Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática para a Ciência e Tecnologia

Universidade do Minho

2005/2006

Engenharia e Gestão Industrial

Engenharia Electrónica Industrial e de Computadores

Gaspar José Brandão Queiroz Azevedo Machado

- Docentes

Docente	Gabinete	Telefone	Correio electrónico
Cláudia Horta	EC1.40	253510440	claudia@mct.uminho.pt
Gaspar Machado	EC2.17	253510445	gjm@mct.uminho.pt

- Horários das aulas

Dia	Hora	Tipo	Sala	Cursos	Docente
Terça-feira	13h10/14h00	T	EC1.03	EIC+EGI	Gaspar Machado
Terça-feira	14h10/17h00	TP2	C2.40	EIC	Cláudia Horta
Quarta-feira	12h10/13h00	T	EC1.03	EIC+EGI	Gaspar Machado
Quinta-feira	16h10/19h00	TP	C2.37	EGI	Gaspar Machado
Sexta-feira	8h10/11h00	TP1	C2.37	EIC	Cláudia Horta

- Horários do atendimento aos alunos

Dia	Hora	Gabinete	Cursos	Docente
Terças-feiras	9h30/11h30	EC1.40	EIC	Cláudia Horta
Terças-feiras	15h00/18h00	EC2.17	EIC+EGI	Gaspar Machado
Quartas-feiras	14h00/15h00	EC1.40	EIC	Cláudia Horta

- Objectivos

  A disciplina de Álgebra Linear e Geometria Analítica é uma das componentes da formação básica em Ciências dum curso de Engenharia. Os conceitos e as técnicas aí apresentadas têm por objectivo desenvolver as capacidades de abstracção e de raciocínio lógico-dedutivo, adquirindo algumas das ferramentas base de Álgebra Linear e Geometria Analítica necessárias à progressão do estudo da Engenharia.

- Programa da disciplina

  1. Álgebra matricial — definição de corpo; introdução do conceito de matriz; representação matricial e notação; exemplos de matrizes particulares; operações com matrizes - soma de matrizes, multiplicação de uma matriz por um escalar, multiplicação de matrizes: definições e propriedades; definição de inversa de uma matriz; definição de transposta de uma matriz; matrizes simétricas e ortogonais; matrizes conjugadas, transconjugadas, hermíticas e unitárias.

  2. Espaços vectoriais — definição de espaço sobre um corpo; exemplos; definição de subespaço; definição de combinação linear de vectores, conjunto gerador, vectores linearmente independentes e linearmente dependentes; base e dimensão de um espaço vectorial.

3. Sistemas de equações lineares — forma em escada e em escada reduzida de uma matriz; operações elementares com linhas; matrizes equivalentes; característica de uma matriz; sistemas de equações lineares: matriz dos coeficientes, vector dos termos independentes, vector das incógnitas, matriz ampliada, conjunto solução; sistemas equivalentes; sistema homogéneo, sistema homogéneo associado, núcleo de um sistema; classificação de sistemas lineares quanto ao número de soluções: sistema possível, sistema possível e determinado, sistema possível e indeterminado, sistema impossível; variável pivô, variável livre; resolução de sistemas lineares pelo Método de Eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan; cálculo de inversas; determinante de uma matriz.

4. Aplicações lineares — produto cartesiano de dois conjuntos, relação, domínio de uma relação, contradomínio de uma relação, aplicação ou função ou transformação ou correspondência ou operador; definição de aplicação linear; exemplos; imagem e núcleo de uma transformação linear; característica e nulidade de uma transformação linear; matriz de uma transformação linear.

5. Valores próprios e vectores próprios — vector próprio de uma matriz associado a um valor próprio, espectro de uma matriz; polinómio característico de uma matriz, equação característica de uma matriz, multiplicidade algébrica de um valor próprio, valor próprio simples; cálculo de valores e vectores próprios.

6. Geometria Analítica — produto interno de dois vectores, espaço euclidiano; norma, espaço normado, norma induzida pelo produto interno, vector unitário; distância entre dois vectores, ângulo entre dois vectores, vectores ortogonais; produto externo de dois vectores de $\mathbb{R}^3$, triedro directo, propriedades; equação cartesiana de um plano; equação vectorial, equações paramétricas e equações cartesianas de uma recta, vector director de uma recta; distância entre dois pontos, distância de um ponto a uma recta, distância de um ponto a um plano; ângulo entre dois planos, ângulo entre duas rectas, ângulo entre uma recta e um plano. Superfícies quádricas; superfície de revolução, geratriz de uma superfície de revolução, eixo; superfície cilíndrica, geratriz de uma superfície cilíndrica, directriz; traço de uma quádrica; simetria de uma quádrica relativamente a um plano coordenado, a um eixo coordenado e à origem; classificação e propriedades das quádricas.

- Bibliografia:

  - "Álgebra Linear", M. R. Valença, Universidade do Minho;
  - "Álgebra Linear", S. Lipschutz, Colecção Schaum, McGraw-Hill;
  - "Álgebra Linear — vol I", M. A. Ferreira e I. Amaral, Edições Sílabo;
  - "Álgebra Linear — vol II", M. A. Ferreira e I. Amaral, Edições Sílabo;
  - "Introdução à Álgebra Linear e Geometria Analítica", F. R. Dias Agudo, Escolar Editora.

- Material de apoio pedagógico

Serão facultadas aos alunos cópias dos acetatos das aulas teóricas bem como fichas com exercícios. Quanto aos primeiros, deve-se explicar a notação aí usada: definições serão identificadas pela sequência "def"; teoremas por "teo"; exemplos por "exe" e observações por "obs". A numeração será sequencial dentro de cada capítulo. Os acetatos estão incompleto: as demonstrações, identificadas pela sequência "dem", não estão feitas e os exemplos também não estão acabados. Quer estes, quer aquelas serão completados nas aulas teóricas.

As fichas de exercícios serão resolvidas parcialmente nas aulas teorico-práticas. Estas fichas incluem as soluções dos exercícios propostos.

No final de cada semana e no sítio da disciplina serão sugeridos exercícios para serem resolvidos em casa.

- Avaliação

  Na Época Normal e na Época de Recurso, a classificação final (CF) na escala 0 a 200, será calculada através da expressão

  CF=min(200;max(0.1T+E;E)),

  em que

  $$T = \begin{cases} \text{NT} & \text{se NT} \geqslant 95; \\ 0 & \text{se NT} < 95, \end{cases}$$

  sendo NT a classificação obtida no teste, na escala de 0 a 200 pontos e E a classificação obtida no exame, na escala de 0 a 200 pontos.

  O teste será no dia 19 de Novembro, Sábado.

  Será realizada uma prova complementar, também escrita, se CF$\in [80; 95[$. Se a apreciação global desta prova for positiva, a classificação final será “10” (escala de 0 a 20 valores); caso contrário, a classificação final será “reprovado”.

  Na Época Especial a classificação final é igual à classificação obtida no exame dessa época. As condições para realizar a Prova Complementar são idênticas às das outras épocas.

  Não serão permitidas máquinas de calcular e todas as provas de avaliação serão sem consulta, sendo dado no próprio enunciado o formulário que se julgue necessário.

  Todos os alunos estão admitidos a exame.

1. Matrizes (notas)

1.1def ⟦ corpo ⟧ Sejam $\mathbb{K}$ um conjunto não vazio e as aplicações

$$\begin{array}{rcl} + : \mathbb{K}\times\mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (\alpha,\beta) & \longmapsto & \alpha+\beta \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} \cdot : \mathbb{K}\times\mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (\alpha,\beta) & \longmapsto & \alpha\cdot\beta. \end{array}$$

Então, diz-se que o triplo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ é um corpo se:

(a) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \alpha + \beta = \beta + \alpha.$

(b) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K} : (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$

(c) $\exists^1$ elemento de $\mathbb{K}$ (representado por $0_{\mathbb{K}}$), $\forall \alpha \in \mathbb{K} : \alpha + 0_{\mathbb{K}} = \alpha.$

(d) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \exists^1$ elemento de $\mathbb{K}$ (representado por $-\alpha$) $: \alpha + (-\alpha) = 0_{\mathbb{K}}.$

(e) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha.$

(f) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K} : (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma).$

(g) $\exists^1$ elemento de $\mathbb{K}$ (representado por $1_{\mathbb{K}}$), $\forall \alpha \in \mathbb{K} : 1_{\mathbb{K}} \cdot \alpha = \alpha.$

(h) $\forall \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}, \exists^1$ elemento de $\mathbb{K}$ (representado por α^{-1}) $: \alpha \cdot \alpha^{-1} = 1_{\mathbb{K}}.$

1.2def ⟦ escalar ⟧ Seja $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ um corpo. Então, chama-se escalares aos elementos de $\mathbb{K}$.

1.3exe (a) $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathbb{R},+,\cdot)$ e $(\mathbb{C},+,\cdot)$, em que "$+$" e "$\cdot$" representam, respectivamente, a adição e multiplicação usuais no conjunto indicado, são corpos.

(b) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$, em que "$+$" e "$\cdot$" representam, respectivamente, a adição e multiplicação usuais em $\mathbb{Z}$, não é um corpo.

1.4obs (a) Para simplificar a linguagem e quando tal não resultar ambíguo, em vez de "seja o corpo definido pelo triplo $(\mathbb{K},+,\cdot)$" diz-se "seja $\mathbb{K}$ um corpo", devendo-se subentender as operações envolvidas.

(b) Se não causar confusão, em vez de $\alpha\cdot\beta$ escreve-se $\alpha\beta$, em vez de $\alpha+(-\beta)$ escreve-se $\alpha-\beta$, em vez de $0_{\mathbb{K}}$ escreve-se 0 e em vez de $1_{\mathbb{K}}$ escreve-se 1.

1.5def ⟦ potência cartesiana de um conjunto ⟧ Sejam $n\in\mathbb{N}$ e X um conjunto. Então, ao conjunto

$$X^n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)|x_1,x_2,\ldots,x_n\in X\},$$

chama-se potência cartesiana de ordem n do conjunto X, identificando-se X^1 com X.

1.6def (a) ⟦ matriz, linha de uma matriz, coluna de uma matriz ⟧ Chama-se matriz a um quadro constituído por elementos de um certo corpo dispostos segundo filas horizontais, que se chamam linhas, e filas verticais, que se chamam colunas.

(b) ⟦ matriz do tipo m por n sobre o corpo $\mathbb{K}$ ⟧ Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e o corpo $\mathbb{K}$. Então, chama-se matriz do tipo m por n sobre o corpo $\mathbb{K}$ a um quadro constituído por mn elementos de $\mathbb{K}$ dispostos segundo m linhas e n colunas.

(c) ⟦ $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ ⟧ Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e o corpo $\mathbb{K}$. Então, representa-se por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ o conjunto das matrizes do tipo m por n sobre o corpo $\mathbb{K}$.

1.7obs (a) Por regra, denotam-se matrizes por letras maiúsculas e os seus elementos pela respectiva letra minúscula acompanhada de dois índices, em que o primeiro índice indica a linha em que o elemento se encontra e o segundo indica a coluna do elemento. Assim, o elemento a_{ij} da matriz A é o elemento da linha i e da coluna j da matriz $A = [a_{ij}]$ (se necessário, usa-se uma vírgula para separar o índice relativo à linha do índice relativo à coluna, *i.e.*, $a_{i,j}$).

(b) Seja a matriz $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Então,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

com $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn} \in \mathbb{K}$.

(c) Seja a matriz $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Então, a linha i, com $i \in \{1, \ldots, m\}$, é o elemento $(a_{i1}, \ldots, a_{in})$ de $\mathbb{K}^n$ e a coluna j, $j \in \{1, \ldots, n\}$, é o elemento $(a_{1j}, \ldots, a_{mj})$ de $\mathbb{K}^m$.

1.8exe Dê um exemplo de uma matriz pertencente a $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

1.9def Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}$ um corpo e $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Então,

(a) ⟦ matriz rectangular ⟧ diz-se que A é uma matriz rectangular se $m \neq n$.

(b) ⟦ matriz quadrada, matriz de ordem n ⟧ Diz-se que A é uma matriz quadrada se $m = n$, dizendo-se neste caso que A é uma matriz de ordem n.

1.10exe (a) Dê um exemplo de uma matriz pertencente a $\mathcal{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$ e indique o seu elemento que está na segunda linha e na primeira coluna, a sua segunda linha e a sua terceira coluna.

(b) Dê um exemplo de uma matriz pertencente a $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

$\boxed{1.11\text{def}}$ Seja a matriz $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Então,

(a) $[\![$ matriz coluna $]\!]$ diz-se que A é uma matriz coluna se $n = 1$.

(b) $[\![$ matriz linha $]\!]$ Diz-se que A é uma matriz linha se $m = 1$.

$\boxed{1.12\text{obs}}$ É habitual representar matrizes linha e matrizes coluna por letras minúsculas e os seus elementos apenas com um índice. Assim, e usando esta notação, as formas da matriz coluna x com m linhas e da matriz linha y com n colunas são:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}.$$

$\boxed{1.13\text{exe}}$ (a) Dê um exemplo de uma matriz coluna com 2 elementos.

(b) Dê um exemplo de uma matriz linha com p elementos.

1.14def Seja a matriz quadrada $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Então,

(a) ⟦ diagonal principal ou diagonal de uma matriz ⟧ chama-se diagonal principal da matriz A ou simplesmente diagonal da matriz A ao elemento $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ de $\mathbb{K}^n$.

(b) ⟦ diagonal secundária de uma matriz ⟧ Chama-se diagonal secundária da matriz A ao elemento $(a_{1n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1})$ de $\mathbb{K}^n$.

(c) ⟦ matriz diagonal ⟧ A diz-se uma matriz diagonal se $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

(d) ⟦ matriz triangular superior ⟧ A diz-se uma matriz triangular superior se $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

(e) ⟦ matriz triangular inferior ⟧ A diz-se uma matriz triangular inferior se $i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

1.15exe (a) Dê um exemplo de uma matriz diagonal de ordem 3.

(b) Dê um exemplo de uma matriz triangular superior de ordem 2.

(c) Dê um exemplo de uma matriz triangular inferior de ordem 3 e indique a sua diagonal principal e diagonal secundária.

$\boxed{\text{1.16def}}$ (a) ⟦ matriz nula, $0_{m\times n}$, $\underline{0}$ ⟧ Chama-se matriz nula a uma matriz cujos elementos são todos iguais a 0. Representa-se a matriz nula do tipo $m \times n$ por $0_{m\times n}$ ou apenas por $\underline{0}$.

(b) ⟦ matriz identidade, I_n, I ⟧ Chama-se matriz identidade à matriz diagonal cujos elementos da diagonal são todos iguais a 1. Representa-se a matriz identidade de ordem n por I_n ou apenas por I.

$\boxed{\text{1.17exe}}$ (a) Indique a matriz nula do tipo 2×4.

(b) Indique a matriz identidade de ordem 3.

1.18def ⟦ matrizes iguais ⟧ Sejam as matrizes $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{q\times q}(\mathbb{K})$. Então, diz-se que A e B são matrizes iguais se $m = p$, $n = q$ e $a_{ij} = b_{ij}, \forall i \in \{1, \ldots, m\}, \forall j \in \{1, \ldots, n\}$.

1.19obs Usa-se esta definição em algumas demonstrações relativas a matrizes.

1.20def ⟦ produto de uma matriz por um escalar ⟧ Sejam a matriz $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e o escalar $\alpha \in \mathbb{K}$. Então, à matriz $Z = [z_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ com $z_{ij} = \alpha a_{ij}$, chama-se produto da matriz A pelo escalar α e escreve-se $Z = \alpha A$.

1.21obs Seja a matriz A. Então, em vez de $(-1)A$ escreve-se $-A$.

1.22def ⟦ soma de matrizes ⟧ Sejam as matrizes do mesmo tipo $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Então, à matriz $Z = [z_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ com $z_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, chama-se soma das matrizes A e B e escreve-se $Z = A + B$.

1.23obs Sejam as matrizes do mesmo tipo $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Então, tendo em consideração 1.21obs, em vez de $A + (-B)$ escreve-se $A - B$.

1.24obs Só se pode somar matrizes do mesmos tipo.

$\boxed{\text{1.25exe}}$ Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & i & i \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Então, determine $A + 2B$ e $-A$.

$\boxed{\text{1.26teo}}$ Sejam as matrizes A, B e C e a matriz nula $\underline{0}$, todas do mesmo tipo. Então, tem-se:

(a) $A + B = B + A$.

(b) $(A + B) + C = A + (B + C)$.

(c) $A + \underline{0} = A$.

(d) $A + (-A) = \underline{0}$.

$\boxed{\text{1.27teo}}$ Sejam as matrizes A e B do mesmo tipo sobre o corpo $\mathbb{K}$ e os escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Então, tem-se:

(a) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

(b) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

(c) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

(d) $1A = A$.

1.28def ⟦ produto ou multiplicação de matrizes ⟧ Sejam as matrizes $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. Então, à matriz $Z = [z_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ com $z_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, chama-se produto ou multiplicação da matriz A pela matriz B e escreve-se $Z = AB$.

1.29obs (a) Só se pode efectuar a multiplicação da matriz A pela matriz B se o número de colunas da matriz A for igual ao número de linhas da matriz B. Neste caso, o número de linhas da matriz resultante é igual ao número de linhas da matriz A e o número de colunas da matriz resultante é igual ao número de colunas da matriz B. Em notação simplificada, tem-se: $A_{m\times n}B_{n\times p} = Z_{m\times p}$.

(b) Sejam A uma matriz quadrada e p um inteiro positivo. Então, $A^p = \prod_{k=1}^{p} A$.

(c) Seja a matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Então, $AI_n = I_mA = A$ (note-se que $A_{m\times n}I_{n\times n} = I_{m\times m}A_{m\times n} = A_{m\times n}$).

1.30exe Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. Então, determine se possível AB, BA, A^2, BI_3 e I_2B.

$\boxed{\text{1.31obs}}$ A multiplicação de matrizes não goza da propriedade comutativa.

$\boxed{\text{1.32def}}$ $[\![$ matrizes comutáveis $]\!]$ Sejam as matrizes quadradas A e B. Então, A e B dizem-se matrizes comutáveis se $AB = BA$.

$\boxed{\text{1.33teo}}$ Sejam as matrizes A, B e C e o escalar α. Então, se todos as operações a seguir indicadas forem definidas, tem-se:

(a) $(AB)C = A(BC)$.

(b) $(A + B)C = AC + BC$.

(c) $A(B + C) = AB + AC$.

(d) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

$\boxed{\text{1.34obs}}$ Sejam as matrizes A, B e C. Então, se as operações a seguir indicadas forem definidas, tem-se que as expressões $A + B + C$ e ABC não resultam ambíguas devido à propriedade associativa quer da soma quer da multiplicação de matrizes.

$\boxed{\text{1.35exe}}$ Sejam A e B matrizes quadradas da mesma ordem. Então, simplifique a expressão $(A + B)^2 - (A - B)(A + B) - 2B^2$.

1.36obs Não se define a divisão de matrizes.

1.37def ⟦ matriz invertível ou não-singular, não-invertível ou singular ⟧ Seja a matriz quadrada A de ordem n. Então, se existir uma matriz Z, tal que $ZA = AZ = I_n$, diz-se que a matriz A é invertível ou não-singular. Caso contrário, diz-se que A é uma matriz não-invertível ou singular.

1.38obs A matriz Z da alínea anterior, a existir, também é de ordem n.

1.39teo Seja A uma matriz de ordem n invertível. Então, existe uma e uma só matriz Z tal que $ZA = AZ = I_n$.

dem

1.40def ⟦ matriz inversa ⟧ Seja A uma matriz de ordem n invertível. Então, à única matriz Z tal que $ZA = AZ = I_n$ chama-se matriz inversa da matriz A e representa-se por A^{-1}.

1.41teo (a) Seja A uma matriz invertível. Então, A^{-1} também é uma matriz invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$

(b) Sejam A e B matrizes invertíveis da mesma ordem. Então, AB também é uma matriz invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

dem (a)

(b)

1.42obs (a) Há matrizes quadradas que não admitem inversa.

(b) O cálculo de inversas, exceptuando casos particulares, será estudado no terceiro capítulo.

1.43exe Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Então, determine AB e BA.

1.44def [[matriz transposta]] Seja a matriz $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Então, a matriz $Z = [z_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ com $z_{ij} = a_{ji}$, chama-se transposta de A e escreve-se $Z = A^T$.

1.45exe Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Então, determine A^T.

1.46teo Sejam as matrizes A e B e o escalar α. Então, se todas as operações a seguir indicadas estiverem definidas, tem-se:

(a) $\left(A^T\right)^T = A$.

(b) $(A+B)^T = A^T + B^T$.

(c) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.

(d) $(AB)^T = B^T A^T$.

(e) $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$.

$\boxed{\text{1.47def}}$ ⟦ matriz simétrica ⟧ Seja a matriz quadrada A. Então, A diz-se uma matriz simétrica se $A = A^T$.

$\boxed{\text{1.48exe}}$ Dê um exemplo de uma matriz simétrica de ordem 3.

$\boxed{\text{1.49def}}$ ⟦ matriz ortogonal ⟧ Seja a matriz quadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então, A diz-se uma matriz ortogonal se $AA^T = A^T A = I_n$.

$\boxed{\text{1.50obs}}$ Se A é uma matriz ortogonal, então A é uma matriz invertível e $A^{-1} = A^T$.

$\boxed{\text{1.51exe}}$ Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$. Então, determine AA^T e $A^T A$.

$\boxed{\text{1.52obs}}$ Recorde: seja $z = a+bi$ um número complexo. Então, ao número complexo $\overline{z} = a-bi$ chama-se conjugado de z.

$\boxed{\text{1.53def}}$ Seja a matriz $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$. Então,

(a) ⟦ matriz conjugada ⟧ à matriz $Z = [z_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ com $z_{ij} = \overline{a}_{ij}$ e onde $\overline{a}_{ij}$ representa o conjugado de a_{ij}, chama-se matriz conjugada de A e escreve-se $Z = \overline{A}$.

(b) ⟦ matriz transconjugada ⟧ À matriz $Z = [z_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ com $z_{ij} = \overline{a}_{ji}$, chama-se matriz transconjugada de A e escreve-se $Z = A^H$.

$\boxed{\text{1.54exe}}$ Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & i & 2i \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. Então, determine A^T, $\overline{A}$ e A^H.

$\boxed{\text{1.55teo}}$ Sejam as matrizes A e B e α um escalar. Então, se todas as operações a seguir indicadas estiverem definidas, tem-se:

(a) $\left(A^H\right)^H = A$.

(b) $(A + B)^H = A^H + B^H$.

(c) $(\alpha A)^H = \overline{\alpha} A^H$.

(d) $(AB)^H = B^H A^H$.

(e) $\left(A^{-1}\right)^H = \left(A^H\right)^{-1}$.

$\boxed{\text{1.56def}}$ Seja a matriz quadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Então,

(a) [[matriz hermítica ou hermitiana]] A diz-se uma matriz hermítica ou hermitiana se $A = A^H$.

(b) [[matriz unitária]] A diz-se uma matriz unitária se $AA^H = A^H A = I_n$.

$\boxed{\text{1.57obs}}$ Se A é uma matriz unitária, então A é uma matriz invertível e $A^{-1} = A^H$.

$\boxed{\text{1.58exe}}$ (a) Dê um exemplo de uma matriz hermitiana de ordem 2.

(b) Seja a matriz $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -i & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -i \end{bmatrix}$. Então, determine AA^H e $A^H A$.

1. Matrizes (exercícios)

1.1 Dê um exemplo de uma matriz

(a) real do tipo 2×3.

(b) complexa de ordem 3.

(c) pertencente a $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$.

(d) linha com 3 elementos.

(e) coluna com 4 elementos.

(f) diagonal pertencente a $\mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{C})$.

(g) triangular superior pertencente a $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

(h) triangular inferior de ordem 4.

1.2 Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}),\ b_{ij} = i - j; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Indique se estão bem definidas as seguintes expressões, efectuando as operações nesses casos:

(a) $A + 2B$.

(b) $A - C$.

(c) AC.

(d) CA.

(e) C^3.

(f) $\dfrac{AB^T + BA^T}{2}$.

(g) $(CBA^TC)^2$.

(h) uu^T.

(i) u^Tu.

(j) u^TA^TBu.

sols 1.2

(a) $A + 2B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -4 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) a expressão $A - C$ não está bem definida.

(c) a expressão AC não está bem definida.

(d) $CA = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

(e) $C^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(f) $\dfrac{AB^T + BA^T}{2} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(g) $(CBA^TC)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(h) $uu^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(i) $u^Tu = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$.

(j) $u^TA^TBu = \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}$.

1.3 Dê um exemplo de uma matriz simétrica pertencente a $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$.

1.4 Determine os valores $a, b, c \in \mathbb{C}$, para que a matriz $S = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & c & 3 \end{bmatrix}$ seja simétrica.

sols 1.4 $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.

1.5 Mostre que $A = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz ortogonal.

1.6 Dê um exemplo de uma matriz hermitiana de ordem 3.

1.7 Determine os valores $a, b, c \in \mathbb{C}$, para que a matriz $T = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 1 & c & i \\ 2i & -i & 3 \end{bmatrix}$ seja hermitiana.

sols 1.7 $a = 1$, $b = -2i$, $c \in \mathbb{R}$.

1.8 Mostre que $B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4i \\ -4 & 3i \end{bmatrix}$ é uma matriz unitária.

1.9 Considere a matriz $D = \begin{bmatrix} i & 0 & 2i \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Mostre que está bem definida a expressão $\overline{D}D^H DD^T$ e determine o seu valor.

sols 1.9 $\overline{D}D^H DD^T = \begin{bmatrix} 29 & -20i \\ 20i & 29 \end{bmatrix}$.

1.10 Mostre que o produto de uma matriz pela sua transposta é uma matriz simétrica.

1.11 Mostre que se A e B são matrizes comutáveis e B é uma matriz invertível, então $AB^{-1} = B^{-1}A$.

1.12 Sejam A e B matrizes comutáveis e invertíveis. Então, mostre que $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

1.13 Uma matriz real e quadrada A diz-se anti-simétrica se $A^T = -A$. Mostre que, dada qualquer matriz real e quadrada B, a matriz $B - B^T$ é anti-simétrica.

1.14 Mostre que o produto de duas matrizes ortogonais ainda é uma matriz ortogonal.

1.15 Seja A uma matriz quadrada tal que $A^p = \underline{0}$ para algum $p \in \mathbb{N}$. Então, mostre que $(I - A)^{-1} = I + \displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} A^k$.

2. Espaços Vectoriais (notas)

2.1def ⟦ espaço vectorial ⟧ Sejam V um conjunto não vazio, $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ um corpo e as operações

$$\begin{array}{rcl} \oplus : V \times V & \longrightarrow & V \\ (x, y) & \longmapsto & x \oplus y \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} \odot : \mathbb{K} \times V & \longrightarrow & V \\ (\alpha, x) & \longmapsto & \alpha \odot x \end{array}$$

Então, diz-se que o sêxtuplo $(V, \oplus, \odot, \mathbb{K}, +, \cdot)$ é um espaço vectorial se:

(a) $\forall x, y \in V : x \oplus y = y \oplus x$.

(b) $\forall x, y, z \in V : (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$.

(c) $\exists^1$ elemento de V (representado por 0_V), $\forall x \in V : x \oplus 0_V = x$.

(d) $\forall x \in V, \exists^1$ elemento de V (representado por $-x$) : $x \oplus (-x) = 0_V$.

(e) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in V : \alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot x \oplus \alpha \odot y$.

(f) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in V : (\alpha + \beta) \odot x = \alpha \odot x \oplus \beta \odot x$.

(g) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in V : (\alpha \cdot \beta) \odot x = \alpha \odot (\beta \odot x)$.

(h) $\forall x \in V : 1_{\mathbb{K}} \odot x = x$.

2.2def ⟦ vector, soma de vectores, multiplicação de um escalar por um vector ⟧ Seja o espaço vectorial definido por $(V, \oplus, \odot, \mathbb{K}, +, \cdot)$. Então, chama-se vectores aos elementos de V, a operação $\oplus$ designa-se por soma de vectores e a operação $\odot$ por multiplicação de um escalar por um vector.

2.3obs (a) Para simplificar a linguagem, em vez de "seja o espaço vectorial definido por $(V, \oplus, \odot, \mathbb{K}, +, \cdot)$" diz-se "seja V um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{K}$" quando as operações de soma de vectores e de multiplicação de um escalar por um vector estiverem subentendidas.

(b) Se não causar confusão, em vez de $x \oplus y$ escreve-se $x + y$, em vez de $x \oplus (-y)$ escreve-se $x - y$ e em vez de $\alpha \odot x$ escreve-se αx.

(c) A definição de espaço vectorial generaliza a noção de "vector" da Física, onde se define um vector como uma quantidade física que tem uma certa magnitude e uma direcção. O estudo genérico de um espaço vectorial permite-nos estabelecer propriedades válidas para um conjunto alargado de entidades matemáticas.

2.4def ⟦ espaço vectorial real, espaço vectorial complexo ⟧ Um espaço vectorial sobre o corpo dos reais designa-se por espaço vectorial real e um espaço vectorial sobre o corpo dos complexos designa-se por espaço vectorial complexo.

2.5obs Antes de apresentar cinco exemplos de espaços vectoriais e dois exemplos que não são espaços vectoriais, definem-se cinco conjuntos que serão usados naqueles exemplos.

2.6def (a) ⟦ $\mathbb{K}_n[x]$ ⟧ Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{K}$ um corpo. Então, representa-se por $\mathbb{K}_n[x]$ o conjunto dos polinómios na variável x com coeficientes no corpo $\mathbb{K}$ e que têm grau menor ou igual a n, *i.e.*, $\mathbb{K}_n[x] = \{a_0x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n | a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{K}\}$.

(b) ⟦ $\mathbb{K}[x]$ ⟧ Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Então, representa-se por $\mathbb{K}[x]$ o conjunto dos polinómios na variável x com coeficientes no corpo $\mathbb{K}$.

(c) ⟦ $C(a,b)$, $C^k(a,b)$, $C^\infty(a,b)$ ⟧ Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$ e $k \in \mathbb{N}$. Então, representa-se por $C(a,b)$ o conjunto das funções reais de variável real contínuas em (a,b), por $C^k(a,b)$ o conjunto das funções reais de variável real tais que $f, \frac{d^pf}{dx^p} \in C(a,b), p = 1, \ldots, k$, e por $C^\infty(a,b)$ o conjunto das funções reais de variável real tais que $f, \frac{d^pf}{dx^p} \in C(a,b), \forall p \in \mathbb{N}$.

2.7exe Exemplos de conjuntos/operações que definem espaços vectoriais:

(a) sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{K}$ um corpo. Então, o conjunto $\mathbb{K}^n$ com as operações

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$

$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n),$$

com $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n, \alpha \in \mathbb{K}$, é um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ $(0_V = (0, 0, \ldots, 0))$.

(b) Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{K}$ um corpo. Então, o conjunto $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ com as operações usuais é um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ $(0_V = 0_{m\times n})$.

(c) Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{K}$ um corpo. Então, o conjunto $\mathbb{K}_n[x]$ com as operações usuais é um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ (0_V é o polinómio nulo).

(d) Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Então, o conjunto $\mathbb{K}[x]$ com as operações usuais é um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ (0_V é o polinómio nulo).

(e) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$. Então, o conjunto $C(a, b)$ com as operações usuais é um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{R}$ (0_V é a função nula).

$\boxed{\text{2.8exe}}$ Exemplos de conjuntos/operações que não definem espaços vectoriais:

(a) O conjunto $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ com as operações

$$\begin{array}{rccc} \oplus : & \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \\ & (A, B) & \longmapsto & A \oplus B = A^T + B^T \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \odot : & \mathbb{R} \times \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \\ & (\alpha, A) & \longmapsto & \alpha \odot A = \alpha A, \end{array}$$

não é um espaço vectorial real pois

(b) O conjunto $\mathbb{R}^2$ com as operações

$$\begin{array}{rccc} \oplus : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & ((a,b),(c,d)) & \longmapsto & (a,b) \oplus (c,d) = (0, b+d) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \odot : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (\alpha,(a,b)) & \longmapsto & \alpha \odot (a,b) = (2\alpha a, 2\alpha b), \end{array}$$

não é um espaço vectorial real pois

$\boxed{\text{2.9def}}$ ⟦ subespaço ⟧ Sejam o espaço vectorial $(V, \oplus, \odot, \mathbb{K}, +, \cdot)$ e F um subconjunto de V. Então, diz-se que F é um subespaço V se $(F, \oplus, \odot, \mathbb{K}, +, \cdot)$ ainda for espaço vectorial.

$\boxed{\text{2.10teo}}$ Sejam V um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e F um seu subconjunto. Então, F é um subespaço de V sse:

(a) $0_V \in F$.

(b) $\forall x, y \in F, \forall \alpha \in \mathbb{K} : \alpha x + y \in F$.

$\boxed{\text{2.11exe}}$ Exemplos de conjuntos que definem subespaços:

(a) $F = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 = 0\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

(b) O conjunto das matrizes reais e diagonais de ordem n é um subespaço de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(c) O conjunto das matrizes simétricas de ordem n é um subespaço de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

(d) Seja V um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. Então, os conjuntos $\{0_V\}$ e V são subespaços de V.

(e) Seja $k \in \mathbb{N}$. Então, $C^k(a, b)$ é um subespaço de $C(a, b)$ e $C^\infty(a, b)$ é um subespaço de $C^k(a, b)$.

$\boxed{\text{2.12exe}}$ Exemplos de conjuntos que não definem subespaços:

(a) o conjunto $G = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 = 1\}$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^2$ pois

(b) O conjunto das matrizes hermitianas de ordem n não é um subespaço de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ pois

2.13def ⟦ combinação linear ⟧ Sejam V um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ um subconjunto de V. Então, $x \in V$ diz-se uma combinação linear dos elementos de S se

$$\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K} : x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

2.14exe Sejam $x = (1, 4), x_1 = (1, 2), x_2 = (1, 1)$ e $x_3 = (2, 2)$. Então,

(a) $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : x = \alpha x_1 + \beta x_2$?

(b) $\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : x = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3$?

(c) $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : x = \alpha x_2 + \beta x_3$?

$\boxed{2.15\text{def}}$ $[\![$ espaço gerado, $L(S)$, $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ $]\!]$ Sejam V um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ um subconjunto de V. Então, chama-se espaço gerado pelo conjunto S, que se representa por $L(S)$ ou por $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, ao conjunto de todas as combinações lineares dos elementos de S.

$\boxed{2.16\text{teo}}$ Sejam V um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ um subconjunto de V. Então, $L(S)$ é um subespaço de V.

$\boxed{2.17\text{obs}}$ Sejam V um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ um subconjunto de V. Então,

(a) $L(S) = \{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n | \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}\}$.

(b) Chama-se ao conjunto $L(S)$ espaço gerado devido ao teorema anterior.

(c) $L(S)$ é o menor subespaço de V que contém S.

2.18def ⟦ conjunto gerador ⟧ Sejam V um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ um subconjunto de V. Então, diz-se que S é um conjunto gerador de V se $V = L(S)$, $i.e.$, se

$$\forall x \in V, \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K} : x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

2.19exe (a) $\mathbb{R}^2 = \langle (1,0) \rangle$?

(b) $\mathbb{R}^2 = \langle (1,0), (1,1) \rangle$?

(c) $\mathbb{R}^2 = \langle (1,0), (1,1), (0,1) \rangle$?

$\boxed{\text{2.20def}}$ Sejam V um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ um subconjunto de V. Então,

(a) ⟦ conjunto linearmente independente ⟧ diz-se que S é um conjunto linearmente independente se

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0_V \Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}}.$$

(b) ⟦ vectores linearmente independentes ⟧ Se S é um conjunto linearmente independente, os elementos de S dizem-se vectores linearmente independentes.

(c) ⟦ conjunto linearmente dependente ⟧ Se S não é um conjunto linearmente independente, diz-se que S é um conjunto linearmente dependente.

(d) ⟦ vectores linearmente dependentes ⟧ Se S é um conjunto linearmente dependente, os elementos de S dizem-se vectores linearmente dependentes.

$\boxed{\text{2.21teo}}$ Sejam V um espaço vectorial e $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ um subconjunto de V. Então,

(a) se S é um conjunto linearmente dependente, qualquer subconjunto de V que contenha S ainda é linearmente dependente.

(b) se S é um conjunto linearmente independente, qualquer subconjunto de S ainda é linearmente independente.

$\boxed{\text{2.22exe}}$ (a) $\{(1,0)\}$ é um conjunto linearmente independente?

(b) $\{(1,0),(1,1)\}$ é um conjunto linearmente independente?

(c) $\{(1,0),(1,1),(0,1)\}$ é um conjunto linearmente independente?

$\boxed{\text{2.23def}}$ ⟦ base ⟧ Sejam V um espaço vectorial e $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ um subconjunto de V. Então, diz-se que S é uma base de V se S é um conjunto gerador de V linearmente independente.

$\boxed{\text{2.24teo}}$ Sejam V um espaço vectorial e o conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ uma base de V. Então, todas as bases de V têm n vectores.

$\boxed{\text{2.25def}}$ ⟦ dimensão de um espaço vectorial, $\dim(V)$, espaço vectorial de dimensão finita ⟧ Sejam V um espaço vectorial e o conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ uma base de V. Então, chama-se dimensão do espaço vectorial V ao número de elementos que constituem a base, escrevendo-se $\dim(V) = n$. Diz-se, ainda, que V é um espaço vectorial de dimensão finita.

$\boxed{\text{2.26obs}}$ (a) Note-se que a definição anterior faz sentido pois o teorema que a precede garante que todas as bases de um espaço vectorial têm o mesmo número de elementos.

(b) Qualquer vector de um espaço vectorial de dimensão finita pode ser representado como combinação linear única dos elementos de uma base do espaço.

$\boxed{\text{2.27exe}}$ (a) $\{(1,0)\}$ base de $\mathbb{R}^2$?

(b) $\{(1,0),(1,1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$?

(c) $\{(1,0),(1,1),(0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$?

$\boxed{\text{2.28teo}}$ Seja V um espaço vectorial tal que $\dim(V)=n$. Então,

(a) qualquer conjunto de $n+1$ ou mais elementos de V é linearmente dependente.

(b) Qualquer conjunto linearmente independente com n elementos de V é uma base de V.

$\boxed{\text{2.29teo}}$ Sejam V um espaço vectorial com dimensão finita e X e Y subespaços de V. Então,

(a) $\dim(X) \leqslant \dim(V)$.

(b) $\dim(X)=\dim(V)$ sse $X=V$.

$\boxed{\text{2.30exe}}$ (a) $\dim(\mathbb{R}^3)=3$ e

$\{e_1,e_2,e_3\}$, $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$, e

$\{f_1, f_2, f_3\}$, $f_1 = (-1, 0, 0)$, $f_2 = (0, 1, 1)$, $f_3 = (1, 1, 1)$, são dois exemplos de bases de $\mathbb{R}^3$ (à primeira chama-se base canónica de $\mathbb{R}^3$).

(b) $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

(c) $\dim(\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{K})) = 6$ e $\{E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}\}$, em que

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é uma base de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{K})$ (base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{K})$).

(d) $\dim(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})) = mn$.

(e) $\dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3$ e $\{1, x, x^2\}$ é uma base de $\mathbb{R}_2[x]$ (base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$).

(f) $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n + 1$.

(g) $C(a, b)$ não é um espaço vectorial de dimensão finita.

$\boxed{\text{2.31exe}}$ (a) Escreva o vector $v = (-3, 2, 8) \in \mathbb{R}^3$ como combinação linear dos elementos da base canónica de $\mathbb{R}^3$:

(b) Escreva a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ como combinação linear dos elementos da base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$\boxed{\text{2.32obs}}$ Seja V um espaço vectorial tal que $\dim(V) = n$. Então,

(a) quaisquer m vectores de V com $m > n$ são ld.

(b) C conjunto de geradores de $V \Rightarrow \#C \geqslant n$.

(c) C conjunto de n vectores li de $V \Rightarrow C$ conjunto gerador.

(d) C conjunto de n vectores geradores de $V \Rightarrow$ os vectores são li.

(e) C conjunto de geradores de V constituído por vectores li $\Rightarrow \#C = n$.

2. Espaços Vectoriais (exercícios)

2.1 Mostre que o conjunto $\mathbb{R}^2$ com as operações usuais é um espaço vectorial real.

2.2 Mostre que o conjunto $\mathbb{R}^+$ com as operações

$$\begin{array}{rccc} \oplus: & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (x,y) & \longmapsto & x \oplus y = xy \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \odot: & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (\alpha,x) & \longmapsto & \alpha \odot x = x^\alpha, \end{array}$$

é um espaço vectorial real.

2.3 Mostre que os seguintes conjuntos com as operações dadas não são espaços vectoriais reais:

(a) $\mathbb{R}^2$, $(a,b) \oplus (c,d) = (a,b)$ e $\alpha \odot (a,b) = (\alpha a, \alpha b)$.

(b) $\mathbb{R}^2$, $(x_1,x_2) \oplus (y_1,y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2)$ e $\alpha \odot (x_1,x_2) = (\alpha^2 x_1, \alpha^2 x_2)$.

(c) $\mathbb{R}^3$, $(x_1,x_2,x_3) \oplus (y_1,y_2,y_3) = (x_1+y_1, 0, x_2+y_2)$ e $\alpha \odot (x_1,x_2,x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$.

2.4 Mostre que o conjunto $\mathbb{R}^+$ com as operações

$$\begin{array}{rccc} \oplus: & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (x,y) & \longmapsto & x \oplus y = \frac{x}{y} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \odot: & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (\alpha,x) & \longmapsto & \alpha \odot x = x^\alpha, \end{array}$$

não é um espaço vectorial real.

2.5 Averigue se S é um subespaço de $\mathbb{R}^3$, sendo:

(a) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$.

(b) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y + 2\}$.

sols 2.5 (a) S é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(b) S não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

2.6 Escreva, se possível, o vector $v = (3,3) \in \mathbb{R}^2$ como combinação linear dos seguintes vectores de $\mathbb{R}^2$, e interprete geometricamente os resultados obtidos:

(a) $v_1 = (1,1)$.

(b) $v_1 = (1,2)$.

(c) $v_1 = (1,2), v_2 = (4,2)$.

(d) $v_1 = (1,1), v_2 = (2,2)$.

(e) $v_1 = (1,-1), v_2 = (-1,1)$.

(f) $v_1 = (1,-1), v_2 = (0,1), v_3 = (2,0)$.

sols 2.6
(a) $v = 3v_1$.
(b) v não é uma combinação linear de v_1.
(c) $v = v_1 + \frac{1}{2}v_2$.
(d) $v = \alpha v_1 + \frac{3-\alpha}{2}v_2$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
(e) v não é uma combinação linear de v_1 e v_2.
(f) $v = (\beta - 3)v_1 + \beta v_2 + \frac{6-\beta}{2}v_3$, $\beta \in \mathbb{R}$.

2.7 Considere os vectores $u = (1, 2, -4)$ e $v = (2, 5, -6)$ de $\mathbb{R}^3$.

(a) Escreva o vector $w = (1, -1, -10)$ como combinação linear de u e v.
(b) Para que valor de k é o vector $r = (1, 0, k)$ combinação linear de u e v?

sols 2.7
(a) $w = 7u - 3v$.
(b) $k = -8$.

2.8 Escreva $u = 5t^2 - 8t + 6$ como combinação linear de $v = t^2 - t$ e $w = 2t^2 - 4$.

sols 2.8 $u = 8v - \frac{3}{2}w$.

2.9 Indique quais dos seguintes conjuntos de vectores são conjuntos geradores do espaço vectorial $\mathbb{R}^2$.

(a) $A = \{(1, 0), (0, 1)\}$.
(b) $B = \{(1, 2), (-1, 0)\}$.
(c) $C = \{(1, 0), (0, 1), (1, 3)\}$.
(d) $D = \{(1, 2)\}$.
(e) $E = \{(1, 2), (2, 4), (-1, -2)\}$.
(f) $F = \{(1, -1), (-2, 2)\}$.

sols 2.9 A, B e C.

2.10 Indique para que valores de α e β o conjunto $X = \{(1, 0, \alpha), (\alpha, \beta, \beta), (1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$.

sols 2.10 $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2.11 Verifique se os seguintes conjuntos são linearmente independentes:

(a) $\{(3, 1), (4, 2)\}$ em $\mathbb{R}^2$.
(b) $\{(3, 1), (4, -2), (7, 2)\}$ em $\mathbb{R}^2$.
(c) $\{(0, -3, 1), (2, 4, 1), (-2, 8, 5)\}$ em $\mathbb{R}^3$.
(d) $\{(-1, 2, 0, 2), (5, 0, 1, 1), (8, -6, 1, -5)\}$ em $\mathbb{R}^4$.

sols 2.11
(a) Sim.
(b) Não.
(c) Sim.
(d) Não.

$\boxed{2.12}$ Indique para que valores do parâmetro real α, os vectores $a = (1, -2)$ e $b = (\alpha, -1)$ de $\mathbb{R}^2$ são linearmente independentes.

sols 2.12 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

$\boxed{2.13}$ Considere no espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$ os vectores $v_1 = (\alpha_1, \beta_1, 1)$ e $v_2 = (\alpha_2, \beta_2, 0)$ em que $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ e β_2 são constantes reais. Indique, em função de α_1, α_2, β_1 e β_2 uma condição necessária e suficiente para os vectores v_1 e v_2 serem linearmente independentes.

sols 2.13 $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\beta_1 \in \mathbb{R}$, $\beta_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\boxed{2.14}$ Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$ e um seu subespaço $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = y\}$. Determine dois vectores linearmente independentes u e v de S e mostre que qualquer vector $w \in S$ é uma combinação linear de u e v.

$\boxed{2.15}$ Sejam V um espaço vectorial e $\{v_1, v_2, v_3\}$ um conjunto de vectores de V linearmente independente. Então, mostre que os seguintes conjuntos também são linearmente independentes:

(a) $u_1 = v_1$ e $u_2 = v_1 + v_2$.

(b) $u_1 = 2v_1, u_2 = v_1 + v_2$ e $u_3 = -v_1 + v_3$.

(c) $w_1 = v_1 + v_2, w_2 = v_1 + v_3$ e $w_3 = v_2 + v_3$.

$\boxed{2.16}$ Considere no espaço vectorial real $\mathbb{R}_2[x]$ os vectores $u = 1$, $v = 1 - x$ e $w = (1 - x)^2$. Verifique que os vectores u, v e w são linearmente independentes.

$\boxed{2.17}$ Averigue quais dos seguintes conjuntos de vectores são bases de $\mathbb{R}^2$:

(a) $A = \{(1, 1), (3, 0)\}$.

(b) $B = \{(1, 1), (0, 2), (2, 3)\}$.

(c) $C = \{(1, 1), (0, 8)\}$.

(d) $D = \{(1, -2), (-2, 4)\}$.

sols 2.17 A e C.

$\boxed{2.18}$ Averigue quais dos seguintes conjuntos de vectores são bases de $\mathbb{R}_3[x]$:

(a) $A = \{1, x, x^2, x^3\}$.

(b) $B = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2, 1 + x + x^2 + x^3, x^3\}$.

(c) $C = \{2, x, x^2 + x^3, x + x^2 + x^3\}$.

(d) $D = \{1, 1 + x, x^2 + x^3\}$.

sols 2.18 A.

$\boxed{2.19}$ Determine os valores do parâmetro α para os quais o conjunto $\{(\alpha, 6), (1, \alpha)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

sols 2.19 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}$.

2.20 Sejam $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ e $u_1 = (0, 2, 0)$, $u_2 = (1, 0, 0)$ e $u_3 = (-1, 6, 0)$ três vectores de $\mathbb{R}^3$.

(a) Mostre que F é subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$.

(b) Verifique que $F = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$.

(c) O conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base de F?

(d) Indique a dimensão de F.

sols 2.20 (c) Não.

(d) $\dim(F) = 2$.

2.21 Sejam V um espaço vectorial, v_1, v_2, v_3 e v_4 vectores de V e $\{v_1, v_2\}$ uma base de V.

(a) $A = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é um conjunto gerador de V?

(b) A é constituído por vectores linearmente independentes?

(c) $B = \{v_1\}$ é um conjunto gerador de V?

(d) B é constituído por vectores linearmente independentes?

(e) Seja C um subconjunto de V que gera V. Que pode dizer sobre o número de vectores de C?

(f) Seja D um subconjunto de V constituído por vectores linearmente independentes. Que pode dizer sobre o número de vectores de D?

(g) Em que condições é que $E = \{v_1, v_4\}$ é um conjunto gerador de V?

sols 2.21 (a) Sim.

(b) Não.

(c) Não.

(d) Sim.

(e) $\#C \geqslant 2$.

(f) $\#D \leqslant 2$.

(g) E é um conjunto gerador de V sse v_1 e v_4 forem vectores linearmente independentes.

3. Sistemas de Equações Lineares (notas)

3.1obs Neste capítulo passa-se a considerar apenas o corpo dos números reais (a generalização a qualquer outro corpo é imediata).

3.2def Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Então,

(a) ⟦ linha i de uma matriz, ℓ_i, coluna j de uma matriz, c_j ⟧ representa-se por ℓ_i a linha i da matriz A e por c_j a coluna j da matriz A.

(b) ⟦ linha nula, coluna nula ⟧ Diz-se que ℓ_i é uma linha nula da matriz A e que c_j é uma coluna nula da matriz A se todos os seus elementos são iguais a zero.

(c) ⟦ pivô,coluna pivô ⟧ Ao elemento diferente de zero mais à esquerda de uma linha não-nula chama-se pivô. Chama-se coluna pivô a uma coluna da matriz se existe um elemento pivô nessa coluna.

3.3exe Identifique os elementos pivô e colunas pivô da matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

3.4def Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Então,

(a) ⟦ matriz em escada ⟧ diz-se que A é uma matriz em escada se o número de elementos nulos que precedem o pivô aumenta de linha para linha até que, possivelmente, sobrem apenas linhas nulas.

(b) ⟦ matriz em escada reduzida ⟧ Diz-se que A é uma matriz em escada reduzida se é uma matriz em escada, se todos os pivôs são iguais a um e se estes são os únicos elementos não-nulos nas colunas pivô.

3.5exe Indique quais das seguintes matrizes são matrizes em escada e em escada reduzida:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3.6def ⟦ operações elementares com linhas ⟧ Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Então, chama-se operação elementar com linhas sobre a matriz A a cada um dos processos seguintes:

(a) troca de duas linhas ($\ell_i \leftrightarrow \ell_j$).

(b) Substituição de uma linha pela sua soma com um múltiplo de outra linha ($\ell_i \leftarrow \ell_i + \alpha\ell_j, \alpha \in \mathbb{R}$).

(c) Substituição de uma linha por um seu múltiplo não-nulo ($\ell_i \leftarrow \alpha\ell_i, \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$).

3.7exe Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. Efectue a seguinte sequência de operações na matriz A: $\ell_1 \leftrightarrow \ell_2$, $\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1$, $\ell_1 \leftarrow \ell_1 - 2\ell_3$, $\ell_2 \leftarrow \frac{1}{2}\ell_2$ e $\ell_1 \leftarrow \ell_1 - \ell_2$.

$\boxed{\text{3.8def}}$ ⟦ matrizes equivalentes, $A \longleftrightarrow B$ ⟧ Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Então, diz-se que as matrizes A e B são equivalentes, escrevendo-se $A \longleftrightarrow B$, se uma delas pode ser obtida a partir da outra através duma sequência (finita) de operações elementares com linhas.

$\boxed{\text{3.9teo}}$ Seja A uma matriz. Então, existe uma única matriz que é equivalente à matriz A e que é uma matriz em escada reduzida.

$\boxed{\text{3.10obs}}$ Seja A uma matriz não-nula. Então, existe uma infinidade de matrizes que são equivalentes à matriz A e que são matrizes em escada.

$\boxed{\text{3.11def}}$ Seja A uma matriz. Então,

(a) ⟦ $\mathrm{fe}(A)$ ⟧ representa-se por $\mathrm{fe}(A)$ o conjunto das matrizes que são equivalentes à matriz A e que são matrizes em escada.

(b) ⟦ $\mathrm{fer}(A)$ ⟧ Representa-se por $\mathrm{fer}(A)$ a única matriz que é equivalente à matriz A e que é uma matriz em escada reduzida.

$\boxed{3.12\text{teo}}$ Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Então, o seguinte algoritmo determina um elemento de $\mathrm{fe}(A)$:

Passo 1 [inicializar o algoritmo]

$i \leftarrow 1$ e $j \leftarrow$ (coluna não-nula mais à esquerda da matriz A).

Passo 2 [seleccionar elemento pivô]

se $a_{ij} = 0$ então trocar a linha i com a linha k, em que $k = \min\limits_{\xi\in\{q\in\{i+1,\ldots,m\}|a_{qj}\neq 0\}} \xi$.

Passo 3 [anular os elementos abaixo do pivô]

para $p \leftarrow i+1$ até m fazer

$$\ell_p \leftarrow \ell_p - \frac{a_{pj}}{a_{ij}}\ell_i.$$

Passo 4 [terminar?]

se já se obteve uma matriz em escada, então terminar; senão, repetir os passos 2 e 3 com $i \leftarrow i+1$ e $j \leftarrow$ (coluna não-nula mais à esquerda da matriz que se obtém eliminando na matriz A as linhas $\ell_1, \ldots, \ell_{i-1}$).

$\boxed{3.13\text{teo}}$ Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Então, o seguinte algoritmo determina fer(A):

Passo 1 [inicializar o algoritmo]

determinar um elemento $A' = [a'_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A' \in$ fe(A).

$i \leftarrow$ (última linha não-nula da matriz A') e $j \leftarrow$ (coluna pivô da linha i).

Passo 2 [colocar elemento pivô a um]

se $a'_{ij} \neq 1$ então $\ell'_i \leftarrow \dfrac{1}{a'_{ij}}\ell'_i$.

Passo 3 [anular os elementos acima do pivô]

para $p \leftarrow 1$ até $i-1$ fazer

$\ell'_p \leftarrow \ell'_p - a'_{pj}\ell'_i$.

Passo 4 [terminar?]

se já se obteve uma matriz em escada reduzida, então terminar; senão, repetir os passos 2 e 3 com $i \leftarrow$ (linha anterior com elemento pivô) e $j \leftarrow$ (coluna pivô da linha i).

$\boxed{3.14\text{exe}}$ Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Então, determine um elemento de $\text{fe}(A)$ e $\text{fer}(A)$.

$\boxed{3.15\text{def}}$ Seja A uma matriz. Então,

(a) ⟦ característica de linha de uma matriz ⟧ chama-se característica de linha da matriz A, que se representa por $c_{lin}(A)$, à dimensão do subespaço gerado pelas linhas da matriz A.

(b) ⟦ característica de coluna de uma matriz ⟧ Chama-se característica de coluna da matriz A, que se representa por $c_{col}(A)$, à dimensão do subespaço gerado pelas colunas da matriz A.

$\boxed{3.16\text{teo}}$ Seja A uma matriz. Então, $c_{lin}(A) = c_{col}(A)$.

$\boxed{3.17\text{def}}$ ⟦ característica de uma matriz ⟧ Seja A uma matriz. Então, chama-se característica da matriz A, que se representa por $c(A)$, à dimensão do subespaço gerado pelas linhas ou pelas colunas da matriz A.

$\boxed{3.18\text{obs}}$ Note-se que a definição anterior faz sentido pois o teorema que a precede garante que a dimensão do subespaço gerado pelas linhas da matriz A é igual à dimensão do subespaço gerado pelas colunas da matriz A.

$\boxed{\text{3.19teo}}$ (a) Sejam A e B matrizes equivalentes. Então, $c(A) = c(B)$.

(b) Seja A uma matriz. Então, $c(A)$ é igual ao número de linhas não-nulas de qualquer matriz pertencente a $\text{fe}(A)$.

$\boxed{\text{3.20exe}}$ Determine $c(A)$, sendo A a matriz dada em $\boxed{\text{3.14exe}}$.

$\boxed{\text{3.21def}}$ $[\![$ sistema de equações lineares, matriz dos coeficientes, vector dos termos independentes, vector das incógnitas, matriz ampliada, conjunto solução $]\!]$ Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $b = [b_i] \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$. Então, diz-se que (S) é um sistema de m equações lineares nas n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ com matriz dos coeficientes A e vector dos termos independentes b se (S) é o sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m.
\end{array}\right.$$

Chama-se vector das incógnitas do sistema (S) à matriz coluna $x = [x_i] \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

Chama-se matriz ampliada do sistema (S), que se representa por $A|b$, à matriz

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Chama-se conjunto solução do sistema (S), que se representa por $\mathrm{CS}_{(S)}$, ao conjunto

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b\}.$$

3.22obs Note-se que o sistema (S) da definição anterior pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

ou, em notação matricial, como $Ax = b$.

3.23def ⟦ sistema de equações não lineares ⟧ Chama-se sistema de equações não lineares a um sistema de equações que não é um sistema de equações lineares.

3.24exe Dê um exemplo de um sistema de equações lineares de duas equações a duas incógnitas e de um sistema de equações não lineares de duas equações a três incógnitas.

3.25def ⟦ sistemas equivalentes ⟧ Sejam (S_1) e (S_2) dois sistemas de equações lineares. Então, diz-se que os sistemas $(S1)$ e $(S2)$ são equivalentes se $\mathrm{CS}_{(S1)} = \mathrm{CS}_{(S2)}$.

3.26def Seja (S) o sistema de equações lineares $Ax = b$. Então,

(a) ⟦ sistema homogéneo ⟧ diz-se que (S) é um sistema homogéneo se $b = 0$.

(b) ⟦ sistema homogéneo associado ⟧ Se $b \neq 0$, chama-se a $Ax = 0$ o sistema homogéneo associado ao sistema (S).

(c) ⟦ núcleo de um sistema ⟧ Chama-se núcleo do sistema (S), que se representa por $N(A)$, ao conjunto solução do sistema homogéneo associado ao sistema (S).

3.27exe (a) Dê um exemplo de um sistema homogéneo de duas equações a três incógnitas.

(b) Considere o sistema de equações lineares dado por $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - y = 0. \end{cases}$ Identifique o sistema homogéneo que lhe está associado e determine o seu núcleo.

3.28teo Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Então, $N(A)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ com $\dim(N(A)) = n - c(A)$.

3.29def Seja (S) um sistema de equações lineares. Então,

(a) ⟦ sistema possível ⟧ diz-se que (S) é um sistema possível se $CS_{(S)} \neq \emptyset$.

(b) ⟦ sistema possível e determinado ⟧ Diz-se que (S) é um sistema possível e determinado se $\#CS_{(S)} = 1$.

(c) ⟦ sistema possível e indeterminado ⟧ Diz-se que (S) é um sistema possível e indeterminado se $\#CS_{(S)} > 1$.

(d) ⟦ sistema impossível ⟧ Diz-se que (S) é um sistema impossível se $CS_{(S)} = \emptyset$.

3.30exe Dê um exemplo de um sistema de equações lineares possível e determinado, possível e indeterminado e impossível.

$\boxed{\text{3.31teo}}$ Seja (S) o sistema de equações lineares de m equações nas n incógnitas $Ax = b$. Então,

$$\begin{cases} c(A) = c(A|b) & : \text{sistema possível} \\ c(A) = c(A|b) = n & : \text{sistema possível e determinado} \\ c(A) = c(A|b) < n & : \text{sistema possível e indeterminado} \\ c(A) < c(A|b) & : \text{sistema impossível.} \end{cases}$$

$\boxed{\text{3.32obs}}$ Seja (S) o sistema de equações lineares de m equações nas n incógnitas $Ax = b$. Então, se $n > m$ o sistema não pode ser possível e determinado.

$\boxed{\text{3.33def}}$ ⟦ variável pivô, variável livre ⟧ Sejam A a matriz dos coeficientes de um sistema de equações lineares e $A' \in \text{fe}(A)$. Então, se a coluna j de A' é uma coluna pivô, diz-se que x_j é uma variável pivô. Caso contrário, diz-se que é uma variável livre.

$\boxed{\text{3.34exe}}$ Identifique as variáveis livres do sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ \qquad\qquad\quad x_3 - 2x_4 = 1. \end{cases}$

$\boxed{3.35\text{teo}}$ Método da eliminação de Gauss para a resolução de sistemas de equações lineares: seja (S) o sistema de equações lineares $Ax = b$. Então, o seguinte algoritmo determina $CS_{(S)}$:

Passo 1 determinar um elemento de $\mathrm{fe}(A|b)$.

Passo 2 identificar as variáveis livres.

Passo 3 aplicar método de substituição de trás para a frente.

$\boxed{3.36\text{teo}}$ Método da eliminação de Gauss-Jordan para a resolução de sistemas de equações lineares: seja (S) o sistema de equações lineares $Ax = b$. Então, o seguinte algoritmo determina $CS_{(S)}$:

Passo 1 determinar $\mathrm{fer}(A|b)$.

Passo 2 identificar as variáveis livres.

Passo 3 aplicar método de substituição de trás para a frente.

$\boxed{\text{3.37exe}}$ Considere os sistemas de equações lineares

$$(S_1)\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ \phantom{x_1 + {}} 4x_2 + 5x_3 = 23 \\ \phantom{x_1 + 2x_2 + {}} 6x_3 = 18 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad (S_2)\quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x \phantom{{}+ y} + z = 0. \end{cases}$$

Resolva-os através do métodos da eliminação de Gauss e do método de Gauss-Jordan.

3.38teo Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então,

(a) A é uma matriz invertível se e só se $c(A) = n$.

(b) Se A é uma matriz invertível, a coluna j da sua matriz inversa é a solução do sistema de equações lineares $Ax = e_j$, em que e_j é a coluna j da matriz I_n.

3.39exe Verifique que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ é invertível e determine a sua inversa.

3.40def ⟦ determinante de uma matriz ⟧ Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então, chama-se determinante da matriz A, que se representa por $\det(A)$ ou $|A|$, ao escalar definido recursivamente por

$$|A| = \begin{cases} a_{11} & se \;\; n = 1, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}|A_{(1;j)}| & se \;\; n > 1, \end{cases}$$

em que $A_{(1;j)}$ é a matriz que se obtém a partir da matriz A eliminando a primeira linha e a coluna j.

3.41obs Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então, por simplificação de notação, escreve-se

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$\boxed{\text{3.42exe}}$ (a) Calcule $|A|$, em que $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(b) Calcule $|A|$, em que $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e deduza a "Regra de Sarrus".

$\boxed{\text{3.43teo}}$ (Teorema de Laplace) Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então,

$$|A| = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}|A_{(i;j)}|}_{\substack{\text{desenvolvimento} \\ \text{através da linha } i, \\ \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}|A_{(i;j)}|}_{\substack{\text{desenvolvimento} \\ \text{através da coluna } j, \\ \forall j \in \{1,2,\ldots,n\}}}.$$

$\boxed{\text{3.44obs}}$ (a) Notar que a definição $\boxed{\text{3.41def}}$ consiste no cálculo do determinante através do desenvolvimento segundo a primeira linha.

(b) Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $b_{ij} = (-1)^{i+j}$. Então,

$$B = \begin{bmatrix} +1 & -1 & +1 & -1 & \cdots \\ -1 & +1 & -1 & +1 & \cdots \\ +1 & -1 & +1 & -1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

(c) Como regra prática, fazer o desenvolvimento a partir da linha ou coluna que tiver mais zeros.

$\boxed{\text{3.45teo}}$ Sejam A uma matriz quadrada. Então, A é não singular se e só se $|A| \neq 0$.

3. Sistemas de Equações Lineares (exercícios)

$\boxed{3.1}$ Determine, para cada uma das seguintes matrizes, uma matriz equivalente que seja uma matriz em escada e a matriz equivalente que seja uma matriz em escada reduzida.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(e) $E = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

(g) $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -4 \\ -4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$.

(d) $D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

(f) $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & -6 & 5 \end{bmatrix}$.

(h) $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

sols 3.1 Nota: associada a cada matriz não-nula, existe uma infinidade de matrizes que lhe são equivalentes e que estão na forma escalonada. As soluções que a seguir se apresentam, resultam da aplicação do algoritmo apresentado em $\boxed{\text{3.12teo}}$.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{fe}(A), \mathrm{fer}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{fe}(E), \mathrm{fer}(E) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{13}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 6 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & -\frac{26}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{fe}(B), \mathrm{fer}(B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{26}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \in \mathrm{fe}(F), \mathrm{fer}(F) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathrm{fe}(C), \mathrm{fer}(C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(g) $G \in \mathrm{fe}(G), \mathrm{fer}(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & -\frac{10}{3} \end{bmatrix} \in \mathrm{fe}(D), \mathrm{fer}(D) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{15}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{7} \end{bmatrix}$.

(h) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{fe}(x), \mathrm{fer}(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

3.2 Classifique quanto ao número de soluções e determine o conjunto solução dos seguintes sistemas de equações lineares:

(a) $(Sa)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_2 = 6. \end{cases}$

(b) $(Sb)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 0x_2 = 2. \end{cases}$

(c) $(Sc)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 4x_2 + 5x_3 = 23. \end{cases}$

(d) $(Sd)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_4 = 1. \end{cases}$

sols 3.2 (a) PD. $\mathrm{CS}_{(Sa)} = \{(1,2)\}$.

(b) Imp. $\mathrm{CS}_{(Sb)} = \emptyset$.

(c) PI. $\mathrm{CS}_{(Sc)} = \{(\frac{5-\alpha}{2}, \frac{23-5\alpha}{4}, \alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}$.

(d) PI. $\mathrm{CS}_{(Sd)} = \{(-s, 1-t, s, t) | t, s \in \mathbb{R}\}$.

3.3 Resolva pelo método de eliminação de Gauss e pelo método de Gauss-Jordan os seguintes sistemas de equações lineares:

$$(\mathrm{Sa})\ \begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ 2x - y + z - w = 5 \\ y - w = 0 \\ x - w = 2. \end{cases}$$

$$(\mathrm{Sb})\ \begin{cases} x + y + z + 2w = 1 \\ 2x - y + z - w = -1 \\ y + 3w = 1 \\ 2x - 2y + 2z - w = -2. \end{cases}$$

sols 3.3 (a) $\mathrm{CS}_{(Sa)} = \{(1,-1,1,-1)\}$.

(b) $\mathrm{CS}_{(Sb)} = \{(0,1,0,0)\}$.

3.4 Considere os seguintes sistemas de equações lineares:

$$(\mathrm{Sa})\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0. \end{cases} \quad (\mathrm{Sb})\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4. \end{cases} \quad (\mathrm{Sc})\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases} \quad (\mathrm{Sd})\ \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

Responda às seguintes questões para cada um destes sistemas de equações lineares:

(a) identifique a matriz dos coeficientes A, o vector dos termos independentes b, o vector das incógnitas x e a matriz ampliada $A|b$.

(b) Classifique o sistema quanto ao número de soluções e determine o seu conjunto de soluções.

(c) Indique a dimensão do subespaço gerado pelas colunas da matriz dos coeficientes.

(d) Indique se o vector dos termos independentes pertence ao subespaço gerado pelas colunas da matriz dos coeficientes.

(e) Classifique o sistema homogéneo associado quanto ao número de soluções, determine o seu conjunto de soluções e comente os resultados obtidos.

sols 3.4 (S_1) (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$

(b) PD. $\mathrm{CS}_{Ax=b} = \{(1,1,1)\}$.

(c) $\dim(R(A)) = 3$.

(d) Sim.

(e) PD. $\mathrm{CS}_{Ax=0} = \{(0,0,0)\}$.

(S_2) (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right].$

(b) PI. $\mathrm{CS}_{Ax=b} = \{(2-t, t, t) | t \in \mathbb{R}\}$.

(c) $\dim(R(A)) = 2$.

(d) Sim.

(e) PI. $\mathrm{CS}_{Ax=0} = \{(-t, t, t) | t \in \mathbb{R}\}$.

(S_3) (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right].$

(b) Imp. $\mathrm{CS}_{Ax=b} = \emptyset$.

(c) $\dim(R(A)) = 2$.

(d) Não.

(e) PI. $\mathrm{CS}_{Ax=0} = \{(-s, s, 0) | s \in \mathbb{R}\}$.

(S_4) (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right].$

(b) PI. $\mathrm{CS}_{Ax=b} = \{(1+s-t, s, t) | s, t \in \mathbb{R}\}$.

(c) $\dim(R(A)) = 1$.

(d) Sim.

(e) PI. $\mathrm{CS}_{Ax=0} = \{(s-t, s, t) | s, t \in \mathbb{R}\}$.

3.5 Dê exemplos de sistemas de m equações lineares a n incógnitas possíveis e determinados, possíveis e indeterminados e impossíveis para $m > n$, $m = n$ e $m < n$, sempre que tal seja possível.

3.6 Analise o seguinte problema resolvido.

Discuta o seguinte sistema de equações lineares em função dos parâmetros reais α e β:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & & & + & 2x_3 & & & = & \beta \\ 2x_1 & + & (\alpha+2)x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ (\alpha+1)x_1 & + & 2x_2 & & & - & x_4 & = & 0. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & \beta \\ 2 & \alpha+2 & 2 & -1 & 0 \\ \alpha+1 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \longleftrightarrow \\ \ell_2 \leftarrow \ell_2 - 2\ell_1 \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1 \\ \ell_4 \leftarrow \ell_4 - (\alpha+1)\ell_1 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 & 2 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & -1-\alpha & \alpha & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \longleftrightarrow \\ \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 + \frac{\alpha}{2}\ell_2 \\ \ell_4 \leftarrow \ell_4 + \frac{1-\alpha}{2}\ell_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+1 & \frac{\alpha\beta}{2} \\ 0 & 0 & -1-\alpha & 1 & \frac{(1-\alpha)\beta}{2} \end{array}\right] \begin{array}{l} \longleftrightarrow \\ \\ \\ \ell_3 \leftrightarrow \ell_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & \beta \\ 0 & 0 & -1-\alpha & 1 & \frac{(1-\alpha)\beta}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+1 & \frac{\alpha\beta}{2} \end{array}\right]$$

$\alpha \neq -1$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & \beta \\ 0 & 0 & -1-\alpha & 1 & \frac{(1-\alpha)\beta}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+1 & \frac{\alpha\beta}{2} \end{array}\right]$$

$\alpha = 1$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta}{2} \end{array}\right]$$

	$\alpha \neq -1$	$\alpha = -1$	
		$\beta = 0$	$\beta \neq 0$
$c(A)$	4	3	3
$c(A\|b)$	4	3	4
	PD	PI	Imp

3.7 Discuta os seguintes sistemas de equações lineares $Ax = b$ em função dos respectivos parâmetros reais:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 2 \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & k & -1 \\ 1 & 2 & k \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & c \\ 0 & 3 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ t \end{bmatrix}$.

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ t \end{bmatrix}$.

sols 3.7 (a) PD: $\alpha \neq 3$. PI: $\alpha = 3$. Imp: nunca.

(b) PD: $k \neq 2 \wedge k \neq -5$. PI: $k = 2$. Imp: $k = -5$.

(c) PD: nunca. PI: $c \neq 3 \vee t = 3$. Imp: $c = 3 \wedge t \neq 3$.

(d) PD: nunca. PI: $a \neq -1 \vee t = -1$. Imp: $a = -1 \wedge t \neq -1$.

3.8 Calcule, se possível, as matrizes inversas das seguintes matrizes:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

(c) $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

(d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

sols 3.8 (a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$.

(b) A matriz B é singular.

(c) $C^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}$.

(d) $D^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

3.9 Determine, por dois processos distintos, para que valores de α a matriz $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$ é invertível.

sols 3.9 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.

3.10 Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule A^{-1}.

(b) Mostre que o sistema $Ax = b$ é possível e determinado, qualquer que seja o vector dos termos independentes $b \in \mathbb{R}^3$.

(c) Usando a alínea (a), resolva o sistema $Ax = b$, em que $b = [b_i] \in \mathbb{R}^3$, $b_i = i$.

sols 3.10 (a) $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) $\mathrm{CS}_{Ax=b} = \{(0, 1, 2)\}$.

3.11 Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Determine $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que a matriz A se possa escrever como combinação linear das matrizes B_1, B_2, B_3 e B_4.

sols 3.11 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

3.12 Indique quais dos seguintes conjuntos de vectores são conjuntos geradores do espaço vectorial $\mathbb{R}^2$.

(a) $A = \{(1, 0), (0, 1)\}$.

(b) $B = \{(1, 2), (-1, 0)\}$.

(c) $C = \{(1, 0), (0, 1), (1, 3)\}$.

(d) $D = \{(1, 2)\}$.

(e) $E = \{(1, 2), (2, 4), (-1, -2)\}$.

(f) $F = \{(1, -1), (-2, 2)\}$.

sols 3.12 A, B e C.

3.13 Indique para que valores do parâmetro real α, os vectores $a = (1, -2)$ e $b = (\alpha, -1)$ de $\mathbb{R}^2$ são linearmente independentes.

sols 3.13 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

3.14 Considere os vectores $v_1 = (\alpha, 6), v_2 = (1, \alpha) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Determine os valores do parâmetro α para os quais o conjunto $\{v_1, v_2\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

sols 3.14 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}$.

3.15 Considere o seguinte subconjunto do espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$:

$$V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 | x = y - 3z \wedge z = 2w\}.$$

(a) Mostre que V é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^4$.

(b) Determine uma base e a dimensão de V.

sols 3.15 (b) Por exemplo, o conjunto $\{(1, 1, 0, 0), (-6, 0, 2, 1)\}$ é uma base de V e $\dim(V) = 2$.

3.16 Considere o seguinte sistema não linear nas incógnitas α, β e γ.

$$\begin{cases} 2\,\mathrm{sen}\,\alpha & - & \cos\beta & + & 3\tan\gamma & = & 3 \\ 4\,\mathrm{sen}\,\alpha & + & 2\cos\beta & - & 2\tan\gamma & = & 10 \\ 6\,\mathrm{sen}\,\alpha & - & 3\cos\beta & + & \tan\gamma & = & 9. \end{cases}$$

Mostre que, neste caso, é possível concluir que o sistema é impossível recorrendo ao método de eliminação de Gauss.

3.17 Determine a equação da parábola que passa nos pontos $(1, 2)$, $(-1, 6)$ e $(2, 3)$.

sols 3.17 $x^2 - 2x + 3$.

3.18 Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ por dois processos distintos.

sols 3.18 $|A| = -1$.

3.19 Calcule o determinante das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\mathrm{sen}\,\alpha \\ \mathrm{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

sols 3.19 $|A| = 15$, $|B| = 1$, $|C| = 0$, $|D| = 0$, $|E| = 1$, $|F| = 2$.

4. Aplicações Lineares (notas)

4.1def ⟦ produto cartesiano de dois conjuntos ⟧ Sejam A e B conjuntos. Então, chama-se produto cartesiano de A e B, que se representa por $A \times B$, ao conjunto

$$\{(x, y)|x \in A, y \in B\}.$$

4.2def ⟦ relação ⟧ Sejam A e B conjuntos. Então, diz-se que R é uma relação de A em B se $R \subset A \times B$.

4.3def Sejam A e B conjuntos e R uma relação de A em B. Então,

(a) ⟦ domínio de uma relação ⟧ chama-se domínio da relação R, que se representa por D_R, ao conjunto $\{x \in A|\exists y \in B : (x, y) \in R\}$.

(b) ⟦ contradomínio de uma relação ⟧ chama-se domínio da relação R, que se representa por C_R, ao conjunto $\{y \in B|\exists x \in A : (x, y) \in R\}$.

4.4def ⟦ aplicação ou função ou transformação ou correspondência ou operador ⟧ Sejam A e B conjuntos e f uma relação de A em B. Então, diz-se que f é uma aplicação ou função ou transformação ou correspondência ou operador de A em B, que se representa por $f : A \longrightarrow B$, se $\forall x \in A, \exists^1 y \in B : (x, y) \in f$.

4.5def ⟦ imagem de um elemento por meio de uma função ou valor de uma função num elemento ⟧ Sejam A e B conjuntos, f uma aplicação de A em B e $x \in A$. Então, chama-se imagem de x por meio de f ou valor da função f em x, que se representa por $f(x)$, ao único elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

4.6def Sejam A, B, C e D conjuntos tais que $C \subset A$ e $D \subset B$, e f uma aplicação de A em B. Então,

(a) ⟦ imagem de um conjunto por uma aplicação ⟧ chama-se imagem de C por f, que se representa por $f(C)$, ao conjunto $\{f(x) \in B | x \in C\}$.

(b) ⟦ imagem inversa de um conjunto por uma aplicação ⟧ Chama-se imagem inversa de D por f, que se representa por $f^{\leftarrow}(D)$, ao conjunto $\{x \in A | f(x) \in D\}$.

$\boxed{\text{4.7obs}}$ Sejam A e B conjuntos e f uma aplicação de A em B. Então, o contradomínio de f é o conjunto $f(A)$.

$\boxed{\text{4.8exe}}$ Sejam os conjuntos $A = \{x_1, x_2\}$, $B = \{y_1, y_2, y_3\}$, $C = \{x_2\}$, $D = \{y_1, y_3\}$. Então,

(a) dê um exemplo de uma relação de A em B que não é uma aplicação.

(b) Dê um exemplo de uma relação de A em B que é uma aplicação.

(c) Considerando a aplicação dada na alínea anterior, determine a imagem de f, $f(C)$ e $f^{\leftarrow}(D)$.

4.9def ⟦ aplicação linear ou homomorfismo, $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V,V')$, $\mathcal{L}(V,V')$ ⟧ Sejam V e V' espaços vectoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$ e f uma aplicação de V em V'. Então, diz-se que f é uma aplicação linear ou um homomorfismo se

$$\forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K} : f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y).$$

Representa-se por $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V,V')$ o conjunto de todas as aplicações lineares de V em V' (quando não for relevante especificar o corpo sobre o qual se definem os espaços vectoriais V e V' ou se se depreender do contexto, denota-se o conjunto de todas as aplicações lineares de V em V' por $\mathcal{L}(V,V')$).

4.10teo Sejam V e V' espaços vectoriais e $f \in \mathcal{L}(V,V')$. Então, $f(0_V) = 0_{V'}$.

4.11obs Sejam V e V' espaços vectoriais e f uma aplicação de V em V'. Então, se $f(0_V) \neq 0_{V'}$, f não é uma aplicação linear.

$\boxed{\text{4.12exe}}$ Mostre que a aplicação $f : \mathbb{R}_1[x] \longrightarrow \mathbb{R}$, em que $f(ax+b) = \int_0^1 (ax+b)dx$, é linear.

$\boxed{\text{4.13exe}}$ Mostre que a aplicação $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, em que $g(a,b) = (a^2, 0)$, não é linear.

$\boxed{\text{4.14def}}$ Sejam V e V' espaços vectoriais e $f \in \mathcal{L}(V, V')$. Então,

(a) $[\![$ imagem de uma aplicação linear, Imf $]\!]$ chama-se imagem de f, que se denota por Imf, ao contradomínio de f.

(b) $[\![$ núcleo de uma aplicação linear, Nuc$f$ $]\!]$ Chama-se núcleo de f, que se denota por Nuc$f$, ao conjunto $f^{\leftarrow}(\{0_{V'}\})$.

$\boxed{\text{4.15obs}}$ Sejam V e V' espaços vectoriais e $f \in \mathcal{L}(V, V')$. Então, $\mathrm{Im}f = \{f(x) \in V' | x \in V\}$ e $\mathrm{Nuc}f = \{x \in V | f(x) = 0_{V'}\}$.

$\boxed{\text{4.16teo}}$ Sejam V e V' espaços vectoriais e $f \in \mathcal{L}(V, V')$. Então,

(a) se F é um subespaço de V, $f(F)$ é um subespaço de V'.

(b) Se F' é um subespaço de V', $f^{\leftarrow}(F')$ é um subespaço de V.

$\boxed{\text{4.17obs}}$ Sejam V e V' espaços vectoriais e $f \in \mathcal{L}(V, V')$. Então, Imf é um subespaço de V' e Nuc$f$ é um subespaço de V.

$\boxed{\text{4.18def}}$ Sejam V e V' espaços vectoriais e $f \in \mathcal{L}(V, V')$. Então,

(a) ⟦ característica de uma aplicação linear, c_f ⟧ chama-se característica de f, que se denota por c_f, à dimensão do subespaço $\mathrm{Im} f$.

(b) ⟦ nulidade de uma aplicação linear, n_f ⟧ Chama-se nulidade de f, que se denota por n_f, à dimensão do subespaço $\mathrm{Nuc} f$.

$\boxed{\text{4.19teo}}$ Sejam V e V' espaços vectoriais e $f \in \mathcal{L}(V, V')$. Então, se $\dim(V) = n$, tem-se que $n = c_f + n_f$.

$\boxed{\text{4.20teo}}$ Sejam V e V' espaços vectoriais, $f \in \mathcal{L}(V, V')$ e $\{u_1, \ldots, u_n\}$ um conjunto gerador de V. Então,

(a) f fica definida desde que se conheçam os vectores $f(u_1), \ldots, f(u_n)$.

(b) $\mathrm{Im} f = \langle f(u_1), \ldots, f(u_n) \rangle$.

$\boxed{\text{4.21exe}}$ Seja $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ tal que $f(x_1, x_2, x_3) = (0, x_1 + 2x_2 - x_3)$. Determine $\mathrm{Im}f$, c_f, $\mathrm{Nuc}f$ e n_f.

$\boxed{4.22\text{obs}}$ Sejam V e V' espaços vectoriais, $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V, V')$, $C = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V, $C' = \{v'_1, \dots, v'_m\}$ uma base de V' e $v \in V$. Então,

$$\exists^1 \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} : v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n,$$

$$\exists^1 a_{11}, \dots, a_{m1} \in \mathbb{K} : f(v_1) = a_{11} v'_1 + \cdots + a_{m1} v'_m,$$

$$\vdots$$

$$\exists^1 a_{1n}, \dots, a_{mn} \in \mathbb{K} : f(v_n) = a_{1n} v'_1 + \cdots + a_{mn} v'_m.$$

Tem-se, então, que:

$$\begin{aligned}
f(v) &= f(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) \\
&= \alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_n f(v_n) \\
&= \alpha_1 (a_{11} v'_1 + \cdots + a_{m1} v'_m) + \cdots + \alpha_n (a_{1n} v'_1 + \cdots + a_{mn} v'_m) \\
&= (\alpha_1 a_{11} + \cdots + \alpha_n a_{1n}) v'_1 + \cdots + (\alpha_1 a_{m1} + \cdots + \alpha_n a_{mn}) v'_m \\
&= \beta_1 v'_1 + \cdots + \beta_m v'_m,
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

4.23def ⟦ matriz de uma aplicação linear entre espaços de dimensão finita, $A_{f,C,C'}$, A_f ⟧ Sejam V e V' espaços vectoriais, $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V, V')$, $C = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V e $C' = \{v'_1, \ldots, v'_m\}$ uma base de V'. Então, chama-se matriz da aplicação linear f relativamente às bases C e C', que se representa por $A_{f,C,C'}$, à matriz $[a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ introduzida na observação anterior.

Se $V = \mathbb{R}^n$, $V' = \mathbb{R}^m$ e C e C' são as respectivas bases canónicas, então representa-se por A_f a matriz da aplicação linear f relativamente às bases C e C'.

4.24exe Seja $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ tal que $f(x, y, z) = (x, 0)$. Então, determine a matriz de f relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$.

4. Aplicações Lineares (exercícios)

4.1 Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (x - y, 0, x)$. Então, calcule

(a) $f(2, 1)$. (b) $f(y, 1)$. (c) $f(y, x)$. (d) $f(x + 2y, y - x)$.

sols 4.1 (a) $f(2, 1) = (1, 0, 2)$. (b) $f(y, 1) = (y - 1, 0, y)$. (c) $f(y, x) = (y - x, 0, y)$. (d) $f(x+2y, 2y-x) = (2x, 0, x+2y)$.

4.2exe Indique, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

(a) Seja $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, em que $f_1(x, y) = (0, -x)$. Então, $f_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

(b) Seja $f_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, em que $f_2(x, y, z) = (x + y + 2, z - 3)$. Então, $f_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

(c) Seja $f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, em que $f_3(x, y) = |x - y|$. Então, $f_3 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

(d) Seja $f_4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, em que $f_4(x_1, x_2) = (x_2, 0, x_1)$. Então, $f_4 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})^3$.

(e) Sejam $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $f_5 : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, em que $f_5(A) = a_{11}$. Então, $f_5 \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.

(f) Seja $f_6 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, em que $f_6(x_1, x_2) = (x_1 + 1, x_2)$. Então, $f_6 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})^2$.

(g) Sejam $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $f_7 : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, em que $f_7(A) = (a_{11})^2$. Então, $f_7 \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.

(h) Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $f_8 : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, em que $f_8(A) = \det(A)$. Então, $f_8 \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.

sols 4.2 (a) Verdadeira. (b) Falsa. (c) Falsa. (d) Verdadeira. (e) Verdadeira. (f) Falsa. (g) Falsa. (h) Falsa.

4.3 Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então, determine a relação entre α e β de modo que a aplicação $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, em que $f(x) = x + \alpha - 2\beta, -x$, seja linear.

sols 4.3 $\alpha = 2\beta$.

4.4 Considere as seguintes aplicações lineares:

$$\begin{array}{cccc} f_1 : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & x + y. \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} f_3 : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & (x - z, 0, y - 2z). \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} f_2 : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & (x + y + z, 2x + 2y + 2z). \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} f_4 : & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z, w) & \longmapsto & (x - y, z - w, x - 3w). \end{array}$$

Determine $\mathrm{Im}f$, c_f, $\mathrm{Nuc}f$, n_f e a matriz da aplicação relativamente às bases canónicas para cada uma delas.

sols 4.4 f_1: $\text{Im}f_1 = \mathbb{R}$, $c_{f_1} = 1$, $\text{Nuc}f_1 = \{(x, -x) | x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, -1) \rangle$, $n_{f_1} = 1$, $A_{f_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$.

f_2: $\text{Im}f_2 = \{(x, 2x) | x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 2) \rangle$, $c_{f_2} = 1$, $\text{Nuc}f_2 = \{(-y - z, y, z) | y, z \in \mathbb{R}\} = \langle (-1, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle$, $n_{f_2} = 2$, $A_{f_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

f_3: $\text{Im}f_3 = \{(x, 0, z) | x, z \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 0), (0, 0, 1) \rangle$, $c_{f_3} = 2$, $\text{Nuc}f_3 = \{(z, 2z, z) | z \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 2, 1) \rangle$, $n_{f_3} = 1$, $A_{f_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

f_4: $\text{Im}f_4 = \mathbb{R}^3$, $c_{f_4} = 3$, $\text{Nuc}f_4 = \{(3w, 3w, w, w) | w \in \mathbb{R}\} = \langle (3, 3, 1, 1) \rangle$, $n_{f_4} = 1$, $A_{f_4} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

4.5 Para cada uma das alíneas seguintes, determine a função f sabendo que é uma aplicação linear definida por:

(a) $f(1, 0) = (-1, 1, 2)$ e $f(0, 1) = (3, 0, 1)$.

(b) $f(1, 2) = (3, -1, 5)$ e $f(0, 1) = (2, 1, -1)$.

(c) $f(1, 1, 1) = 3$, $f(0, 1, -2) = 1$ e $f(0, 0, 1) = -2$.

sols 4.5 (a) $f(x, y) = (-x + 3y, x, 2x + y)$.

(b) $f(x, y) = (-x + 2y, -3x + y, 7x - y)$.

(c) $f(x, y, z) = 8x - 3y - 2z$.

4.6 Seja f uma aplicação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$. Sabendo que $f(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$ e $\text{Nuc}f = \langle (1, 1, 1), (0, 1, 1) \rangle$, determine $f(x, y, z)$ para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

sols 4.6 $f(x, y, z) = (0, 0, z - y)$.

4.7 Seja f uma aplicação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$. Sabendo que $f(1, 0) = (0, 1, 1)$ e $\text{Nuc}f = \langle (0, 1) \rangle$, determine $f(x, y)$ para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

sols 4.7 $f(x, y, z) = (0, x, x)$.

4.8 Sejam $\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} | x, y \in \mathbb{R} \right\}$ e f uma aplicação de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, tal que $f(A) = \begin{bmatrix} x+y & y \\ -y & 2x \end{bmatrix}$.

(a) Mostre que f é uma aplicação linear.

(b) Determine as dimensões do $\text{Nuc}f$ e da $\text{Im}f$.

sols 4.8 (b) $n_f = 0$, $c_f = 2$.

4.9 Sejam $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}$ um corpo, $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e f uma aplicação de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ em $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, tal que $f(A) = AM - MA$.

(a) Mostre que f é uma aplicação linear.

(b) Considerando $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, determine uma base e a dimensão para o núcleo de f.

sols 4.9 (b) Por exemplo: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, $n_f = 2$.

5. Valores e Vectores Próprios (notas)

5.1def ⟦ vector próprio de uma matriz associado a um valor próprio ⟧ Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Então, diz-se que $x \in \mathbb{C}^n$ é um vector próprio da matriz A associado ao valor próprio $\lambda \in \mathbb{C}$ se $x \neq 0$ e $Ax = \lambda x$.

5.2def ⟦ espectro de uma matriz ⟧ Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Então, chama-se espectro de A, que se representa por $\lambda(A)$, ao conjunto de todos os valores próprios de A.

5.3obs (a) Neste capítulo passa-se a considerar o corpo dos números complexos, pois existem matrizes reais cujos valores próprios são números complexos.

(b) Cada vector próprio está associado apenas a um valor próprio.

(c) Se x é um vector próprio associado ao valor próprio $\lambda \in \mathbb{C}$, então, αx, $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, também é um vector próprio associado ao valor próprio $\lambda \in \mathbb{C}$.

(d) O seguinte teorema indica-nos um processo de calcular $\lambda(A)$.

5.4teo Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Então, $\lambda \in \lambda(A)$ se e só se $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

5.5def Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Então,

(a) ⟦ polinómio característico de uma matriz ⟧ chama-se polinómio característico da matriz A, que se representa por $\Pi_A(\lambda)$, ao polinómio $\det(A - \lambda I_n)$.

(b) ⟦ equação característica de uma matriz ⟧ Chama-se equação característica da matriz A à equação $\Pi_A(\lambda) = 0$.

(c) ⟦ multiplicidade algébrica de um valor próprio ⟧ Seja λ um valor próprio de A. Então, chama-se multiplicidade algébrica de λ à multiplicidade do escalar λ enquanto raíz da equação característica.

(d) ⟦ valor próprio simples ⟧ Seja λ um valor próprio de A. Então, diz-se que λ é um valor próprio simples se tem multiplicidade algébrica um.

5.6teo Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Então, o coeficiente do termo de grau n do polinómio característico da matriz A é $(-1)^n$ e o seu termo independente de λ é $\det(A)$.

5.7obs Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Então, $\Pi_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + \cdots + \det(A)$.

5.8obs Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Então,

(a) os valores próprios da matriz A são os zeros do seu polinómio característico.

(b) Se λ é um zero do polinómio característico com multiplicidade k, então, λ é um valor próprio da matriz A com multiplicidade algébrica k.

(c) Se λ é um valor próprio da matriz A, então os vectores próprios associados a λ são as soluções não-nulas do sistema homogéneo $(A - \lambda I_n)x = 0$.

(d) Do Teorema Fundamental da Álgebra resulta que $\Pi_A(\lambda)$ tem exactamente n zeros, podendo alguns deles ser iguais. Assim, sejam $n_1, n_2, \ldots, n_m$ as multiplicidades dos $m(\leqslant n)$ zeros distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ de $\Pi_A(\lambda)$. Então,

$$\Pi_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda - \lambda_m)^{n_m},$$

em que $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$. Aos números $n_1, n_2, \ldots, n_m$ chama-se multiplicidade algébrica dos valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, respectivamente.

5.9teo Seja A uma matriz quadrada. Então, A é invertível se e só se $0 \notin \lambda(A)$.

5.10exe Determine os valores próprios da matriz A e os vectores próprios associados ao valor próprio de menor módulo, em que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

começando por mostrar que o polinómio característico é dado por

$$\Pi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 = (2-\lambda)^2(3-\lambda).$$

5. Valores e Vectores Próprios (exercícios)

5.1 Determine o espectro das seguintes matrizes, bem como os vectores próprios associados:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

sols 5.1 (a) $\lambda(A) = \{-1, 5\}$.

Conjunto dos vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda_1 = -1$: $V_1 = \{(-2\alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{C}\} \setminus \{(0,0)\}$.

Conjunto dos vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda_2 = 5$: $V_2 = \{(\alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{C}\} \setminus \{(0,0)\}$.

(b) $\lambda(B) = \{-i, i\}$.

Conjunto dos vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda_1 = -i$: $V_1 = \{(\frac{\alpha}{1+i}, \alpha) | \alpha \in \mathbb{C}\} \setminus \{(0,0)\}$.

Conjunto dos vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda_2 = i$: $V_2 = \{(\frac{\alpha}{1-i}, \alpha) | \alpha \in \mathbb{C}\} \setminus \{(0,0)\}$.

(c) $\lambda(C) = \{-2, 4\}$, em que o valor próprio $\lambda_1 = -2$ tem multiplicidade algébrica 2.

Conjunto dos vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda_1 = -2$: $V_1 = \{(\beta - \alpha, \beta, \alpha) | \alpha, \beta \in \mathbb{C}\} \setminus \{(0,0,0)\}$.

Conjunto dos vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda_2 = 4$: $V_2 = \{(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \alpha) | \alpha \in \mathbb{C}\} \setminus \{(0,0,0)\}$.

(d) $\lambda(D) = \{2, 4\}$, em que o valor próprio $\lambda_1 = 2$ tem multiplicidade algébrica 2.

Conjunto dos vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda_1 = 2$: $V_1 = \{(\alpha, \beta, \alpha) | \alpha, \beta \in \mathbb{C}\} \setminus \{(0,0,0)\}$.

Conjunto dos vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda_2 = 4$: $V_2 = \{(-\alpha, 0, \alpha) | \alpha \in \mathbb{C}\} \setminus \{(0,0,0)\}$.

(e) $\lambda(E) = \{0, 2\}$, em que o valor próprio $\lambda_2 = 2$ tem multiplicidade algébrica 2.

Conjunto dos vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda_1 = 0$: $V_1 = \{(\alpha, -\alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{C}\} \setminus \{(0,0,0)\}$.

Conjunto dos vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda_2 = 2$: $V_2 = \{(\alpha, 0, \alpha) | \alpha \in \mathbb{C}\} \setminus \{(0,0,0)\}$.

(f) $\lambda(F) = \{1, 2, 3\}$.

Conjunto dos vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda_1 = 1$: $V_1 = \{(-\frac{\alpha}{3}, \beta, \alpha) | \alpha, \beta \in \mathbb{C}\} \setminus \{(0,0,0)\}$.

Conjunto dos vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda_2 = 2$: $V_2 = \{(-\frac{\alpha}{2}, \alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{C}\} \setminus \{(0,0,0)\}$.

Conjunto dos vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda_3 = 3$: $V_3 = \{(-\alpha, \alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{C}\} \setminus \{(0,0,0)\}$.

5.2 Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Então, define-se o traço da matriz A, que se representa por $\mathrm{tr}(A)$, como sendo $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Considerando, agora, a matriz $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$, mostre que $\Pi_B(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(B)\lambda + \det(B)$.

5.3 Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ a matriz associada à aplicação linear f_A. Diga se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(a) a matriz A é invertível se e só se $CS_{(Ax=0)} = \{0\}$.

(b) A matriz A é invertível se e só se $\#CS_{(Ax=b)} = 1, \forall b \in \mathbb{R}^n$.

(c) A matriz A é invertível se e só se $\det(A) \neq 0$.

(d) A matriz A é invertível se e só se $\mathrm{Im} f_A = \mathbb{R}^n$.

(e) A matriz A é invertível se e só se as colunas da matriz A são linearmente independentes.

(f) A matriz A é invertível se e só se as linhas da matriz A são linearmente independentes.

(g) A matriz A é invertível se e só se as colunas da matriz A geram $\mathbb{R}^n$.

(h) A matriz A é invertível se e só se as linhas da matriz A geram $\mathbb{R}^n$.

(i) A matriz A é invertível se e só se as colunas da matriz A formam uma base de $\mathbb{R}^n$.

(j) A matriz A é invertível se e só se as linhas da matriz A formam uma base de $\mathbb{R}^n$.

(k) A matriz A é invertível se e só se $n_{f_A} = 0$.

(l) A matriz A é invertível se e só se $c_{f_A} = n$.

(m) A matriz A é invertível se e só se $0 \notin \lambda(A)$.

sols 5.3 Todas as afirmações são verdadeiras.

6. Geometria Analítica (notas)

6.1def ⟦ produto interno de dois vectores ou produto escalar de dois vectores ⟧ Sejam V um espaço vectorial real e a aplicação

$$\begin{aligned} \cdot : V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x \cdot y \end{aligned}$$

tal que

(a) $\forall x, y \in V : x \cdot y = y \cdot x$.

(b) $\forall x, y, z \in V : x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

(c) $\forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R} : (\alpha x) \cdot y = \alpha(x \cdot y)$.

(d) $\forall x \in V \setminus \{0_V\} : x \cdot x > 0$.

(e) $0_V \cdot 0_V = 0$.

Então, diz-se que V está munido do produto interno ou produto escalar $(x, y) \mapsto x \cdot y$.

6.2obs Também se usam as notações $x|y$, (x, y), $\langle x, y\rangle$ e $(x|y)$ para representar o produto interno dos vectores x e y.

6.3def ⟦ espaço euclidiano ⟧ Um espaço vectorial real de dimensão finita munido de um produto interno diz-se um espaço euclidiano.

6.4teo Seja a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) & \longmapsto & (x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3. \end{array}$$

Então, $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ é um espaço euclidiano.

6.5obs O produto interno por defeito de $\mathbb{R}^3$ é o produto interno do exemplo anterior.

6.6exe Determine o produto interno dos vectores $x = (1, 0, 2)$ e $y = (3, 1, 0)$.

6.7def ⟦ norma ⟧ Sejam V um espaço vectorial real e a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\| : & V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \|x\|, \end{array}$$

tal que

(a) $\forall x, y \in V : \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

(b) $\forall x \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R} : \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

(c) $\forall x \in V \setminus \{0_V\} : \|x\| > 0$.

(d) $\|0_V\| = 0$.

Então, diz-se que V está munido da norma $x \mapsto \|x\|$.

6.8def ⟦ espaço normado ⟧ Um espaço vectorial real munido de uma norma diz-se um espaço normado.

6.9teo Sejam V um espaço euclidiano e a aplicação

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{x \cdot x}. \end{aligned}$$

Então, $(V, \|\cdot\|)$ é um espaço normado.

6.10def ⟦ norma induzida pelo produto interno ⟧ À norma definida no teorema anterior chama-se norma induzida pelo produto interno.

6.11obs Por defeito, a norma num espaço euclidiano é a norma induzida pelo produto interno.

6.12teo Seja a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \|\cdot\|: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & \|(x_1, x_2, x_3)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \end{array}$$

Então, $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|)$ é um espaço normado. (Esta é a norma induzida pelo produto interno de 6.4teo.)

6.13def ⟦ vector unitário ⟧ Sejam $(V, \cdot)$ um espaço euclidiano e $x \in V$. Então, x diz-se um vector unitário se $\|x\| = 1$.

6.14exe Determine as normas dos vectores $x = (1, 0, 2)$ e $y = (3, 1, 0)$ e indique se são vectores unitários.

6.15teo Desigualdade de Cauchy-Schwarz: seja $(V, \cdot)$ um espaço euclidiano. Então,

$$\forall x, y \in V : |x \cdot y| \leqslant \|x\| \|y\|.$$

6.16def Sejam $(V, \cdot)$ um espaço euclidiano, $\|\cdot\|$ a norma induzida pelo produto interno e $x, y \in V$. Então,

(a) ⟦ distância entre dois vectores ⟧ chama-se distância entre os vectores x e y, que se representa por $d(x, y)$, a $\|x - y\|$.

(b) ⟦ ângulo entre dois vectores ⟧ Chama-se ângulo entre os vectores x e y, que se representa por $\angle(x, y)$, a θ, onde

$$\theta = 0 \text{ se } x = 0_V \text{ ou } y = 0_V.$$

$$\cos\theta = \frac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|} \text{ se } x \neq 0_V \text{ e } y \neq 0_V.$$

(c) ⟦ vectores ortogonais ⟧ Os vectores x e y dizem-se ortogonais, que se representa por $x \perp y$, se $\angle(x, y) = \frac{\pi}{2}$.

6.17obs Sejam $(V, \cdot)$ um espaço euclidiano, $\|\cdot\|$ a norma induzida pelo produto interno e $x, y \in V$. Então, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz tem-se que $-1 \leq \frac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|} \leq 1$, pelo que a definição de ângulo entre dois vectores faz sentido.

6.18exe Determine a distância e o ângulo entre os vectores $x = (1, 0, 2)$ e $y = (3, 1, 0)$ e indique se são vectores ortogonais.

6.19obs Sejam $(V, \cdot)$ um espaço euclidiano, $\|\cdot\|$ a norma induzida pelo produto interno e $x, y \in V$. Então,

(a) $x \cdot y = \|x\|\|y\| \cos\theta$, em que $\angle(x, y) = \theta$.

(b) se $x \neq 0_V$ e $y \neq 0_V$, então, $x \perp y$ se e só se $x \cdot y = 0$.

6.20def [[produto externo de dois vectores ou produto vectorial de dois vectores de $\mathbb{R}^3$]]
Sejam o espaço vectorial $\mathbb{R}^3$ e $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Então, chama-se produto externo de x e y, que se representa por $x \times y$, ao elemento de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$(x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1) \in \mathbb{R}^3.$$

$\boxed{6.21\text{obs}}$ Sejam $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Então, o produto externo de x e y pode ser calculado através do determinante simbólico

$$x \times y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

$\boxed{6.22\text{exe}}$ Sejam os vectores $x = (1, 0, 2)$ e $y = (3, 1, 0)$. Então, determine $x \times y$.

6.23def ⟦ triedro directo ⟧ Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ vectores ortogonais dois a dois. Então, diz-se que os vectores a, b e c formam um triedro directo se um observador colocado no ponto $(0,0,0)$ e com a cabeça na parte positiva do vector c, vê a à direita de b.

6.24teo (a) $\forall x \in \mathbb{R}^3 : x \times 0 = 0$.

(b) $\forall x, y \in \mathbb{R}^3 : x \times y = -y \times x$.

(c) $\forall x, y \in \mathbb{R}^3, \forall \alpha \in \mathbb{R} : x \times (\alpha y) = \alpha(x \times y)$.

(d) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^3 : (x + y) \times z = x \times z + y \times z$.

(e) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^3 : x \times (y + z) = x \times y + x \times z$.

(f) $\forall x, y \in \mathbb{R}^3 : (x \times y) \perp x$ e $(x \times y) \perp y$.

(g) $\forall x, y \in \mathbb{R}^3 : x \times y = \big(\|x\|\|y\| \operatorname{sen} \theta\big)\, n$, onde $\angle(x, y) = \theta$ e $n \in \mathbb{R}^3$ é um vector unitário, $n \perp x$ e $n \perp y$, e a, b e n definem um triedro directo.

(h) $\|x \times y\|$ é igual à área do paralelogramo que tem como dois dos lados x e y.

$\boxed{6.25\text{obs}}$ (a) Um dos conceitos principais em Álgebra Linear é o de "espaço vectorial", no qual intervêm "vectores" e "escalares" sujeitos a certas leis operatórias. Na Geometria Analítica do "espaço ordinário", um dos conceitos fundamentais é o de "ponto".

(b) Considere-se no "espaço ordinário" um ponto fixo, a que se chama origem e que se denota por O, e três eixos ortogonais concorrentes no ponto O, que se denotam por OX, OY e OZ, no sentido directo, *i.e.*, um observador colocado na origem e com a cabeça na parte positiva do eixo OZ, vê OX à direita de OY. Um ponto P do espaço ordinário fica identificado por três coordenadas, escrevendo-se $P = (p_1, p_2, p_3)$, em que p_1 é a distância do ponto ao plano YOZ, p_2 é a distância do ponto ao plano XOZ e p_3 é a distância do ponto ao plano XOY. Às coordenadas p_1, p_2 e p_3 chama-se abcissa, ordenada e cota, respectivamente. Note-se, então, que se pode estabelecer uma relação entre o ponto $P = (p_1, p_2, p_3)$ do espaço ordinário e o vector $v = p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3$ do espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, em que $\{e_1, e_2, e_3\}$ representa a sua base canónica, *i.e.*, $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$: o vector v é representado geometricamente por um vector cuja origem coincide com a origem do sistema de eixos coordenados e cujo extremo é o ponto P de coordenadas (p_1, p_2, p_3). Assim, passa-se a denotar indistintamente por $\mathbb{R}^3$ o espaço ordinário e o espaço vectorial real.

(c) Sejam, agora, $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$ pontos do espaço ordinário. Então, denotam-se os segmentos orientados no espaço ordinário com ponto inicial A e com ponto final B por $\overrightarrow{AB}$ que corresponderá ao vector $v = (b_1 - a_1)e_1 + (b_2 - a_2)e_2 + (b_3 - a_3)e_3$, ou seja, o seu segmento equipolente (mesma direcção, comprimento e sentido) aplicado na origem.

6.26def ⟦ equação cartesiana de um plano ⟧ Equação do plano α que contém o ponto $A = (a_1, a_2, a_3)$ e que é perpendicular ao vector não-nulo $u = (u_1, u_2, u_3)$: seja o ponto $P = (x, y, z)$. Então,

$$P \in \alpha \text{ se e só se } (P - A) \cdot u = 0,$$

ou seja,

$$(x - a_1)u_1 + (y - a_2)u_2 + (z - a_3)u_3 = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz = d,$$

em que $a = u_1$, $b = u_2$, $c = u_3$ e $d = u_1a_1 + u_2a_2 + u_3a_3$. Chama-se equação cartesiana do plano α à equação $ax + by + cz = d$.

6.27obs Seja o plano α dado pela equação cartesiana equação $ax + by + cz = d$. Então, o vector $v = (a, b, c)$ é perpendicular a α.

6.28exe Determine a equação cartesiana do plano α tal que:

(a) passa na origem e é perpendicular ao vector $v = (1, 2, 3)$.

(b) Passa na origem e é paralelo aos vectores $u = (1, 1, 1)$ e $v = (1, 0, 0)$.

(c) Passa nos pontos $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$.

6.29def ⟦ equação vectorial de uma recta, equações paramétricas de uma recta, equações cartesianas de uma recta, vector director de uma recta ⟧ Equação da recta r que passa pelo ponto $A = (a_1, a_2, a_3)$ e que é paralela ao vector não-nulo $u = (u_1, u_2, u_3)$: seja o ponto $P = (x, y, z)$. Então, $P \in r$ se e só se $\overrightarrow{AP} \parallel u$, ou seja,

$$P - A = \alpha u, \ \alpha \in \mathbb{R} : \text{equação vectorial},$$

ou

$$\begin{cases} x - a_1 = \alpha u_1 \\ y - a_2 = \alpha u_2 \\ z - a_3 = \alpha u_3 \end{cases} : \text{equações paramétricas.}$$

Se se eliminar o parâmetro α das equações paramétricas, obtêm-se as equações cartesianas.

Chama-se vector director da recta r ao vector u.

$\boxed{\text{6.30exe}}$ Determine a equação vectorial, as equações paramétricas e as equações cartesianas da recta r que passa no ponto $A = (-1, 0, 2)$ e é paralela ao vector $v = (1, 2, 3)$.

$\boxed{\text{6.31def}}$ [[distância entre dois pontos]] Sejam $P = (p_1, p_2, p_3)$ e $Q = (q_1, q_2, q_3)$ dois pontos de $\mathbb{R}^3$. Então, chama-se distância entre os pontos P e Q, que se representa por $d(P, Q)$, a

$$d(P, Q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2}.$$

$\boxed{\text{6.32def}}$ [[distância de um ponto a um plano]] Sejam P um ponto de $\mathbb{R}^3$ e π um plano. Então, chama-se distância de P a π, que se representa por $d(P, \pi)$, a $d(P, \pi) = d(P, Q)$, em que

(a) r é a recta perpendicular a π que passa em P.

(b) $Q = \pi \cap r$.

$\boxed{\text{6.33exe}}$ Determine a distância entre o ponto $P = (0, 1, -2)$ e o plano α cuja equação cartesiana é $x + y + z = 1$.

6.34def $[\![$ distância de um ponto a uma recta $]\!]$ Sejam P um ponto de $\mathbb{R}^3$ e r uma recta. Então, chama-se distância de P a r, que se representa por $d(P, r)$, a $d(P, r) = d(P, Q)$, em que

(a) π é o plano perpendicular a r que passa em P.

(b) $Q = \pi \cap r$.

6.35exe Determine a distância do ponto $P = (0, 1, -2)$ à recta r definida pelas equações cartesianas $x + y - z = 4$ e $x + 2y - 3z = 4$.

$\boxed{\text{6.36def}}$ ⟦ ângulo entre dois planos ⟧ Sejam π e ψ dois planos tais que $u = (a_1, b_1, c_1) \perp \pi$ e $v = (a_2, b_2, c_2) \perp \psi$. Então, chama-se ângulo entre π e ψ, que se representa por $\angle(\pi, \psi)$, a

$$\begin{aligned}\angle(\pi,\psi) &= \arccos\frac{|u\cdot v|}{\|u\|\|v\|}\\ &= \arccos\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{6.37exe}}$ Determine o ângulo entre os planos α e β, cujas equações cartesianas são $x+y+z=1$ e $2x-y+z=2$, respectivamente.

6.38def ⟦ ângulo entre duas rectas ⟧ Sejam r e s duas rectas tais que $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ são os seus vectores directores, respectivamente. Então, chama-se ângulo entre r e s, que se representa por $\angle(r, s)$, a

$$\begin{aligned}\angle(r,s) &= \arccos\frac{|u\cdot v|}{\|u\|\|v\|}\\ &= \arccos\frac{|u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3|}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}.\end{aligned}$$

6.39def ⟦ ângulo entre uma recta e um plano ⟧ Sejam r uma recta em que $u = (u_1, u_2, u_3)$ é o seu vector director e π um plano tal que $v = (a, b, c) \perp \pi$. Então, chama-se ângulo entre r e π, que se representa por $\angle(r, \pi)$, a

$$\begin{aligned}\angle(r,\pi) &= \arcsin\frac{|u\cdot v|}{\|u\|\|v\|}\\ &= \arcsin\frac{|au_1+bu_2+cu_3|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}}.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{6.40def}}$ (a) ⟦ superfície de segunda ordem, superfície quádrica, quádrica ⟧ Chama-se superfície de segunda ordem ou superfície quádrica ou quádrica ao conjunto de pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ cujas coordenadas cartesianas satisfazem uma equação algébrica inteira do segundo grau, *i.e.*, que satisfaz a equação

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{14}x+a_{22}y^2+2a_{23}yz+2a_{24}y+a_{33}z^2+2a_{34}z+a_{44} = 0.$$

(b) ⟦ superfície de revolução, geratriz de uma superfície de revolução, eixo ⟧ Chama-se superfície de revolução a uma quádrica gerada pela rotação de uma curva plana, a que se chama geratriz, em torno de uma recta, a que se chama eixo, que está no plano da geratriz.

(c) ⟦ superfície cilíndrica, geratriz de uma superfície cilíndrica, directriz ⟧ Chama-se superfície cilíndrica a uma quádrica gerada por uma recta, a que se chama geratriz, que se move paralelamente a uma recta fixa apoiando-se numa curva, a que se chama directriz. Se a directriz for uma curva plana e a geratriz for perpendicular a um plano que contenha a curva, a superfície cilíndrica diz-se recta.

(d) $[\![$ traço de uma quádrica $]\!]$ Chama-se traço à intersecção de uma quádrica com um plano.

6.41def (a) $[\![$ simetria de uma quádrica relativamente a um plano coordenado $]\!]$ Uma quádrica diz-se simétrica relativamente a um plano coordenado se a sua equação não se alterar quando a variável medida a partir desse plano mudar de sinal.

(b) $[\![$ simetria de uma quádrica relativamente a um eixo coordenado $]\!]$ Uma quádrica diz-se simétrica relativamente a um eixo coordenado se a sua equação não se alterar quando as variáveis que não são medidas sobre esse eixo mudam de sinal.

(c) $[\![$ simetria de uma quádrica relativamente à origem $]\!]$ Uma quádrica diz-se simétrica relativamente à origem se a sua equação não se alterar quando as três variáveis mudam de sinal.

6.42teo Através de mudanças de coordenadas (rotação e/ou translação), é sempre possível transformar uma quádrica numa das seguintes formas canónicas:

(a) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + d = 0$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $d \in \mathbb{R}$.

(b) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + d = 0$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $d \in \mathbb{R}$.

(c) $\lambda_1 x^2 + d = 0$, $\lambda_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $d \in \mathbb{R}$.

(d) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 2az$, $\lambda_1\, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a \in \mathbb{R}$.

(e) $\lambda_1 x^2 = 2ay$, $\lambda_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a \in \mathbb{R}$.

6.43obs O objectivo do que resta deste capítulo é identificar e esboçar o gráfico de uma quádrica conhecida a sua forma canónica.

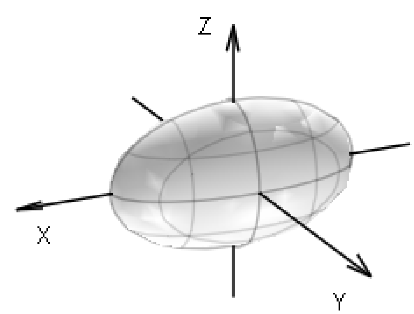
6.44def ⟦ elipsóide, esfera ⟧ Sejam $a, b, c, \rho \in \mathbb{R}^+$. Então, chama-se elipsóide à quádrica cuja equação canónica é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, a, \ b \text{ e } c \text{ não todos iguais,}$$

e esfera à quádrica cuja equação canónica é

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2.$$

6.45exe A quádrica cuja equação é $x^2+5y^2+3z^2 = 1$ ($a = 1$, $b = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $c = \frac{\sqrt{3}}{3}$) é um elipsóide. A sua representação é



$\boxed{6.46\text{obs}}$ Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ não todos iguais e o elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Então,

(a) traços:

- no plano XOY — a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$.
- No plano XOZ — a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = 0$.
- No plano YOZ — a elipse $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $x = 0$.

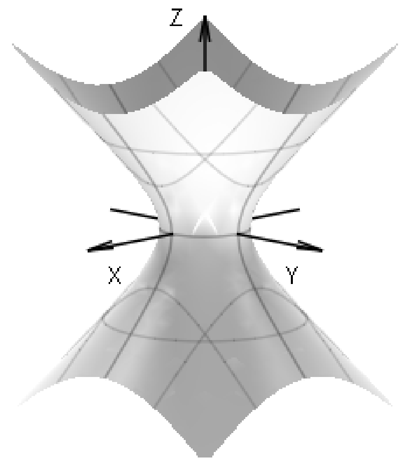
(b) Simetrias: quádrica simétrica relativamente aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem.

(c) Superfície de revolução se $a = b$, em que a geratriz é a elipse $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ e o eixo é o eixo coordenado OZ, ou se $a = c$, em que a geratriz é a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e o eixo é o eixo coordenado OY, ou se $b = c$, em que a geratriz é a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ e o eixo é o eixo coordenado OX.

6.47def ⟦ hiperbolóide de uma folha ⟧ Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Então, chama-se hiperbolóide de uma folha à quádrica cuja equação canónica é

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{ou} \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

6.48exe A quádrica cuja equação é $x^2+y^2-z^2=1$ $(a=1,\ b=1,\ c=1)$ é um hiperbolóide de uma folha. A sua representação é



$\boxed{6.49\text{obs}}$ Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ e o hiperbolóide de uma folha $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Então,

(a) traços:

- no plano XOY — a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$.
- No plano XOZ — a hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = 0$.
- No plano YOZ — a hipérbole $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $x = 0$.

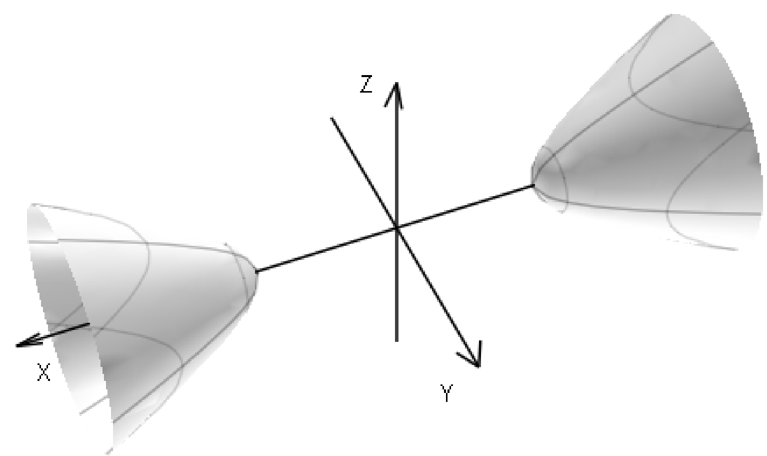
(b) Simetrias: quádrica simétrica relativamente aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem.

(c) Superfície de revolução se $a = b$, em que a geratriz é a hipérbole $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ e o eixo é o eixo coordenado OZ.

6.50def ⟦ hiperbolóide de duas folhas ⟧ Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Então, chama-se hiperbolóide de duas folhas à quádrica cuja equação canónica é

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{ou} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{ou} \quad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

6.51exe A quádrica cuja equação é $\frac{x^2}{3} - 2y^2 - 2z^2 = 1$ ($a = \sqrt{3}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$) é um hiperbolóide de duas folhas. A sua representação é



$\boxed{6.52\text{obs}}$ Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ e o hiperbolóide de duas folhas $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Então,

(a) traços:

- no plano XOY — a hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$.
- No plano XOZ — a hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = 0$.
- No plano YOZ — não existe.

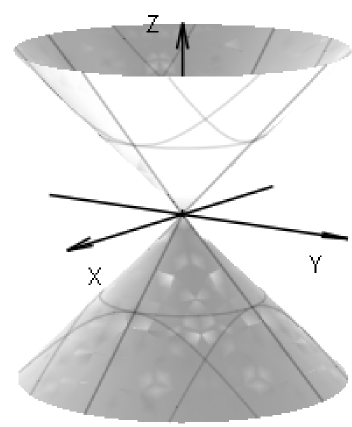
(b) Simetrias: quádrica simétrica relativamente aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem.

(c) Superfície de revolução se $b = c$, em que a geratriz é a hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ e o eixo é o eixo coordenado OX.

6.53def ⟦ cone ⟧ Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Então, chama-se cone à quádrica cuja equação canónica é

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \quad \text{ou} \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0.$$

6.54exe A quádrica cuja equação é $x^2+y^2-z^2=0$ $(a=1,\ b=1,\ c=1)$ é um cone. A sua representação é



$\boxed{6.55\text{obs}}$ Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ e o cone $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$. Então,

(a) traços:

- no plano XOY — o ponto $(0, 0, 0)$.
- No plano XOZ — o par de rectas $\frac{z}{c} = \pm\frac{x}{a}$, $y = 0$.
- No plano YOZ — o par de rectas $\frac{z}{c} = \pm\frac{y}{b}$, $x = 0$.

(b) Simetrias: quádrica simétrica relativamente aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem.

(c) Superfície de revolução se $a = b$, em que a geratriz é a recta $\frac{y}{b} = \frac{z}{c}, x = 0$ e o eixo é o eixo coordenado OZ.

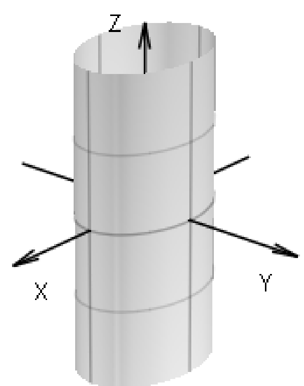
6.56def ⟦ cilindro elíptico, cilindro circular ⟧ Sejam $a, b, c, \rho \in \mathbb{R}^+$. Então, chama-se cilindro elíptico à quádrica cuja equação canónica é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a \neq b, \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, a \neq c, \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, b \neq c,$$

e cilindro circular à quádrica cuja equação canónica é

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \quad \text{ou} \quad x^2 + z^2 = \rho^2 \quad \text{ou} \quad y^2 + z^2 = \rho^2.$$

6.57exe A quádrica cuja equação é $x^2 + 2y^2 = 1$ ($a = 1$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$) é um cilindro elíptico. A sua representação é



$\boxed{6.58\text{obs}}$ Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a \neq b$, e o cilindro elíptico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Então,

(a) traços:

- no plano XOY — a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$.
- No plano XOZ — o par de rectas $x = \pm a$, $y = 0$.
- No plano YOZ — o par de rectas $y = \pm b$, $x = 0$.

(b) Simetrias: quádrica simétrica relativamente aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem.

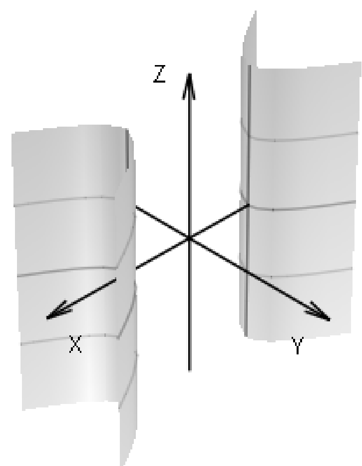
(c) Superfície cilíndrica recta, em que a directriz é a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e a geratriz é paralela ao eixo coordenado OZ.

6.59def $[\![$ cilindro hiperbólico $]\!]$ Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Então, chama-se cilindro hiperbólico à quádrica cuja equação canónica é

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ou} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{ou}$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{ou} \quad -\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

6.60exe A quádrica cuja equação é $x^2 - 4y^2 = 1$ $(a = 1,\ b = \frac{1}{2})$ é um cilindro hiperbólico. A sua representação é



$\boxed{\text{6.61obs}}$ Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$ e o cilindro hiperbólico $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Então,

(a) traços:

- no plano XOY — a hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$.
- No plano XOZ — o par de rectas $x = \pm a$, $y = 0$.
- No plano YOZ — não existe.

(b) Simetrias: quádrica simétrica relativamente aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem.

(c) Superfície cilíndrica, em que a directriz é a hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ e a geratriz é paralela ao eixo coordenado OZ.

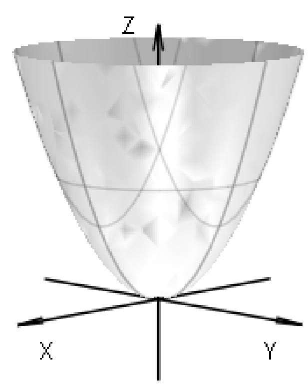
6.62def ⟦ parabolóide elíptico, parabolóide circular ⟧ Sejam $a, b, c, \rho \in \mathbb{R}^+$ e $p, q, r \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Então, chama-se parabolóide elíptico à quádrica cuja equação canónica é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz, a \neq b, \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2qy, a \neq c, \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2rx, b \neq c,$$

e parabolóide circular à quádrica cuja equação canónica é

$$x^2 + y^2 = 2p\rho^2 z \quad \text{ou} \quad x^2 + z^2 = 2q\rho^2 y \quad \text{ou} \quad y^2 + z^2 = 2r\rho^2 x.$$

6.63exe A quádrica cuja equação é $x^2 + y^2 = z$ ($\rho = 1$, $p = \frac{1}{2}$) é um parabolóide circular. A sua representação é



$\boxed{6.64\text{obs}}$ Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a \neq b$, $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e o parabolóide elíptico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz$. Então,

(a) traços:

- no plano XOY — o ponto $(0, 0, 0)$.
- No plano XOZ — a parábola $\frac{x^2}{a^2} = 2pz$, $y = 0$.
- No plano YOZ — a parábola $\frac{y^2}{b^2} = 2pz$, $x = 0$.

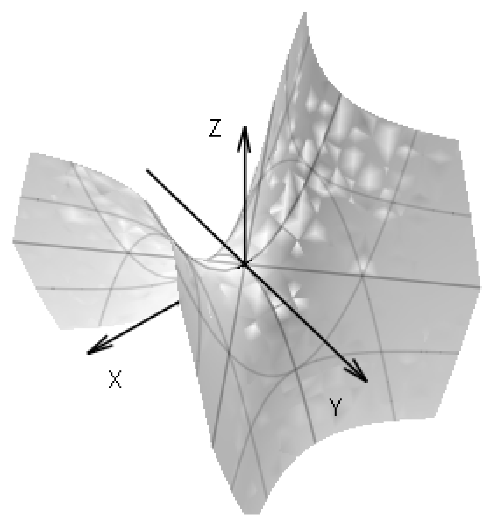
(b) Simetrias: quádrica simétrica relativamente aos planos coordenados XOZ e YOZ e ao eixo coordenado OZ.

(c) Superfície de revolução se $a = b$, em que a geratriz é a parábola $\frac{y^2}{b^2} = 2pz$ e o eixo é o eixo coordenado OZ.

6.65def ⟦ paraboloide hiperbólico ⟧ Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ e $p, q, r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Então, chama-se paraboloide hiperbólico à quádrica cuja equação canónica é

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 2qy \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 2rx.$$

6.66exe A quádrica cuja equação é $x^2 - y^2 = z$ ($a = 1$, $b = 1$, $p = \frac{1}{2}$) é um paraboloide hiperbólico. A sua representação é



$\boxed{\text{6.67obs}}$ Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$, $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e o parabolóide hiperbólico $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$. Então,

(a) traços:

- no plano XOY — o par de rectas $\frac{x}{a} = \pm\frac{y}{b}$, $z = 0$.
- No plano XOZ — a parábola $\frac{x^2}{a^2} = cz$, $y = 0$.
- No plano YOZ — a parábola $-\frac{y^2}{b^2} = cz$, $x = 0$.

(b) Simetrias: quádrica simétrica relativamente aos planos coordenados XOZ e YOZ e ao eixo coordenado OZ.

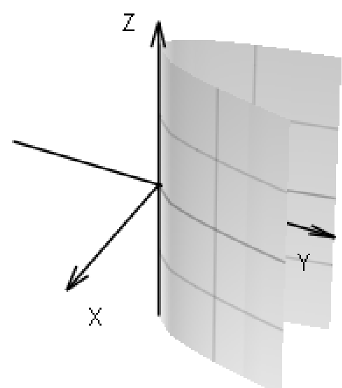
(c) Nunca é uma superfície de revolução.

$\boxed{6.68\text{def}}$ ⟦ cilindro parabólico ⟧ Sejam $p, q, r, s, m, n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Então, chama-se cilindro parabólico à quádrica cuja equação canónica é

$$x^2 = 2py \quad \text{ou} \quad y^2 = 2qx \quad \text{ou} \quad x^2 = 2rz \quad \text{ou}$$

$$z^2 = 2sx \quad \text{ou} \quad y^2 = 2mz \quad \text{ou} \quad z^2 = 2ny.$$

$\boxed{6.69\text{exe}}$ A quádrica cuja equação é $4x^2 = y$ ($p = \frac{1}{8}$) é um cilindro parabólico. A sua representação é



$\boxed{6.70\text{obs}}$ Sejam $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e o cilindro parabólico $x^2 = 2py$. Então,

(a) traços:

- no plano XOY — a parábola $x^2 = 2py$, $z = 0$.
- No plano XOZ — a recta $x = 0$, $y = 0$.
- No plano YOZ — a recta $x = 0$, $y = 0$.

(b) Simetrias: quádrica simétrica relativamente aos planos coordenados XOY e YOZ e ao eixo coordenado OY.

(c) Superfície cilíndrica, em que a directriz é a parábola $x^2 = 2py$ e a geratriz é paralela ao eixo coordenado OZ.

6.71def ⟦ quádrica degenerada ⟧ Uma quádrica diz-se degenerada se não há pontos de $\mathbb{R}^3$ que satisfaçam a sua equação, ou se, existindo, eles definem um plano, uma recta ou apenas um ponto de $\mathbb{R}^3$.

6.72obs Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Então, as seguintes equações definem quádricas degeneradas:

(a) $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

(b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$.

(c) $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $-\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

(d) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

(e) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

(f) $x^2 = a^2$, $y^2 = b^2$, $z^2 = c^2$.

(g) $x^2 = -a^2$, $y^2 = -b^2$, $z^2 = -c^2$.

(h) $x^2 = 0$, $y^2 = 0$, $z^2 = 0$.

6.73obs Resumo das quádricas: seja a quádrica

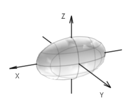
$$\lambda_1 x^{\alpha_1} + \lambda_2 y^{\alpha_2} + \lambda_3 z^{\alpha_3} = d, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \{1,2\}, d \in \{0,1\}.$$

Então:

(a) $d = 1$

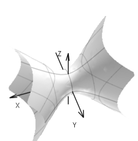
(a.i) $\alpha_i = 2, \alpha_j = 2, \alpha_k = 2$

(a.i.1) $\lambda_i > 0, \lambda_j > 0, \lambda_k > 0$: elipsóide ou esfera.

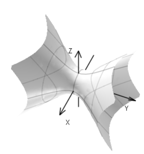


$x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 1$

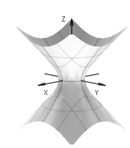
(a.i.2) $\lambda_i > 0, \lambda_j > 0, \lambda_k < 0$: hiperbolóide de uma folha.



$-x^2 + y^2 + z^2 = 1$

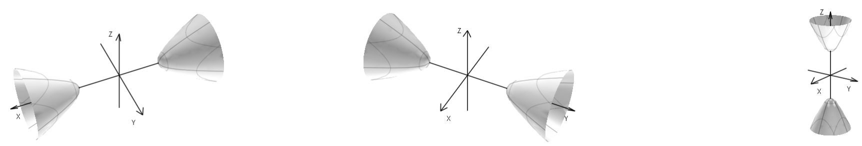


$x^2 - y^2 + z^2 = 1$



$x^2 + y^2 - z^2 = 1$

(a.i.3) $\lambda_i > 0, \lambda_j < 0, \lambda_k < 0$: hiperbolóide de duas folhas.



$\frac{x^2}{3} - 2y^2 - 2z^2 = 1$ $\quad -2x^2 + \frac{y^2}{3} - 2z^2 = 1$ $\quad -2x^2 - 2y^2 + \frac{z^2}{3} = 1$

(a.ii) $\alpha_i = 2, \alpha_j = 2, \alpha_k = 1$

(a.ii.1) $\lambda_i > 0, \lambda_j > 0, \lambda_k \neq 0$: parabolóide elíptico ou circular.

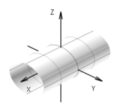
$y^2 + z^2 = x$ $\quad y^2 + z^2 = -x$ $\quad x^2 + z^2 = y$ $\quad x^2 + z^2 = -y$ $\quad x^2 + y^2 = z$ $\quad x^2 + y^2 = -z$

(a.ii.2) $\lambda_i > 0, \lambda_j < 0, \lambda_k \neq 0$: parabolóide hiperbólico.

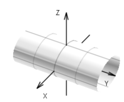
$x^2 - y^2 = z$ $\quad x^2 - y^2 = -z$ $\quad y^2 - z^2 = x$ $\quad y^2 - z^2 = -x$ $\quad z^2 - x^2 = y$ $\quad z^2 - x^2 = -y$

(a.iii) $\alpha_i = 2, \alpha_j = 2, \alpha_k = 0$

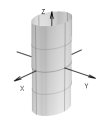
(a.iii.1) $\lambda_i > 0, \lambda_j > 0, \lambda_k = 0$: cilindro elíptico ou circular.



$y^2 + 2z^2 = 1$

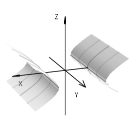


$x^2 + 2z^2 = 1$

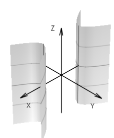


$x^2 + 2y^2 = 1$

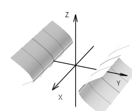
(a.iii.2) $\lambda_i > 0, \lambda_j < 0, \lambda_k = 0$: cilindro hiperbólico.



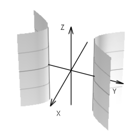
$x^2 - 4z^2 = 1$



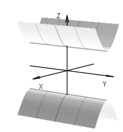
$x^2 - 4y^2 = 1$



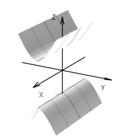
$y^2 - 4z^2 = 1$



$y^2 - 4x^2 = 1$



$z^2 - 4x^2 = 1$



$z^2 - 4y^2 = 1$

(a.iv) $\alpha_i = 2, \alpha_j = 1, \alpha_k = 0$: cilindro parabólico.

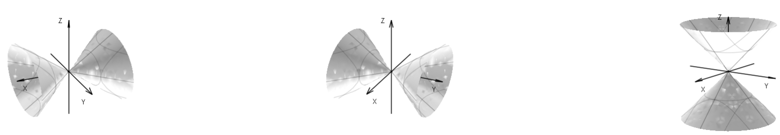
$4y^2 = x$ $\quad 4y^2 = -x$ $\quad 4x^2 = y$ $\quad 4x^2 = -y$ $\quad 4x^2 = z$ $\quad 4x^2 = -z$

$4z^2 = -x$ $\quad 4z^2 = x$ $\quad 4z^2 = -y$ $\quad 4z^2 = y$ $\quad 4y^2 = -z$ $\quad 4y^2 = z$

(a.v) caso contrário: quádrica degenerada.

(b) $d = 0$

(b.i) $\alpha_i = 2, \alpha_j = 2, \alpha_k = 2, \lambda_i > 0, \lambda_j > 0, \lambda_k < 0$: cone.



$x^2 - y^2 - 2z^2 = 0$ $\quad -x^2 + y^2 - z^2 = 0$ $\quad -x^2 - y^2 + 2z^2 = 0$

(b.ii) caso contrário: quádrica degenerada.

6. Geometria Analítica (exercícios)

6.1 Determine a equação vectorial, as equações paramétricas e as equações cartesianas da recta definida:

(a) pelo ponto $A = (1, 2, 3)$ e pelo vector director $v = (-2, 1, -1)$.

(b) pelos pontos $A = (1, 2, 3)$ e $B = (3, 1, 5)$.

(c) pelos pontos $A = (1, 2, 3)$ e $B = (3, 1, 3)$.

(d) pelos pontos $A = (1, 2, 3)$ e $B = (3, 2, 3)$.

sols 6.1 (a)

i. equação vectorial: $(x, y, z) = (1, 2, 3) + \alpha(-2, 1, -1), \alpha \in \mathbb{R}$.

ii. equações paramétricas: $\begin{cases} x = 1 - 2\alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = 3 - \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$.

iii. equações cartesianas: $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-1}$.

(b)

i. equação vectorial: $(x, y, z) = (1, 2, 3) + \alpha(2, -1, 2), \alpha \in \mathbb{R}$.

ii. equações paramétricas: $\begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = 2 - \alpha \\ z = 3 + 2\alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$.

iii. equações cartesianas: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}$.

(c)

i. equação vectorial: $(x, y, z) = (1, 2, 3) + \alpha(2, -1, 0), \alpha \in \mathbb{R}$.

ii. equações paramétricas: $\begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = 2 - \alpha \\ z = 3 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$.

iii. equações cartesianas: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1}, z = 3$.

(d)

i. equação vectorial: $(x, y, z) = (1, 2, 3) + \alpha(2, 0, 0), \alpha \in \mathbb{R}$.

ii. equações paramétricas: $\begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$.

iii. equações cartesianas: $y = 2, z = 3$.

6.2 Determine a equação cartesiana do plano definido

(a) pelo ponto $A = (1, 0, 1)$ e que é perpendicular ao vector $u = (1, 2, 3)$.

(b) pelo ponto $A = (1, 0, 1)$ e pelos vectores directores $u = (1, 2, 3)$ e $v = (3, 2, 3)$.

(c) pelos pontos $A = (1, 2, 3)$ e $B = (3, 1, 3)$ e pelo vector director $v = (2, -1, 3)$.

(d) pelos pontos $A = (1, 1, 1)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$.

sols 6.2 (a) $x + 2y + 3z = 4$.

(b) $3y - 2z = -2$.

(c) $x + 2y = 5$.

(d) $x - y - z = -1$.

6.3 Considere, no espaço $\mathbb{R}^3$, os pontos $A = (1, 2, 3)$, $B = (1, 0, 1)$, $C = (0, 2, 0)$ e $D = (1, 2, 1)$. Determine:

(a) a recta r definida pelos pontos A e B.

(b) A recta s que contém o ponto C e que é paralela à recta r.

(c) O plano α definido pelas rectas r e s.

(d) O plano β definido pela recta r e pelo ponto D.

(e) O ponto de intersecção da recta r com o plano α.

sols 6.3 (a) $x = 1, y - z = -1$.

(b) $x = 0, y - z = 2$.

(c) $3x + y - z = 2$.

(d) $x = 1$.

(e) A recta r pertence ao plano α.

6.4 Considere, no espaço $\mathbb{R}^3$, o plano $\alpha = x + 2y = 3$, o plano $\beta = x + y - z = 0$, a recta r definida pelos pontos $A = (1, 2, 3)$ e $B = (1, 0, 1)$ e a recta s definida pelas equações $x + y - z = 4$ e $x + 2y - 3z = 4$. Determine:

(a) $\angle(r, s)$.

(b) $\angle(\alpha, r)$.

(c) $\angle(\alpha, \beta)$.

(d) A recta t que contém o ponto A e que é perpendicular ao plano α.

(e) $d(A, \alpha)$.

(f) $d(B, s)$.

(g) O plano que contém a recta r e que é perpendicular ao plano α.

sols 6.4 (a) $\angle(r, s) = \frac{\pi}{6}$.

(b) $\angle(\alpha, r) = arcsen(\frac{\sqrt{10}}{5})$.

(c) $\angle(\alpha, \beta) = arccos(\frac{\sqrt{15}}{5})$.

(d) $2x - y = 0, z = 3$.

(e) $d(A, \alpha) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(f) $d(B, s) = \frac{\sqrt{66}}{3}$.

(g) $2x - y + z = 3$.

6.5 Identifique as quádricas dadas pelas seguintes equações:

(a) $x^2 + 2y^2 + z^2 = 2$.

(b) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 1 = 0$.

(c) $x^2 - 3y^2 + 2z^2 = 7$.

(d) $-4x^2 - 4y^2 + z^2 = 4$.

(e) $x^2 + 2z^2 - 4y = 0$.

(f) $2x^2 + 2z^2 + 3y = 0$.

(g) $3x^2 - 2y^2 = z$.

(h) $x^2 + 2y^2 = z^2$.

(i) $x^2 + 2y^2 = z$.

(j) $x^2 + 2y^2 = 1$.

(k) $2y^2 = z$.

(l) $x^2 - 2y^2 = 1$.

(m) $y^2 + 2z^2 - 4x = 0$.

(n) $y^2 + 2z^2 = 4x^2$.

(o) $x^2 + 2y^2 - z^2 = 1$.

(p) $2x^2 + 2y^2 = 1$.

sols 6.5 (a) Elipsóide.

(b) Esfera.

(c) Hiperbolóide de uma folha.

(d) Hiperbolóide de duas folhas.

(e) Parabolóide elíptico.

(f) Parabolóide circular.

(g) Parabolóide hiperbólico.

(h) Cone.

(i) Parabolóide elíptico.

(j) Cilindro elíptico.

(k) Cilindro parabólico.

(l) Cilindro hiperbólico.

(m) Parabolóide elíptico.

(n) Cone.

(o) Hiperbolóide de uma folha.

(p) Cilindro circular.

Apêndice A

Alfabeto Grego

Minúscula	Maiúscula	Nome	Equivalente Latino
α	A	alfa	a
β	B	beta	b
γ	Γ	gama	g
δ	Δ	delta	d
ε	E	épsilon	e
ζ	Z	zeta	z
η	H	eta	e,h
θ	Θ	teta	t
ι	I	iota	i
κ	K	capa	k
λ	Λ	lambda	l
μ	M	miu	m
ν	N	niu	n
ξ	Ξ	csi	cs
o	O	ómicron	o
π	Π	pi	p
ρ	P	ró	r
σ	Σ	sigma	s
τ	T	tau	t
υ	Υ	ípsilon	u,y
φ, ϕ	Φ	fi	f
χ	X	qui	c,x
ψ	Ψ	psi	ps
ω	Ω	ómega	w

Índice