se } 0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2} \quad (2)$$

em que: f_{cd} é valor de cálculo da tensão de rotura do betão à compressão; n é o expoente da equação (1); ε_{c2} é a extensão necessária para se atingir a tensão de rotura do betão à compressão; e, ε_{cu2} é a extensão última.

Os valores dos parâmetros n , ε_{c2} e ε_{cu2} dependem da classe do betão e encontram-se indicados no Quadro 3.1 do EC2. O presente estudo restringiu-se apenas a betões até à classe C50/60. Nestas circunstâncias $n = 2$, $\varepsilon_{c2} = 2.0\text{‰}$ e $\varepsilon_{cu2} = 3.5\text{‰}$.

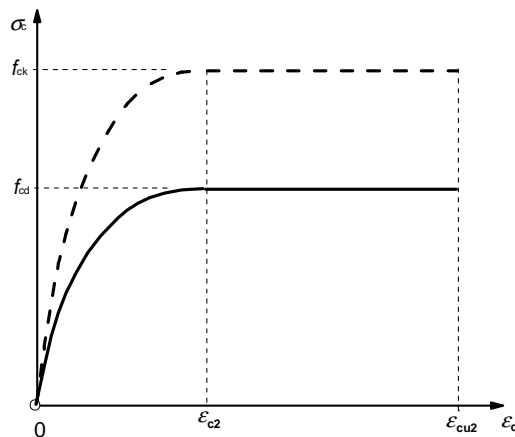


Figura 1: Diagrama parábola-rectângulo para o betão à compressão.

Para as classes de betão em estudo, o diagrama tensão-extensão proposto pelo REBAP é igual ao do EC2, desde que valor de cálculo da tensão de rotura do betão à compressão seja substituída por $0.85f_{cd}$.

2.2 Aço

Dois tipos distintos de diagramas tensão-extensão de cálculo para a armadura ordinária são referidos no EC2, a saber (ver Figura 2):

- diagrama bi-linear com o segundo ramo horizontal. Com a adopção deste diagrama não é necessário verificar a extensão limite, o que representa uma alteração significativa à prática nacional;
- diagrama bi-linear, com o segundo ramo inclinado até uma extensão limite ϵ_{ud} . O declive do segundo ramo é definido pelos pontos (ϵ_{yd}, f_{yd}) e $(\epsilon_{uk}, kf_{yk}/\gamma_s)$.

A forma analítica para o diagrama tensão-extensão, σ - ϵ , do aço para o primeiro caso é dada por,

$$\sigma = \begin{cases} E_s \epsilon & \text{se } 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_{yd} \\ f_{yd} & \text{se } \epsilon > \epsilon_{yd} \end{cases} \quad (3)$$

No caso do aço com endurecimento a forma analítica do diagrama tensão-extensão, σ - ϵ , é dada por,

$$\sigma = \begin{cases} E_s \epsilon & \text{se } 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_{yd} \\ f_{yd} + E_h (\epsilon - \epsilon_{yd}) & \text{se } \epsilon_{yd} \leq \epsilon \leq \epsilon_{ud} \end{cases} \quad (4)$$

em que: E_s é o módulo de Young do aço, igual a 200 GPa; ϵ_{yd} é o valor de cálculo da extensão correspondente à tensão de cedência do aço dada pela relação f_{yd}/E_s ; f_{yd} é o valor de cálculo da tensão de cedência do aço; ϵ_{ud} é o valor de cálculo da extensão limite, que se assumiu ser igual a 90% do valor característico da extensão última, i.e., $0.9\epsilon_{uk}$; E_h é o módulo de elasticidade longitudinal para o segundo ramo do diagrama σ - ϵ ; γ_s é o factor parcial para o aço, igual a 1.15; e, f_{yk} é o valor característico da tensão de cedência.

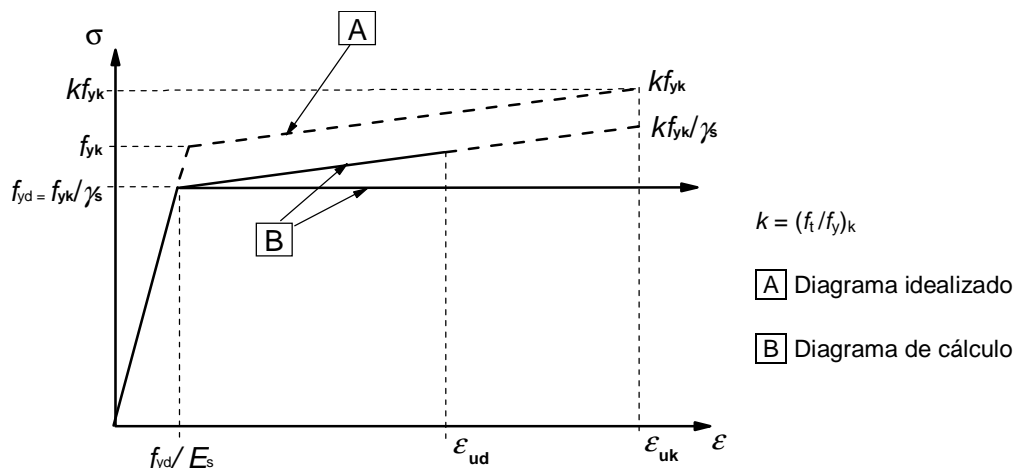


Figura 2: Diagramas tensão-extensão para o aço (à tracção e à compressão).

Os valores de f_{yk} , f_{yd} , ϵ_{yd} , ϵ_{uk} , ϵ_{ud} , k e E_n para as diferentes classes de aço (S400, S500 e S600) encontram-se indicados no Quadro 1. Na elaboração desta tabela consideram-se os valores mínimos sugeridos pelo EC2 na determinação dos parâmetros ϵ_{uk} e k .

Quadro 1: Propriedades do aço de acordo com EC2.

Aço	Classe	f_{yk} [MPa]	f_{yd} [MPa]	ϵ_{yd} [‰]	ϵ_{uk} [‰]	ϵ_{ud} [‰]	k [-]	E_n [MPa]
S400	A	400	348	1.740	25.0	22.50	1.05	748
S500		500	435	2.175	25.0	22.50	1.05	953
S600		600	522	2.610	25.0	22.50	1.05	1166
S400	B	400	348	1.740	50.0	45.00	1.08	577
S500		500	435	2.175	50.0	45.00	1.08	728
S600		600	522	2.610	50.0	45.00	1.08	881
S400	C	400	348	1.740	75.0	67.50	1.15	713
S500		500	435	2.175	75.0	67.50	1.15	896
S600		600	522	2.610	75.0	67.50	1.15	1082

No que diz respeito ao REBAP, o diagrama tensão-extensão de cálculo proposto para o aço é o bi-linear sendo o segundo ramo horizontal até uma extensão limite, ϵ_{yd} , igual a 10‰. Neste trabalho, e nos estudos comparativos com o REBAP, apenas serão analisados os aços das classes A400 (S400) e A500 (S500).

3. AÇO SEM ENDURECIMENTO

Num primeiro estudo adoptou-se para diagrama tensão-extensão de cálculo do aço segundo o EC2, aquele em que o segundo ramo é horizontal. Nestas circunstâncias, a rotura da secção dá-se sempre pelo betão, i.e., a extensão na fibra de betão mais comprimida é igual a 3.5‰. A armadura poderá estar em regime elástico ou em regime plástico. Assim, a posição do eixo neutro, x , encontra-se no intervalo $0 < x < d$ (ver Figura 3).

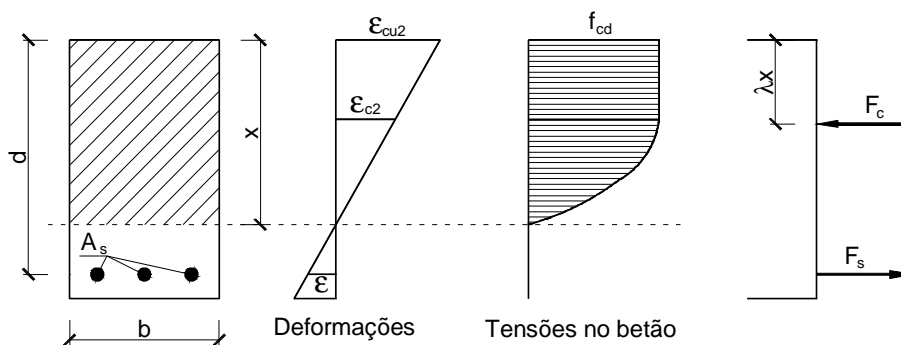


Figura 3: Configuração da secção transversal.

Nestas condições, as equações de equilíbrio e de compatibilidade de deformações apresentam o seguinte aspecto formal,

$$A_s \sigma = b x f_{cd} \psi \quad (5)$$

$$M_{Rd} = b x f_{cd} \psi (d - \lambda x) \quad (6)$$

$$\frac{\epsilon_{cu2}}{x} = \frac{\epsilon}{d - x} \quad (7)$$

em que: $x f_{cd} \psi$ é a área do diagrama de compressões do betão; e, λx é a distância do centro de gravidade do diagrama de compressões à fibra de betão mais comprimida.

Os parâmetros ψ e λ podem definidos em função da posição relativa do eixo neutro, $\xi = x/d$, i.e.,

$$\psi = 1 - \frac{\epsilon_{c2}}{3\epsilon_{cu2}} \quad (8)$$

$$\lambda = 1 - \frac{\epsilon_{c2}^2 - 6\epsilon_{cu2}^2}{4\epsilon_{c2}\epsilon_{cu2} - 12\epsilon_{cu2}^2} \quad (9)$$

As equações (5), (6) e (7) podem ser reescritas de forma adimensional, a saber,

$$\mu = \xi \psi (1 - \lambda \xi) \quad (10)$$

$$\omega = \xi \psi \frac{f_{yd}}{\sigma} \quad (11)$$

$$\frac{\epsilon_{cu2}}{\xi} = \frac{\epsilon}{1 - \xi} \quad (12)$$

em que: $\mu = M_{Rd} / (b d^2 f_{cd})$ é o valor reduzido do valor de cálculo do momento flector resistente; e, $\omega = (A_s / b d) / (f_{yd} / f_{cd})$ é a percentagem mecânica de armadura; $\sigma = f_{yd}$ para $0 < \xi < \xi_{lim}$; $\sigma = E_s (1/\xi - 1) \epsilon_{cu2}$ para $\xi_{lim} < \xi < 1$; $\xi_{lim} = 1 / (1 + f_{yd} / (E_s \epsilon_{cu2}))$.

Um aspecto relevante do estudo à flexão simples prende-se com a necessidade determinar o valor limite de μ a partir do qual secções duplamente armadas são mais económicas. Este valor pode ser determinado admitindo uma extensão na armadura igual à sua extensão de cedência. Esta situação corresponde a uma posição relativa do eixo neutro igual a ξ_{lim} . Assim, na Quadro 2 apresentam-se os valores de μ , ξ , ω a partir dos quais são mais económicas vigas duplamente armadas de acordo com o REBAP e o EC2. Com base neste quadro constata-se que os valores de μ sofrem uma alteração significativa (cerca de 17%), para ambos os aços analisados.

Quadro 2: Valores de μ , ξ , ω a partir dos quais são mais económicas vigas duplamente armadas.

Aço	REBAP			EC2		
	μ	ξ_{lim}	ω	μ	ξ_{lim}	ω
S400	0.332	0.668	0.460	0.390	0.668	0.541
S500	0.316	0.617	0.424	0.371	0.617	0.499

Na Figura 4 representa-se a relação momento reduzido *versus* percentagem mecânica de armadura para as três classes resistência do aço: S400, S500 e S600. Estas relações foram elaboradas a partir das equações (10), (11) e (12). Como se pode constatar todas as curvas apresentam comportamento similar até se atingir o correspondente ξ_{lim} .

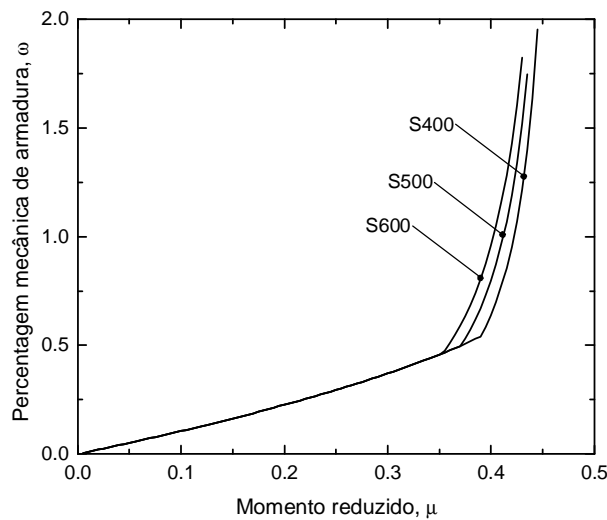


Figura 4: Momento reduzido vs. percentagem mecânica de armadura.

Na Figura 5 apresentam-se relações momento reduzido *versus* percentagem mecânica de armadura para as classes de aço S400 e S500 determinadas de acordo com o EC2 e com o REBAP. Os fundamentos necessários para a determinação da relação momento reduzido *versus* percentagem mecânica de armadura segundo o REBAP, podem ser encontrados na bibliografia da especialidade, e.g., Montoya et al. [4]. Com base nestas relações observa-se que para valores de μ superiores a aproximadamente 0.20 o EC2 apresenta menores necessidades de armadura. Este resultado seria expectável, pois a contribuição do betão para o momento resistente aumenta com o aumento de μ . Nestas figuras também se inclui a evolução da necessidade de armadura com o valor de μ . Esta foi definida com base na expressão,

$$\frac{\omega_{EC2}(\mu) - \omega_{REBAP}(\mu)}{\omega_{REBAP}(\mu)} \times 100 \quad (13)$$

Assim, é possível concluir que no dimensionamento de secções à flexão simples em conformidade com o EC2, se obtêm quantidades de armadura inferiores àquelas que se obtinham com o REBAP. Em particular, para $\mu=0.25$ a economia de armadura é de cerca de 4%, e para $\mu_{lim}=0.332$ a economia é de 7.5%.

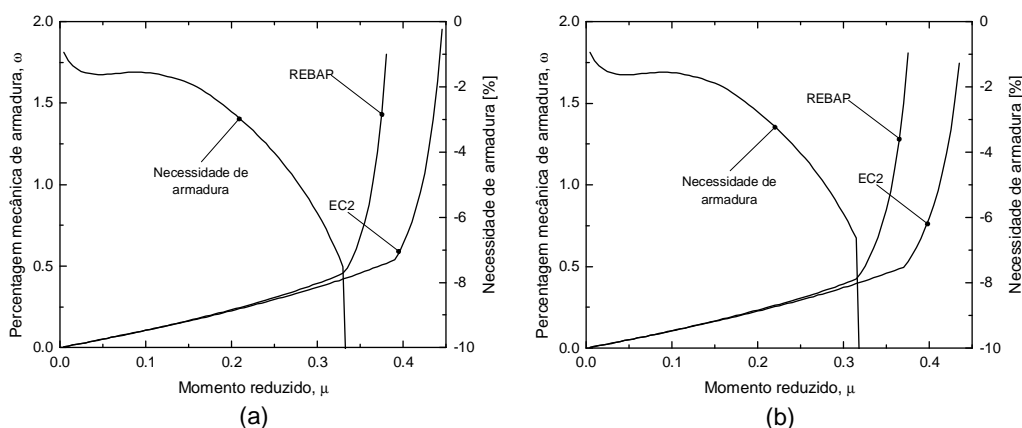


Figura 5: Análise comparativa entre o EC2 vs. REBAP: (a) aço S400; (b) aço S500.

4. AÇO COM ENDURECIMENTO

No segundo estudo, considerou-se para diagrama tensão-extensão de cálculo do aço recomendado pelo EC2 aquele em que o segundo ramo apresenta endurecimento. Nestas circunstâncias a rotura da secção poderá ocorrer pelo betão, pelo aço ou em ambos em simultâneo. Foram definidos quatro domínios distintos [4], a saber (ver Figura 6):

- Domínio 2a: rotura pelo aço e a extensão máxima de compressão no betão encontra-se no intervalo $[0, \varepsilon_{c2}]$;
- Domínio 2b: rotura pelo aço e a extensão máxima de compressão no betão encontra-se no intervalo $[\varepsilon_{c2}, \varepsilon_{cu2}]$;
- Domínio 3: rotura pelo betão e a extensão de tracção no aço encontra-se no intervalo $[\varepsilon_{yd}, \varepsilon_{ud}]$;
- Domínio 4: rotura pelo betão e a extensão de tracção no aço encontra-se no intervalo $[0, \varepsilon_{yd}]$.

A variação da posição relativa do eixo neutro em função do domínio encontra-se indicada na Quadro 3. Nesta tabela também se incluem as expressões para os parâmetros ψ e λ associados às equações (10) e (11), assim como, a expressão da tensão no aço, para os diferentes domínios. Nos domínios 2a e 2b os parâmetros ψ e λ são função da extensão na fibra mais comprimida de betão, sendo esta dada por,

$$\varepsilon_c = \frac{\xi}{1-\xi} \varepsilon_{ud} \quad (14)$$

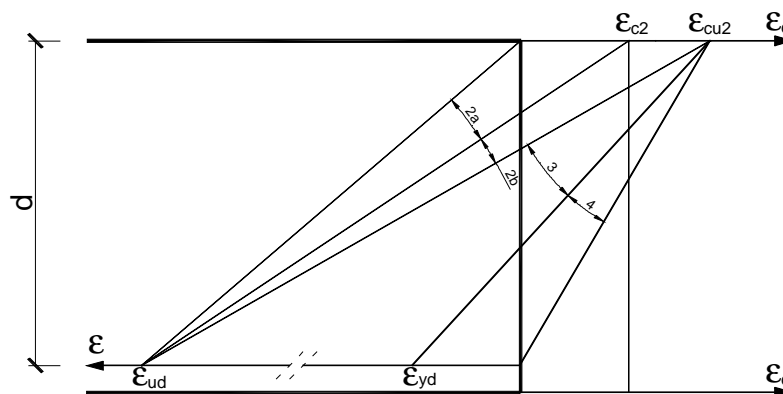


Figura 6: Definição dos domínios.

Quadro 3: Posição relativa do eixo neutro e expressões para os parâmetros ψ , λ e σ em função do domínio.

Domínio	Eixo neutro	ψ	λ	σ
2a	$0 < \xi \leq \frac{1}{1 + \frac{\epsilon_{ud}}{\epsilon_{c2}}}$	$\frac{3\epsilon_c \epsilon_{c2} - \epsilon_c^2}{3\epsilon_{c2}^2}$	$1 - \frac{8\epsilon_{c2}\epsilon_c - 3\epsilon_c^2}{12\epsilon_{c2}\epsilon_c - 4\epsilon_c^2}$	$f_{yd} + E_h \left(\epsilon_{ud} - \frac{f_{yd}}{E_s} \right)$
2b	$\frac{1}{1 + \frac{\epsilon_{ud}}{\epsilon_{c2}}} < \xi \leq \frac{1}{1 + \frac{\epsilon_{ud}}{\epsilon_{cu2}}}$	$1 - \frac{\epsilon_{c2}}{3\epsilon_c}$	$1 - \frac{\epsilon_{c2}^2 - 6\epsilon_c^2}{4\epsilon_{c2}\epsilon_c - 12\epsilon_c^2}$	
3	$\frac{1}{1 + \frac{\epsilon_{ud}}{\epsilon_{cu2}}} < \xi \leq \frac{1}{1 + \frac{f_{yd}}{E_s \epsilon_{cu2}}}$	$1 - \frac{\epsilon_{c2}}{3\epsilon_{cu2}}$	$1 - \frac{\epsilon_{c2}^2 - 6\epsilon_{cu2}^2}{4\epsilon_{c2}\epsilon_{cu2} - 12\epsilon_{cu2}^2}$	$f_{yd} + E_h \left(\left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) \epsilon_{cu2} - \frac{f_{yd}}{E_s} \right)$
4	$\frac{1}{1 + \frac{f_{yd}}{E_s \epsilon_{cu2}}} < \xi < 1$			$E_s \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) \epsilon_{cu2}$

Tal como na secção anterior, é possível elaborar gráficos relacionados os parâmetros ξ e ω em função de μ , para cada classe de resistência do aço (S400, S500 e S600) e nível de ductilidade (A, B e C), utilizando as equações (10), (11) e (14) e as expressões apresentadas no Quadro 3. Adoptou-se o método de Newton-Raphson na resolução da equação (10).

Na Figura 7(a) representam-se, para diferentes classes de ductilidade do aço (A, B e C), as relações momento reduzido *versus* percentagem mecânica de armadura para o aço S400. Como seria de esperar, os resultados obtidos são similares para todas as classes de ductilidade. Para valores muito baixos do momento reduzido ($\mu < 0.05$) observam-se diferenças ligeiras entre as três classes de ductilidade, nunca superiores a 8%. Resultados idênticos a estes podem ser encontrados para as classes S500 e S600.

Na Figura 7(b) representa-se, para diferentes classes de resistência do aço (S400, S500 e S600), as relações momento reduzido *versus* percentagem mecânica de armadura para a classe de ductilidade A. Iguais resultados são obtidos até ocorrer a passagem do regime plástico para o regime elástico da armadura.

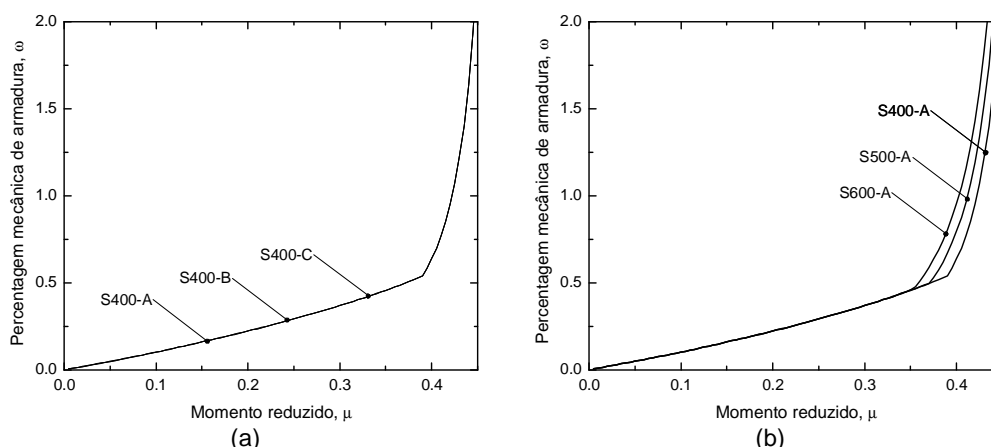


Figura 7: Relação $\omega - \mu$ para diferentes classes de ductilidade do aço (a) e diferentes classes de resistência do aço (b).

Com o objectivo de avaliar as necessidades de armadura com a utilização dos dois tipos de diagramas $\sigma - \epsilon$ do aço previstos no EC2, elaboram-se gráficos de necessidade de armadura *versus* momento reduzido (ver Figura 8). Esta necessidade de armadura foi definida com base na seguinte expressão,

$$\frac{\omega_{DIAG2}(\mu) - \omega_{DIAG1}(\mu)}{\omega_{DIAG1}(\mu)} \times 100 \quad (15)$$

em que ω_{DIAG1} e ω_{DIAG2} é a percentagem mecânica de armadura obtida quando se usa o diagrama do aço sem e com endurecimento, respectivamente.

Na Figura 8(a) apresenta-se a evolução da necessidade de armadura com o momento reduzido para diferentes classes de ductilidade do aço S400. A partir desta figura é possível concluir que, de uma forma geral, o diagrama do aço com endurecimento conduz a menores necessidades de armadura. Esta menor necessidade aumenta com a diminuição do valor de μ , atingindo 12% para a classe de ductilidade C. Contudo, para valores correntes do momento reduzido em vigas, próximos de 0.25, a economia é inferior 1.5%. Verifica-se, também, que existem variações significativas das necessidades de armadura com o aumento da ductilidade.

Na Figura 8(b) apresenta-se a evolução da necessidade de armadura com o momento reduzido para as diferentes classes de resistência do aço da classe de ductilidade C. Assim, com base nesta figura é possível concluir que a variação da classe de resistência não conduz a variações significativas da necessidade de armadura.

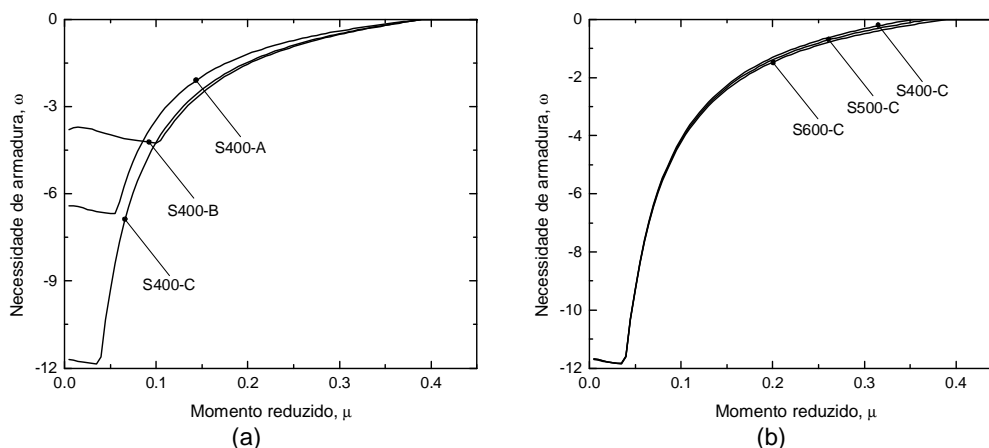


Figura 8: Evolução da necessidade de armadura com o momento reduzido (comparação entre uma lei de comportamento para o aço sem endurecimento e com endurecimento): (a) para diferentes classes de ductilidade do aço S400; (b) para as diferentes classes de resistência da classe de ductilidade C.

No intuito de fazer uma análise comparativa entre os resultados obtidos entre o REBAP e o EC2 quando se adopta o diagrama $\sigma-\epsilon$ para o aço com endurecimento, elaboram-se relações necessidade de armadura *versus* momento reduzido. Estas relações estão representadas na Figura 9 para a classe de ductilidade C. A necessidade de armadura foi determinada com base na expressão (13). Na determinação de $\omega_{DIAG2}(\mu)$ da expressão (13) utilizou-se o diagrama $\sigma-\epsilon$ para o aço em que o segundo ramo apresenta endurecimento. A partir do gráfico da figura é possível concluir que, qualquer que seja o valor do momento reduzido, a economia de armadura é sempre superior a 4%, atingindo valores na ordem dos 6 a 8% para secções normalmente armadas, quando o EC2 é utilizado no dimensionamento da secção. Não se verificam diferenças significativas quando se varia a classe de resistência do aço.

5. CONCLUSÕES

No presente trabalho analisou-se a influência dos diagramas tensão-extensão de cálculo do betão e do aço propostos pelo EC2 e pelo REBAP no dimensionamento à flexão simples de secções rectangulares. A partir deste estudo foi possível concluir que:

1. não se verificam diferenças significativas entre o diagrama do aço com patamar e com o endurecimento mínimo previsto pelo EC2 (máximo de 12% na classe de ductilidade C mas para valores correntes de μ a diferença é cerca de 1%);
2. as diferenças entre o EC2 e REBAP são reduzidas (8% em termos médios com diagrama com endurecimento, e valores de 4 a 6% para secções normalmente armadas). O máximo é cerca de 13% para μ 's muito baixos;
3. o EC2 permite utilizar secções simplesmente armadas para percentagens de armadura cerca de 20% mais elevadas que o REBAP (valores de momentos reduzidos na ordem de 0.37 a 0.39). Nestes casos, o EC2 não pode ser comparado com o REBAP no caso de secções com armadura simples, porque as secções já saturaram de acordo com o REBAP.

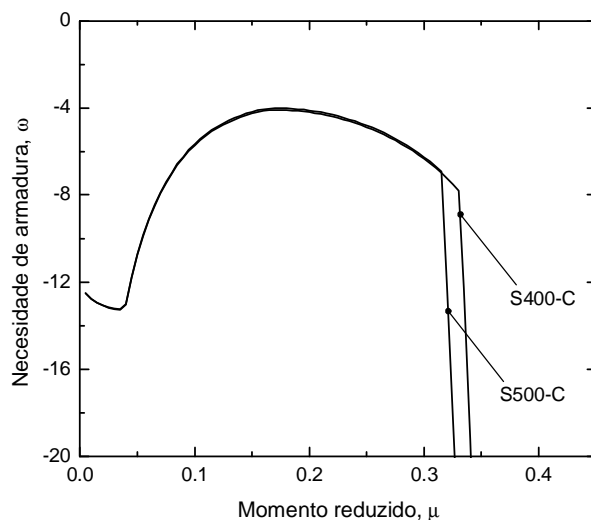


Figura 9: Evolução da necessidade de armadura com o momento reduzido (comparação entre o EC2 e o REBAP para um lei de comportamento do aço com endurecimento).

6. REFERÊNCIAS

- [1] REBAP -- *Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado*. Imprensa Nacional Casa da Moeda, 1983.
- [2] Eurocode 2 -- *Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings*. Comité Européen de Normalisation (CEN), EN 1992-1-1:2004: E, 2004, Brussels
- [3] prEN 1992-1 -- *Eurocode 2: Design of Concrete Structures – Part 1: General rules and rules for buildings*. 1st draft, Dezembro, 1999.
- [4] Montoya *et al.* -- "Hormigón armado. Tomo I. 11^a edición." *Editorial Gustavo Gili*, 1981, Barcelona.