Revista Portuguesa de Educação, 2005, 18(1), pp. 117-150

Dificuldades em estocástica de uma futura professora do 1º e 2º ciclos do Ensino Básico

José António Fernandes

Universidade do Minho, Portugal

Paula Maria Barros

Escola Superior de Educação de Bragança, Portugal

Resumo

Neste estudo investigou-se o impacto do ensino da unidade de Estatística do 6º ano de escolaridade sobre as dificuldades em estocástica de uma aluna estagiária (Joana). Para tal, antes de ter qualquer experiência de ensino, Joana respondeu a um questionário sobre o tema, tendo sido identificadas as suas dificuldades conceptuais; seguidamente, leccionou a unidade de Estatística numa turma do 6º ano; e, finalmente, foi entrevistada sobre as questões em que tinha revelado dificuldades no questionário. Dos resultados do estudo, salienta-se que o ensino da unidade de Estatística teve um sucesso relativo na superação das suas dificuldades, já que muitas alterações de resposta e/ou raciocínio não foram resultado da sua própria iniciativa, antes foram consequência do questionamento da investigadora. Além disso, as dificuldades sentidas na relacionação das medidas de localização e nos seus significados e na comparação de probabilidades não foram de todo superadas. Verificou-se ainda que o conhecimento de Joana em estocástica, além de bastante limitado, era acentuadamente algorítmico e rotineiro e apresentava pouca integração.

1. Introdução

"A competência matemática que todos devem desenvolver inclui conhecimentos de estatística e de probabilidades, os quais constituem uma ferramenta imprescindível em diversos campos de actividade científica, profissional, política e social" (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999, p. 94). Assim, dada a importância destas temáticas na sociedade actual, não é de admirar que tenham adquirido visibilidade nos currículos de todos os níveis de ensino. Atendendo a este facto e às características específicas do raciocínio e conhecimento estocásticos, em relação a outros temas do currículo de Matemática, "a problemática da formação de professores sobre este campo reveste-se de um interesse particular" (Godino, Batanero & Flores, 1999, p. 2).

Neste contexto, coloca-se a questão de saber se os futuros professores, que têm de ensinar os temas de estatística e probabilidades, os compreendem de forma adequada e possuem os conhecimentos necessários para levar os alunos a raciocinar correctamente sobre os vários assuntos a eles ligados. Tendo por base esta preocupação, estudaram-se junto de uma aluna do 4º ano de uma Escola Superior de Educação, futura professora do 1º e 2º ciclos do ensino básico, as duas questões de investigação: (1) Que dificuldades e processos de raciocínio revelam alunos-futuros professores em conteúdos elementares de estatística e probabilidades?; e (2) A prática de estágio pedagógico induz uma reflexão sobre as dificuldades e provoca mudanças de raciocínio?

2. Dificuldades em conceitos estocásticos elementares

Existem diversas investigações que revelam dificuldades de alunos, de vários níveis de ensino, na aprendizagem de conceitos estocásticos, isto é, de estatística e probabilidades.

2.1. Cálculo envolvendo medidas de tendência central

No caso da média, Pollatsek, Lima e Well (1981) verificaram, em várias situações, que muitos estudantes universitários sentiram dificuldades no cálculo de uma média global a partir do conhecimento de duas médias parciais. Nestas situações, a maior parte das respostas incorrectas resultou de determinar a média simples dos valores das duas médias dadas, não afectando os seus valores com os pesos adequados. Boaventura (2003) observou dificuldades do mesmo tipo em alunos do 12º ano e Li & Shen (1994) também verificaram a não ponderação no cálculo da média quando os dados eram apresentadas através de uma tabela de frequências.

Por vezes, o algoritmo da média é também aplicado de forma mecânica, não revelando os alunos capacidades da sua utilização flexível em situações-problema. Num estudo com alunos do 6º ano de escolaridade, em que a maioria evidenciou conhecer o algoritmo de cálculo da média, Cai (1995) observou que apenas cerca de metade dos alunos foi capaz de determinar um valor desconhecido num pequeno conjunto de dados, apresentado sob a forma de pictograma, para se obter um dado valor da média. Este resultado agravou-se ainda mais quando se analisaram os raciocínios usados, pois, dos alunos que encontraram o valor desconhecido, apenas aproximadamente metade o determinou através de uma utilização compreensiva do algoritmo (multiplicar o valor da média pelo número total de dados e subtrair a soma dos valores dados), tendo a maioria dos restantes recorrido a uma estratégia de tentativa e erro.

Sobre os conceitos de média, moda e mediana, Carvalho (1996) analisou as realizações de dois grupos de alunos do 7º ano, cada um numa tarefa distinta. Num dos grupos, foi dado um conjunto de dados que os alunos deviam organizar numa tabela de frequências; no outro, os dados foram apresentados através de um gráfico de barras. Considerando o conjunto das duas tarefas, determinaram correctamente a moda cerca de metade dos alunos, aumentando as dificuldades sentidas no caso da média e, mais ainda, no caso da mediana.

Em relação às dificuldades dos alunos, Carvalho (1996) salienta que, no caso da mediana, eles não tiveram em conta a frequência absoluta de cada valor no cálculo da mediana, quando usaram a tabela construída antes, não ordenaram os dados previamente à sua localização ou adicionaram as frequências absolutas e dividiram por 2; no caso da média, os alunos não consideraram as frequências absolutas dos diferentes valores no cálculo da média, isto é, dividiram a soma dos diferentes valores da variável pela dimensão da amostra; e no caso da moda, em que se obteve o maior número de respostas correctas, a autora destaca a facilidade com que ela é visualizada num gráfico de barras, correspondendo ao valor com a ‘barra mais alta’.

Evidência relativa à maior dificuldade na compreensão do conceito de mediana foi também detectada por Sousa (2002) num estudo com uma turma de 6º ano, no contexto de uma tarefa de investigação, e por Barr (s/d) numa investigação com estudantes entre os 17 e 21 anos. Este último autor, partindo de uma tabela de frequências, verificou que o erro mais frequente foi determinar a mediana das frequências ordenadas, seguindo-se a determinação da mediana dos valores que toma a variável sem atender à sua frequência. Boaventura (2003), no seu estudo envolvendo alunos do 12º ano, também constatou que a mediana se revelou a mais difícil das medidas de localização, seguindo-se a média e, finalmente, a moda.

Para Cobo & Batanero (2000) e Batanero, Godino, Green, Holmes & Vallecillos (1994), o facto do algoritmo de cálculo da mediana não ser único, já que depende do tipo de dados, da sua apresentação e inclusivamente do seu número, e do valor obtido também nem sempre ser único, explica problemas de compreensão dos estudantes, tornando o estudo da mediana mais complexo do que possa parecer à primeira vista.

2.2. Significado e interpretação das medidas de tendência central

Em relação ao significado da média num dado contexto, Eisenbach (1994, citado em Batanero, 2000) questionou estudantes universitários de um curso introdutório de estatística sobre o significado da afirmação: 'Que quer dizer que o salário médio de um empregado é de 3600 dólares?' As respostas obtidas, do tipo 'a maioria dos empregados ganha cerca de 3600 dólares', 'é o salário central' e 'os outros trabalhadores ganham mais ou menos 3600 dólares', denotam uma confusão terminológica entre as palavras 'média', 'mediana' e 'moda'. Também no estudo já referido, Boaventura (2003) verificou que os alunos interpretaram a média como a descrição do seu algoritmo e tiveram muitas mais dificuldades em atribuir qualquer significado à mediana.

Dreyfus & Levy (1996), num estudo com alunos de 11 e 12 anos, observaram que os alunos consideraram a média como o valor central, o que denota uma confusão da média com a mediana. Estes autores detectaram ainda concepções erradas sobre as relações entre a média e a distribuição, levando um número substancial de alunos a afirmar que numa distribuição variada é impossível calcular a média e que não é possível em duas turmas com a mesma média os alunos falharem mais numa turma do que noutra. Para estes estudantes, se mais alunos falham, então a média da turma devia ser mais baixa.

Carvalho & César (2000) analisaram o desempenho de alunos do 7º ano, trabalhando em 84 díades, na selecção entre a média e a mediana, enquanto estatística que melhor representa um conjunto de dados. Em termos de resultados, as autoras verificaram que a grande maioria dos alunos aplicou, com sucesso, os procedimentos de cálculo da média e da mediana, mas o mesmo não aconteceu na selecção da estatística. No caso da média, apenas um quarto dos alunos apresentou argumentos que não apelam para um significado matemático, e, no caso da mediana, quase metade dos alunos não foi capaz de usar argumentos matemáticos que relacionem este conceito com as suas propriedades. Para as autoras, a compreensão mais profunda da média explica-se pela sua frequente utilização nos mais variados contextos sociais, o que não acontece com o conceito de mediana.

Envolvendo alunos do ensino superior, alguns dos quais futuros professores do ensino primário espanhol, Batanero, Godino & Navas (s/d) detectaram a existência de erros conceptuais e dificuldades de aplicação prática dos conhecimentos sobre as medidas de tendência central, por exemplo no tratamento dos valores atípicos e no conhecimento das posições relativas entre a média, mediana e moda em distribuições não simétricas. Também no estudo de Boaventura (2003), os alunos do 12º ano revelaram dificuldades extremas na localização destas estatísticas, inclusive no caso da distribuição ser simétrica.

Batanero *et al.* (s/d) pensam que as dificuldades evidenciadas se podem explicar pelo facto do ensino das medidas de tendência central se centrar habitualmente na apresentação das fórmulas aplicadas a casos estereotipados, o que não permite que os alunos compreendam o significado integral dos conceitos.

2.3. Acontecimentos e comparação de probabilidades

Num estudo com um grupo de 57 futuros professores do ensino primário espanhol, Azcaráte, Cardeñoso & Porlán (1998) verificaram que cerca de metade dos sujeitos não reconheceu a aleatoriedade de vários fenómenos, designadamente em situações relacionadas com o contexto meteorológico e em situações do quotidiano.

Dificuldades em questões relacionadas com a aleatoriedade foram também detectadas no estudo de Green (1983), que envolveu 2930 alunos do 1º ao 5º ano de escolas secundárias (11-16 anos). Este autor observou ainda que os itens que requeriam o conceito de razão na comparação de probabilidades se revelaram particularmente difíceis, especialmente entre os alunos dos três primeiros anos. Para além disso, constatou que os alunos classificavam como certos acontecimentos com alta probabilidade de ocorrência e como impossíveis acontecimentos com baixa probabilidade de ocorrência e que atribuíam, espontaneamente, a probabilidade de 50% a acontecimentos possíveis e a acontecimentos equiprováveis (quando existiam mais de 2 acontecimentos).

Fischbein & Gazit (1984) num estudo com alunos do 5º ao 7º ano (10 a 13 anos), em que pretendiam analisar o efeito de um programa de ensino em probabilidades, observaram que a maioria dos alunos que frequentaram esse programa foi capaz de dar pelo menos um exemplo de cada categoria de acontecimentos (certo, possível, impossível), tanto no caso em que não era referida nenhuma experiência como quando se partia de uma experiência aleatória. Porém, noutra questão em que dadas 4 bolas vermelhas, 3 verdes e 2 brancas se pedia para indicarem quantas bolas tinham de tirar para assegurar a saída de uma bola de cada cor, verificaram que os alunos revelaram muitas dificuldades na sua resolução, mesmo os que tinham sido submetidos ao programa de ensino.

Fischbein, Nello & Marino (1991) observaram, relativamente a alunos do 4º e 5º anos (9-11 anos) e do 6º, 7º e 8º anos (11-14 anos), que a maioria deles identificou acontecimentos certos, possíveis e impossíveis e reconheceram situações com mesma estrutura estocástica. Já no caso da comparação de probabilidades em experiências compostas, os alunos sentiram muitas dificuldades. De entre os vários tipos de acontecimentos, os alunos revelaram mais dificuldades na categoria dos acontecimentos certos e na formulação de acontecimentos relativamente à sua classificação.

No nosso país, Fernandes (1999) verificou também que alunos do 8º e 11º anos de escolaridade revelaram dificuldades em identificar acontecimentos certos e/ou que envolviam conectivos lógicos, na comparação de probabilidades em experiências simples que envolviam o conceito de razão e, mais acentuadas, na comparação de probabilidades em experiências compostas. Em termos de respostas, observou um aumento sistemático das respostas correctas com o ano escolar e com o desempenho em Matemática.

3. Conhecimento profissional dos professores e sua evolução com a prática lectiva

Alguns estudos evidenciam a importância da prática lectiva na atenuação de certas dificuldades por parte dos professores. Por exemplo, Brown & Borko (1992) referem que os estudos de investigação sobre professores fornecem resultados que evidenciam diferenças em conhecimento, pensamento e acções entre professores experientes e principiantes (professores estagiários ou no 1º ano de ensino). Estas autoras, revendo vários estudos, concluíram que os professores experientes revelam maior conhecimento pedagógico, maior conhecimento do conteúdo e maior conhecimento pedagógico do conteúdo do que os professores principiantes.

Fennema & Franke (1992) referem que o conhecimento do professor pode influenciar a sua prática de ensino. Estes autores, com base na revisão de vários estudos em diversas áreas disciplinares, constataram que o conteúdo de ensino e o discurso na sala de aula parecem estar, pelo menos parcialmente, dependentes do conhecimento do professor. Embora concluam que o conhecimento não dita precisamente o que é dado, pensam que a riqueza do assunto a ser ensinado parece estar directamente relacionada com o conhecimento específico que o professor possui sobre a matéria a leccionar. Esta conclusão é corroborada pelo estudo de Putnam *et al.* (1992, citado em Correia, 1997), envolvendo quatro professoras do ensino elementar, em que os investigadores observaram que os conhecimentos matemáticos reduzidos ou insuficientes das professoras dificultaram, e por vezes impediram, que estas conseguissem pôr em prática um ensino de acordo com a inovação curricular em Matemática. Adicionalmente, a partir da análise de estudos realizados com futuros professores, Brown & Borko (1992) concluíram que os participantes que se sentiam à vontade no conteúdo gastavam menos tempo e esforço na planificação diária, davam mais atenção às estratégias de ensino e menos ao conteúdo de aprendizagem, eram mais flexíveis no seu ensino e mais auto-confiantes.

Por outro lado, a prática, de certa forma, permite também reconhecer a insuficiência de conhecimentos científicos específicos que poderia não ser percepcionada de outro modo (Guerreiro, 1999). É de notar que no estudo de Ponte, Galvão, Trigo-Santos & Oliveira (2001) vários professores no seu primeiro ou segundo ano de actividade profissional consideraram que o conhecimento dos assuntos que ensinam é ainda insuficiente, reconhecendo a necessidade de uma actualização constante nesta área.

Também Contreras & Blanco (2001) advogam que um maior domínio do conteúdo é directamente proporcional à capacidade de gestão da turma e que as escolhas curriculares dependem desse domínio de conteúdo. Estes autores salientam igualmente que as habilidades para criar e suster um discurso produtivo na aula estão basicamente relacionadas com o domínio dos aspectos conceptuais da disciplina e o conhecimento de múltiplas representações e inter-relações entre as diferentes estruturas matemáticas, sendo as deficiências nestas representações e relações a causa de problemas de gestão da aula ao situar o professor perante argumentos e esquemas de raciocínio imprevistos dos alunos e ao não dispor dos recursos cognitivos para dar uma resposta satisfatória.

4. Metodologia

O estudo aqui apresentado é parte integrante de uma investigação mais alargada que envolveu alunos do curso de Professores do Ensino Básico, variante de Matemática e Ciências da Natureza, de uma Escola Superior de Educação, futuros professores do 1º e 2º ciclos do ensino básico.

Do currículo deste curso faz parte a disciplina de Probabilidades e Estatística, cadeira semestral, do 3º ano, com três horas semanais, que em termos de conteúdos programáticos está organizada nas seguintes áreas temáticas: Estatística descritiva, Análise combinatória, Teoria elementar das probabilidades, Variáveis aleatórias e Distribuições de probabilidade.

A disciplina de Prática Pedagógica II, comummente designada por estágio pedagógico, é outra das disciplinas incluídas no plano de estudos do curso, e integra a leccionação de sete semanas de aulas de Matemática na turma de um professor de uma escola básica do 2º ciclo, o qual tem o papel de acompanhamento da prática do estagiário em conjunto com um supervisor da Escola Superior de Educação.

A investigação inicial desenvolveu-se em duas fases, cada uma com uma metodologia diferenciada. Na primeira fase, em que se seguiu uma metodologia essencialmente quantitativa, uma turma de 37 alunos de 4º ano, do curso referido, respondeu a um questionário sobre conceitos elementares de estatística e probabilidades (ver Anexo).

O questionário foi elaborado tendo essencialmente em atenção os conteúdos do programa de Matemática do 2º ciclo no que se refere à unidade de Estatística, sendo algumas questões adaptadas de estudos realizados (Carvalho, 1996; Carvalho & César, 2000; Fernandes, 1999; Fischbein *et al*., 1991; Fischbein & Gazit, 1994; Pollatsek *et al.*, 1981), outras retiradas de manuais escolares do 2º ciclo e as restantes criadas para o estudo.

Para efeitos de validação, o questionário foi objecto de apreciação prévia por parte de professores de Matemática que leccionavam no Ensino Superior, um com experiência de docência na área de Estatística e tendo alguns deles também experiência de ensino no 2º ciclo e de orientação de estágios nesse nível de ensino. A versão corrigida do questionário, que resultou das sugestões dos professores, foi passada a alunos do 3º ano, do mesmo curso dos participantes, quase no final da leccionação da disciplina de Probabilidades e Estatística. Finalmente, o questionário foi passado aos participantes numa aula de duas horas, tendo os alunos gasto, no máximo, hora e meia a responder-lhe.

Na segunda fase do estudo, em que se seguiu uma metodologia de estudo de caso, seleccionaram-se três dos participantes da primeira fase, tendo por critérios leccionar a unidade de Estatística de 6º ano, durante a Prática Pedagógica II (estágio), e um desempenho variado no questionário (da primeira parte do estudo). Através de entrevistas semi-estruturadas, conversas informais, observação de aulas e recolha de documentos escritos acompanhou-se o seu percurso nesta etapa.

O estudo que se retrata neste artigo centra-se em parte da investigação desenvolvida com uma das participantes, Joana, que, para além de ter sido escolhida pelo facto de ir leccionar a unidade de Estatística de 6º ano, foi uma das alunas que, dentro desse grupo, teve pior desempenho no questionário.

No que diz respeito à primeira fase do estudo, em que Joana respondeu ao questionário, em termos de análise de dados, codificaram-se as respostas da aluna em correctas e erradas e inseriram-se os seus raciocínios em diferentes categorias. Na segunda fase, foram conduzidas duas entrevistas semi-estruturadas: a primeira, realizada antes da leccionação da unidade de Estatística, destinou-se a recolher dados sobre a opção profissional de Joana e a sua relação com a estocástica, para detectar algumas dificuldades iniciais na preparação de aulas e para explicar mais detalhadamente os objectivos do estudo; na segunda, realizada após o ensino da unidade de Estatística, Joana leu as respostas dadas no questionário, a que tinha respondido antes, e reformulou-as sempre que julgou conveniente.

As entrevistas foram audiogravadas e posteriormente transcritas na íntegra. Os protocolos resultantes da transcrição das entrevistas foram dados a Joana para verificação, não se tendo verificado quaisquer alterações significativas. Além disso, a entrevistadora não teve qualquer intervenção na avaliação da aluna. Nesta segunda fase, o tratamento e análise de dados centraram-se essencialmente nos aspectos do questionário em que Joana tinha revelado dificuldades e em que se verificou algum aprofundamento em relação às respostas dadas na primeira fase do estudo.

5. Joana

5.1. Percurso escolar e visão da estocástica

Joana tem 22 anos, é simpática, extrovertida e relaciona-se facilmente com os outros. Tem consciência das suas limitações em Matemática e toma a iniciativa de solicitar ajuda sempre que considera necessário.

No ensino básico gostava de Ciências e só "gostava mais ou menos de Matemática." Mais tarde, já no 9º ano, teve um professor que a fez começar a gostar de Matemática:

> Tinha um bocado de aversão à Matemática, não tanto pela Matemática mas mais ou menos pelos professores que tive. No último ano (9º ano) tive um professor excelente e comecei a gostar daquilo.

O curso de Professores de Ensino Básico, Variante de Matemática e Ciências da Natureza, que frequenta, foi escolhido um pouco ao acaso, uma vez que queria seguir o curso de Enfermagem. Actualmente, afirma que continua no curso por opção, pois começou a gostar e considera que se relaciona bem com os alunos.

Em relação à estocástica, Joana só se recorda de ter estudado estatística e probabilidades pela primeira vez no ensino secundário, talvez no 10º ano. Na altura achava fácil a parte de estatística e tinha dificuldades na combinatória, designadamente em identificar arranjos e combinações. Já no ensino superior, concluiu a disciplina semestral de Probabilidades e Estatística na primeira inscrição com a classificação de 13 valores. Embora não se lembre bem dos conteúdos tratados, sabe que teve dificuldades na distribuição normal.

Não gosta de probabilidades e, embora não diga que não gosta de estatística, há temas de que gosta mais. Já em termos de ensino, a unidade de Estatística não lhe parece difícil de leccionar.

Joana associa a estatística à análise e interpretação de dados e as probabilidades aos acontecimentos. Considera a estatística mais como uma parte da matemática do que como uma ciência independente, opinião que é influenciada pela forma como a estatística é integrada na escola — "para nós funciona como uma parte da matemática, e o que nós damos faz parte de uma unidade".

Em geral, para esta aluna, não há diferenças entre o ensino da estocástica e de outras unidades temáticas, pois, na sua opinião, o ensino pode ser realizado no mesmo sentido, seja qual for a unidade. Todavia, no caso da estatística, salienta a adequação do trabalho de grupo e a organização, interpretação e análise de dados.

Antes de ter ensinado a unidade de Estatística, Joana não tinha uma opinião muito clara sobre a sua importância no 2º ciclo. Contudo, após ter leccionado a unidade, passa a considerá-la como uma temática importante.

> … os processos de recolha, organização e interpretação de dados são muito apropriados para as crianças do 2º ciclo porque podem ser usados para resolver problemas interessantes relativamente a questões práticas e ajudar os alunos a perceber toda a informação que lhes chega a toda a hora.

5.2. Dificuldades em estocástica e efeitos da prática lectiva

Nesta subsecção analisam-se apenas as questões (ver os enunciados em Anexo) em que se verificou alteração das respostas e/ou raciocínios de Joana ou em que houve alguma clarificação do seu raciocínio entre os dois momentos considerados: antes e depois da leccionação da unidade de Estatística do 6º ano.

Possibilidade/impossibilidade em medidas de tendência central

No caso da impossibilidade de determinação da média em atributos qualitativos (questão 1.2), antes de leccionar o tema, Joana determinou a média das frequências absolutas, (58+50+26+46+20)/5, e concluiu que o seu valor era 40, não atendendo a que estava em presença de um atributo qualitativo. Depois de leccionar a unidade, embora não manifestando qualquer dificuldade em identificar o tipo de atributo em estudo, mantém a resposta e o processo de cálculo da média.

A investigadora tenta que Joana tome consciência da não existência de significado no cálculo da média no caso em questão. Todavia, parece não ser entendida por ela, já que em resposta Joana questiona a representatividade da média relativamente à distribuição: "Aqui, neste caso, não sei se terá muita lógica estudar a média. Tem aqui, por exemplo, 20 pessoas está muito longe da média e neste caso, o Boavista, também está muito longe da média".

Questionada sobre o significado que atribui a atributos qualitativos e quantitativos, Joana começa a ter dúvidas sobre a possibilidade de determinar a média, afirmando:

> Já não me lembro muito bem. Acho que … quando … é variáveis quantitativas é quando se dão valores … e as outras … já não me lembro. Mas as variáveis qualitativas não dão para estudar em termos de média, pois não? Ou dá? Já não me lembro.

Elucidada pela investigadora sobre a noção de variável qualitativa, refere que viu um exercício semelhante num manual; contudo, ignorou-o e não reflectiu sobre o assunto: "Não, não dei muita importância. Só estudei casos que dá para estudar". Recordando melhor a situação do manual, concluiu finalmente que não faz sentido calcular a média: "Não achei estranho. Aquilo tinha a ver com a média, não sei se era de cores. E realmente não fazia sentido estudar. E aqui também não faz sentido se se estiver com atenção".

Questionada sobre a possibilidade/impossibilidade da média tomar um valor dado (questão 2.1), antes de leccionar a unidade, Joana tinha dado uma resposta errada, argumentando que as médias não podiam assumir os valores dados no enunciado:

> A média da turma *A* (…) não está correcta uma vez que nesta turma não há nenhum aluno com nota superior, o que significa que um aluno tenha a nota muito inferior a 14 para a média não ser 14. No caso da turma *B* também é um bocado difícil que a média seja 14, uma vez que 50% da turma tem nota igual ou inferior a 14.

A resposta de Joana denota, no caso da turma *A*, uma certa confusão de raciocínio e, no caso da turma *B*, a presença da concepção errada de que a média não poderá ser superior ao valor máximo de 50% dos dados.

Depois de leccionar a unidade, Joana afirma que a resposta que tinha dado está errada, dizendo que fez confusão. Agora, baseando-se na possível heterogeneidade dos dados e no efeito de compensação, conclui que ambas as médias podem assumir os valores calculados. No caso da turma *A*, afirma:

> Depende das notas que ele tiver aqui. As notas mais altas foram obtidas na *A* e não há nenhuma classificação de 14; pode haver várias superiores a 14 e outras inferiores (…), no sentido de umas compensarem as outras.

Para a turma *B*, argumenta:

> "Metade da turma tem nota inferior ou igual a 13, mas o João tem 16 e muitos outros podem ter também superior a 14. É, como na turma *A,* uma pode compensar a outra nota, logo a média também pode dar 14.

Finalmente, sobre possibilidade/impossibilidade da moda tomar um valor dado (questão 2.2), no caso da turma *A,* Joana, antes de leccionar a unidade, tinha respondido correctamente, afirmando que "a moda da turma *A* está incorrecta uma vez que não existe nenhum aluno com nota 14". No caso da turma *B*, foi influenciada novamente pelo conhecimento do valor máximo de 50% dos dados.

Depois de leccionar a unidade, analisando as respostas, continua a concordar com os argumentos que tinha avançado para a turma *A*. Já no caso da turma *B*, reconsidera e pondera a influência sobre a moda de existirem 50% de classificações inferiores ou iguais a 13 valores e corrige a resposta dada antes.

Cálculo envolvendo medidas de tendência central

Na determinação de dados a partir dos valores da média e de um dado (questão 4), antes de leccionar a unidade, Joana tinha usado o algoritmo da média ponderada, 78 = (78+8*x*)/9, e concluído que cada uma das restantes pessoas pesava 79 kg. Depois de leccionar a unidade, continua a concordar com a resposta dada e com o raciocínio desenvolvido.

Todavia, quando se tenta saber se haveria outra resposta possível, Joana fica um pouco confusa e, induzida pela investigadora, admite que as pessoas podiam ter pesos diferentes. Agora, face a esta possibilidade, o único procedimento alternativo que vislumbra é o método de tentativa e erro testado através do algoritmo da média.

> I (Investigadora): Acha que as pessoas têm de pesar todas o mesmo?
> J (Joana): Não. Os pesos podiam ser diferentes.
> I: Se tivesse que dar pesos diferentes, o que é que fazia?
> J: Para dar pesos diferentes… Podiam ter umas 79, outras 78, outras 77… tinha de somar …tinha de dar vários valores… nunca saía daqui. Dar diferentes pesos mais ou menos dentro disto: 78, 79 e assim, dividia por 9 e via quanto é que dava a média, até acertar. Isso era impossível, teria que haver outra forma de fazer isso.

Embora a investigadora lhe propusesse que pensasse em tentativas mais orientadas a partir dos 79 kg já calculados, Joana entende que pode tirar de um lado e colocar no outro, mas continua a afirmar que não vê muito sentido em fazer isso.

No cálculo da média de dados representados num gráfico de barras (questão 5.1), antes de leccionar a unidade, Joana respondeu erradamente, considerando que a média era 3 e não apresentando qualquer justificação. Depois de leccionar a unidade, altera a resposta alegando ter confundido a média com a moda. Agora, resolve correctamente a questão, organizando os dados numa tabela de frequências e aplicando, de seguida, o algoritmo da média.

No cálculo da mediana de dados representados num gráfico de barras (questão 5.3), Joana, antes de leccionar a unidade, tinha respondido que não se lembrava do método de calcular a mediana.

Depois de leccionar a unidade, tenta determinar a mediana usando o método que tinha utilizado na questão 3, em que os dados não estavam agrupados. Deste modo, numa primeira tentativa, calcula a mediana dos valores da variável não tendo em conta as suas frequências absolutas: "Coloquei o número de irmãos 0 1 2 3 4 5. Depois encontrei os valores médios de irmãos, que era o 2 e o 3. Somei-os e dividi por 2. Deu 2,5".

Reflectindo sobre a sua resolução, Joana revela algumas dúvidas sobre a adequação do procedimento usado e, continuando a pensar, considera as frequências absolutas na localização da mediana.

> Não me lembro muito bem como é que isto de faz. (…) Só que os alunos da escola são estes todos (considera todos os dados). Por isso, se assim fosse, devia ser 6 zeros, 7… não sei já.
> Dá para fazer assim: 0x6, 1x7, 2x3, 3x8, 4x1, 5x2 [que na sua opinião corresponde a considerar a lista ordenada de todos os dados], mas também é um bocado estranho ter de andar a pôr os zeros todos. (…) Com zero tenho 6, somava 6+7=13, 13, 16, 16 e 8 dá 24, 25, 26, 27… [conta todos os dados], afinal é 27. A dividir por 2, dava13,5. Então será o elemento que está entre o 13 e o 14. Por isso… seria o 1 e o 2. Fazia (1+2)/2, que dava 1,5.

Embora pense que é mais lógico calcular a mediana por este último processo, refere que a mediana "corresponde aos valores intermédios" e continua a não estar muito segura, dizendo: "já não me lembro como se calcula" e "não sei se está correcto assim".

Em consonância com a estratégia usada, Joana considera ser mais difícil determinar a média e a mediana directamente de um gráfico do que de uma tabela de frequências.

No estudo da influência do zero no valor da média (questão 6), antes de leccionar a unidade, Joana não ponderou adequadamente os valores para determinar a média, ou seja, calculou (13,5+0)/5, concluindo que a média do número de ramos vendidos era 2,7.

Depois de leccionar a unidade, continua a afirmar que a resposta está correcta e tenta explicar melhor o que fez. Porém, ao explicar esse raciocínio, dá-se conta de algo estranho: "É um bocado esquisito, porque 13,5 era já a média dos 4 dias. E eu estou a dividir novamente pelos dias e estou-lhe a somar zero, que é o dia em que não vende nada".

Depois de pensar uns momentos em silêncio, reformula o seu raciocínio, aplicando o algoritmo da média em duas fases: primeiro, determina o número total de ramos e, depois, calcula a nova média:

> Pego na média, que é igual àquilo que quero saber, que é o número de ramos que ela vendeu nos 4 dias a dividir pelos dias, que são 4. E então vou encontrar o número de ramos que vendeu nos 4 dias, 13,5=*x*/4, deu-me 54. Em quatro dias vendeu 54 ramos. (…) Agora sim, é que posso calcular a média dos 5 dias. E então fiz: a média é igual aos 54, que é os 4 dias em que vendeu 54 ramos, mais zero a dividir por 5, que é o número de dias, (isto é,) $\bar{x}$ =(54+0)/5 e dá 10,8. Parece-me mais correcto assim porque no anterior não fazia muito sentido, pois já tinha calculado a média para os 4 dias e dividir outra vez por 5 dias não faz sentido. Assim, já acho que faz mais sentido, tem mais lógica.

Na determinação de um dado a partir da alteração do valor da média dada (questão 7) e no cálculo da média de duas médias dadas (questão 8), antes de leccionar a unidade, em ambas os casos, Joana não considerou o(s) ‘peso(s)’ da média(s) dada(s) no cálculo do novo dado ou da nova média.

Após ter leccionado a unidade, depois de analisar a resposta dada, considera que aplicou o mesmo raciocínio errado que tinha usado na questão 6. Explica então o seu novo processo de resolução, baseado no algoritmo da média e em tudo semelhante ao referido na questão 6, resolvendo as duas questões mais ou menos da mesma forma.

Significado e interpretação de medidas de tendência central

Na selecção da estatística que melhor representa um conjunto de dados (questão 3), inicialmente, Joana tinha calculado correctamente a moda, a média e a mediana e respondido que a medida que melhor representa o conjunto de dados era a mediana, sem apresentar qualquer outra justificação.

Depois de leccionar a unidade, continua a concordar com a resposta dada e tenta explicar a sua escolha. Muito embora se estabeleça alguma comparação entre as estatísticas e os dados, não há nenhuma referência explícita à assimetria da distribuição.

> Pelos cálculos que fiz, (a medida que) representaria melhor os dados recolhidos pelo Luís era realmente a mediana. A moda é 6000$00, mas a maior parte recebe inferior a esse valor. E a média não sei até que ponto será muito credível. Porque 1995$00 (é o valor da média) … praticamente todos os valores são inferiores, a não ser o 6000$00, que é superior a isso. De resto, o mais próximo é a mediana.

Questionada sobre o significado da média num contexto de vencimentos (questão 9.1a), antes de leccionar a unidade, Joana ligou o significado da média directamente ao algoritmo, dizendo que "a média corresponde à soma de todos os ordenados, dividida pelo número total de indivíduos".

Após ter leccionado a unidade, continua a perspectivar a média na sua vertente algorítmica, reafirmando uma justificação semelhante: "Significa que a soma dos ordenados dos 50 empregados a dividir pelo número total de empregados, que é 50, é 120". Numa referência implícita à fraca robustez da média face à existência de valores extremos, acrescenta que neste caso não terá grande significado estudar a média "porque se calhar há empregados que recebem 300 contos ou assim". Em consonância com o significado atribuído, Joana afirma que, quando se lembra da média, a associa logo ao algoritmo, ao processo de cálculo.

No caso do significado da mediana num contexto de vencimentos (questão 9.1c), antes de leccionar a unidade, Joana não se lembrava do significado de mediana. Depois de leccionar a unidade, afirma que "a mediana é 90 mil escudos, quer dizer que é o valor intermédio". E, tentando esclarecer melhor a sua resposta, diz: "É o ordenado médio de alguns trabalhadores… Há uns que recebem menos que estes, que é o caso dos 80, e outros que recebem um valor superior". Salienta-se que na justificação de Joana não há qualquer alusão explícita a 50% dos dados nem à sua ordenação.

Na avaliação de um conjunto de dados com base nas medidas de localização (questão 9.2), antes de leccionar a unidade, Joana começou por referir que "há empregados que têm um ordenado de 80 mil escudos, o que corresponde à maior parte dos empregados. Há empregados que têm um ordenado muito superior".

Depois de leccionar a unidade, continua a considerar esta ideia válida, acrescentando que "se calhar há outros que até têm um ordenado inferior" e envolve no seu raciocínio a média: "Neste caso, a média não vai corresponder muito à realidade. A média é 120 mil escudos, a maior parte não é isso que recebe".

A investigadora tentou saber se a mediana permite formular algum comentário em relação aos ordenados, ao que Joana responde: "Significa que o valor intermédio é 90 mil escudos, é o que ganham… Depois há aqueles que ganham 80 mil escudos, que deve ser o mínimo talvez".

A investigadora, tentando precisar o significado da expressão "a maior parte dos empregados", obtém por resposta: "a maior parte é no sentido de mais empregados receberem 80 mil escudos", que é exactamente o valor da moda.

Classificação e formulação de acontecimentos

Na classificação de um acontecimento dado em certo, possível e impossível, na experiência de rodar uma tômbola de jogo com números de 1 a 90 (questão 10), antes de leccionar a unidade, Joana respondeu correctamente a todas as perguntas desta questão. Depois de leccionar a unidade, continua a concordar com as respostas dadas e acrescenta alguns comentários sobre as questões 10.2 e 10.4, que se referem a acontecimentos certos.

> Sair um número menor que 91 é certo. Não sei se aqui também teria que impor a condição menor que 91 e maior que 1, ou maior que zero. Não sei, mas neste caso aqui (pergunta 10.2), uma vez que é dado no enunciado, isto acho que é certo. (…)
> Sair um número maior que zero também pus que era certo, que é a mesma condição aqui que o 91.

Joana dá assim a entender que o facto de considerar que o conjunto não está limitado leva-a a questionar se estará a pensar da forma mais correcta. No entanto, intuitivamente, ela considera correcto o seu raciocínio:

> É assim, uma vez que aqui tem: roda-se a tômbola de jogo de 1 a 90, sair um número maior que zero, … eu já sei que é de 1 a 90, já sei que é… Só tenho aqueles números, se é maior que zero são estes todos que estão cá dentro, por isso é certo. Neste caso, aqui, também se é menor que 91, sei que são todos os números que estão lá, por isso….

Para se obter de certeza uma bola de cada uma de três cores possíveis num saco com 5 bolas vermelhas, 2 verdes e 4 brancas (questão 12), antes de leccionar a unidade, Joana tinha respondido que precisava de tirar 10 bolas do saco, não apresentando qualquer justificação. Depois de leccionar a unidade, começa por afirmar que precisava de tirar 8 bolas do saco: "Para ter a certeza que vamos tirar uma de cada cor temos que tirar 8 bolas, ou seja, temos que tirar 4 vermelhas, 1 verde e 3 brancas".

A convite da investigadora, procura explicar melhor o seu raciocínio e apercebe-se que deu uma resposta incorrecta. Pensando um pouco mais, conclui que precisa de tirar 10 bolas e adopta o raciocínio *bolas mais numerosas*:

> Na pior das hipóteses, podem-me sair as 5 vermelhas, as 4 brancas e depois só fico lá com 2 verdes. Tenho que tirar outra e já tenho uma de cada cor. Ou posso tirar também as 5 vermelhas, as 2 verdes e depois (…) só preciso de tirar mais uma para me sair uma de cada cor. Mas, na pior das hipóteses, eu só preciso de tirar 10 bolas, que era no caso de ficarem lá só as 2 verdes, depois só tirava mais uma. Não é?!

No caso da formulação de um acontecimento certo, um possível e um impossível, extraindo uma bola de uma caixa com 4 bolas azuis, 7 vermelhas e 3 verdes (questão 13), antes de leccionar a unidade, Joana deu um exemplo correcto de acontecimento impossível (questão 13.2) e outro de acontecimento possível, mas não certo (questão 13.3). Contudo, no que respeita ao acontecimento certo (pergunta 13.1), respondeu que "neste caso não há acontecimento certo":

Depois de leccionar a unidade, inicialmente manteve as respostas anteriores e tentou justificar a não existência de acontecimento certo:

> Respondi: neste caso, não há acontecimento certo. E não há. Se se responder sair uma bola, e nesse caso já se sabe que vai sair. Agora… não posso dizer nem as cores, que eu não sei. Pode sair qualquer uma. Pode sair azul ou vermelha ou verde. Por aqui, neste caso, não estou a ver nenhum acontecimento certo. Não estou a ver.

Embora mencione exemplos de acontecimentos certos, Joana não os identifica como tal. Além disso, na sua perspectiva, o acontecimento ‘sair uma bola’ não é verdadeiramente um acontecimento certo. A investigadora reformula a questão, perguntando se não há nenhum acontecimento que possa dizer que tem a certeza que vai realizar-se. Agora, Joana, embora com algumas reticências, responde: "sair uma bola". Seguidamente, quando lhe é pedido outro exemplo, diz: "sair uma bola azul ou uma bola vermelha ou uma bola verde".

Comparação de probabilidades em dois sacos

No caso de dois sacos com o mesmo número de casos favoráveis (questão 11.1), antes de leccionar a unidade, Joana tinha respondido, correctamente, que era mais provável obter uma bola preta do saco I, baseando a sua resposta nos raciocínios: *comparar as probabilidades dos acontecimentos* e *comparar o número de bolas brancas e pretas*.

Depois de leccionar a unidade, começa por comparar as razões:

> Se formos a ver em termos de razão de bolas pretas para bolas brancas, no caso do saco I, temos duas pretas para duas brancas e, aqui neste saco (saco II), temos duas pretas para três brancas, logo é mais fácil tirar bola preta neste saco aqui (saco I), que temos menos brancas. (…) Ao comparar dá 1, e esta aqui dá um vírgula qualquer coisa. Então aqui (saco I) é mais fácil tirar uma bola preta.

A pedido da investigadora, Joana explica os procedimentos que utilizou antes de leccionar a unidade. Assim, no caso de *comparar as probabilidades dos acontecimentos*, diz:

> Esta aqui foi com base nas probabilidades. Número de casos favoráveis sobre o número de casos possíveis. Ou seja, o número de casos favoráveis era 2, o número de casos possíveis eram 4, que era o número total de bolas. Por isso dá 1/2 (saco I). E aqui, neste caso, dá 2/5 (saco II).

Continua também a considerar correcto o raciocínio *comparar o número de bolas brancas e pretas*.

> Sim concordo com o que está aqui escrito: 'é mais provável sair uma bola preta no saco I, porque embora os dois sacos tenham o mesmo número de bolas (pretas), o I tem menos bolas brancas' (…), por isso é mais fácil tirar uma preta aqui, porque aqui tem 3 brancas, não é?!

Talvez por ambos os raciocínios terem conduzido à mesma resposta, Joana não tenha questionado a validade deste último raciocínio.

Na situação em que, de um saco para o outro, se acrescentou um caso favorável e um caso desfavorável (questão 11.2), antes de leccionar a unidade, Joana concluiu erradamente que era mais provável obter uma bola preta do saco I, recorrendo ao raciocínio comparar o número de bolas brancas e pretas, embora também tenha calculado as probabilidades dos acontecimentos.

Depois de leccionar a unidade, tenta explicar a resposta dada antes:

> No fundo é praticamente a mesma coisa. Lá está, respondi também de duas formas diferentes. Fui novamente pelas probabilidades e depois… liguei só ao número de bolas que cada saco tinha. Do género, no saco I porque só tem uma bola preta, também tem menos bolas brancas, o que faz com que a probabilidade de sair branca também seja menor.

Questionada sobre a sua concordância actual com este raciocínio, Joana pondera a resposta dada e, sem mais comentários, recorre ao raciocínio *comparar as razões*: "Ora bem, a probabilidade de sair uma bola preta? Ser mais provável era no saco II, não era?... Neste caso temos 1/2 e 2/3… Se calhar a probabilidade é a mesma".

Joana chega assim a uma resposta diferente, embora por comparação incorrecta das fracções. Depois de, por breves momentos, voltar a analisar o raciocínio *comparar o número de bolas brancas e pretas* passa outra vez para a comparação das razões e, novamente recorrendo a cálculos, selecciona o saco I.

No entanto, quando se lhe pede para comparar as probabilidades dos acontecimentos, que tinha calculado, conclui que "a probabilidade é maior aqui, para o saco II. Há bocado estávamos no I, agora estamos a ir para o II".

Convidada pela investigadora para voltar ao raciocínio *comparar o número de bolas brancas e pretas*, Joana volta a escolher o saco I e acrescenta: "no fundo, no fundo, até achava que a probabilidade era a mesma. Devo andar aqui às voltas". Nesta altura desenvolve a sua ideia:

> Estava a fazer de outra forma: tenho uma bola preta para uma branca, sobrava uma branca (saco I). E aqui (saco II) tenho uma para aqui (uma preta para uma branca) e outra para ali, sobrava uma branca também.

Perante esta indecisão, a investigadora tenta perceber se Joana considera mais válido algum dos seus raciocínios. Não tendo tido êxito, sugere-lhe que analise a questão 11.3, à qual tinha respondido correctamente com base no raciocínio *comparar as probabilidades dos acontecimentos*: "Então, em termos de probabilidade, é maior aqui neste caso (saco II). Logo devia ser no saco II. É maior a probabilidade de sair preta".

Tentando-se averiguar até que ponto esta resposta é dada com convicção, Joana afirma:

> Agora digo que é com convicção, através da regra (de Laplace) e nisto aqui (comparação de razões). Fazendo o mesmo para aqui (pergunta 11.3), vejo que é igual nos dois. Neste caso (pergunta 11.2), a razão também é maior no saco II.

Finalmente, questionada sobre o raciocínio *comparar o número de bolas brancas e pretas*, Joana admite que lhe parece normal e não consegue ver o que nele está incorrecto.

6. Conclusão

No caso investigado no presente estudo destacam-se três dimensões: dificuldades de Joana em estocástica e influência de leccionar a unidade de Estatística, características do seu conhecimento em estocástica e implicações didácticas.

6.1. Dificuldades de Joana em estocástica e influência de leccionar a unidade de Estatística

Antes de leccionar a unidade de Estatística, Joana revelou dificuldades na grande maioria das questões contempladas no estudo, designadamente em questões sobre a possibilidade/impossibilidade em medidas de tendência central, também observadas em alunos do 12º ano (Boaventura, 2003) e em alunos de 11 e 12 anos (Dreyfus & Levey, 1996); o cálculo envolvendo medidas de tendência central, também observadas em estudantes universitários (Pollatsek *et al.*, 1981) e do 6º e 7º anos (Cai, 1995; Carvalho, 1996); o significado e interpretação de medidas de tendência central, também observadas em alunos do 7º ano (Carvalho & César, 2000), do 12º ano (Boaventura, 2003) e do ensino superior (Batanero *et al.*, s/d); a classificação e formulação de acontecimentos e a comparação de probabilidades em dois sacos, também observadas em alunos do 8º e 11º anos (Fernandes, 1999), do 5º ao 7º ano (Fischbein & Gazit, 1984) e do 4º ao 8º ano (Fischbein *et al.*, 1991).

Depois de leccionar a unidade de Estatística, Joana ultrapassou, por iniciativa própria, as dificuldades sobre decidir da possibilidade/impossibilidade da média e da moda tomarem um valor dado. Já a dificuldade em reconhecer a impossibilidade de determinar a média em atributos qualitativos apenas foi ultrapassada com um intenso questionamento da investigadora. A este propósito, deve ter-se presente que, em geral, as situações de impossibilidade são pouco referenciadas no sistema de ensino português. No caso da Estatística, a partir da análise de manuais escolares, Boaventura (2003) verificou que o âmbito de aplicabilidade das medidas de localização, apesar de referido nos diferentes manuais estudados, acaba por ser desvalorizado ao destacarem-se as situações de possibilidade.

No cálculo envolvendo medidas de tendência central, Joana superou, por iniciativa própria, as dificuldades em determinar a média de uma média inicial dada e de um novo dado, um dado a partir do conhecimento da média inicial (sem esse dado) e da média final, a média de dados representados num gráfico de barras e de duas médias dadas. No caso da mediana, mostrou-se insegura sobre o método usado no cálculo do seu valor em dados representados num gráfico.

Em relação ao significado e interpretação de medidas de tendência central, Joana manteve uma interpretação da média com base na descrição do seu algoritmo e denotou alguma confusão no caso da mediana. Na avaliação de um conjunto de dados, a estagiária não conseguiu ultrapassar as suas dificuldades na justificação da escolha da estatística que melhor representa uma distribuição e na relacionação das três medidas de localização para produzir um comentário sobre os dados.

Relativamente à classificação e formulação de acontecimentos, especialmente no caso de acontecimentos certos, as dúvidas de Joana parecem ter sido ultrapassadas na classificação de acontecimentos dados e superou com mais dificuldade a condição a que deveria satisfazer um acontecimento para ser certo.

Finalmente, no caso da comparação de probabilidades em dois sacos, Joana aderiu simultaneamente a raciocínios intuitivos e normativos para concluir a resposta, sentindo algum conflito quando esses raciocínios conduziam a respostas diferentes.

Em síntese, face à promoção de raciocínios normativos, o impacto da leccionação da unidade de Estatística foi mais notório nas questões de cálculo envolvendo medidas de tendência central e foi mais reduzido nas questões sobre o significado e interpretação de medidas de tendência central e nas de comparação de probabilidades, persistindo, contudo, algumas dificuldades em todos os outros temas. Todavia, este impacto pode ter sido reduzido pelo facto de no 6º ano, nível de ensino em que Joana leccionou, haver conceitos, como por exemplo o de mediana, que não são abordados e outros que são tratados com pouca profundidade.

Embora exista consenso sobre a reduzida formação em estatística proporcionada pela generalidade das instituições do ensino superior (Branco, 2000), atribuir a extensão e a natureza das dificuldades de Joana apenas a esse facto não parece razoável porque Joana estudou também Estatística no ensino secundário e as suas dificuldades foram mais acentuadas nas situações sobre o significado e a interpretação. Donde, devemos considerar como estando sobretudo na origem das suas dificuldades o facto de tanto no ensino secundário como superior se seguir uma abordagem tecnicista e formal da Estatística (Fernandes, Sousa & Ribeiro, 2004).

Tendo dado os seus primeiros passos em meados do século passado, a didáctica da Estatística encontra-se pouco desenvolvida e não consolidada (Batanero, 2001). Comparativamente com a didáctica da Geometria ou da Álgebra, por exemplo, constata-se que, na formação inicial de professores, a didáctica da Estatística merece muito menor atenção ou simplesmente é inexistente. Esta realidade pode também explicar a abordagem mais tecnicista e formal que frequentemente é adoptada no seu ensino.

6.2. Características do conhecimento de Joana em estocástica

O conhecimento de Joana em estocástica, além de ser bastante limitado, é de carácter acentuadamente algorítmico e rotineiro, apresentando-se relativamente desconectado.

Especialmente no caso da Estatística, Joana revelou um conhecimento muito ligado a fórmulas e a cálculos. Em quase todas as questões, ela recorre a fórmulas para as resolver e mostra pouca flexibilidade em adoptar estratégias mais elementares. Neste último caso, quando a investigadora lhe induz uma abordagem mais elementar para a determinação de dados a partir dos valores da média e de um dado, ela parece compreendê-la mas não a adopta (ver questão 4).

Em geral, a experiência de leccionação da unidade de Estatística não permitiu a Joana vencer as suas dificuldades nas questões que não podiam ser resolvidas através da aplicação de uma simples fórmula. São exemplo disso, a identificação da estatística que melhor representa um conjunto de dados, a atribuição de significado à média e à mediana num dado contexto e avaliar um conjunto de dados com base nas medidas de localização. Especificamente, quando questionada sobre o significado da média num dado contexto, Joana refere que imediatamente associa a média ao seu algoritmo de cálculo.

Uma possível abordagem mais rotineira, aquando da aprendizagem da estocástica, pode também explicar as dificuldades de Joana nas situações estudadas (Batanero *et al.*, s/d; Carvalho & César, 2001). A este propósito, ela mesmo afirma que é mais difícil calcular a média e a mediana quando os dados estão representados através de gráficos.

Finalmente, o conhecimento relativamente desconectado manifesta-se sobretudo nas questões de probabilidades. Nestas questões, Joana recorre simultaneamente a estratégias intuitivas e normativas, sem, contudo, optar claramente por uma delas. Por exemplo, na comparação de probabilidades, talvez por os dois raciocínios *comparar as probabilidades dos acontecimentos* e *comparar o número de bolas brancas e pretas* conduzirem à mesma resposta, Joana não sentiu necessidade de optar por um deles. Já noutra questão, estes mesmos raciocínios conduziam a respostas distintas, e, embora Joana tenha afirmado com convicção o raciocínio normativo, ela admite que o raciocínio intuitivo lhe parece normal e não consegue ver o que nele está incorrecto.

6.3. Implicações didácticas

Existe entre muitos professores a convicção de que a estatística é um assunto fácil, não apresentando, por isso, grandes dificuldades de aprendizagem. Sousa (2002) refere que a não exigência de pré-requisitos importantes explica o ser vista como uma temática de fácil aprendizagem por parte dos alunos e Fernandes *et al.* (2004) verificaram que os três professores que participaram no seu estudo avaliaram a Estatística como um tema fácil, quer para professores quer para alunos. De modo semelhante, antes de leccionar a unidade de Estatística, Joana partilhava este ponto de vista e, não fosse a intervenção da investigadora, possivelmente, manteria a mesma visão após ter leccionado a unidade.

Esta crença, mais ou menos partilhada entre os professores, é aqui questionada pelas próprias dificuldades sentidas por Joana. E, no que concerne aos alunos, também os vários estudos aqui referidos desafiam tal convicção. Na verdade, para Batanero *et al.* (2004), as dificuldades em estocástica devem-se muito à natureza do seu raciocínio e conhecimento, referindo que são encontrados resultados contra-intutivos em níveis muito elementares, que os resultados das experiências não são reversíveis e que a estocástica está cada vez mais relacionada com as aplicações. Assim, para estes autores, a reflexão epistemológica pode ajudar os professores a compreenderem o papel dos conceitos na Estatística e outras áreas, a sua importância na aprendizagem dos alunos e as suas dificuldades conceptuais na resolução de problemas.

O carácter algorítmico e rotineiro do conhecimento estocástico têm também de ser desafiados. Os resultados do presente estudo indicam claramente a necessidade dos professores experienciarem durante a sua formação, incicial e contínua, situações que relevem o significado e interpretação da estatística (Ponte *et al.*, 2001). Caso contrário, será pouco provável que os professores explorem tais situações na sala de aula com os seus alunos (Contreras & Blanco, 2001). Na terminologia de Skemp (1987), não devemos ficar por uma ‘compreensão instrumental’, é necessário desenvolver uma ‘compreensão relacional’, se queremos aprofundar a compreensão e o sentido de utilidade da estatística nos nossos alunos, o que é preconizado no âmbito da estocástica por Batanero (2000) e Batanero *et al.* (1994).

Por fim, a fraca integração do conhecimento estocástico, designadamente entre um conhecimento intuitivo e normativo, constitui um aspecto crítico porque a tomada de consciência destes diferentes conhecimentos é uma condição necessária para resolver possíveis conflituosidades ou para consolidar o conhecimento normativo (Fernandes, 1999; Konold, 1991). Para tal, é decisivo que o professor procure despoletar as ideias intuitivas dos alunos e que as confronte com ideias normativas, seguindo-se deste confronto uma mais profunda integração das suas ideias. A não ser assim, corre-se o risco real de que o aluno mantenha ideias distintas, eventualmente antagónicas, relativamente a um mesmo assunto ou conceito (Fischbein, 1975).

Referências

ABRANTES, Paulo; SERRAZINA, Lurdes & OLIVEIRA, Isolina (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação.

AZCÁRATE, Pilar; CARDEÑOSO, José M. & PORLÁN, Rafael (1998). Concepciones de futuros profesores de primaria sobre la noción de aleatoriedad. *Enseñanza de las Ciencias*, 16(1), pp. 85-97.

BARR, G. V. (s/d). Some student ideas on the median and the mode. Recuperado em 17 de Janeiro, 2002, de http://science.ntu.ac.uk/rsscse/ts/bts/barr/text.html

BATANERO, Carmen (2000). Dificultades de los estudiantes en los conceptos estadísticos elementares: el caso de las medidas de posición central. In C. Loureiro, O. Oliveira e L. Brunheira (orgs.), *Ensino e Aprendizagem da Estatística*. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística, Associação de Professores de Matemática e Departamentos de Educação e de Estatística e Investigação Operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, pp. 31-48.

BATANERO, Carmen (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística, Universidade de Granada.

BATANERO, Carmen; GODINO, Juan D. & NAVAS, Francisco (s/d). Concepciones de maestros de primaria en formación sobre los promedios. Versão ampliada do trabalho publicado em H. Salmerón (ed.), *VII Jornadas LOGSE: Evaluación Educativa* (pp. 310-304). Universidade de Granada. Recuperado em 15 de Dezembro, 2000, de http://www.ugr.es/~batanero

BATANERO, Carmen; GODINO, Juan D. & ROA, Rafael (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education*, 12(1) (On line). Recuperado em 15 de Junho, 2004, de http://www.amstat.org/publications/jse/v12n1/batanero.html

BATANERO, Carmen; GODINO, Juan D.; GREEN, David R.; HOLMES, Peter & VALLECILLOS, Angustias (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal for Mathematical Education in Science and Technology*, 25(4), pp. 527-547.

BOAVENTURA, Maria G. (2003). *Dificuldades de Alunos do Ensino Secundário em Conceitos Estatísticos*. Dissertação de mestrado não publicada, Universidade do Minho, Braga.

BRANCO, João (2000). Estatística no secundário: o ensino e seus problemas. In C. Loureiro, O. Oliveira. & L. Brunheira (orgs.), *Ensino e Aprendizagem da Estatística*. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística, Associação de Professores de Matemática e Departamentos de Educação e de Estatística e Investigação Operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, pp.11-30.

BROWN, Catherine A. & BORKO, Hilda (1992). Becoming a mathematics teacher. In D. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York, NY: Macmillan, pp. 209-239.

CAI, Jinfa (1995). Beyond the computational algorithm: student's understanding of the arithmetic average concept. In L. Meira e D. Carraher (eds.), *Proceedings of the 19th PME Conference* (Vol. 3), Universidade Federal de Pernambuco, pp. 144-151.

CARVALHO, Carolina (1996). Algumas questões em torno de tarefas estatísticas com alunos do 7º ano. In A. Roque e M. J. Lagarto (orgs.), *Actas do ProfMat 96*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, pp. 165-171.

CARVALHO, Carolina & CÉSAR, Margarida (2000). As aparências iludem: reflexões em torno do ensino da estatística no ensino básico. In C. Loureiro, O. Oliveira e L.

Brunheira (orgs.), *Ensino e Aprendizagem da Estatística*. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística, Associação de Professores de Matemática e Departamentos de Educação e de Estatística e Investigação operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, pp. 212-225.

COBO, Belén & BATANERO, Carmen (2000). La mediana en la educación secundaria obligatoria: un concepto sencillo? *UNO*, 23, pp. 85-96.

CONTRERAS, Luis C. & BLANCO, Lorenzo J. (2001). Qué conocen los maestros sobre el contenido que enseñan? Un modelo formativo alternativo. Comunicação apresentada no Congresso Nacional de Didácticas Específicas, Granada 2001. Recuperado em 2 de Maio, 2001, de http://www.uhu.es/luis.contreras/enlaces/articulo_con_Lorenzo.htm

CORREIA, Maria G. (1997). *O Desenvolvimento Profissional dos Professores do 1º Ciclo na Área da Matemática: Três Estudos de Caso no Contexto de um Trabalho Colaborativo*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

DREYFUS, Amos & LEVY, Osnat (1996). Are the notion of mean and related concepts too difficult for 6th and 7th grade biology students? *European Journal of Teacher Education*, 19(2), pp. 137-152.

FENNEMA, Elizabeth & FRANKE, Megan L. (1992). Teacher´s knowledge and its impact. In D. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan, pp.147-164.

FERNANDES, José A. (1999). *Intuições e Aprendizagem de Probabilidades: Uma Proposta de Ensino de Probabilidades no 9º Ano de Escolaridade*. Tese de doutoramento não publicada, Universidade do Minho, Braga.

FERNANDES, José A.; SOUSA, Manuela V. & RIBEIRO, Sónia A. (2004). O ensino de estatística no ensino básico e secundário: Um estudo exploratório. In J. A. Fernandes, M. V. Sousa & S. A. Ribeiro (orgs.), *Ensino e Aprendizagem de Probabilidades e Estatística — Actas do I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*. Braga: Centro de Investigação em Educação, Universidade do Minho, pp. 165-193.

FISCHBEIN, Efraim & GAZIT, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, 15(1), pp. 1-24.

FISCHBEIN, Efraim; NELLO, Maria S. & MARINO, Maria S. (1991). Factors afecting probabilistic judgments in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics*, 22, pp. 523-549.

FISCHBEIN, Efraim (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children.* Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company.

GALL, Meredith D.; BORG, Walter R. & GALL, Joyce P. (1996). *Educational Research: An Introduction*. New York: Longman.

GODINO, Juan D.; BATANERO, Carmen & FLORES, Pablo (1999). El análisis didáctico del contenido matemático como recurso en la formación de profesores de matemáticas. Em homenagem ao professor Oscar Sáenz Barrio. Granada: Departamento de Didáctica y Organización Escolar, pp.165-185. Recuperado em 13 de Julho, 2002, de http://www.ugr.es/~jgodino/teoria_metodos/didacties.htm

GREEN, David R. (1983). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. Em D. R. Grey, P. Holmes, V. Barnett & G. M. Constable (eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (Vol. 2). Sheffield, UK: Teaching Statistics Trust, pp. 766-783.

GUERREIRO, António M. (1999). *A Pessoa do Supervisor e o Processo de Supervisão: Representações Sociais de Alunos/futuros Professores de Matemática em Estágio Pedagógico ou Prática Pedagógica*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

KONOLD, Clifford (1991). Understanding students' beliefs about probability. In E. von Glaserfeld (ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 139-156.

LI, Kam-Yuk & SHEN, Shir-Ming (1994). Students' weaknesses in statistical projects. In D. Green (Ed.), *Teaching Statistics at its Best*. Sheffield, UK: Teaching Statistics Trust, pp.42-48.

POLLATSEK, Alexander; LIMA, Susan & WELL, Arnold D. (1981). Concept or computation: Students' understanding of the mean. *Educational Studies in Mathematics*, 12, pp. 191-204.

PONTE, João P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante*, 3(1), pp. 3-18.

PONTE, João P.; GALVÃO, Cecília; TRIGO-SANTOS, Florbela & OLIVEIRA, Hélia (2001). O início da carreira profissional de professores de Matemática e Ciências. *Revista de Educação*, 10(1), pp. 31-45.

SKEMP, Richard R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

SOUSA, Olívia (2002). Investigações estatísticas no 6º ano. In Grupo de Trabalho de Investigação (org.), *Reflectir e Investigar sobre a Prática Profissional*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, pp. 75-97.

STRAUSS, Sidney & BICHLER, Efraim (1988). The development of children's concept of the arithmetical average. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(1), pp. 64-80.

DIFFICULTIES IN STOCHASTICS OF A PROSPECTIVE ELEMENTARY TEACHER

Abstract

This study researched the impact of the teaching of Statistics unit to 6th graders on the difficulties of a student-teacher (Joana) in stochastic. Before any experience of teaching, Joana answered a questionnaire about the theme, in order to allow the identification of their conceptual difficulties; afterwards, she taught the Statistics unit; finally, she was interviewed about the issues in which she had shown difficulties when answering the questionnaire. The results of the study indicated that the teaching of the Statistics unit had a moderate success in overcoming the student-teacher's difficulties, as many changes on her answers and/or reasoning were not a result of her own initiative, but were a consequence of the questioning of the researcher. In addition, the difficulties to relate the localization measures and their meanings, as well as the comparison of probabilities were not at all overcome. It was verified yet that, besides being very limited, Joana's knowledge in stochastic was greatly algorithmic and routinised and seems to have a reduced level of integration.

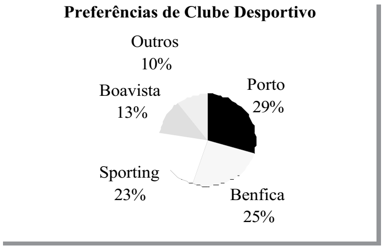
DIFFICULTÉS EN STOCHASTIQUE CHEZ UNE FUTURE ENSEIGNANTE DU PRÉPARATOIRE

Résumé

Dans cet étude on a fait des recherches sur l'impact de l'enseignement de l'unité de Statistique en 6ème année de scolarité sur les difficultés en stochastique d'une stagiaire (Joana). À cet effet, et sans avoir aucune expérience dans l'enseignement, Joana a répondu à un questionnaire sur le thème, qui a permis de repérer ses difficultés; ensuite, elle a enseigné l'unité de Statistique dans une classe de 6ème année; et, finalement, elle fut interrogée sur des questions où elle avait révélé des difficultés dans le questionnaire préalable. De les résultats de l'étude, on constate que l'enseignement de l'unité de Statistique a eu un succès relatif pour surmonter ses difficultés, vu que beaucoup de changements dans la réponse et/ou raisonnement ne furent pas le résultat de sa propre initiative, mais plutôt la conséquence des questions posées par l'investigatrice. En plus, les difficultés senties dans le relationnement des mesures de localisation, dans ses significations et dans la comparaison de probabilités n'ont pas été surmontées. On a encore vérifié que la connaissance de Joana en stochastique, bien que très limitée, était fortement algorithmique et routinière et présentant une faible intégration.

Anexo – Questionário

1. As preferências de clube desportivo dos 200 alunos, do 2º ciclo, de uma escola são dadas pelo seguinte gráfico:



Observando o gráfico:

1.1. Indique a moda das preferências de clube. Justifique a sua resposta.

1.2. Determine, caso seja possível, a média das preferências de clube. Justifique a sua resposta.

2. Relativamente às classificações finais em Matemática de duas turmas, A e B, sabe-se que:

— as classificações mais altas foram obtidas na turma A;

— na turma A não existe qualquer aluno com classificação de 14 valores;

— o João, da turma B, obteve a classificação de 16 valores;

— 50% dos alunos da turma B obtiveram classificação inferior ou igual a 13 valores.

O João determinou a média e a moda das classificações de ambas as turmas e obteve os seguintes resultados:

Turma	Média	Moda
A	14 valores	14 valores
B	14 valores	15 valores

Face aos dados fornecidos, averigúe, justificando, se:

2.1. As médias das classificações de cada turma podem assumir os valores calculados pelo João;

2.2. As modas das classificações de cada turma podem assumir os valores calculados pelo João.

3. O Luís perguntou a dez amigos quanto recebiam de semanada, tendo obtido os seguintes dados (em escudos):

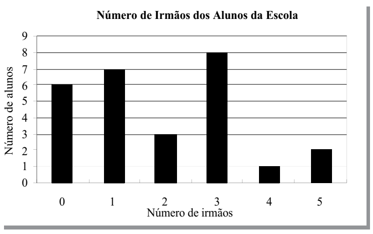
750	700	6000	1500	800	1000	900	1100	1200	6000

Considerando a média, a moda e a mediana como valores possíveis para representar uma distribuição, indique qual destas medidas melhor representa o conjunto dos dados recolhidos pelo Luís.

Justifique a sua resposta.

4. A média do peso de nove pessoas é 78 quilos. Admitindo que uma delas pesa 70 quilos, indique um peso possível para cada uma das restantes oito pessoas.

5. Perguntou-se aos alunos de uma escola, do 1º ciclo, quantos irmãos tinham. A partir das respostas obtidas, construiu-se o seguinte gráfico:



Observando o gráfico:

5.1. Determine a média do número de irmãos dos alunos da escola.

5.2. Indique a moda do número de irmãos dos alunos da escola. Justifique a sua resposta.

5.3. Determine a mediana do número de irmãos dos alunos da escola.

6. A D. Alice esteve no mercado a vender ramos de rosas durante 5 dias de uma semana. Nos 4 primeiros dias, a média de ramos vendidos por dia foi de 13,5. No quinto dia não vendeu nenhum ramo. Determine a média do número de ramos de rosas vendidos durante os cinco dias dessa semana.

7. A média das idades de um grupo de três amigos é 15 anos. Juntou-se ao grupo um outro amigo. Sabendo que a média das idades dos quatro amigos passou a ser 16 anos, determine a idade do amigo que se juntou ao grupo.

8. Há 10 pessoas num elevador, 6 mulheres e 4 homens. A média do peso das mulheres é 60 quilos, e a média do peso dos homens é 80 quilos. Determine a média do peso das 10 pessoas que se encontram no elevador.

9. Numa empresa trabalham, ao todo, 50 empregados. Acerca dos seus vencimentos sabe-se que a média é 120 mil escudos, a moda é 80 mil escudos e a mediana é 90 mil escudos.

9.1. No contexto da situação apresentada, interprete o significado da a) média, b) moda e c) mediana.

9.2. Faça um comentário sobre os vencimentos dos empregados da empresa.

10. Roda-se uma tômbola de jogo com números de 1 a 90. Considerando os resultados possíveis deste jogo, classifique em certo, impossível ou possível mas não certo cada um dos acontecimentos seguintes: **10.1.** Sair um número ímpar; **10.2.** Sair um número menor do que 91; **10.3.** Sair o número 100; **10.4.** Sair um número maior do que 0; **10.5.** Sair o número 31.

11. Observe, em cada alínea, a quantidade de bolas brancas e pretas dos dois sacos. As bolas são todas iguais excepto na cor. Sem ver, tira-se uma bola de cada um dos sacos.

11.1. De qual dos sacos é mais provável tirar uma bola preta? Justifique a sua resposta.

Saco I: ○○●● **Saco II:** ○○○●●

11.2. De qual dos sacos é mais provável tirar uma bola preta? Justifique a sua resposta.

Saco I: ○○● **Saco II:** ○○○●●

11.3. De qual dos sacos é mais provável tirar uma bola preta? Justifique a sua resposta.

Saco I: ○○● **Saco II:** ○○○○●●

12. Num saco há 5 bolas vermelhas, 2 verdes e 4 brancas. As bolas são todas iguais excepto na cor. Sem ver, tira-se do saco uma bola de cada vez, sem a voltar a repor. Quantas bolas se tem de tirar do saco para ter a certeza de obter, pelo menos, uma bola de cada cor?

Justifique a sua resposta.

13. Retira-se uma bola, ao acaso, de uma caixa que contém 4 bolas azuis, 7 vermelhas e 3 verdes. Referindo-se aos possíveis resultados desta experiência, apresente um exemplo de acontecimento: **13.1.** Certo; **13.2.** Impossível; **13.3.** Possível mas não certo.

Toda a correspondência relativa a este artigo deve ser enviada para: José António Fernandes, Instituto de Educação e Psicologia, Universidade do Minho, Campus de Gualtar, 4710-057 Braga, Portugal. E-mail: jfernandes@iep.uminho.pt, Telef.: 253 604 240.