Maria Isabel Antunes de Azevedo Moreira Silva

Os Números Imaginários:

(um estudo sobre) a sua "realidade"

Tese de Mestrado em Matemática

(Área de especialização em ensino)

Sob a orientação de
Professora Doutora Elfrida Ralha
Professora Doutora Fernanda Estrada

Escola de Ciências

Departamento de Matemática

UNIVERSIDADE DO MINHO

2005

À Marta e à Raquel,

que a sabedoria dos Mestres as guie.

Índice **nº de página**

Agradecimentos

Este estudo não teria sido possível sem a ajuda de muitos amigos. Aqui fica meu reconhecimento e agradecimento a todos os que contribuíram para a sua realização.

À Doutora Elfrida, pela sua disponibilidade, pelas sugestões, pela capacidade de me orientar quando não sabia o rumo que queria seguir, pela compreensão humana e profissional.

À Doutora Fernanda, pelo calmo entusiasmo, pelas conversas paralelas que tanto me ensinaram e por me dar a conhecer o trabalho impressionante de grandes matemáticos.

À Manuela, grande companheira nesta aventura, por todos os momentos de apoio e companheirismo.

À Cristina, Judite e Manuela, sempre no meu pensamento, cujo exemplo de profissionalismo e entrega aos alunos será sempre uma referência.

À minha família, que conseguiu sempre encontrar formas de mostrar o seu apoio e compreensão.

À Deolinda, com quem pude sempre contar.

A todos que aqui me esqueço de referir mas que deram o seu contributo.

Índice de figuras e Quadros

Figuras Pág.nº

Quadros

Resumo

Um pouco por todo o mundo, os programas do Ensino Secundário em Matemática estão condicionados por respostas para inúmeras dúvidas sobre "O que ensinar em Matemática?" "Como ensinar Matemática?", "A Matemática é, ou deveria ser, útil? E em que sentido?".

Na Introdução e no capítulo I da presente monografia referimos o conceito de *número* como um dos conceitos fundamentais em Matemática que percorre, enquanto processo de ensino, uma vasta gama de níveis desde os 1º, 2º e 3º ciclos do Ensino Básico e ainda do Ensino Secundário até ao Ensino Superior. É neste percurso educativo que surge, de forma natural, o tema dos **Números Complexos**: usualmente, como uma questão de generalização do conceito de *número*, para além dos números reais. Constatamos, em particular, que a presença dos *Números Complexos*, nesta fase de formação escolar, é particularmente significativa porquanto pode, por si só e muito melhor do que a maioria dos outros capítulos, remeter-nos para o conjunto de questões evocadas no parágrafo anterior.

No capítulo II analisamos os programas oficiais de Matemática ao longo dos últimos 50 anos e pudemos constatar que o tema dos *Números Complexos* tem ora sido retido no Ensino Secundário, ora tem sido adiado para o Ensino Superior. Analisamos também questões sobre *Números Complexos* tal qual foram surgindo em exames nacionais.

No capítulo III, estudamos a História dos *Números Complexos* e constatamos que são razões de utilidade que estiveram na sua génese, embora fossem razões de natureza teórica (filosóficas, de existência, de coerência lógica com a restante Matemática) que levaram inúmeros autores a interrogarem-se sobre a natureza dos Números Complexos e a construírem, pouco a pouco, uma interpretação geométrica sem a qual a Teoria das Funções Analíticas não teria sido alcançada depois de 1825. Reconhecemos também a importância pedagógica da tomada de consciência dos erros e das discussões que procederam o período fecundo em que os matemáticos inventaram a Teoria das Funções Analíticas.

No capítulo IV estabelecemos uma grelha de avaliação de manuais escolares de forma a estudar, em termos de existência e coerência lógica, o ensino dos *Números Complexos* nas escolas portuguesas.

No capítulo V, abordamos a problemática do recurso à história da Matemática como instrumento facilitador da aprendizagem dos *Números Complexos* e sugerimos algumas propostas de actividades deste ensino.

Com esta monografia de Mestrado pretendeu-se *clarificar, através de um estudo histórico e didáctico sistemático, as variadas implicações para o ensino actual dos Números Complexos de toda a riqueza e a fecundidade do conhecimento acumulado por séculos de História.* Concluímos finalmente que, porventura menosprezada pelos professores de Matemática (porventura por razões de condicionalismos práticos de agenda lectiva), a presença dos *Números Complexos*, nos programas nacionais do Ensino Secundário da Matemática, está plenamente justificada. Os *Números Complexos* podem efectivamente afirmar-se como um "instrumento" didáctico indispensável na concretização de objectivos gerais e específicos fundamentais da aprendizagem da Matemática como é o caso de:

- organizar e relacionar conhecimentos prévios dos alunos, envolvendo-os na descoberta;

- ter em linha de conta tanto as capacidades de raciocínio abstracto como as da intuição;

- responder a questões fundamentais como "O que é um número?", "Para que servem os números?", "Quem inventou os números?" ou "Como foram inventados os números?"

Abstract

All over the world, the teaching of Mathematics for Secondary Schools is conditioned by questions on "What Mathematics is due to be taught?", "How to teach Mathematics?" or "Should Mathematics be useful? In what sense?"

In this research study we refer, in the Introduction and Chapter I, that the concept of number is one of the most important in Mathematics that runs from the basic levels of Mathematics teaching to University instruction. It is during this path that we naturally find the **Complex Numbers**: usually as a generalization process beyond real numbers. We agreed, in particular, that Complex Numbers may be particularly important in relation to the questions that were posed in the last paragraph.

Chapter II deals with the national curricula for Secondary Schools on the teaching of Complex Numbers through the past 50 years and we also analyzed questions on exams related to Complex Numbers.

In Chapter III we studied the History of Complex Numbers and we came to acknowledge the reasons, both utilitarian and philosophical, related to its evolution. We point out to the doubts and the difficulties felt by the authors who built, bit by bit, the concept of Complex Number without whom the Theory of Analytical Functions would never be reached in 1825. We also recognized the pedagogical importance of acknowledging errors and faults committed by well known mathematicians.

Chapter IV offers an evaluation grid for schooltexts, both for existence and logical coherence, on teaching Complex Numbers in Portuguese schools.

In Chapter V we approach the use of History of Mathematics on teaching Mathematics by suggesting some school activities for teaching Complex Numbers.

The aim of the conducted research on the actual teaching of Complex Numbers was the clarification, through a didactical-historical systematic study, of the various implications on the richness of accumulated knowledge by centuries of History. We finally concluded that the theme of Complex Numbers is perfectly justified in the National Curricula for Secondary Schools because:

- it refers both to abstract thinking and intuitive capacities;
- it organizes and it relates previous knowledge to actual mathematical knowledge, by involving pupils on discovery activities;
- it allows both teachers and pupils to deal with fundamental questions on "What is a number?", "What are numbers good for?", "Who invented numbers?" or "How were numbers invented?"

Introdução

"The square root of the reminder, then – if anything remains – added to or subtracted from AC shows the part. But since the remainder is negative, you will have to imagine $\sqrt{-15}$ *" (Cardano, 1993, p.220)*

"Au reste tant les vrayes racines que les fausses ne sont pas réelles, mais quelquefois seulement imaginaires" (Descartes, 1954,p.380)

O conceito de *número* é um conceito fundamental em Matemática; o seu estudo inicia-se com o próprio início da aprendizagem escolar e o seu significado desenvolve-se, desejavelmente de forma satisfatória, através de um percurso particularmente extenso na formação académica do aluno. O resultado deste processo de aprendizagem deverá cativar uma audiência alargada de alunos (porquanto conceito básico em Matemática) e percorre, enquanto processo de ensino, uma vasta gama de professores desde os 1º, 2º e 3º ciclos do Ensino Básico e ainda do Ensino Secundário até ao Ensino Superior. É neste percurso educativo que surgem, de forma natural, os Números Imaginários: usualmente, como uma questão de generalização do conceito de *número*, para além dos números reais. Com esta extensão, conservam-se as propriedades operatórias dos números reais e alarga-se o conceito de número, de tal forma que qualquer equação de 2º grau com coeficientes reais é possível, independentemente do valor do binómio discriminante.

Sabendo que termos como "Sofísticos" (Cardano), "absurdos" (Napier), "inexplicáveis" (Girard), "imaginários" (Descartes), "incompreensíveis" (Huygens) e "impossíveis" (muitos autores) foram utilizados para descrever os novos números (Crowe, 1975), adoptaremos a denominação de números complexos neste estudo, termo introduzido por Gauss em 1831. (Windred, 1929).

Em Portugal, os números complexos fazem actualmente parte do programa do Ensino Secundário, sendo leccionados no 12º ano. Segundo as directivas oficiais, a introdução ao tema "deve ser ancorada em pequena abordagem histórica" (Ministério da Educação, 1997, p. 35).

Mas que opções se colocam aos professores? Nomeadamente:

- Quais são os factos relevantes da história dos números complexos que podem contribuir para uma construção mais profícua do conceito de número?
- Quem foram os principais intervenientes no processo de descoberta/invenção dos números complexos? E ainda: Qual o papel que desempenharam no desenvolvimento destes números?
- O que deve ser transmitido aos alunos, de modo que eles percebam que a Matemática evolui a partir do carácter criativo e das certezas dos que a esta disciplina se dedicam, mas também por causas relacionadas com a necessidade das populações e com inúmeras dúvidas dos que com ela trabalham?
- Quais as transformações/adaptações que o conceito de número complexo sofreu, desde a sua descoberta histórica até à forma como é tradicionalmente ensinado na actualidade?
- Que competências Matemáticas aspiramos desenvolver no aluno com o ensino dos números complexos?

O recurso dos professores à área da História da Matemática não pode, em nosso entender, ser feito de um modo superficial, sob pena de não se estar em primeiro lugar a cumprir os objectivos programáticos preconizados no programa nacional oficial da disciplina e, além isso, não se poder usufruir, em termos de formação Matemática do aluno, das mais valias que este ramo nos traz. De facto, referências em jeito de notas de rodapé sobre, por exemplo, a vida de um matemático são uma parcela ínfima daquilo que está ao alcance dos professores que pretendem, nomeadamente, humanizar a Matemática.

A necessidade do rigor no estudo dos factos leva-nos a dar mais importância às fontes originais, à análise dos textos escritos pelo próprio autor e não aos comentários destes, de forma a podermos ter a certeza da isenção que pomos na sua leitura. O professor assumirá assim um papel de filtro na selecção dos textos a usar com os seus aluno, consoante a faixa etária e o nível dos mesmos. Com esses pressupostos entendi que só um estudo histórico em profundidade poderá levar o docente a conhecer a variedade e o alcance dos objectivos de que se dispõe, e a interpretar de forma credível os factos descritos.

Neste estudo, procurei também conhecer melhor os documentos oficiais para compreender o que tem vindo a ser preconizado para o estudo dos números complexos, desde há aproximadamente 50 anos. Os Programas Oficiais da disciplina de Matemática tornam-se assim peças fundamentais quer na compreensão das opções dos autores dos manuais, quer no tipo de questões que se colocam a um aluno que termina o ensino secundário. Analisei os referidos programas não só em relação aos números complexos, mas também em relação a competências e a orientações gerais, quando estas existiam.

Sempre que os programas não eram claros nesse ponto, ou como complemento da interpretação, abordei ainda a questão do ensino dos números complexos através da análise de questões colocadas em exame, com a esperança de que este elemento também ajudasse a compreender o que se procura ensinar ao aluno com a inclusão deste tópico na sua formação.

A abordagem do tema dos números complexos nos manuais escolares ocupa um grande número de páginas deste trabalho. Não poderia ser de outra maneira, na tentativa de perceber o que tem sido feito nas nossas escolas, e o entendimento dos professores que leccionam o tema. O manual adoptado é, claramente o principal instrumento de trabalho dos professores de Matemática e, consequentemente, tal facto condiciona a compreensão dos alunos sobre os números complexos.

Por último, conduzi uma reflexão sobre os problemas que os nossos alunos parecem ter em aceitar os números complexos como números. Embora pareçam lidar com relativa facilidade com estes entes matemáticos, os manipulem e aparentem conhecer as suas operações, e até lhes chamem "números", até que ponto isto significará que os compreendem como números com existência real?

Capítulo I

O currículo em Portugal

1.1 O conceito de currículo

O conceito de currículo, a exemplo de muitos outros conceitos relativos ao sistema educativo, tem vindo a ser alterado ao longo do tempo. É claramente aceite, hoje em dia, que um currículo não é equivalente a uma lista de conteúdos programáticos. Segundo as *Normas* (National Council of Teachers of Mathematics, 1989),

> Um currículo é um plano operacional de ensino que descreve em pormenor o que os alunos de Matemática precisam de saber, de que forma os alunos devem atingir os objectivos identificados no currículo, o que é que os professores devem fazer para ajudar os alunos a desenvolver os seus conhecimentos matemáticos, e o contexto em que a aprendizagem e o ensino devem processar-se.

A sua elaboração passa pela compreensão da realidade social na qual vai ser aplicado. Também,

> Todo o currículo é histórico. Cada época tem características (culturais, sociais, ...) diferentes que ao longo dos anos se vão modificando e que se repercutem na escola. De uma forma ou de outra, o currículo incorpora essas características e é, em termos educacionais, uma sua expressão. (Ponte et al, 1988, p. 15).

É evidente a necessidade, aquando da elaboração do currículo de uma disciplina, de fazer opções que levam à elaboração das diferentes vertentes do mesmo. Desta forma, o contributo dos professores que leccionam uma determinada disciplina tem também vindo a tomar um papel cada vez mais importante, pela reflexão que fazem da prática, pelo conhecimento que transmitem acerca da reacção dos alunos a determinados conteúdos ou metodologias utilizadas. Importante é ainda também o papel da sociedade e das pressões que pode exercer sobre o processo. Actualmente, porventura bem mais do que num passado relativamente próximo, pais, jornalistas, editores, associações profissionais, todos têm algo a dizer sobre a preparação que deve ser dada aos alunos.

É portanto natural concluir-se que "Para poder estar de acordo com a sua época, nenhum currículo pode ser concebido como definitivo" (Ponte et al, 1988, p. 16)

Por outro lado, os objectivos para os alunos de Matemática, de acordo com as *Normas* (NCTM, 1989, p. 6-7) serão:

- Aprender a dar valor à Matemática;
- Tornar-se confiante nas suas próprias capacidades;
- Tornar-se apto a resolver problemas de Matemática;
- Aprender a comunicar matematicamente;
- Aprender a raciocinar matematicamente.

Então,

> (...) "ver" a Matemática como um sistema formal, reduzir o raciocínio matemático à dedução, e, identificar a actividade Matemática com a "manipulação" de símbolos sem significado, traduz uma concepção redutora que nos fornece uma visão incompleta, parcial, da Matemática, da sua natureza e história, e que esconde o carácter criativo da actividade Matemática que é porventura um dos aspectos mais ricos. (Ponte et al, 1988, p. 13)

Para que objectivos tão latos sejam alcançados será necessário que

> Os vários aspectos da actividade e do raciocínio matemáticos devem também ser contemplados, como conteúdos curriculares, merecendo especial ênfase: o explorar, conjecturar e demonstrar, o generalizar e aplicar, o formular e resolver problemas, a criação de modelos matemáticos. (Ponte et al, 1988, p. 23)

Contudo,

> O aluno tem que reconhecer valor naquilo que estuda, no momento em que o estuda, para que a sua aprendizagem tenha maior probabilidade de ser bem sucedida. (Ponte et al, 1988, p. 18)

Assim sendo, quais são as opções curriculares em Portugal e em particular, na Matemática do Ensino Secundário?

- Que objectivos preconizam?
- Que instrumentos de avaliação prevêem?
- Que contextos de aprendizagem estão indicados?

1.2 Opções curriculares no Ensino Secundário

A situação, pelo que me foi dado estudar, tende a seguir o que se passa nos outros países, eventualmente com algum atraso na sua aplicação. Foi assim com a implementação da chamada *Matemática Moderna* nos anos 70 e também com o seu abandono, a favor da utilização da *Resolução de Problemas*, nos anos 90.

Dissemos, aquando da introdução deste trabalho, que o início da nossa análise curricular se situaria nos anos 50, isto é, há aproximadamente meio século. É agora altura de justificar esta opção: sabemos, através de inúmeros estudos conduzidos, quer no estrangeiro quer a nível nacional, que os professores tendem a pautar a sua actuação profissional em termos de vivências próprias pelas quais passaram. Toda a gente ouve, de professores mais e menos velhos, afirmações saudosistas do tipo *"no meu tempo..."*; ora, em Portugal, será muito difícil encontrar-se um professor de Matemática no activo cujo *"tempo"* assim reportado seja anterior à década de 50. Por outro lado é também a partir dessa época que assistimos, no ensino da Matemática, a uma verdadeira revolução de conteúdos. Apresentadas que estão as duas principais razões que nos levaram a balizar o início da nossa investigação nos anos 50, vejamos com mais detalhe algumas opções curriculares que têm vindo a ser tomadas desde 1948, no nosso país.

Segundo Ponte (2002), os anos de 40 e 50 foram marcados pela memorização e mecanização, onde era necessário saber de cor resoluções e demonstrações. No entanto, interessa acrescentar que já então havia algumas vozes de peso a oporem-se a este tipo de ensino, como é o caso de Bento de Jesus Caraça. Estando porventura à frente do seu tempo, Bento de Jesus Caraça não só questionava esse tipo de ensino, as aprendizagens, os métodos e as finalidades que lhe estavam associados, como advogava o uso das tecnologias no ensino da Matemática, lançando sementes para discussões futuras sobre o currículo da disciplina. Pode ler-se, a este propósito no nº 11 da *Gazeta da Matemática*:

> Em certos ramos da aplicação da Matemática à vida corrente, a táboa dos logaritmos está de longe ultrapassada pela máquina de calcular (nos cálculos actuariais, por exemplo).
>
> Cada época cria e usa os instrumentos de trabalho conforme o que a técnica lhe permite; a técnica do século XX é muito diferente da do século XVI, quando os logaritmos apareceram como necessários para efectuar certos cálculos. (Caraça, 1942)

Ao mesmo tempo, também Sebastião e Silva defendia a modernização do ensino da Matemática, quanto a programas e a métodos de ensino. Este matemático, professor e autor de manuais escolares, procurava nessa altura não só tratar novos temas como também mostrar a importância das aplicações da Matemática. Os manuais que escreveu, para alunos e professores, estão porventura esquecidos, mas parecem-nos ainda hoje absolutamente actuais, quer pelas indicações metodológicas que sugerem, quer pela abordagem e definições dos conceitos.

Contudo, a ideologia presente nas ideias de Sebastião e Silva e na Matemática Moderna foi-se porventura dissipando na implementação do Programa ao longo das décadas seguintes.

A preocupação com o conteúdo que estava a ser ensinado e com a forma como este estava a ser ensinado levou à preparação e publicação de vários documentos sobre opções curriculares. Destacam-se, a este respeito, as *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*, importado do NCTM (National Council of Teachers of Mathematics, dos Estados Unidos da América) e publicado pela primeira vez em 1989, e um documento resultante de um seminário realizado em Vila Nova de Milfontes, organizado pela APM (Associação de Professores de Matemática), em 1988.

Em Portugal, nos anos 80, foi finalmente iniciado um processo de reforma dos programas de todas as disciplinas do Ensino Secundário assim como das próprias disciplinas e estrutura curricular.

Os programas de Matemática, sobre os quais nos deteremos com mais detalhe no capítulo seguinte, passam, pelo menos em teoria, a dar mais relevo à geometria, às aplicações na vida real, preconizam a utilização de tecnologias, apoiam-se na resolução de problemas como metodologia de ensino e, simultaneamente, assiste-se a uma desvalorização do chamado formalismo, que perde importância, face em particular à grande ênfase colocada na compreensão dos conceitos.

1.2.1 A reforma de 2004

Uma vez que o presente ano lectivo ainda está a decorrer, não será possível prever nem a sua finalização nem tão pouco antever desenvolvimentos e/ou cancelamentos futuros. No entanto, em jeito de constatação interessa reconhecer, neste ponto do trabalho que, no ano lectivo 2004/2005 se iniciou mais uma reforma, onde a primeira novidade surge a respeito do denominado "tempo lectivo": passam, nomeadamente, a ser considerados blocos de 90 minutos como tempo lectivo passível de permitir que as aulas tenham um carácter mais prático e experimental[1]. Existem também "várias Matemáticas", destinadas aos alunos dos cursos científicos ou tecnológicos, nomeadamente: A *Matemática A*, a *Matemática B* e a *Matemática Aplicada Às Ciências Sociais*.

As escolhas dos alunos não são todas iguais. Os seus percursos escolares e também os profissionais são diferentes. Devem os currículos contemplar estas diferenças? Ou deverá o currículo ser igual para todos os alunos?

De acordo com Ponte et al (1988),

> os currículos e programas de Matemática, a todos os níveis, devem não só admitir como encorajar experiências de aprendizagem que tenham a ver com motivações e interesses de natureza individual, social ou cultural (p. 30)

e ainda,

> A aprendizagem da Matemática pode e deve estimular o desenvolvimento de capacidades necessárias à compreensão e à intervenção nos problemas correntes, técnicos, sociais e científicos do nosso mundo. (Ponte et al, 1988, p. 28)

[1] Registe-se no entanto que, numa clara subversão das intenções subjacentes a esta ideologia, muitas escolas começaram a considerar tempos de 45 min. (1/2 bloco) como unidade, de modo a conseguirem responder a várias questões que se levantaram com esta mudança, como por exemplo, a questão da divisão em turnos.

Também é reconhecido por Ponte (1998, p.104)

> As novas orientações curriculares que presentemente se afirmam no panorama internacional valorizam sobretudo quatro vectores: (i) a atenção especial no processo de ensino-aprendizagem; (ii)o impacto das novas tecnologias computacionais na Matemática e na sociedade em geral;(iii) a emergência dos novos domínios da Matemática; e (iv) o aprofundamento da investigação sobre o processo da aprendizagem.

1.2.2 Os números complexos no Currículo Nacional

A primeira constatação que surge aquando do estudo dos números complexos no Ensino Secundário em Portugal é a de que, como conteúdo programático, nem sempre esteve presente nos programas da disciplina de Matemática: Desde não ser referido de todo, passando por estar incluindo no tópico do "*Extensão do conceito de número*", ganhando um lugar próprio com as estruturas algébricas, desaparecendo novamente, e percorrendo ciclicamente estas etapas até que ressurgiu no programa de Matemática do 12º ano de 1992, concluímos que, desde então, tem estado sempre presente nos programas. Cabe também referir, porventura em jeito de informação, que inúmeros docentes do Ensino Universitário, quando questionados sobre este ciclo de inclusão/exclusão do tema dos números complexos na parte final do Ensino Secundário, *não têm qualquer dúvida em reconhecer esta ciclicidade mas reconhecem também que não sabem se, neste momento, o tema é ou não abordado nem se faz ou não parte dos programas, nem de quais áreas*.

Neste contexto interrogamo-nos: terá justificação a presença dos números complexos nos currículos de todos os alunos? Será necessário que todos os alunos tenham conhecimento da existência de outros números para além dos reais? Que sentido de número importará criar/desenvolver nos alunos de Artes, por exemplo? Ou nos alunos de Humanidades? Será concerteza diferente dos alunos de Ciências ou nos alunos das Engenharias, que lidarão com outros números na continuação do seu percurso académico.

Preocupamo-nos também com a forma de ensinar este tópico, reconhecendo que

- Desejavelmente, "a Matemática escolar deve valorizar a aquisição de formas dinâmicas do conhecimento escolar" (NCTM, 1989), que a mesma "deve ajudar todos os alunos a compreender que fazer Matemática é uma actividade humana comum" (NCTM, 1989), e ainda que " o conhecimento deve muitas vezes resultar da experiência com problemas." (NCTM, 1989)

- Merecerá, no mínimo, alguma atenção pelas oportunidades de leccionação, quer como potencial fecho de um conceito (o de número), quer pela possibilidade real de humanização da disciplina de Matemática.

Ora, o actual programa da disciplina de Matemática prevê a abordagem do tópico dos números complexos no 12º ano de escolaridade, mas apenas para os alunos que irão frequentar os cursos científico-humanísticos, isto é, os que frequentam a disciplina de Matemática A (embora no curso de Artes Visuais os alunos frequentem a disciplina de Matemática B). Os alunos dos cursos tecnológicos de Construção Civil, Electrotecnia/Electrónica, Mecânica, Química e Controlo Ambiental, Ambiente e Conservação da Natureza, Desporto, Administração, Técnicas Comerciais e Serviços Jurídicos não têm previsto em parte alguma do seu currículo o conhecimento da existência dos números complexos. Note-se ainda que, uma vez que o número de aulas semanais é menor do que as do programa de Matemática A, é evidente que tiveram de ser feitas opções programáticas quanto aos itens a abordar, mas interessaria porventura perceber as razões que lhes estão subjacentes.

O que fundamentará pois essas opções?

O Programa de Matemática B é, em teoria, um programa que se caracteriza por uma forte componente prática, de aplicações a outros campos da ciência e que procura ir de encontro aos interesses dos alunos de cada um dos cursos tecnológicos. Como exemplo, refira-se que a aposta no 11º ano recai sobre a Programação Linear. Não haverá aí lugar para os números complexos?

Talvez o curso onde mais se possa justificar essa introdução seja o de Electrotecnia/Electrónica, pela utilidade reconhecida que estes números têm nesta área de formação profissional. Caberá então ao professor, face ao interesse demonstrado pelos alunos, fazer as opções correspondentes.

Quanto aos alunos que frequentam a Matemática A, estes gostarão de saber que os números complexos são importantes ferramentas nas áreas das ciências e da engenharia: são importantes quando se estuda sistemas com oscilações sinusoidais; também nas funções trigonométricas os números complexos têm importância, pelo uso da exponencial complexa, que facilita a derivação, como por exemplo, na teoria electromagnética onde esta técnica é usada nos cálculos envolvendo ondas magnéticas; Nos circuitos eléctricos, na mecânica quântica, na análise complexa, nas transformadas de Laplace e de Fourier e em muitas aplicações da engenharia, precisamos dos números complexos.

1.3. Os números complexos enquanto objectos matemáticos

Afirmámos no início deste trabalho que o conceito de "número" é fundamental em Matemática mas na Matemática dita Moderna o conceito de "conjunto" passou a desempenhar um papel porventura ainda mais importante e é neste cenário que encontramos os números complexos enquanto objectos matemáticos ditos *sistemas/estruturas algébricos*. Referimos ainda, numa das páginas anteriores, que no currículo do Ensino Secundário em Portugal assistimos recorrentemente à inclusão própria dos números complexos como entes de uma estrutura algébrica. Ora, o enunciado destas teorias foi sendo abordado quer por matemáticos quer por filósofos e as discussões actuais podem cair no domínio da MetaMatemática. Razões de natureza histórica e filosófica para além de Matemática, permitem-nos abordar o problema denominado de "construção dos números reais" a partir dos racionais, que por sua vez foram construídos a partir dos inteiros que, finalmente, assentam nos números naturais. O ponto de partida para todas estas construções é uma descrição axiomática do sistema dos números naturais, como a axiomatização de Peano.

Sem pretender enunciar exaustivamente os passos matemáticos que sustentam a construção de novos sistemas numéricos, relembro de seguida o percurso usual – que passa pela descrição de Definições, Axiomas e Teoremas – que antecede, no contexto das estruturas algébricas, a apresentação dos números complexos:

- Começamos pelos **números naturais**.

Sabemos, por exemplo, que "se x e y representarem dois números naturais, então $x+y=y+x$". No entanto não demonstramos esse facto: verificamo-lo para qualquer par de números naturais que escolhamos (3 e 7, por exemplo) mas não é possível testar todos os pares de números naturais. Estes factos de onde partimos para demonstrar outros factos mais complicados dizem-se *axiomas* e o primeiro passo a dar na construção Matemática dos sistemas numéricos é encontrar um conjunto adequado de axiomas para a aritmética dos números naturais. Todavia não basta partir desse conjunto de propriedades básicas dos números naturais, é também necessário saber o que é um número natural, isto é, consideramos não só os axiomas mas também as definições, nomeadamente de *número natural, adição* e *multiplicação* (a subtracção e a divisão não são, neste contexto, tão fundamentais assim como não o são a potenciação e a radiciação). A partir daqui podemos demonstrar alguns factos matemáticos, ditos teoremas, relativos aos números naturais tais como as congruências, a divisibilidade, os números primos, etc..

i) Reconhecendo-se que aquando da subtracção de dois números naturais podia não se obter um número natural, estendemos depois a estrutura inicial aos **números inteiros** – números naturais, o zero e os inteiros negativos – garantindo com este processo:
   1. a inclusão de todos os números naturais,
   2. a conservação das propriedades dos números naturais,
   3. a inclusão dos "novos" números.

ii) Reconhecendo-se que a divisão de dois números inteiros podia não ser exacta, surgem os **números racionais** – qualquer número da forma *a/b*, onde *a* e *b* são números inteiros com *b* diferente de zero; garantindo sempre os mesmos pressupostos enunciados atrás é, neste caso, também possível constatar que o conjunto dos números racionais, munido das operações *adição* e *multiplicação* usuais, forma um *corpo*.

iii) Surge depois o conjunto dos **números reais**: anexamos os números irracionais aos números racionais, garantimos a conservação de propriedades anteriores e passamos a ter um *corpo ordenado e completo*. Demonstra-se, por exemplo, que *dados dois números reais e distintos,*
   1. *um é sempre maior que o outro*.
   2. *há sempre entre eles uma infinidade de números racionais*.

iv) É verdade que os **números complexos** nos permitem resolver qualquer equação de 2º grau, com coeficientes reais mas tal não significa que os números complexos sejam, por isso mesmo, menos "naturais" do que os outros números.

Concluímos este percurso com uma introdução às propriedades do corpo $\mathbb{C}$, dos **números complexos**. Por definição o sistema de números complexos, ($\mathbb{C}$,+,.) consiste em um conjunto $\mathbb{C}$ formado por todos os pares ordenados *(a,b)* de números reais e duas operações, + e ., onde especificamos:

a) A <u>igualdade</u> de números complexos – dois números complexos (a,b) e (a′,b′) são iguais quando a=a′ e b=b′.
b) A <u>adição</u> de dois números complexos – dados os números complexos (a,b) e (a′,b′), a sua soma é o número complexo (a+a′,b+b′).
c) A <u>multiplicação</u> de dois números complexos – dados os números complexos (a,b) e (a′,b′), o seu produto é o número complexo (aa′-bb′,ab′+ba′).

A notação *a+bi* também pode substituir a notação em termos de par ordenado *(a,b)*; onde *i=0+1i corresponde a (0,1).*

Em capítulos posteriores teremos, em particular, oportunidade de discutir/apresentar alguns comentários sobre notações dos números complexos.

Capítulo II

Os Programas Oficiais (1950 – 2004)

Neste capítulo pretendo analisar a evolução nos Programas Oficiais da disciplina de Matemática da introdução do conceito de Número Complexo. A data de 1950 foi escolhida como limite inferior para esta análise pelas razões anteriormente referidas; em particular, e a respeito das directivas programáticas oficiais tivemos em consideração o início da chamada *Matemática Moderna* que percorreu o mundo. Assim interessava-me uma análise do que se passou em Portugal antes da introdução da dita *Matemática Moderna*.

É frequente associarem-se os primeiros anos da década de 60 (no século XX) com uma reforma radical no ensino da Matemática[2]. Nos Estados Unidos, na chamada guerra-fria com a União Soviética, refere-se o choque provocado pelo foguetão soviético Sputnik como sendo o detonador desta reforma curricular; segundo relatos especializados:

> History changed on October 4, 1957, when the Soviet Union successfully launched Sputnik I. The world's first artificial satellite was about the size of a basketball, weighed only 183 pounds, and took about 98 minutes to orbit the Earth on its elliptical path. That launch ushered

[2] Um estudo detalhado sobre o assunto pode, por exemplo, ser feito a partir do texto *Curriculum Development in Mathematics*, (1981) por G. Howson, C. Keitel e J. Kilpatrick da Cambridge University Press.

> in new political, military, technological, and scientific developments. While the Sputnik launch was a single event, it marked the start of the space age and the U.S.-U.S.S.R space race. (Garber, 2003)

Deste lado do Atlântico, na Europa, começavam a surgir as primeiras opiniões sobre a necessidade de se diminuir o fosso entre o ensino secundário e o ensino universitário mas, acima de tudo, discutia-se e ao mais alto nível uma reforma curricular com pressupostos políticos e socio-culturais; assim, em 1959, no âmbito de uma convenção da OCDE (Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Económico) realizada em França, reafirmava-se a necessidade de um melhoramento na qualificação Matemática das gerações futuras. Segundo Uwe-Peter Tietze (1994):

> Education was no longer seen merely as a way of cultivating the personality, but – like capital and labor – was then regarded as a crucial production factor, one that determines whether there will be economic growth in a country or not…. As a result, mathematics education was decisively influenced by a structural mathematics initiated by Bourbaki*, which had become generally accepted at universities.*

Na prática, os reformistas que levaram a cabo este desafio de revisão dos programas curriculares na área da Matemática, apresentaram uma proposta que defendia por um lado a introdução da Matemática (elementar) à custa de conceitos da denominada *Teoria de Conjuntos* e, por outro lado, o desenvolvimento da Matemática por meio da ênfase nas estruturas lógicas e algébricas; mais à frente defendia-se ainda, por exemplo, o ensino do Cálculo Infinitesimal com recurso à formalização dos conceitos. No entanto algumas das directivas específicas que haviam saído da reunião da OCDE acima referida, como é o caso do ensino da Estatística, acabaram por não ser contempladas nesta proposta de reforma curricular.

A este movimento reformador do Ocidente, e de quem se esperava tanto, chamou-se *Matemática Moderna*; estava também ancorado pelas teorias Piagetianas no domínio da Psicologia do desenvolvimento e foi, contrariamente ao que é habitual nas reformas curriculares, rapidamente adoptado na grande maioria dos países ocidentalizados. Infelizmente, e apesar da sua aceitação e implementação generalizadas, não tardaram a surgir os primeiros sinais de descontentamento e uma nova mudança teria lugar ainda antes de finais da década de 70.

A Matemática Moderna começou a ter uma forte oposição logo no início dos anos 70, já que ao aceitar "que a aprendizagem se desenvolve por transmissão e absorção, e não por construção, a reforma da Matemática Moderna continha afinal os germes do próprio fracasso". (Ponte et al, 1988).

Depois a ênfase foi colocada na resolução de problemas, na ligação da Matemática à vida real e na utilização de calculadoras. A geometria ressurgiu.
As novas orientações curriculares, publicadas pelo ministério da Educação, segundo um projecto coordenado por Paulo Abrantes, em *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências essenciais* (ME-DEB, 2001), consideravam, relativamente à Matemática, que:

> *A ênfase da Matemática escolar não está na aquisição de conhecimentos isolados e no domínio de regras e técnicas, mas sim na utilização da Matemática para resolver problemas, para raciocinar e para comunicar, o que implica a confiança e a motivação pessoal para fazê-lo (ME-DEB, 2001,p. 58).*

Em suma, são várias as alterações que o programa de Matemática sofreu desde 1950, no nosso país. Registamos por ordem cronológica, as datas de implementação destas reformas/ajustamentos:

Outubro de **1948**; Setembro de **1954**; ano lectivo **1974-1975;** ano lectivo **1976-1977;** ano lectivo **1983/84; 1990; 1992/1993; 1997; 2003**

Para um melhor entendimento do que se tem vindo a passar com o ensino dos números complexos em Portugal, senti a necessidade de analisar com detalhe estes programas, não só quanto a este tópico mas também quanto a orientações gerais dos diversos programas. Para cada um dos programas, procurei também fazer uma análise comparativa com o(s) manual(is) escolar(es) adoptados. Uma análise detalhada e individual destes manuais é feita no capítulo IV deste estudo.

Optei, neste capítulo, por apresentar apenas o nome do manual(is) escolar(es) que estaria(m) de acordo com cada programa, para que não se perca o fio condutor que orienta a análise sequencialmente cronológica dos programas.

2.1 Os Programas do Ensino Liceal

- **O Programa de 1948**

(Decreto nº 37:112 Diário do Governo de 22 de Outubro de 1948 – I série – nº 247)

Neste Programa estavam atribuídas à disciplina de Matemática 4 horas semanais no 6º e 7º anos e não surgem referências explícitas aos números complexos.

Existem todavia referências à história da Matemática e salienta-se, em particular, o proveito que o professor de Matemática pode retirar do conhecimento dos factos históricos. Pode ler-se nas *Notas* deste programa que:

> Os factos da história da Matemática relacionados com o assunto a estudar, quando adaptados à mentalidade dos alunos, constituem um poderoso auxiliar para a boa compreensão de certas questões e, por vezes, também um incitamento ao trabalho (Programas do Ensino Liceal, 1948, p. 344)
>
> Os compêndios devem inserir notas biográficas dos matemáticos a que, segundo o desenvolvimento dos programas, haja de fazer referência (Programas do Ensino Liceal, 1948, p. 344)

- **O Programa de 1954**

(Decreto nº 39:807 Diário do Governo de 7 de Setembro de 1954 – I série, nº 198)

Este programa não é, em geral, muito diferente do que vigorava até esta data. No entanto, existem diferenças a respeito da temática dos números complexos: é incluída uma generalização do conceito de número.

No programa do <u>6º ano do Ensino Liceal</u> pode ler-se:

"Breves noções sobre as sucessivas generalizações do conceito de número; representação geométrica do sistema dos números reais" (Programas do Ensino Liceal, 1954, p. 323)

De acordo com este programa estaria o manual:

Compêndio de Álgebra Tomo I - VI ano, por J.Sebastião e Silva e J.D. da Silva Paulo

que analisaremos em detalhe no capítulo IV.

No programa do <u>7º ano do Ensino Liceal</u>:

Mantém-se a indicação sobre os factos da História da Matemática presente no programa anterior.

Manual analisado:

Compêndio de Álgebra 2º Tomo – 7º ano, por J. Sebastião e Silva e J.D. da Silva Paulo

- **O Programa de 1974**

No Programa para o Curso complementar do 2º ano pode ler-se:

> 4- Números Complexos
>
> Criação do Corpo Complexo. Igualdade e operações com números complexos. Raízes em $\mathbb{C}$ de equações quadráticas de coeficientes reais. Representação geométrica dos números complexos. Representação trigonométrica dos números complexos. Multiplicação e divisão de números complexos na forma trigonométrica e fórmulas de Moivre. Fórmulas trigonométricas da adição de ângulos (…) (Programa para o ano lectivo 1974-1975)

- **O Programa de 1976**

No Programa do Curso complementar 2º ano não foram alterados os conteúdos relativos aos números complexos.

Manual(ais) analisado(s):

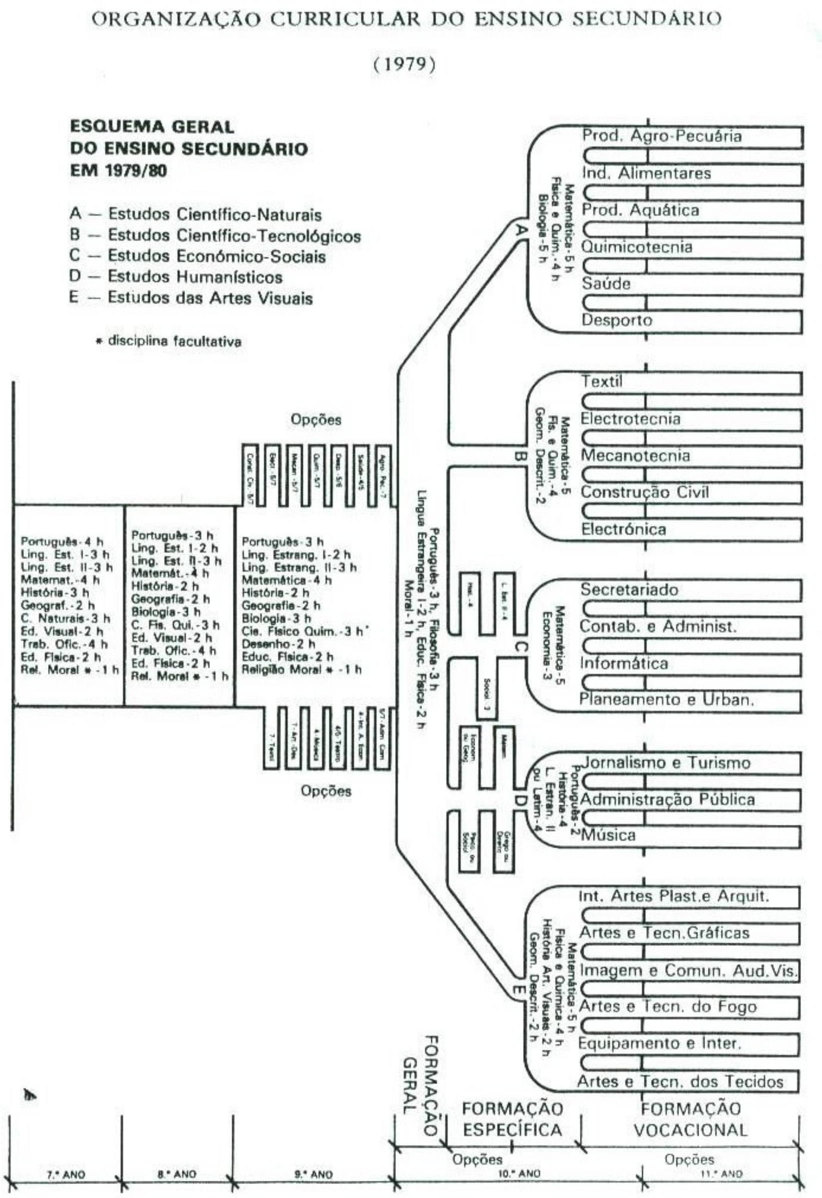
Silva, J. Sebastião, *Compêndio de Matemática*, 1ºvolume, 2º tomo Curso Complementar do Ensino Secundário, Edições Gep, Lisboa, 1975

Silva, J. Sebastião, *Compêndio de Matemática*, 3º volume Curso Complementar do Ensino Secundário, Edições Gep, Lisboa, 1975

2.2 Os Programas do Ensino Secundário

Entretanto, é criado o ensino secundário[3]. Originalmente, constituído por 5 anos lectivos, (7º.8º,9º,10º e 11º anos de escolaridade), integrará mais tarde o 12º ano de escolaridade. Com a obrigatoriedade de escolaridade até ao 9º ano, o ensino secundário passa a ser constituído apenas pelos 10º, 11º e 12ºanos.

O organigrama mostra as opções de que dispunham alunos.



Quadro 1 A organização curricular do ensino secundário

[3] Imagem disponível em Silva, Manuela e Tamen, M. Isabel, (1981). *O sistema de Ensino em Portugal*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.

- **O Programa de 1983**

Relativamente ao 12º ano, no programa de Matemática surge apenas a lista dos conteúdos programáticos para efeitos de prestação de provas relativas a:

> a) Exame de 12º ano dos alunos do ensino particular e cooperativo sem paralelismo pedagógico e candidatos autopropostos, para efeitos de aprovação e seriação no concurso de acesso ao ensino superior.
>
> b) Validação externa das classificações dos alunos que concluíram o 12º ano em estabelecimentos de ensino oficial ou estabelecimentos de ensino particular ou cooperativo com paralelismo pedagógico, para efeitos de aprovação e seriação no concurso de acesso ao ensino superior. (Ministério da educação, 1983, p.88)

No índice dos conteúdos programáticos (p. 89) pode ler-se:
"O corpo dos números complexos – $\mathbb{C}$ 10 aulas de 50 min."

E mais adiante:

> O corpo dos números complexos – $\mathbb{C}$
> 3.1 Definição do conjunto dos números complexos e demonstração de que é um corpo.
> 3.2 Representação geométrica dos números complexos (diagrama de Argand); forma trigonométrica.
> 3.3 Apresentação das expressões $sen(a \pm b) = sena.\cos b \pm \cos a.senb$ e $\cos(a \pm b) = \cos a.\cos b \mp sena.senb$ cuja demonstração será feita mais tarde.
> 3.4 Definição de conjuntos do plano por intermédio de condições envolvendo números complexos (por exemplo: $|z - z_0| = |z - z_1|, |z - z_0| \leq 1$, etc.)
>
> Pretende-se que o aluno:
>
> a) Opere com números complexos dados na forma algébrica e na forma trigonométrica.
> b) Aplique conscientemente as fórmulas de Moivre na resolução de problemas simples;
> c) Identifique conjuntos de pontos do plano definidos por meio de condições envolvendo números complexos. (Ministério da educação, 1983, p. 91)

Manual(ais) analisado(s):

Livro de texto 12º ano Matemática,
Neves, Maria Augusta Ferreira & outros, Porto Editora, 1987

M12 Matemática 12º ano
Machado, Armando & outros, Texto Editora, 1988

- **O Programa de 1990**

No Programa do 12º ano apenas se lê:

"O corpo complexo"

- **O Programa de Janeiro de 1991**

(Documento para experiência pedagógica)

Este programa veio a ser generalizado no ano seguinte, sem que fossem, tanto quanto me é dado saber, avaliados os relatórios produzidos nas escolas ditas "experimentadoras". No entanto, e apesar dessa lacuna de avaliação, cedo se sentiu a necessidade de lhe introduzir alterações, o que veio a ser concretizado em 1992.

Relativamente ao 12º ano do Ensino Secundário, lê-se

7. Grupos e corpos
(...)
-números complexos; operações; o corpo $\mathbb{C}$ como extensão de $\mathbb{R}$. (p. 33)

Manual analisado:

Tanto quanto sabemos não existia qualquer manual nesta altura, dado o carácter experimental do programa.

Por outro lado sabemos que a seguir a esta fase de implementação de um programa oficial que não estava associado a qualquer manual escolar, alguns professores do ensino secundário se decidiram a fazer publicar algumas das notas/apontamento/planos de lições que haviam organizado a propósito desta experiência pedagógica.

- **O Programa de 1992**

No Currículo estavam previstos 4 tempos de 50min por semana para a disciplina de Matemática. Neste programa surge uma diferenciação dos conteúdos de Matemática a leccionar aos alunos, de acordo com os cursos que escolherem. Surge a disciplina de Métodos Quantitativos, com 3 tempos lectivos de carga semanal. Esta disciplina estava destinada, com carácter opcional, aos alunos do 2ºAgrupamento (Artes) e 3º agrupamento (Economia), que podiam escolher entre "Matemática" ou "Métodos Quantitativos", e com carácter obrigatório aos alunos do 4º agrupamento (Humanidades).

Neste ajustamento de programas os "Métodos Quantitativos" surgem, desde o início, inevitavelmente como o *parente pobre* da disciplina de Matemática, e pensa-se que se destinam aos alunos com menos capacidades, apesar de tal nem sempre correspondesse à realidade. No entanto, este entendimento pode ter conduzido a um fracasso dos objectivos da disciplina e à necessidade de renovação desta ideia de diferenciação da Matemática que se pode leccionar no Ensino Secundário.

No programa de Matemática do 12º ano está ainda referido que:

> São introduzidas referências de natureza histórica a propósito de certas matérias para as enquadrar na História e na Cultura do Homem e para facilitar a compreensão de factos que ocorrem no mundo moderno. (Programa de Matemática, 1991, p. 9)

Nas finalidades do programa pode ler-se, entre outros, pela primeira vez uma referência explícita a questões sobre:

> Valores/Atitudes:
> (...)
> Reconhecer o contributo da Matemática para a compreensão e resolução de problemas do Homem através do tempo.
> (...)

ao mesmo tempo que se afirmava a importância do conhecimento da História da Matemática nos seguintes termos:

> Conhecimentos:

> (…)
> Apreciar personalidades e factos marcantes da História da Matemática em relação com momentos históricos de relevância cultural e social (Programa de Matemática, 1991,p. 27)

Por outro lado, na introdução pode ler-se:

> Tal como o conjunto $\mathbb{R}$ surge como extensão de $\mathbb{Q}$ aparece agora $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, como extensão de $\mathbb{R}$, dando solução a alguns problemas operatórios insolúveis no universo anteriormente conhecido. Os números complexos serão estudados na forma a+bi com a,b $\in \mathbb{R}$. (Programa de Matemática, 1991, p. 95)

E, nas indicações metodológicas diz-se que:

> Uma perspectiva geral sobre a evolução do conceito de número é oportuna e válida para o enriquecimento cultural do aluno (…)
> O aluno deve realizar graficamente o produto de a+bi por i((0,1)) o que se traduz por passar do vector (a,b) para o vector perpendicular (-b,a): rotação de 90º no sentido directo; o mesmo quanto ao produto por –i((0,-1)): rotação de 90º no sentido retrógrado
>
> 7. Noções de Grupo e de Corpo
> (…)
> -números complexos; operações; o corpo $\mathbb{C}$ como extensão de $\mathbb{R}$.
> O problema da raiz quadrada de um número negativo; o símbolo *i*.
> Extensão de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$: igualdade, adição e multiplicação de números complexos; conservação das regras de cálculo. Números conjugados; soma e produto. Divisão em $\mathbb{C}$ Reconhecimento de que ($\mathbb{C}$, +,) é corpo.
> Representação geométrica de um complexo; correspondência entre $\mathbb{C}$ e o plano; entre $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$, entre $\mathbb{C}$ e v_n. O número *i* como operador da "rotação de 90º.
>
> 8. Unidade de opção – O corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos – estudo na forma trigonométrica" [Este item faz parte de uma lista de 4 donde se deve escolher para leccionação somente um.] (Programa de Matemática, 1991, p. 95)

Em função das alterações previsíveis que o programa iria sofrer, aliado ao facto de a nova equipa dos programas estar a trabalhar nessas alterações, foi enviado às escolas um documento introduzindo alterações ao programa a ser leccionado aos alunos que ingressassem no 10º ano em 1995/1996 e 1996/1997. Tal documento ficou conhecido pelas OGP (Orientações de Gestão do Programa). Neste era eliminado do programa a referência aos números complexos.

Manual analisado:
Livro de texto 12º Matemática, 2º vol.
Neves, Maria Augusta Ferreira e Brito, Mª Luísa C., (1995). Porto Editora

Quanto ao programa de Métodos Quantitativos, foi também necessário dar novas orientações na gestão do mesmo, de modo que este fosse exequível nas horas previstas no currículo. Assim, em Julho de 1996 são também enviadas às escolas as OGP para esta disciplina. Note-se porém que estas orientações não excluíam do seu núcleo os números complexos, enumerando-se os seguintes tópicos:

- O número i
- Indicar raízes quadradas de números negativos
- O conjunto $\mathbb{C}$ como extensão de $\mathbb{R}$.
- Números complexos (forma algébrica)

Foi, no entanto, retirado o tópico "Operações com números complexos".

Assim, estes alunos tinham a oportunidade de alargar o seu conhecimento sobre os números. A abordagem prevista era aquela que permitiria que os alunos sentissem a necessidade da existência de novos números. Registo ainda a opinião veiculada por inúmeros professores que vivenciaram esta experiência e segundo os quais "*havia no entanto, um sentimento comum de que a disciplina de Métodos Quantitativos não propiciava uma verdadeira formação Matemática, já que era uma disciplina frequentada apenas durante um ano lectivo e com menor carga horária; Também o facto de professores de outro grupo disciplinar que não Matemática poderem leccionar esta disciplina, contribuiu para o descrédito da mesma*."

- **O Programa de 1997**

Este programa teve a particularidade de ser, pela primeira vez, apresentado na forma de um livro e com os autores do mesmo identificados como tal. De facto, o nome dos autores do programa não surgia identificado em qualquer dos anteriores programas.

Na página 35 do Programa Oficial pode ler-se:

Fig.1-O Programa de 1996

> Com pretexto de responder a problemas de resolubilidade algébrica amplia-se o conceito de número. As operações com números complexos, nas formas algébrica e trigonométrica, são aproveitadas para apropriar diferentes representações analíticas para domínios definidos geometricamente, bem como para apropriar relações entre operações algébricas e transformações geométricas. O estudante precisa dos conhecimentos de Geometria Analítica, em geral e da trigonometria e $\mathbb{R}$ e precisa de saber resolver equações e inequações dos 1º e 2º graus

E no desenvolvimento:

> Introdução elementar de problemas de resolubilidade algébrica e do modo como se foram considerando novos números. Apropriação de um modo de desenvolvimento da Matemática, através da evolução do conceito fundamental do número. Experimentação da necessidade de i, à semelhança da aceitação da necessidade dos números negativos e"partidos".
>
> Números complexos. O número i. O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos.
>
> A forma algébrica dos complexos. Operações com complexos na forma algébrica.
>
> Representação de complexos na forma trigonométrica. Escrita de complexos nas duas formas, passando de uma para a outra. Operações com complexos na forma trigonométrica. Interpretação geométrica das operações.
>
> Domínios planos e condições em variável complexa. (p.35)

Nas indicações metodológicas (p.35) é reforçada a ideia da introdução ao Tema III:

> A introdução dos complexos deve ser ancorada em pequena abordagem histórica, do ponto de vista dos problemas/escolhos que foram aparecendo no desenvolvimento dos estudos matemáticos. Os estudantes podem realizar trabalhos sobre a extensão do conceito de número e sobre problemas de resolubilidade algébrica, quer do ponto de vista histórico, quer do ponto de vista da sua experiência com anteriores desenvolvimentos. Será interessante a referência à impossibilidade da extensão a $\mathbb{C}$ de uma ordenação compatível com a adição e a multiplicação.

E ainda:

> As operações com complexos podem ser definidas na base da manutenção das propriedades das operações e do quadrado de i ser – 1. De modo intuitivo deve ser introduzido o $|z|$, estendendo a noção de valor absoluto real (distância de dois pontos no eixo, distância de dois pontos no plano cartesiano).
>
> A passagem à forma trigonométrica pode ser feita com referência a outros sistemas de coordenadas. Devem ser exploradas a multiplicação por i e as diversas operações ligadas a outras realidades Matemáticas – vectores, operações com vectores, transformações geométricas.
>
> A resolução e a interpretação das soluções das condições em $\mathbb{Z}$ devem ajudar a compreender a utilidade dos diversos sistemas de representação analítica (Programas Matemática, 1997, p. 35)

Este programa parece fazer um apelo muito forte à utilização da História da Matemática na sala de aula, não como conteúdo programático, mas como Tema Transversal, que deve ser abordado ao longo do Programa, quando considerado oportuno.

Manual analisado:

Livro de texto 12º ano Matemática,

Neves, Maria Augusta Ferreira & outros, Porto Editora, 1999

e

Infinito 12

Jorge, Ana Maria e outros, Areal Editores, 1999

2.3 Análise Comparativa

A análise sequencial dos programas permite então elaborar o quadro -resumo seguinte:

Ano	***Números complexos***	***Referência (s) à História da Matemática***	***Adendas ao Programa***
Outubro 1948	Não surgem	Prevista de um modo geral	
Setembro de 1954	Evolução do conceito de número	Prevista de um modo geral	
1974/1975	Corpo dos complexos Operações; Forma algébrica e forma trigonométrica	Não existe	
1976/1977	Corpo dos complexos Operações; Forma algébrica e forma trigonométrica	Não existe	
1983/1984	Corpo dos complexos Operações; Forma algébrica e forma trigonométrica	Não existe	
1990	O Corpo Complexo		
1992/1993	$\mathbb{C}$ como extensão de $\mathbb{R}$. Corpo Complexo	Prevista nas finalidades (gerais) e nas indicações metodológicas na introdução.	Orientações de Gestão do Programa retiram este capítulo aos **alunos que frequentam o 12° ano em 96/97, 97/98**
1996/1997	Problemas de resolubilidade algébrica; evolução do conceito fundamental do número	Prevista nas finalidades (gerais) e nas indicações metodológicas na introdução. O estudo dos complexos é considerada importante oportunidade para introdução da história	
2003/2004	Não há alterações ao anterior programa		

Quadro 2 Evolução dos Programas

A introdução do tema dos números complexos nos programas actuais de 12º ano parece-me pensada em moldes algo diferentes dos anteriores programas. A História da Matemática, que estava considerada nos programas do Ensino liceal, desapareceu dos mesmos em 1974, para reaparecer em 1992 e com mais relevo ainda em 1996, onde se afirma pela primeira vez a sua importância como Tema Transversal.

Uma vez que as estruturas algébricas não fazem parte do Programa, ponderei as razões para a presença no programa dos números complexos. O que leva à sua inclusão nos Programas da disciplina?

Compreensão do conceito de número?

Definição de operações entre novos "entes"?

Oportunidade de humanizar a Matemática através da Histórica?

Compreender que ainda há muitas possibilidades para o conhecimento humano e que ainda há novos campos na Matemática por explorar?

Notei ainda que durante três anos lectivos, os alunos do Ensino Secundário estavam a ingressar no Ensino Superior sem ter qualquer conhecimento destes números.

Afinal, o que é que o aluno tem a ganhar com o estudo/aprendizagem dos números complexos?

2.4 Questões de Exames Nacionais relativas a Número Complexos.

Gostemos ou não, a verdade é que uma simples consulta aos intervenientes no ensino aprendizagem da Matemática (professores, pais e alunos) deixará clara a opinião de que intimamente ligados com os Programas estão os Exames Nacionais. Estes devem, em teoria, traduzir os objectivos ou competências constantes no Programa a que se referem.

A análise da evolução das questões saídas nos Exames Nacionais podem revelar, de facto, pistas sobre o trabalho a desenvolver com os alunos ou sobre a percepção que devemos ter do Programa Oficial. Tal não significa que devam os professores *preparar os alunos para o exame*, no sentido restrito, mas antes que a preparação deva ser tal que os alunos estejam preparados para diferentes provas de avaliação, escritas ou não. Não podemos esquecer o importante papel que o exame final de 12º ano tem no percurso do aluno, quer para conclusão do Ensino Secundário, quer para o acesso ao Ensino Superior. A questão é delicada e está fora da análise que aqui queremos fazer. O exame incide, em teoria, sobre conteúdos, objectivos e capacidades do Ensino Secundário e é de acordo com o Programa deste nível que deve estar de acordo.

A análise das questões colocadas nos exames pode também ajudar a compreender o que se procura transmitir ao aluno com a inclusão deste item no seu currículo, sempre que os programas não forem claros nesse ponto, ou como complemento dessa interpretação.

- **Exames até ao Programa de 1996**

De acordo com o que registámos no capítulo anterior, a abordagem dos números complexos podia ou não ser diferente no Programa actualmente em vigor em relação aos anteriores. Diferenças substanciais aparecem efectivamente reflectidas nos exames. Vejamos alguns exemplos:

1. • $(\mathbb{C}, +, \times)$ é o corpo dos números complexos.
   • i é a unidade imaginária.

1.1. Seja $A = \{1, -1, i, -i\}$

1.1.1. Prove que $(A, \times)$ é grupo.

1.1.2. Mostre que $A = \{z \in \mathbb{C} : z^4 = (\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i)^8\}$

1.2. Represente no plano de Argand

$$(|-z + 2 - i| \geq 5 \wedge -\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}) \vee |z + \bar{z}| < 4$$

Exame 12º ano –Via Ensino,1988, 1ª fase, 2ª chamada.

2. Em $\mathbb{C}$, corpo complexo, considere:

$z_1 = 1 - i$ e $z_2 = \text{cis}\,\frac{\pi}{3}$ (i é a unidade imaginária)

2.1. Calcule $z_1 . z_2$ na forma trigonométrica.

2.2. Represente no plano de Argand, as imagens dos complexos z que verificam a condição:

$$|\text{Re}\,(z - z_1)| \leqslant 1 \wedge |z| < |z - z_1|$$

Exame 12º ano –Via Ensino,1992, 1ª fase, 1ª chamada

1. Seja $\mathbb{C}$ o corpo dos números complexos.

1.1. Determine o argumento positivo mínimo do complexo $(-1 + \sqrt{3}\, i)^{50}$

1.2. Determine os números complexos z que verificam a condição:

$$(i \cdot \bar{z})^3 = i^{-10}.$$

Exame 12º ano –Via Ensino,1993, 1ª fase, 1ª chamada.

2. Seja **B** o conjunto dos números complexos, solução da equação:

$$|z| = |z+1| \ .$$

2.1. Determine, na forma algébrica, os elementos de **B** .

2.2. Mostre que uma das raízes quadradas de $-\frac{1}{2}i$ pertence a **B** .

Exame 12º ano –Via Ensino,1995, 1ª fase, 2ª chamada.

São apresentados alguns exemplos onde se mostra que o aluno deveria conhecer as propriedades das estruturas algébricas e operar com números complexos. São questões essencialmente de domínio algébrico, de acordo com o programa em vigor. As operações com números complexos e a tradução destas no plano de Argand surgiam como "Domínios Planos"

- **Exames de acordo com o Programa de 1996**

Com o Programa de 1996, a interpretação geométrica começa a tomar relevo nos exames nacionais Não será indiferente o apelo deste programa às conexões, em particular com a geometria e a aposta na completa compreensão dos conceitos. Também a calculadora é obrigatória neste programa e portanto a sua utilização no exame tem de ser equacionada.

Vejamos alguns exemplos de questões saídas em exame de acordo com o Programa actualmente em vigor:

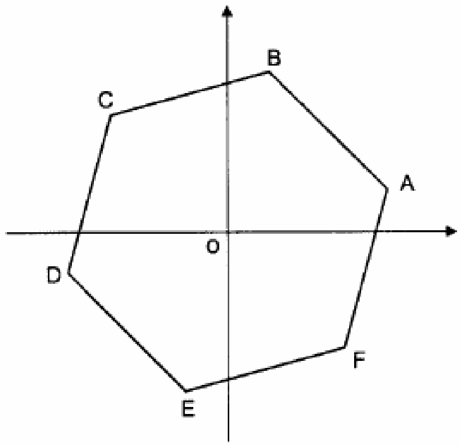
7. Qual das seguintes condições define, no plano complexo, o eixo imaginário?

(A) $z+\bar{z}=0$ **(B)** $\mathrm{Im}(z)=1$

(C) $|z|=0$ **(D)** $z-\bar{z}=0$

Exame 2002, 1ª Fase, 1ª Chamada

7. Na figura está representado um hexágono cujos vértices são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes de índice 6 de um certo número complexo.



O vértice C é a imagem geométrica do número complexo

$$\sqrt{2}\ cis\ \frac{3\pi}{4}$$

Qual dos seguintes números complexos tem por imagem geométrica o vértice D ?

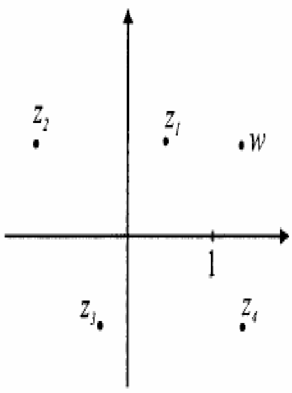
(A) $\sqrt{2}\ cis\ \frac{7\pi}{6}$ **(B)** $\sqrt{2}\ cis\ \frac{13\pi}{12}$

(C) $\sqrt[6]{2}\ cis\ \frac{7\pi}{6}$ **(D)** $\sqrt[6]{2}\ cis\ \frac{13\pi}{12}$

Exame 2000, 1ª Fase, 1ª Chamada

7. Na figura estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de cinco números complexos:

w, z_1, z_2, z_3 e z_4



Qual é o número complexo que pode ser igual a $1 - w$?

(A) z_1 **(B)** z_2 **(C)** z_3 **(D)** z_4

Exame 2003, 2ª Fase

1. Em $\mathbb{C}$, considere os números complexos: $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = \sqrt{2}\ cis\ \frac{3}{4}\pi$

1.1. Verifique que z_1 e z_2 são raízes quartas de um mesmo número complexo. Determine esse número, apresentando-o na forma algébrica.

1.2. Considere, no plano complexo, os pontos A, B e O em que:

- A é a imagem geométrica de z_1
- B é a imagem geométrica de z_2
- O é a origem do referencial.

Determine o perímetro do triângulo $[AOB]$.

Exame 2002, 1ª Fase, 1ª Chamada

Está bem patente nestes exemplos a componente geométrica do tema, a que não só Argand, mas também, como iremos ver, Wessel e Gauss deram tanto relevo.

Numa altura em que tanto se apoia a introdução das tecnologias no ensino, há ainda lugar para o simples cálculo algébrico com os complexos? Atente-se no exemplo:

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$w = 4 - 3i$ (i designa a unidade imaginária)

1.1. **Sem recorrer à calculadora**, calcule, na forma algébrica, $2i + \frac{w^2}{i}$

1.2. Seja α um argumento do número complexo w.
Exprima, na forma trigonométrica, em função de α, o produto de i pelo conjugado de w.

Exame 2004, 2ª Fase

O apelo para a não utilização da calculadora é complementado com a interpretação geométrica feita na 2ª alínea desta questão.

Na sequência do ajustamento dos programas iniciado em 1992, é tentado um equilíbrio, ao nível dos exames, das questões onde se utiliza a calculadora dada a sua utilização na sala de aula. Este equilíbrio nem sempre tem vindo a ser conseguido, segundo a Associação de Professores de Matemática e também de acordo com a opinião dos grupos disciplinares nas escolas. No entanto, e tanto quanto me é dado sentir, o processo tem vindo a evoluir, de modo a que a adaptação, por parte de professores e alunos seja gradual.

A História da Matemática, tão presente nos actuais programas, não tem sido objecto de questão nestes exames nacionais. De facto, sabemos que a utilização da História da Matemática traz vantagens que estão para lá da aquisição simples do saber: O entusiasmo que pode trazer ao estudo da Matemática, o desenvolvimento de capacidades de leitura, a utilização e a consulta de bibliografia, as capacidades de exposição orais e escritas e ainda o facto de que os alunos podem tornar-se mais organizados e sistemáticos na recolha de informação.

Deixo todavia levantada a dúvida de se saber/medir até que ponto se faz, nas nossas aulas de Matemática o recurso efectivo à História da Matemática, uma vez que este conhecimento (transversal) nunca é objecto de avaliação nos exames nacionais.

Em particular, o tema dos números complexos é referido como um exemplo onde as vantagens da utilização da História da Matemática se concretizam. Tornou-se assim importante, para mim própria enquanto professora de Matemática, conhecer a história da evolução do conceito de número bem como os seus principais intervenientes, de modo a poder fazer opções conscientes nas minhas aulas.

Capítulo III –

Uma introdução à História dos Números Complexos

Scipione Del Ferro (1465-1526), Jerôme Cardano (1501–1576), Nicolas Tartaglia (1500-1557) e Rafael Bombelli (1526-1572) são nomes, porventura conhecidos de muita gente, que para sempre ficarão ligados aos primeiros momentos da descoberta/criação dos números complexos.

Mas Caspar Wessel (1745-1818), Jean-Robert Argand (1768-1822), Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e Carl Gauss (1777-1855) estão igualmente associados ao tema, nomeadamente, às tentativas de representar geometricamente o conceito de número complexo e deram, por isso mesmo, um contributo importante para a interiorização/compreensão e consequente aceitação do conceito.

Em Portugal, também há referências ao tema dos números complexos nos trabalhos dos nossos matemáticos, porventura menos conhecidas do público em geral; deste modo, não deixarei de me deter nos contributos de matemáticos nacionais, com particular incidência em **Pedro**

Nunes (1502-1578)**, Anastácio da Cunha** (1744-1787), **Francisco Gomes Teixeira** (1851-1933) **e José Sebastião e Silva** (1914-1972).

Primeiros desenvolvimentos

Pode dizer-se que a resolução das equações sempre ocupou o labor dos matemáticos, desde os tempos mais longínquos. Já antes de 2000 a.C. os escribas da Babilónia se ocupavam intensamente da resolução de equações algébricas do 1º e 2º graus e até resolveram alguns casos de equações do 3º grau. Contudo, essas equações resultavam sempre da resolução de problemas. Vejamos um desses exemplos, extraído de *História da Matemática*:

> Muitos desses problemas dizem respeito a um objecto na forma de paralelepípedo rectângulo. [...] Um desses problemas (problema nº 22 da BM 85200) é redutível ao sistema, que em notação decimal se pode escrever: $\begin{cases} xyz + xy = 70 \\ y = 40x \\ z = 12x \end{cases}$. Eliminando y e z, obtém-se a equação $(40 \times 12)x^3 + 40x^2 = 70$.
>
> As instruções do escriba conduzem à equação $12^3 x^3 + 12^2 x^2 = 252$, que se pode ainda escrever na forma $(12x)^3 + (12x)^2 = 252$. Tendo a soma do cubo com o quadrado do mesmo número, o escriba dá logo o valor de $12x$ tirado de uma tabela; neste caso o valor de $12x$ será 6. Daqui o escriba deduz os valores de x, y e z. É fácil verificar que esses valores são $x = \frac{1}{2}$, y=20 e z=6.
>
> (Estrada et al, 2000,p.89)

Foram os matemáticos árabes, nomeadamente Al-Khwarizmi e os seus sucessores que primeiramente se ocuparam duma teoria das equações algébricas, em que estas começam a ser tratadas como entes matemáticos, independentemente dos problemas que pudessem traduzir. Estes e outros conhecimentos foram transmitidos à Europa Ocidental particularmente por Leonardo de Pisa, no séc. XIII. O interesse pela resolução das equações intensificou-se na Itália mercantil na última metade do séc. XV.

A *Summa de Arithmetica* (*geometria, proportione et proportionalita)* do frade franciscano Luca Pacioli (Lucas de Borgho) é um dos incunábulos na História da Matemática (1494) e apresenta-se como uma grande compilação de vários trabalhos anteriores, incluindo Euclides, Ptolomeu, Boécio, Jordano, Sacrobosco e Leonardo de Pisa. Por esse facto, "a sua contribuição para o desenvolvimento da Matemática europeia se afigura insubstituível" e "o exemplo de Luca Pacioli é o de um paradigma de transição da medievalidade à modernidade que se adivinha já no Renascimento" (Marques de Almeida, 1997, p.73)

Ora a parte algébrica da *Summa* terá sido o primeiro tratado a dar um impulso notável no campo da resolução das equações algébricas. Esta compilação tem duas partes: a primeira trata de aritmética e álgebra prática e teórica, pesos e medidas e da escrituração mercantil de partidas dobradas. A segunda parte contém a resolução de problemas geométricos por meio da álgebra. Pacioli resolveu equações lineares, quadráticas e as que eram facilmente reduzíveis a essas, não apresentando uma fórmula aplicável às equações de terceiro grau; usa uma notação sincopada, em que p (de piu) designa mais, m (de meno) designa menos, co. (de cosa) para incógnita, ce (d, censo) para x^2, cu (de cubo) para x^3 e cece (de censo-censo) para x^4.

A fórmula de resolução da equação de 3° grau

Era Scipione Del Ferro professor na Universidade de Bolonha, por volta de 1510, quando conseguiu descobrir o método para resolver a equação de 3º grau, embora não haja conhecimento do desenvolvimento dos seus trabalhos. Evidentemente, na universidade terá tido acesso a textos importantes como os de Leonardo de Pisa, autores árabes e Luca Pacioli. Sabe-se, contudo, que transmitiu os seus conhecimentos a António Maria Fior, seu aluno e ao seu sucessor na cadeira e genro, Hannibal Della Nave. A história que se seguiu pode ser apontada como um exemplo significativo sobre o modo como a Matemática se desenvolve e sobre os conflitos que surgem entre os protagonistas dos homens da Ciência.

Nesse tempo, era muitas vezes usado o conhecimento como arma secreta em disputas intelectuais. Fior terá desafiado Niccolò Tartaglia (1500-1557) para uma disputa de resolução de algumas questões. Mas, enquanto a lista que Tartaglia propôs a Fior continha problemas genéricos de carácter aritmético, geométrico e algébrico, incluindo equações de 3º grau, a lista que o opositor de Tartaglia lhe entregou continha apenas problemas que passavam pela resolução de um certo tipo de cúbica, daquela que Fior conhecia uma fórmula, isto é, do tipo $x^3 + px = q$, onde p e q são números positivos.

Repetiu-se então o que em mais de um momento da História da Matemática aconteceu: depois de um matemático fazer uma descoberta, outro autor chega à mesma descoberta, de forma independente. Assim, em Fevereiro de 1535, Tartaglia já tinha descoberto também como resolver equações de grau 3, ganhando a disputa. De facto, Fior não foi capaz de resolver os problemas que lhe tinham sido propostos. Conhecendo somente a fórmula para equações do tipo $x^3 + px = q$, onde p e q são números positivos, faltou-lhe capacidade e conhecimentos para resolver as do tipo $x^3 = px + q$ e também do tipo $x^3 + q = px$.

- **Cardano**

Entretanto, Cardano toma conhecimento da descoberta de Tartaglia e consegue convencê-lo, sob promessa solene de a não tornar pública, a revelar-lhe a fórmula de resolução da cúbica. Esta revelação foi-lhe feita em Março de 1539, em verso, para, diz-se, mais facilmente passar despercebida aos olhos indiscretos de terceiros. Na apresentação que se segue optei por colocar o "poema" em causa e paralelamente a transcrição actual do seu conteúdo:

1º caso

Cúbica da forma $x^3 + px = q$

Quando che'l cubo com le cose apresso se agguaglia a qualche numero discreto trovan dui altri differenti in esso.	$x^3 + px$ $x^3 + px = q$ $A - B = q$
Da poi terrai questo per consueto: che'l lor produtto sempre sai uguale al terzo cubo delle cose neto,	$AB = \left(\frac{p}{3}\right)^3$
El resíduo poi suo generale	$\begin{cases} A - B = q \\ AB = \frac{p^3}{27} \end{cases}$
delli lor lati cubi ben sottratti varrà la tua cosa principale.	$x = \sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}$

2º caso

Cúbica da forma $x^3 = px + q$

In el secondo de codesti atti quando che 'l cubo restasse lui solo tu osserverai quast'altri contratti,	2º caso da cúbica: $x^3 = px + q$

Del numero farai due tal part'a volo	A-B=q
che l'una in l'altra si produca schietto	$A \times B = \left(\frac{p}{3}\right)^3$
El terzo cubo delle cose in stolo	
Dalla qual poi, per commun precetto	
torrai li lati cubi insieme gionti	
et cotal somma sara il tuo concetto."	$x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$

3º caso

Cúbica da forma $x^3 + q = px$

El terzo poi de questi nostri conti	O terceiro caso resolve-se
se solve col secondo se bem guardi	recorrendo ao segundo
che per natura son quasi congionti.	
Questi trovai, et n on com passi tardi	
Nel mille cinquecente, quatro e trenta	1534
Com fondamenti bem saldi e gagiardi	
Ella città dal maré intorno centa.[4]	Veneza

(Casalderrey, p.115, 2000)

Estes versos continham assim a resolução de três casos da equação cúbica:

$x^3 + px = q$,

$x^3 + q = px$

$x^3 = px + q$,

aqueles para os quais Tartaglia conhecia a fórmula. Embora nos dias de hoje, para qualquer estudante estes três casos se resumam ao mesmo, não podemos esquecer que os números

[4] "Quando o cubo e a coisa juntos/são iguais a um número discreto/encontra dois outros números cuja diferença seja esse número/ depois farás disto uma regra:/que o seu produto seja sempre igual/ao terço do coeficiente de *x* elevado ao cubo/depois o resultado geral/dos lados cúbicos bem subtraídos/te dará a coisa principal/ Em segundo lugar/quando o cubo está sozinho/irás observar estas duas razões/dividirás o número em duas partes/tal que uma vezes a outra produza claramente/o cubo da terça parte da coisa, exactamente. /Destas duas partes, como regra/tirarás a raiz cúbica somada/ e a soma será o teu resultado. /O terceiro dos nosso calculo/resolve-se com o segundo se tiveres cuidado/pois a sua natureza quase coincide/Estas coisas eu encontrei, e não com preguiçosos passos/No ano de 1534 / com fundamentos fortes e firmes / na cidade cercada pelo mar.

negativos ainda não estavam completamente aceites e portanto os matemáticos da época evitavam operar com eles.

Entretanto Cardano preparava a sua *Ars Magna* e desejava a todo o custo incluir a fórmula da resolução da cúbica na sua obra. Todavia a promessa feita impedia-o de o fazer. Foi então que, numa viagem a Bolonha, em 1542, Cardano e o seu discípulo Lodovico Ferrari encontraram a demonstração da fórmula feita por Del Ferro. Considerando-se livres da promessa feita, já que Tartaglia não tinha tido a prioridade da descoberta, Cardano incluiu na *Ars Magna* a fórmula, tornando pública a "arma secreta" de Tartaglia. Este sentiu que Cardano havia quebrado a sua promessa e o facto deu origem a uma contenda pública entre Tartaglia e Cardano (e o seu discípulo Ferrari). No entanto, na sua *Ars Magna*, Cardano indica as fontes e refere-se a Del Ferro, António Fior e Tartaglia, demonstrando uma postura ética inquestionável, o que o iliba da acusação de plágio. Apesar disso, a história reconhece o grande valor deste matemático, e a fórmula de resolução da cúbica tem também associado o seu nome, a fórmula de Cardano-Tartaglia.

Há mais que uma fórmula de resolução da cúbica na *Ars Magna,* já que havia três tipos de cúbicas. Por exemplo, no capítulo *XI*, a respeito de "Cubo e primeira potência igual ao número", isto é, $x^3 + px = q$, pode ler-se:

> Regra
>
> Eleve ao cubo o terço do coeficiente de x; adicione-lhe o quadrado da metade da constante da equação e calcule a raiz quadrada do total. Vais duplicar isto, e a uma das duas, soma metade do número que já elevaste ao quadrado e à outra subtrai metade do mesmo. Tem agora um binómio e o seu apótema. Depois, subtrai a raiz cúbica do apótema da raiz cúbica do binómio. O que fica é o valor de x.
>
> Por exemplo,
>
> $x^3 + 6x = 20$
>
> Eleve ao cube 2, um terço de 6, fazendo 8; eleve ao quadrado 10, metade da constante; dá 100. Soma 100 com 8, fazendo 108, cuja raiz quadrada é $\sqrt{108}$ .Isto irás duplicar: a uma soma 10, metade da constante, e à outra subtrai o mesmo. Então irás obter o binómio $\sqrt{108}$ +10 e o seu apótema $\sqrt{108}$ -10. tira a raiz cúbica destes. Subtrai a raiz cúbica do apótema da raiz cúbica do binómio e terás o valor de x:
>
> $\sqrt[3]{\sqrt{108}+10} - \sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$ (Cardano, 1993,p.99)

Fig. 2 -Uma folha de rosto da *Ars Magna*[5]

Continuava, porém, por resolver, o caso chamado de "irredutível". A fórmula de Cardano para as equações do tipo $x^3 = px + q$ é $x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$ que à luz dos conhecimentos da época, parece não ter sentido quando $\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$. (No primeiro caso da equação cúbica não surge esta questão). É na consideração de raízes quadradas de números negativos que Cardano tem um papel inovador na história, ao tentar operar com tais raízes.

Vejamos, em escrita actual, como surge esta fórmula

Seja $x = u + v$. Então a equação $x^3 = px + q$ vem

$$(u+v)^3 = p(u+v) + q \Leftrightarrow u^3 + v^3 + 3uv(u+v) = p(u+v) + q$$

Então $u + v$ será solução da equação desde que sejam satisfeitas as condições

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = q \\ uv = \dfrac{p}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v^6 + \dfrac{p^3}{27} = qv^3 \\ u^3 = \dfrac{p^3}{27v^3} \end{cases}$$

Fazendo $v^3 = z$, obtém-se a equação $z^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = qz$, cuja solução é $z = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$.

[5] Disponível em http://bnd.bn.pt/ed/pedro-nunes/obras/fontes-p-nunes/pn_fontes_outras_32_zoom.html

Logo $v=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$ e $u=\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$

Donde $x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$.

No capítulo XXXVII da *Ars Magna* – "Sobre a regra para postular um negativo", Cardano distingue três sub-casos, "aquele em que se assume um número negativo, ou procura uma raiz quadrada de um número negativo, ou procura o que não existe" (Cardano, 1993, p.217).

Com o exemplo para o segundo caso surge uma situação com a qual os matemáticos não sabiam lidar. Tratava-se de encontrar dois números cuja soma fosse 10 e cujo produto fosse ou 30 ou 40. Este caso era, segundo Cardano, impossível. No entanto, Cardano optou por continuar a operar, de acordo com a regra anteriormente dada nesse mesmo capítulo, obtendo as soluções $5+\sqrt{-15}$ e $5-\sqrt{-15}$.

Vemos, então, que quem primeiro operou com os números imaginários foi Cardano, na tentativa da resolução de uma equação do segundo grau.

Cardano tem consciência da sua audácia em operar com tais números, afirmando que "Isto é verdadeiramente sofisticado" (Cardano, 1993, p. 220). Reconhece ainda que são outra espécie de "coisa" e que são "tão refinados como inúteis" (Cardano, 1993,p. 220).

Note-se que, embora Cardano tenha operado com estes números, duvidou da sua validade, já que não acreditava que um número negativo pudesse ter uma raiz quadrada. De facto refere-se às operações com este números dizendo, a propósito da demonstração da regra, que,

> *Pondo de lado as torturas mentais envolvidas, multiplique-se 5+*$\sqrt{-15}$ *por 5 –* $\sqrt{-15}$*, fazendo* $25-(-15)$ *que é 15. O seu produto é 40. ...,* [Cardano, 1993, p. 219].

Em 1545, usou a notação de $\text{R}.\tilde{m}$, iniciais das palavras *radix minus* para representar a raiz quadrada de um número negativo.

Cardano, que chamava *fictícios* aos números negativos, continuou a trabalhar com as raízes quadradas de números negativos, embora as eliminasse do resultado final. Quanto à cúbica, ele acreditava que poderia ter três raízes, mas não afirmou que teria de as ter. Este problema, juntamente com a questão sobre o número de soluções de uma equação algébrica foi resolvido somente por Euler, em 1732. O contributo de Cardano foi, portanto, importante no desenvolvimento da teoria das equações. As suas fórmulas foram usadas durante muitos anos e as tentativas de encontrar fórmulas para resolver equações de grau superior a 4 só terminaram em 1824 com Niels Abel (1802-1829) (Katz, 1992) e a sua prova da impossibilidade de encontrar uma fórmula geral para a resolução algébrica das equações de 5º grau. Finalmente, Evarist Galois (1811-1832), com a sua teoria da resolubilidade algébrica, deu um passo definitivo na pesquisa de fórmulas de resolução, apresentando as condições de resolubilidade de uma equação, sendo, pela teoria que desenvolveu, considerado um marco impar na história da Álgebra. (Katz, 1992). Galois provou que era impossível apresentar uma fórmula para a resolução de uma equação algébrica geral de qualquer grau superior a 4.

Cardano teve também um papel inovador no cálculo das probabilidades com a sua obra *Liber de Ludo Aleae,* escrita durante a sua estada em Bolonha.
Este importante vulto da história da Matemática morreu em 1576.

Surge, então, no seguimento dos seus trabalhos a *Algebra* de Bombelli.

3.2 A Algebra de Bombelli

Sabe-se que Rafael Bombelli nasceu em Janeiro de 1526, em Bolonha, Itália, sendo o mais velho de 6 irmãos, mas pouco se conhece da educação que Bombelli terá recebido. É conhecido, no entanto, ter sido orientado por Francesco Maria Clementi da Corinaldo, engenheiro hidráulico. Talvez por isso tenha ficado conhecido como engenheiro, embora não seja crível que tenha tido formação oficial para tal (Jayawardene, 1991).

Bombelli considerava que Cardano não havia sido claro na sua obra *Ars Magna*, razão pela qual decidiu ele próprio escrever uma *Algebra*. São suas as palavras:

> *Cardano Melanese nella sua arte magna, ove di questa scienta assai disse, ma nel dire fui obscuro…"*(Bombelli, 1966, p. 9)[6]

Este trabalho, o único conhecido de Bombelli, foi escrito entre os anos de 1557 e 1560 e publicada em 1572. Era também sua intenção, como já era a de Cardano, escrever uma obra que elevasse a Matemática a um nível superior, já que esta era usada essencialmente nas trocas materiais e os problemas que os matemáticos resolviam eram quase sempre ligados ao comércio, em situações reais ou não. Assim, os problemas apresentados por Bombelli são, influenciados pela obra de Diofanto, abstractos, procurando, em alguns casos, generalizar o mais possível o problema que está a tratar.

[6] "Cardano Milanês , na sua arte magna, onde sobre esta ciência muito disse, foi obscuro nas suas palavras".

A *Algebra* de Bombelli está dividida em 5 partes, correspondentes a 5 livros:

- No primeiro livro, Bombelli expõe as definições dos conceitos elementares, como potências, raízes, binómios e trinómios, e as suas operações. Neste livro são também apresentados os números complexos, que trataremos com mais pormenor. A segurança que Bombelli apresenta ao trabalhar com estes novos números, apresentando muitos exemplos que permitissem ao leitor familiarizar-se com eles, bem como a introdução das regras operatórias, imortalizou para sempre o seu nome. Assim, os números agora chamados complexos são apresentados cedo na sua *Algebra*, para que o leitor se familiarizasse com esta "raiz quadrada muito diferente das outras". (Bombelli, 1966, p. 133,). Bombelli mostrou, ao lidar com os números complexos, estar à frente no seu tempo, uma capacidade de abstracção algébrica superior à dos seus antecessores, que lhe permitiu desenvolver as regras operatórias com esses novos números que surgiam e que ainda não faziam grande sentido. A história mostra-nos que, posteriormente, outros autores tiveram também ainda bastante dificuldade em lidar com os números complexos.

- No segundo livro Bombelli introduz potências algébricas e suas notações e apresenta o método de resolução das equações de primeiro, segundo, terceiro e quarto grau. Todos os coeficientes considerados são positivos, como era corrente na época. Por tal motivo, surgem vários casos a tratar: São 5 tipos de equações quadráticas, 7 de equações cúbicas e 42 de grau quatro. Em cada caso, é explicado o método de resolver a equação em questão e exemplificado o mesmo.

- No livro III inclui problemas para os estudantes praticarem, progressivamente mais difíceis, através das diferentes operações algébricas.

- O livro IV contém aplicações de métodos geométricos à álgebra.

- O livro V contém aplicações de métodos algébricos à resolução de problemas geométricos.

Estes dois últimos livros não foram apresentados tal como Bombelli os pensou. A morte, aos 46 anos, impediu-o de completar estes dois livros, ou pelo menos, de os rever para publicação. Os livros IV e V, julgados perdidos, foram mais tarde descobertos por E. Bortolotti e publicados em 1929. A primeira edição integral da *Algebra* foi publicada em 1966.

Existe, por conseguinte, uma distinção clara entre os primeiros três livros e os dois últimos, sendo que a primeira parte é essencialmente algébrica e a segunda essencialmente geométrica.

Segundo Bortolotti, no prefácio à edição da *Algebra* de 1966,

> (…) nela se apresenta pela primeira vez uma completa sistematização lógica da teoria das equações dos primeiros quatro graus; mas o conceito de informação de toda a obra, a disposição e ordenação da matéria, o procedimento construtivo e demonstrativo essencialmente analítico nela seguido, representa um passo notável na aritmetização da Matemática. (Bombelli, 1966)

Durante a sua estada no Vaticano, Bombelli teve oportunidade de consultar as obras de Diofanto. Embora tivesse sido feito um esforço conjunto de tradução das obras de Diofanto, por Bombelli e o leitor da Universidade de Roma, António Maria Pazzi, este trabalho não foi concluído. Na sua obra Bombelli incluiu alguns problemas enunciados por Diofanto, num total de 143, é clara a influência de Diofanto (Calinger, 1999), não só pelo elevado número de problemas que inclui, mas também pelo carácter abstracto de outros problemas enunciados. Também à semelhança deste, Bombelli utiliza a palavra "tanto" para designar o termo do primeiro grau numa equação, bem como a palavra "potenza" para designar o termo de segundo grau, na 1ª edição, já que no manuscrito é utilizada a palavra "cosa" e "censo", respectivamente, como em Luca Pacioli.

O contributo de Bombelli foi notável no que se refere à notação utilizada[7]: surgem os "parêntesis" no radicando das raízes, inclusive parêntesis duplos e outros, usa o índice de um radical e apresenta uma forma de escrever a potência da incógnita, que foi mais tarde adoptada por Girard e outros, dando origem à moderna representação do expoente numa potência.

Notação Moderna	Publicado por Bombelli	manuscrito por Bombelli
$5x$	$\overset{\underset{\smile}{1}}{5}$	$\overset{\underset{\smile}{1}}{5}$
$5x^2$	$\overset{\underset{\smile}{2}}{5}$	$\overset{\underset{\smile}{2}}{5}$
$\sqrt{4+\sqrt{6}}$	Rq⌊4pRq6⌋	R⌊4pR6⌋
$\sqrt[3]{2+\sqrt{0-121}}$	Rc⌊2pRq⌊0m121⌋⌋	R^3⌊2pR⌊0m121⌋⌋

Quadro 3 Alguns exemplos da notação de Bombelli

- ## Os números complexos na *Algebra*

Vejamos então com mais cuidado todo o trabalho que antecede a apresentação dos números complexos.

Bombelli introduz todas as definições e operações que utiliza: o quadrado de um número, o cubo, outras potências de um número, extracção da raiz quadrada e da raiz cúbica, todas as operações com radicais, sempre com inúmeros exemplos numéricos.

[7] Imagem disponível em http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Bombelli.html

É assim que chega à divisão de um número por um trinómio composto por um número e duas raízes cúbicas compostas. Depois de exemplificar a regra, surge então a descrição das condições em que foram encontrados os números imaginários. Podemos ler na página 133 da *Algebra* de Bombelli:

> Encontrei um outro tipo de raiz cúbica composta muito diferente das outras, que nasce no capítulo do "cubo igual a tanto e número, quando o cubo da terça parte do tanto é maior que o quadrado da metade do número, como nesse capítulo se demonstrará, (…) porque quando o cubo do terço do tanto é maior que o quadrado da metade do número, o excesso não se pode chamar nem mais nem menos, pelo que lhe chamarei mais de menos [+ $\sqrt{-1}$], quando se adicionar e menos de menos quando se subtrair. (…) E esta operação é necessária (…) pois são muitos os casos de adicionar onde surge esta raiz, (…) que poderá parecer a muitos mais sofisticada que real, tendo eu também essa opinião, até ter encontrado a sua demonstração em linha (…) mas primeiro tratarei de os multiplicar, escrevendo a regra de mais e de menos:
>
> | | |
> |---|---|
> | Mais por mais de menos faz mais de menos | $+1\times\ i=i$ |
> | Menos por mais de menos faz menos de menos | $-1\times\ i=-i$ |
> | Mais por menos de menos faz menos de menos | $+1\times\left(-i\right)=-i$ |
> | Menos por menos de menos faz mais de menos | $-1\times\left(-i\right)=i$ |
> | Mais de menos por mais de menos faz menos | $i\times i=-1$ |
> | Mais de menos por menos de menos faz mais | $i\times\left(-i\right)=+1$ |
> | Menos de menos por mais de menos faz mais | $-i\times i=+1$ |
> | Menos de menos por menos de menos faz menos. [8] | $-i\times\left(-i\right)=-1$ |

Bombelli usou a notação 4.p.R[0 $\tilde{m}$ .4] para se referir a 4+ $\sqrt{-4}$ e para 4 - $\sqrt{-4}$ usou 4. $\tilde{m}$ .R[0 $\tilde{m}$ .4].

Na edição manuscrita, Bombelli utilizou o p. di m. (piú di meno), que representa exactamente o mesmo que "*i*"introduzido por Euler, e mais tarde seguido por Gauss, e que foi generalizado.

Bombelli acrescenta ainda que "adverte-se que este tipo de raiz cúbica surge sempre acompanhada do binómio com o seu resíduo" (p. 134)[9] , isto é, quando aparece a soma, também aparece a diferença.

As 11 (!) páginas seguintes são exclusivamente dedicadas à multiplicação destes novos números, continuando até à página 150 exclusivamente com operações algébricas com os

[8] À direita da regra dos sinais enunciada por Bombelli escrevemos a mesma em notação actual

[9] Bombelli refere-se ao conjugado de um números complexo.

mesmos. Que Bombelli estava avançado no seu tempo em relação às operações com complexos é claramente evidente quando recordamos erros cometidos séculos mais tarde, como veremos à frente.

A verdade é que a falta de sentido que envolvia estes números fez com que não fossem facilmente aceites, não merecendo qualquer tipo de consideração por alguns matemáticos importantes e criando confusão a outros, na tentativa de lidar com eles.

Bombelli foi o último dos algebristas bolonheses, com o qual se abre a era moderna na História da Matemática.

Segundo o "Biographical Dictionary of Mathematicians" (1991), Bombelli terá morrido em 1572.

3.3 Desenvolvimentos posteriores

- **Algumas notações utilizadas**

Em 1629, o matemático francês Albert Girard usou o símbolo $\sqrt{-2}$ ao calcular as raízes de determinada equação. A sua obra, *Invention Nouvelle en L'Algebre* influenciou gerações de matemáticos, incluindo Descartes. (Oliveira, 2000). Girard generalizou, sem demonstrar, o actualmente conhecido por Teorema Fundamental da Álgebra, embora tal cause algum espanto, já que havia classificado as soluções imaginárias como *inexplicáveis*. São suas as palavras:

> Pode-se perguntar para que servem estas soluções que são impossíveis; eu respondo, por três coisas: para a certeza da regra geral, e que não há outras soluções, e pela sua utilidade: a utilidade é fácil, porque ela serve para a invenção de soluções de equações semelhantes, (…) (Oliveira, 2000, p. 10)

Segundo Cajori (1993), Euler foi o primeiro a utilizar a letra *i* para representar $\sqrt{-1}$, em 1777, embora ela não tenha sido muito usada até 1801, quando Gauss começou a utilizá-la sistematicamente, seguido de Kramp e outros.

Euler é também o responsável pela descoberta da igualdade $e^{i\pi} = -1$, que relaciona três quantidades com um papel histórico no desenvolvimento da Matemática: *e*, o número de Nepper, π e *i*, sendo que, nessa data, Euler ainda não utilizava o símbolo *i*.

Mas o facto é que esta notação, *i*, demorou muito tempo a ser adoptada. Em 1842, sessenta e cinco anos depois de Euler a ter usado pela primeira vez, ainda eram usadas outras notações.

Por exemplo, segundo Cajori (1993), A. De Morgan usava *k* para representar $\sqrt{-1}$, em 1842. Também na teoria electromagnética é ainda usada a letra *j* para representar $\sqrt{-1}$.

Na obra de Euler, *Elementos de Álgebra*, publicada em 1770, há falhas na multiplicação de dois números imaginários puros, lendo-se, nomeadamente que $\sqrt{-2}.\sqrt{-3}=\sqrt{6}$. Contudo, não é de crer que Euler possa ter sido responsável por esses erros, dado que estava já cego quando preparou a obra. O facto de o livro ter sido ditado a uma assistente pode ter sido a razão para a existência dessa falha (Cajori, p.127,1993).

O trabalho de Euler foi relevante no desenvolvimento da Análise Complexa. A ele se deve a dedução das identidades:

$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2\sqrt{-1}}$$
$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

Outro dos exemplos desse seu papel relevante é a resolução de uma questão acerca dos logaritmos dos números negativos e complexos.

Leibniz e Johann Bernoulli (1667-1748), na sua importante correspondência entre 16 de Março de 1712 e 29 de Julho de 1713, esgrimiam argumentos para definirem o logaritmo de um número negativo (que requer, evidentemente, a presença da unidade imaginária $\sqrt{-1}$), do qual resultavam resultados diferentes. Enquanto Bernoulli sustentava que log(–a) = log(a), Leibniz expunha as razões pelas quais pensava que log (-a) = log (a) + log(-1), onde log(-1) era uma quantidade imaginária.

Euler interveio, refutando um por um os argumentos dos seus colegas e afirmando que "cada número tem uma infinidade de logaritmos. Todo o número real positivo tem uma infinidade de logaritmos complexos, onde só um é real". (Verley, p. 125,1981)

De resto, sabe-se que o interesse de Leibniz pelos números complexos chegou ao ponto de ter estudado a *Algebra* de Bombelli e ter também discordado de que a fórmula de Cardano não se aplicava ao caso "irredutível" de uma equação cúbica. Afirma ainda Collette que

> Encontra-se também nos trabalhos de Leibniz a decomposição de x^4+a^4 na forma moderna $\begin{array}{ll} x_1=-a\sqrt{+i} & x_2=a\sqrt{+i} \\ x_3=-a\sqrt{-i} & x_4=a\sqrt{-i} \end{array}$ donde $i^2=-1$. A propósito

> desta decomposição, Leibniz, em 1702, descreve estas raízes imaginárias em termos tingidos de "teologismo": Um recurso elegante e maravilhoso para a inteligência humana, um nascimento "contra natura" no campo do pensamento, quase um anfíbio entre o ser e o não ser. (Collette, 1979, p. 131)

Caspar Wessel no seu ensaio *Om Directionens analytiske Betegning*, apresentado à Academia Dinamarquesa em 1797 designa por +1 a unidade rectilínea positiva e por +ϵ outra unidade, perpendicular à primeira e com a mesma origem. Escreve ainda que $\sqrt{-1}$ = ϵ.

$\sqrt{-1}$ teve um papel fundamental no desenvolvimento da álgebra. Tal está patente nos comentários de De Morgan, em 1849:

> O uso, chamado de *experimental*, de √-1, sob o nome de quantidade impossível, está demonstrado. (…) Assim que esteja mostrado que um resultado particular não tem existência como quantidade, é permitido, por definição, que tenham existência de outro tipo, do qual não são colocadas questões particulares, pois as regras sob as quais se descobriu que os novos símbolos dão resultados verdadeiros, não são diferentes das aplicadas aos antigos símbolos. (Cajori, 1993, p. 131)

Cauchy, começou também a usar $\sqrt{-1}$ nas suas obras, referindo-se a ele como " a linha simbólica $\sqrt{-1}$, aquela que os alemães substituem por *i.* " (Cauchy, 1938, Tomo XIV, p. 94). Na sua *Memoire sur la theorie des équivalences algébriques* utiliza também a palavra "módulo" de um número complexo no sentido que lhe atribuímos nos dias de hoje, bem como o termo "argumento". Esta teoria das equivalências algébricas, substitui a "teoria dos imaginários", escreve o próprio em subtítulo. Nesta teoria agora apresentada, Cauchy repudia o uso da letra *i* como representação de $\sqrt{-1}$. Afirma, "A letra *i* irá representar uma quantidade real, mas indeterminada (…); transformaremos o que chamamos de *equação imaginária* numa equivalência algébrica, relativa à variável *i* e ao divisor i^2+1 " (Cauchy, 1938, Tomo XIV, p. 101).

Na *Mémoire sur les Quantités Geométriques*, Cauchy faz referência a Buée e a Argand, como autores que, partindo da ideia de que $\sqrt{-1}$ é um símbolo de perpendicularidade, deram aos números *imaginários*[10] uma interpretação geométrica e acrescenta que vai abandonar completamente a utilização do símbolo $\sqrt{-1}$ (Cauchy, 1938, p. 176) e substituir a teoria das expressões *imaginárias* pela teoria das quantidades *geométricas*. (o itálico é do próprio Cauchy).

[10] Cauchy utiliza ainda o nome de *imaginários* para se referir aos Números Complexos.

Cauchy denomina por quantidade geométrica o raio vector OA dirigido de O para A, representando-o por r_p. O comprimento do vector, representado por r, é chamado de valor numérico ou módulo da quantidade geométrica r_p. O ângulo p, que indica a direcção do vector OA é o argumento ou o azimute dessa quantidade.

É atribuída a Cauchy a primeira teoria analítica completa dos números complexos.

- **A representação geométrica dos números complexos**

Fig.3 O rosto de Gauss num selo alemão

Argand, Wessel e Gauss[11] são nomes que aparecem ligados à descoberta da representação geométrica dos números complexos, bem como os de Buée, Mourey e Warren, embora estes últimos com menos relevância e divulgação que os anteriores.

- Os trabalhos de Wessel

Wessel, em 1797, terá sido o primeiro a trabalhar a ideia, que ficou na escuridão até 1897, quando dela foi publicada uma tradução francesa, *Essai sur la représentation analytique de la direction*. Por tal motivo, durante muito tempo atribuiu-se a Argand essa descoberta, apresentada por ele em 1806, embora apenas em 1813 ela tenha sido conhecida, após uma publicação nos *Annales de Mathematiques*. Existem referências (Crowe, 1967) a que provavelmente Gauss terá descoberto esta representação ao mesmo tempo que Wessel. Evidentemente, o facto de Gauss ter publicado os seus trabalhos em 1831, terá chamado a atenção sobre as obras dos autores pouco conhecidos até então, já que Gauss escrevia com a "autoridade de alguém que tinha adquirido fama através de trabalho impressionante, (...) " (Crowe, 1967, p. 11)

O que pensou Wessel?

Wessel escreveu uma teoria sobre o cálculo de linhas determinadas em grandeza e direcção, de modo a exprimir um e outro com os símbolos com os quais se efectuassem os cálculos.

O próprio Wessel afirma:

> " Procuro um método que evite as operações impossíveis[12] depois utilizá-las-ei para me convencer da generalidade de certas fórmulas conhecidas" (Wessel, 1897, p. 6)

Na sua obra pode ler-se:

> (...) proponho-me a:
> 1º Dar as regras das operações desta natureza;
> 2º Mostrar com alguns exemplos a aplicação aos casos em que os segmentos se encontram no mesmo plano;

[11] Imagem disponível em http://members.tripod.com/jeff560/index.html
[12] As "operações impossíveis" são as operações com Números Complexos.

3º Determinar por um novo método, não algébrico, a direcção dos segmentos situados em planos diferentes;
4º deduzir a resolução geral dos polígonos planos e dos polígonos esféricos;
5º deduzir da mesma maneira as fórmulas conhecidas da trigonometria esférica (Wessel, 1897,p. 6)

Wessel começa por introduzir o conceito de linhas dirigidas e as regras de multiplicação e adição, para depois se referir a +1 como a unidade rectilínea positiva e a $\sqrt{-1}$, que designa por +ε, como sendo a perpendicular sobre a unidade, tendo a mesma origem. Wessel define a adição e a multiplicação do que chamamos hoje vectores.

Wessel representava por $\mathrm{I}^{-}{}'$ o número complexo conjugado de I'. (Wessel, 1897, p.20)

São de Wessel as palavras:

> A adição de dois segmentos faz-se da seguinte maneira: colocámo-los de modo que um se inicia onde termina o outro; depois unimos por um novo segmento os dois extremos da linha quebrada assim obtida: este novo segmento chama-se a soma dos segmentos dados (Wessel, p. 7)

Na página 9 é também explicada a multiplicação de segmentos:

> O produto de dois segmentos, (…), forma com um dos factores o mesmo que o outro factor forma com o segmento positivo ou absoluto que tomámos igual a 1;
> Tal significa que:
> 1º Os factores devem ter uma direcção tal que possam ser colocados no mesmo plano que a unidade;
> 2º Quanto ao comprimento, o produto deve estar para um dos factores como o outro está para a unidade;
> 3º No que diz respeito à direcção do produto, se o fizermos a partir da mesma origem que a unidade positiva, os factores e o produto, este deve estar no mesmo plano que a unidade e os factores e deve estar desviado de um dos factores o mesmo que o outro está da unidade, no mesmo sentido, de modo que o ângulo da direcção do produto em relação à unidade positiva seja igual à soma dos ângulos de direcção dos factores

Wessel apresenta somente dois exemplos de aplicação da sua teoria, na demonstração do teorema de Cotes, e na resolução de polígonos planos.

- Argand

Em 1806 surge o trabalho desenvolvido por Jean Robert Argand, reconhecido em 1813, como já foi dito. Na obra, de título *Essai sur une maniére de représenter Les Quantités Imaginaires dans les constructions Géometriques,* este autor explica como representar geometricamente a adição e a multiplicação de números complexos e de como aplicar essa representação a inúmeros teoremas, embora não tenha discutido a aplicação dos seus métodos ao espaço tridimensional.

Argand, em 1806, escreve ~ para representar $+\sqrt{-1}$ e $\not\sim$ para representar -$\sqrt{-1}$. É o primeiro a utilizar o termo "absoluto" para designar o valor absoluto de um número positivo, negativo ou Complexo. Mais à frente, na sua obra, utiliza a palavra "módulo" no mesmo sentido de valor absoluto, antecipando Cauchy, a quem geralmente é atribuída a primeira utilização do termo. Porém foi Weierstrass quem, em 1841, primeiro introduziu o simbolismo das duas barras verticais para valor absoluto, como em $|z|$. (Cajori, 1993). Algumas notações utilizadas por Argand são percursoras das utilizadas por Hamilton, antecipando assim algumas das ideias modernas e abstractas nesta teoria (Jones, 1991).

Argand enuncia os princípios da sua teoria, dizendo que "o método que vou expor assenta sobre dois princípios de construção, um para a multiplicação, outro para a adição de linhas dirigidas (…)" (Argand, 1971, p.60)

Argand tenta determinar o meio proporcional entre duas quantidades de sinais diferentes, ou seja, a quantidade que satisfaz a proporção $+1 : +x :: +x : -1$, o que poderia ser escrito nos dias de hoje assim: $\frac{1}{x} = \frac{x}{-1}$. Conclui então que x não pode ser igualado nem a um número positivo nem a um número negativo. Argand pensa então em combinar a ideia de valor absoluto com a ideia de direcção, procurando assim um lugar para esta quantidade, "na escala das quantidades positivas ou negativas" (Argand, 1806, p. 6)

A representação pensada surge na página seguinte do seu livro, onde Argand explica qual a linha que considera como a unidade positiva ($\overline{KA}$), a unidade negativa ($\overline{KI}$) e finalmente, qual o lugar de $+\sqrt{-1}$ e de $-\sqrt{-1}$, respectivamente representados por $\overline{KE}$ e $\overline{KN}$.

Temos, portanto, a ideia da representação dos números complexos:

> (…) vemos que toda a linha paralela à linha primitiva é expressa por um número real, aquelas que lhe são perpendiculares são expressas pelos números imaginários da forma $\pm a\sqrt{-1}$ e, por fim, aquelas que têm outra

> direcção são expressos pelos números imaginários na forma $\pm a \pm b\sqrt{-1}$, que se compõem de uma parte real e de uma parte imaginária. Os nomes de *real* e *imaginário* não estão de acordo com estas noções que expusemos. É superficial observar que *impossíveis* e *absurdos,* que por vezes encontrámos, são ainda mais contraditórios (…). Somos conduzidos a empregar outras denominações. (Argand, 1806, p. 12-13)

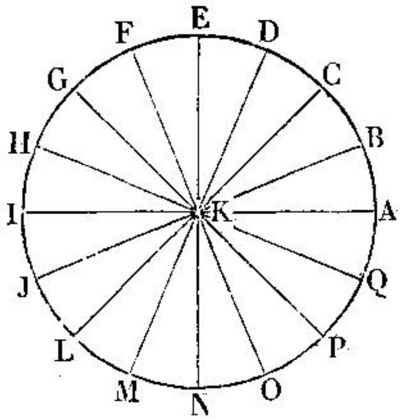


Fig 4 Diagrama para operacionalizar os complexos, segundo Argand.

Imagem digitalizada de *Essai sur une maniére de représenter Les Quantités Imaginaires dans les constructions Géometriques*, (Argand, 1803,p.7)

Argand adoptou a terminologia de *linhas dirigidas* para se referir à representação dos números complexos, mostrou como adicionar e multiplicar as "linhas dirigidas" e também como obter resultados, de modo simples, já conhecidos, utilizando a ideia de "linhas dirigidas". Por exemplo a igualdade:

$\cos na \sim \sin na = (\cos a \sim \sin a)^n$ é demonstrada com recurso simples à representação geométrica:

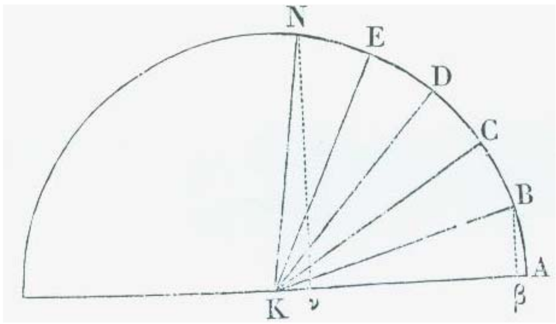


Fig. 5 A multiplicação de Complexos

"Sejam AB, BC, …,EN (figura 5[13]) *n* arcos. Temos:

$\overline{KN} = \overline{KB}^n$ [resultado anteriormente provado];

mas

$$\overline{KN} = \overline{K\upsilon} + \overline{\upsilon N} \text{ e } \overline{KB} = \overline{K\beta} + \overline{\beta N};$$

então $\overline{K\upsilon} + \overline{\upsilon N} = \left(\overline{K\beta} + \overline{\beta B}\right)^n$. (1)

Façamos o arco AB = *a* e, por consequência $\overline{AN} = na$,

$\overline{K\beta} = \cos a$ $\qquad$ $\overline{K\upsilon} = \cos na$

$\overline{\beta B} = \sim \sin a$ $\qquad$ $\overline{\upsilon N} = \sim \sin na$

[13] Imagem digitalizada de *Essai sur une maniére de représenter Les Quantités Imaginaires dans les constructions Géometriques* , (Argand, 1803,p.25)

Da equação anterior (1) temos

$$\cos na \sim \sin na = (\cos a \sim \sin a)^n \text{ “}$$

(Argand, 1806,p.25-26)

Argand acrescenta ainda que este teorema em notação ordinária se exprime pela igualdade

$$\cos na \pm \sqrt{-1}.\mathrm{sen}na = \left(\cos a \pm \sqrt{-1}.\mathrm{sen}a\right)^n$$

- Gauss

Os trabalhos de Gauss estão publicados em alemão ou latim, o que nos dificulta a sua leitura directa. Os estudos relacionados com a representação dos números complexos estão publicados na sua obra *Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio secunda*, de 1831. Esta publicação veio chamar a atenção para os trabalhos de Wessel e Argand, anteriormente publicados, dada a importância do nome de Gauss nos meios científicos. É neste trabalho que surge pela primeira vez a forma $a+bi$ e o termo “número complexo”. Gauss não gostava de publicar resultados de pesquisa que não estivessem completamente amadurecidos (Boyer, 1996), pelo que a diferença de tempo decorrida entre as publicações deste autor e a de Wessel e Argand poderá dever-se a este sentido de perfeccionismo de Gauss. A título de curiosidade, fica registado o lema de Gauss, a propósito desta sua qualidade: PAUCA SED MATURA.

As investigações de Gauss sobre a representação dos números complexos foram no mesmo sentido das de Wessel e Argand. Em muitos países, o Plano de Gauss corresponde ao que noutros se diz apenas Plano de Argand, mas com maior justiça se deveria dizer Plano de Wessel – Argand – Gauss.

As discussões sobre o alargamento da teoria ao espaço tridimensional continuaram, atingindo o auge com Hamilton e a descoberta dos quaterniões.

3.4 Os números complexos em Portugal

Em Portugal, os matemáticos não ficaram indiferentes aos novos números e ao estudo das suas propriedades; antes manifestaram o seu interesse e estudaram as propriedades destes novos números. Vejamos alguns contributos dados no nosso país.

- **Pedro Nunes**

Segundo Silva Dias (1982), no século XVI a Faculdade de Medicina desempenhou, em Portugal, o papel de uma Escola Politécnica. É neste contexto que se enquadra, em 1544, a nomeação de Pedro Nunes (que havia feito estudos médicos em Lisboa) para a regência de disciplinas de Matemática e, ainda segundo o mesmo autor, foi deste modo que Pedro Nunes difundiu (muitas vezes através de uma crítica contundente) os autores italianos na universidade/sociedade portuguesa. A propósito das obras de Cardano e Tartaglia, Pedro Nunes afirma no seu *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria* que "Este autor [Cardano] ao princípio tinha ordem, mas depois escreveu confusamente " (Nunes, 1950,p.393) e afirma também que

> Despues destos Nicolao Tartalla muy gran maestro de cuenta y bue͂ Geometra, noto los yerros de entrambos, en los libros que compuso, y despues de su muerte, vino al presente vn libro, que en su casa se hallo, en el qual separa[da]mente trata de Algebra. El qual libro en la orden, y clareza, y en el estylo muestra ser suyo, principalmente que va en el allegando lo que en los otros libros auia escripto, y por el se puede muy mejor depre͂der esta arte, que por los libros de Fray Lucas y Cardano. Pero todauia no es obra absoluta, porque remete los Lectores a los otros libros suyos, y presuppone algunas Reglas que no fueron por el demonstradas, ny se hallan en los dos libros de Euclides, del qual toda esta doctrina procede. Y tambien tiene otra falta, que los menos casos que trae, en que va praticando el Algebra, son* *P. 324 r. de Arithmetica, y los mas son de Geometria, muy difficiles, y de operacion muy prolixa, y en los quales el mismo se embaraça muchas vezes, como abaxo monstrare, siendo el muy exercitado en esta arte.

(Nunes, 1950,p.393)

Com estes comentários fica claro que Pedro Nunes mostra conhecer algumas das mais importantes discussões Matemáticas do seu tempo. Na sua carta aos leitores incluída no *Libro de Álgebra*, Pedro Nunes afirma que neste seu livro existe ordem, que faz as referências necessárias e que demonstra todas as regras que usa, só se referindo a Euclides e a mais nenhum autor. De facto, é reconhecido nas obras de Pedro Nunes, um alto nível de rigor.

Segundo Bosmans (1908), o capítulo 1 do *Libro de Álgebra*, juntamente com o postface, é suficiente para fazer de Pedro Nunes um mestre. Ainda segundo este autor, Pedro Nunes indicou uma fórmula para a resolução da equação de 3º grau mais prática do que a de Tartaglia, mas infelizmente não conseguiu encontrar uma regra geral para determinar com toda a certeza o cubo a subtrair aos dois membros, já que a regra apresentada por Pedro Nunes exigia o conhecimento prévio de uma raiz da equação.

- **Anastácio da Cunha**

Anastácio da Cunha (1744-1787) terá sido um dos primeiros matemáticos em Portugal a referir os números complexos na sua obra *Principios Mathematicos*, publicada pela primeira vez em 1790. Esta obra, não sendo a única de Anastácio da Cunha, foi a mais marcante da sua carreira, acabada de publicar só após a sua morte. Pode ler-se na introdução da edição fac-simile:

> O estilo é conciso, mesmo lacónico, e assim se compreende que, no curto espaço de trezentas e duas páginas, o Autor vá dos princípios da geometria euclidiana às questões e aplicação da análise infinitesimal (Anastácio da Cunha, 1987a,p. XX)

A referência aos números complexos surge aquando da resolução das equações de segundo grau:

> Se $\frac{1}{4}a^2 - b^2$ for um número negativo, fará de $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$ uma expressão absurda; mas os matemáticos modernos quando encontram semelhantes expressões, nem por isso deixam de continuar o cálculo: e mostra a experiência que eles fazem bem, com tanto que se observem certas cautelas. Uma consiste em fazer sempre $\sqrt{-m}.\sqrt{-n} = -\sqrt{mn}$; outras em sujeitar a interpretação destas expressões metafóricas às condições do problema e da razão.
>
> Estas e outras expressões absurdas indicam que alguma coisa impossível se supôs possível. Por exemplo, se se pedem as raízes de $x^2 - 6x + 11$, a resposta é $3 \pm \sqrt{-2}$; o que na realidade quer dizer é que $x^2 - 6x + 11$ não tem raízes, o que os Matemáticos também exprimem dizendo que tem as raízes imaginárias $3 \pm \sqrt{-2}$. (Cunha, 1987a, p.125)

As referências introduzidas por Anastácio da Cunha teriam sido as únicas a ser seguidas, segundo Almeida, L. C. (1891/92) pelos restantes matemáticos da época até meados do século XIX. Mas a verdade é que, já nos anos 80 do séc. XIX, F. Gomes Teixeira tinha introduzido em Portugal, uma nova teoria destes números, embora tal não seja referido por Luís da Costa Almeida no mesmo artigo. Uma vez que a publicação deste artigo é posterior à publicação de Gomes

Teixeira, ficam por esclarecer quais terão sido as razões que levaram Luís da Costa Almeida[14] a não se referir a Gomes Teixeira.

É em *O Instituto* que Luís da Costa Almeida apresenta vários artigos sobre a "teoria das quantidades geométricas", que segundo este, não estaria "a ser aproveitada na parte mais elementar das ciências". (Almeida, L. C., 1891/92, p. 563). A colectânea dos artigos referentes a este assunto tratado pelo autor, ocupa um total de oitenta páginas, distribuída por vários números. O artigo denomina-se "Primeiras noções sobre o cálculo das quantidades geométricas" e nele Luís da C. Almeida começa por expor as dificuldades que surgem no ensino da Álgebra, nomeadamente no ensino das quantidade negativas (números negativos) e no facto de se usar para as representar o mesmo sinal que representa a subtracção.

Afirma ainda que, em relação aos números complexos, " o mais que se faz ainda hoje é repetir o conceito, há muito formulado por um autor"[15]

Os números complexos são designados por quantidades geométricas (à semelhança da terminologia utilizada por Cauchy) ou quantidades complexas, preferindo o autor a primeira denominação.

- **O Contributo de F. Gomes Teixeira**

Gomes Teixeira aborda pela primeira vez o assunto dos números imaginários numa memória intitulada *Sur la théorie des imaginaires*, publicada em 1883, no jornal *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*. (Tome VII, p.417-427). Mais tarde, em 1885, publica no *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas*, volume VI, uma artigo intitulado "Introducção a theoria das funções" no qual inclui a "Theoria analytica dos imaginários", que é a versão portuguesa da memória anterior. E é com este mesmo título, e com leves alterações de conteúdo, que o assunto é abordado pela primeira vez na 1ª edição do seu *Curso de Analyse Infinitesimal – Cálculo Differencial*, publicada em 1887.

Na 1ª memória de 1883, Gomes Teixeira começa por atribuir a Cauchy a teoria analítica dos imaginários, referindo as duas memórias por ele publicadas sobre o assunto. E, como em Cauchy, o seu tratamento passa pela teoria das congruências, para clarificar o sentido atribuído a $\sqrt{-1}$.

Por curiosidade, vamos transcrever do *Curso* a definição de "adicção côngrua" que Gomes Teixeira nos dá e que denota já a dificuldade em lidar com os números complexos:

[14] Luís da Costa Almeida (1841-1919) foi professor na Universidade de Coimbra, publicou artigos sobre equações de derivadas parciais e suas aplicações na mecânica e outros artigos expositivos, como é o caso do artigo a que acima nos referimos. Foi ainda presidente da Câmara de Coimbra, Director da Faculdade de Matemática e membro do Conselho Superior de Instrução Pública. (Silva, 2005).

[15] Refere-se a José Anastácio da Cunha

> Consideremos os polinómios f(i) e f_1(i) inteiros relativos a i e definamos as operações que se podem fazer com eles.
>
> Chamaremos adição congrua à operação que tem por fim procurar o resto da divisão por i^2+1 da soma dos restos dos polinómios dados. Empregaremos para a indicar o sinal +!. De modo que f(i)+!f_1(i) representa o resto da divisão por i^2+1 da soma ordinária dos restos de f(i) e f_1(i). Se os polinómios dados são *a+bi* e *a'+b'i* a adição congrua coincide com a soma ordinária. (Gomes Teixeira, 1987, pág 4)

Gomes Teixeira define as outras operações congruas: a subtracção, a multiplicação, a divisão, a potencia e a extracção da raiz congrua de índice n, que lhe permite afirmar que "!$\sqrt{-1}$ indica o resto cujo quadrado sendo dividido por i^2+1 dá o resto -1, de modo que se pode escrever !$\sqrt{-1} \equiv i$ e temos assim o significação do imaginário $\sqrt{-1}$" (Gomes Teixeira, 1887,p.9).

Gomes Teixeira incluiu também logo na 1ª edição do seu manual a teoria geométrica dos imaginários, que atribui principalmente a Argand. Utiliza também o método das equipolências de Bellavitis.

É curioso notar a tentativa de Gomes Teixeira em introduzir no conjunto dos números complexos uma relação de ordem. Tal tentativa aparece unicamente na 2ª edição do seu *Curso de Analyse Infinitesimal – Cálculo Differencial*, publicada em 1890, onde se lê:

> Diz-se que *a+b* $\sqrt{-1}$ é maior do que *c+d* $\sqrt{-1}$, ou que *c+d* $\sqrt{-1}$ é menor que *a+b* $\sqrt{-1}$, quando é $a^2+b^2>c^2+d^2$, (Gomes Teixeira, 1890, p. 10)

O prestígio de Gomes Teixeira era, aliás, internacional. Numa nota de rodapé do *Curso* pode ler-se:

> Esta memória [refere-se a *Sur la théorie des imaginaires*] foi publicada nos *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*. (tome VII-1883), foi transcripta no jornal *Mathesis* (tomo III) e foi traduzida em italiano pelo Snr. Gastaldi para a revista *Rivista di matemática* (tomo V).
>
> (Gomes Teixeira, 1887,p. 4)

percebendo-se assim que noutros países era conhecido o trabalho deste matemático.

Capítulo IV·

Análise de Manuais Escolares

A leccionação do tema "números complexos" conheceu, ao longo dos diferentes programas do ensino liceal, e depois do ensino secundário, variadas abordagens ou mesmo abordagem nenhuma, conforme referimos no capítulo II.

Estando inicialmente o seu estudo incluído na "Evolução do conceito de número" (ver programa de 1954), este tópico ganha, com Sebastião e Silva, em 1974, um lugar próprio, prevendo-se a sua abordagem do ponto de vista das estruturas algébricas, isto é, como Corpo. Esta abordagem viria a ser abandonada em 1997, onde se previa a sua introdução a propósito de problemas sobre resolubilidade algébrica. Uma vez que neste programa não se estudavam as estruturas algébricas, a abordagem dos números complexos estava prevista através da ampliação de $\mathbb{R}$.

Ora a definição de um Programa de Estudos e de Conteúdos acarreta – num país como Portugal que se rege pela existência de programas oficiais ditados nacionalmente pelo Ministério da Educação e sujeitos, como tivemos oportunidade de constatar, a reformas e/ou reajustamentos cíclicos – possíveis problemas de interpretação das directiva. No entanto, e no caso do presente estudo que se refere particularmente à situação nacional, essa interpretação está normalmente a cargo de uma minoria de professores que, pelas mais diversas razões se dispõem a transpor a sua visão/interpretação dos Programas para a forma de um texto que, desejavelmente, recebe a aceitação dos seus pares: são os manuais escolares e que, uma vez adoptados, costumam ditar (mais do que os próprios Programas) a prática lectiva dos docentes.

Se quando o livro era “único” existia uma interpretação do Programa aprovada/revista pelo ministério, o mesmo não se passa com a liberação da adopção de manuais, proliferando nos dias de hoje as mais diversas interpretações do Programa e a correspondente apresentação de manuais.

Estando preocupada com os testemunhos relativos à forma como o conceito de Número Complexo tem vindo a ser transmitido aos alunos, tenho inevitavelmente e também pelas razões apresentadas anteriormente, que passar pela análise dos manuais escolares.

Mas afinal o que é um “Manual escolar”?

Segundo o Decreto-Lei 369/90 de 26 de Novembro,

> entende-se por manual escolar o instrumento de trabalho, impresso, estruturado e dirigido ao aluno, que visa contribuir para o desenvolvimento de capacidades, para a mudança de atitudes e para aquisição dos conhecimentos propostos nos programas em vigor, apresentando a informação básica correspondente às rubricas programáticas, podendo ainda conter elementos para o desenvolvimento de actividades de aplicação e avaliação da aprendizagem efectuada.

Este decreto prevê também a constituição de comissões científico-pedagógicas para apreciação dos manuais escolares, que integrarão especialistas de reconhecida competência científica e pedagógica:

> Artigo 6º
>
> Apreciação
>
> 1 – O Ministério da Educação, (…) constitui comissões científico-pedagógicas para apreciação da qualidade dos manuais escolares, (…)
>
> 2 – As comissões referidas no número anterior integram especialistas de reconhecida competência científica e pedagógica, que não tenham quaisquer interesses directos em empresas de editoras, e organizam-se por ciclo de ensino e por disciplina ou área disciplinar.

No entanto, e tanto quanto me foi dado apreciar, não se pode dizer que, no passado recente, exista em Portugal uma grande tradição na análise de manuais escolares. É certo que quando o livro/manual escolar era único existiria certamente uma comissão encarregue da avaliação e correspondente escolha desse texto, mas nessa altura também não seriam tornados públicos os seus concorrentes. Por outro lado, existem artigos dessa época onde pude encontrar a exposição de crítica fundamentada ao manual adoptado, o que leva a supor que também não seria conhecida qualquer análise oficial do livro ou das razões para a sua escolha. Tal é por exemplo, o caso do artigo publicado no nº 46 da *Gazeta de Matemática*, assinado por Laureano Barros, criticando especificamente o livro único ("Compêndio de Álgebra"), para o 3º ciclo, da autoria de António Augusto Lopes. Nesse artigo pode ler-se:

> (…) A circunstância infeliz de serem normalmente postos de lado os livros que, pela sua seriedade e pelo cunho renovador que apresentam, deviam merecer da parte dos professores e das entidades oficiais um carinho e uma protecção dignos deles. (…) Não é nosso objectivo discutir aqui o problema do livro único. (…) a falta de cuidado [do autor] na apresentação na maior parte desses mesmos assuntos.

4.1 Sobre o papel dos manuais na sala de aula

Apesar de haver uma definição oficial de manual escolar, tal não significa que o seu papel se tenha mantido inalterado ao longo dos tempos e das sucessivas reformas.

Até 1979 o livro adoptado nos liceus ou nas escolas técnicas era único, o que significa que era igual em todas as escolas do país. Os autores dos manuais submetiam a sua proposta a apreciação do Ministério da Educação, acompanhado de um relatório de intenções.

Atente-se, a título de exemplo, numa transcrição do relatório sobre o *Compêndio de Álgebra para o 3º ciclo liceal*, por A. A. Ferreira de Macedo, A. Nicodemos Pereira e A. Tenório de Figueiredo (Arquivo do Ministério da Educação, 1955). O manual a que se refere este relatório não foi, todavia, adoptado como livro único.

> No Capº II, números complexos, adoptámos o método genético de exposição. Considerámos este método de alto valor educativo, e a nossa larga experiência comprova-o de um modo completo. Já no presente ano lectivo um de nós o usou no ensino oficial, e mais uma vez teve ocasião de verificar quanto a sua simplicidade e elegância cativam os alunos, não obstante o seu carácter abstracto. As origens praticas desses números são explicadas claramente mais de uma vez e a sua justificação teórica suficientemente assegurada. (Macedo, A., p. 1, 1955)

E ainda, sobre as suas opções:

> Os autores deste compêndio, (…), afirmam categoricamente a sua crença na possibilidade e eficiência da orientação que acabam de preconizar: insistir nas ideias principais, no seu encadeamento e na sua aplicação, <u>reduzindo o mais possível a memorização das demonstrações</u>" (Macedo,A., p. 5,1955) [o sublinhado é do autores]

É ainda incluída, pelos autores, uma possível distribuição do número de aulas pelas diversas matérias do programa:

6º. ANO

Álgebra	50 lições	TOTAL DE AULAS 127 NO ANO LECTIVO
Trigonometria	22 "	
Aritmética	26 "	

7º. ANO

Álgebra	50 lições	TOTAL DE AULAS 130 NO ANO LECTIVO
Trigonometria	23 "	
Geometria	17 "	
Revisões	11 "	

ÁLGEBRA

6º. ano			7º. ano		
Capº. I	3	lições	Capº. XII	4	lições
" II	6	"	" XIII	3	"
" III	5	"	" XIV	2	"
" IV	6	"	" XV	2	"
" V	6	"	" XVI	4	"
" VI	2	"	" XVII	6	"
" VII	6	"	" XVIII	2	"
" VIII	6	"	" XIX	2	"
" IX	5	"	" XX	5	"
" X	1	"	" XXI	5	"
" XI	4	"	" XXII	6	"
			" XXIII	2	"
			" XXIV	1	"
			" XXV	6	"
	50	"		50	"

Quadro 4 – A planificação proposta

Nesta altura, portanto, entendia-se que o manual acompanhava a exposição do professor, contendo as demonstrações que o professor faria no quadro, bem como as definições e as explicações. No final do capítulo existiam exercícios de aplicação dos conteúdos leccionados, onde eventualmente estariam assinalados os de maior dificuldade. O grafismo era, em termos dos parâmetros actuais, o mais severo possível, somente com as figuras consideradas indispensáveis e sem quaisquer espaços "em branco". Geralmente escrito com espaçamento a uma linha e letras de tamanho 10, diferia muito dos manuais que hoje em dia conhecemos. Também era frequente, como o atestam as inúmeras recordações daqueles que viveram essa realidade, o livro transitar ao longo dos anos de irmão para irmão (ou entre primos, ou entre amigos), muitas vezes preenchido com as diversas anotações pessoais de cada aluno por quem passava em determinado ano.

- Com **Sebastião e Silva**, o papel do manual começa a mudar. Em 1958, redigiu, em colaboração com J. da Silva Paulo, dois manuais, fruto da experiência adquirida pelo estudo do que se passava noutros países, em particular na Alemanha e Itália. (Sousa, C., 2002)

Este manual procurava ter um grafismo mais leve e orientar o aluno no seu estudo.[16] Ao integrar a Comissão para a Revisão dos Programas do 3º ciclo (6º e 7º anos), em 1962, Sebastião e Silva intervém no aperfeiçoamento dos programas e na racionalização dos métodos de ensino. Redige então o "Compêndio de Matemática", uma obra em três volumes, complementada com um "Guia para utilização do Compêndio de Matemática", destinados aos professores, com informações de ordem histórica, filosófica e pedagógica relacionadas com os tópicos apresentados no Compêndio. Registam-se ainda as indicações metodológicas, por muitos consideradas ainda hoje particularmente pertinentes e cheias de actualidade.

Com esta "nova" filosofia, o autor procurava ainda integrar inúmeros exemplos, diversas citações, o recurso a aplicações concretas para além de exercícios e observações que facilitassem a compreensão dos conceitos, por parte do aluno. Neste ponto reside, porventura, a maior inovação: o manual parecia agora destinar-se fundamentalmente ao aluno (note-se, por exemplo, o cuidado com que é agora introduzida a figura de um Guia para os professores) enquanto que anteriormente a própria austeridade do manual sugeria o seu uso como ferramenta de exposição para o professor a quem, em última instância, caberia tornar o conteúdo mais aprazível na sala de aula. Note-se, por outro lado, que esta mudança de "destinatário" acarreta, contrariamente ao que uma análise menos atenta possa sugerir, uma responsabilização acrescida para o professor.

Estamos convencidas de que o próprio Sebastião e Silva fez acompanhar os seus manuais do tal "Guia" para os professores, pelo reconhecimento da mudança profunda que estava a preconizar.

- Nos anos seguintes – coincidindo com o afastamento forçado pela doença de Sebastião e Silva - a atitude em relação aos manuais escolares sofre, em minha opinião e neste percurso, um retrocesso. Os manuais deixam de conter aplicações a outros ramos da ciência ou à vida real; os exemplos são mecânicos e de aplicação directa dos conhecimentos transmitidos nas mesmas páginas; alguns manuais apresentam ainda falta de rigor e de cuidado na introdução dos novos

[16] Ver a este propósito e ainda neste capítulo *Análise individual de manuais*

conteúdos. Não surge qualquer outro guia para professores semelhante ao de Sebastião e Silva. Anos mais tarde, surgiram alguns anexos aos manuais escolares, falsamente chamados de guias, pois continham somente as resoluções dos exercícios propostos no manual do aluno e, noutros casos, uma proposta de planificação de aulas; faltavam todavia propostas pedagógicas, científicas ou metodológicas.

Pude também constatar, através de diversas conversas informais que mantive com professores que vivenciaram esses tempos, que, por um lado, os professores passaram nessa altura a tomar o manual escolar como guia único, indicador dos programas oficiais, sem verificarem a sua consonância com o programa da disciplina e, por outro lado, o manual escolar foi colocado num segundo plano pelos alunos, usando-o única e simplesmente como livro de exercícios, de treino das matérias/técnicas apresentadas nas salas de aula e não como consulta adicional de ensinamentos teóricos cuja compreensão não teria ficado assegurada pelos ensinamentos recebidos na sala de aula. Note-se ainda, como complemento desta realidade, que é também nesta altura que se começou a recorrer de forma generalizada a explicadores privados. Mais uma vez, conversas informais que tivemos oportunidade de manter com pessoas que eram alunos desses tempos sugerem que, nessa altura, quando não compreendiam o tópico, nem sentiam o à vontade suficiente para interromper a exposição do professor na sala de aula, não recorriam ao manual para esse fim; surgem então os explicadores que, no caso da Matemática, costumavam ser professores reformados (menos pretendidos) ou preferencialmente engenheiros e arquitectos. Relativamente aos professores de Matemática no activo, nesses tempos, cumpre-nos registar que defendiam (conscientemente ou não) uma ética profissional que os levava, quando abordados nesse sentido, a recusar ser explicadores privados de alunos, se bem que a própria legislação era muito severa no que respeita a professores de Matemática no activo darem explicações particulares, o que acentuava essa recusa dos professores.

- Com a Reforma de 1996 e, em grande parte com um grande esforço do Ministério da Educação, assiste-se a uma nova mudança de concepção de manual escolar.

É lançado um programa de Acompanhamento *Local dos Programas de Matemática*, constituída que foi uma equipa de professores que recebiam formação directamente dos autores dos programas oficiais ou de especialistas por esses contactados, promoviam-se ainda reuniões locais, por todo o país, para discussão em torno dos programas. Foram lançadas Brochuras (Funções 10º ano, Geometria 10º ano, Estatística 10º ano, Funções 11º ano, Geometria 11º ano, Funções 12º ano, Probabilidades e Combinatória 12º ano, Trigonometria e números complexos 12º ano, Didáctica e Projectos Educativos) redigidas por especialistas e relativas a cada um dos temas do programa de cada ano escolar. Assistiu-se ainda à publicação periódica de um boletim de reflexão, partilha e divulgação de experiências profissionais, o *InforMat*, com assuntos relevantes relacionados com o programa em vigor. O trabalho desenvolvido pelos Acompanhantes Locais foi, em meu entender, o grande responsável pela introdução das calculadoras gráficas no ensino da Matemática, preconizada fortemente no Programa, a par de outras tecnologias, como sensores, computadores, etc. Na mesma linha directiva de gestão dos programas encontra-se o perfil do *Laboratório de Matemática* e uma diversificação dos instrumentos de avaliação. Surgiram também os chamados *Projectos Educativos*, as composições escritas e outros instrumentos metodológicos, referidos explicitamente no programa. Por experiência própria, sei que os *Temas Transversais* do Programa também eram fortemente discutidos nessas reuniões.

Neste contexto, os professores de Matemática envolvidos neste projecto formativo, tendiam a adoptar uma "nova" atitude: o manual adoptado não é mais confundido com o Programa, como vinha, até então, a acontecer até aí. Os professores eram orientados na comparação entre o manual escolar e o Programa, e a seguirem desejavelmente e de forma autónoma o segundo. Os manuais que promoviam o estudo autónomo, a resolução de problemas, a História da Matemática, a integração da tecnologia começam a evidenciar-se, de modo que o manual conquista um novo lugar na sala de aula, bem para além de "lista de exercícios". As actividades que contêm eram actividades de sala de aula, de descoberta, com questões que aspiravam chegar à construção dos conceitos a partir de uma atitude activa por parte do aluno. O professor, mais do que ensinar, passou a ter que orientar e monitorizar o trabalho do aluno e a mostrar-lhe como gerir o manual escolar.

Também a Associação de Professores de Matemática, no seu relatório *Matemática 2001*, faz a seguinte recomendação quanto ao uso do manual:

> O manual escolar deve ser usado de modo a promover a capacidade de auto-aprendizagem e o espírito crítico dos alunos, por exemplo, através da leitura e análise do texto a propósito do estudo de um conceito ou assunto matemático, da realização de sínteses escritas pelo aluno a partir do estudo no manual, ou da preparação de um tópico (ou actividade) a realizar pelos alunos, seguida da apresentação na aula. (Guimarães et al, 1998, p. 79)

4.2 Análise individual de manuais

- **Questões preliminares**

No capítulo III, a propósito da História Matemática dos números complexos, tivemos oportunidade de relatar o esforço/contributo de diversas personalidades, e também a oportunidade de observar/aprender a combinação de experiências e tentativas que, em diversas épocas e circunstâncias distintas, conduziram finalmente à formação de um corpo de saber que hoje identificamos como "números complexos".

Ora, os episódios da História da Matemática são também, como referimos nas secções anteriores deste estudo, directamente aplicáveis ao ensino. O auxílio da História – mostrando ao professor as revoluções pelas quais a Matemática passou, os principais descobrimentos, os autores que devem ser mais proveitosamente consultados e a forma como a História das Matemáticas concorre para o complemento da História da Matemática em Portugal – oferece vantagens inquestionáveis para a aprendizagem da Matemática. Contudo é, em meu entender, fundamental a consulta e o estudo, por parte dos professores de Matemática, das obras onde cada um dos episódios que conduziram à formação de um conceito está desenvolvido de forma a idealizar-se o caminho mais seguro/profícuo para que se chegue a acertar na transmissão efectiva do saber matemático.

Para compreender melhor a interpretação feita dos programas em vigor serão, de seguida analisados – a respeito do ensino do tópico dos números complexos – em detalhe os manuais escolares mais adoptados em cada reforma. Optou-se por analisar apenas o "livro único", quando este existia.

Além disto, sendo os números complexos um tópico cujo ensino nunca esteve previsto para antes da fase final do ensino liceal/secundário nem se prevê que o venha estar (pelas razões de complementaridade de tópicos que fazem do currículo da Matemática um currículo a longo prazo), acrescentaremos ainda na nossa análise, a assumpção de que a aprendizagem dos números complexos decorre num quadro mental onde faz sentido conhecer-se (introduzir-se ou desenvolver-se) os princípios da dedução e da sistematização dedutiva da Matemática.

Farei, então, de seguida, uma análise detalhada de cada um dos manuais referidos. Tentarei dar uma ideia mais clara das opções de cada autor ou autores, quer gráficas, quer didácticas. Seguindo a mesma metodologia de Ponte (2004), farei, em primeiro lugar uma descrição geral do modo como o tema é abordado, a que se segue uma referência à organização e grafismo e finalmente aos aspectos didácticos.

- Análise do "livro único" adoptado em Portugal para aplicação do Programa Oficial do 6° ano do liceu, em vigor desde 7 de Setembro de 1954

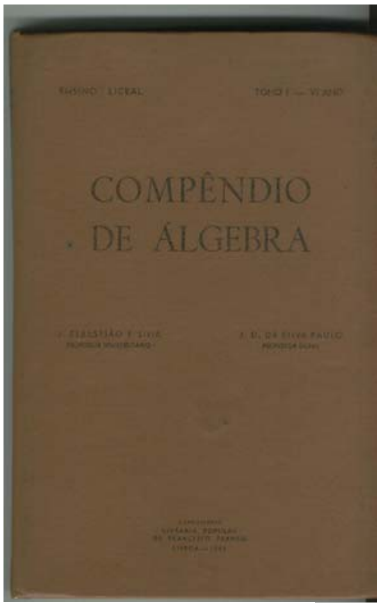


Fig. 6 A capa do manual

Compêndio de Álgebra Tomo I - VI ano, por J. Sebastião e Silva e J.D. da Silva Paulo

Descrição

O livro apresenta 19 páginas, num total de 314, dedicadas ao tema dos números complexos. O capítulo III é iniciado com uma pequena nota histórica, onde são referidos alguns nomes relacionados com o aparecimento destes números. A evolução do conceito de número surge para a contextualização dos números que irão ser apresentados.

Na página 75 pode, em particular, ler-se:

Capítulo III números complexos (4ª generalização do conceito de número)

Surge uma introdução histórica – muito breve – sobre quando e onde aparecem os números complexos e alguns nomes de referência. São citados Cipião del Ferro, Tartaglia, Cardano, Ferrari e Bombelli. Há ainda referências à importância dos números complexos na física e engenharia electrónica, embora não se apontem evidências sobre a forma como essa importância se concretiza. (6 linhas)

Nesta altura não era ainda muito utilizada a História da Matemática como instrumento didáctico, pelo que não surgem tarefas ou exercícios com recurso à História.

São abordados, por esta ordem, os tópicos:

- Impossibilidade de extrair $\sqrt{-9}$
- Princípio da conservação de propriedades formais – números complexos.
- Representação algébrica dos números complexos.
- Operações e igualdade; Relação de grandeza (impossibilidade de definir uma relação de ordem).

É ainda abordada a representação dos números complexos, as operações e a relação de grandeza. É apresentado apenas um exemplo para a adição e outro para a multiplicação.

O capítulo termina com a proposta de exercícios de cálculo algébrico (de aplicação) e de algumas demonstrações. Por exemplo, o exercício nº 16 pede:

I) Deduza uma condição necessária e suficiente para que o inverso do número *a+bi* seja *a- bi*.

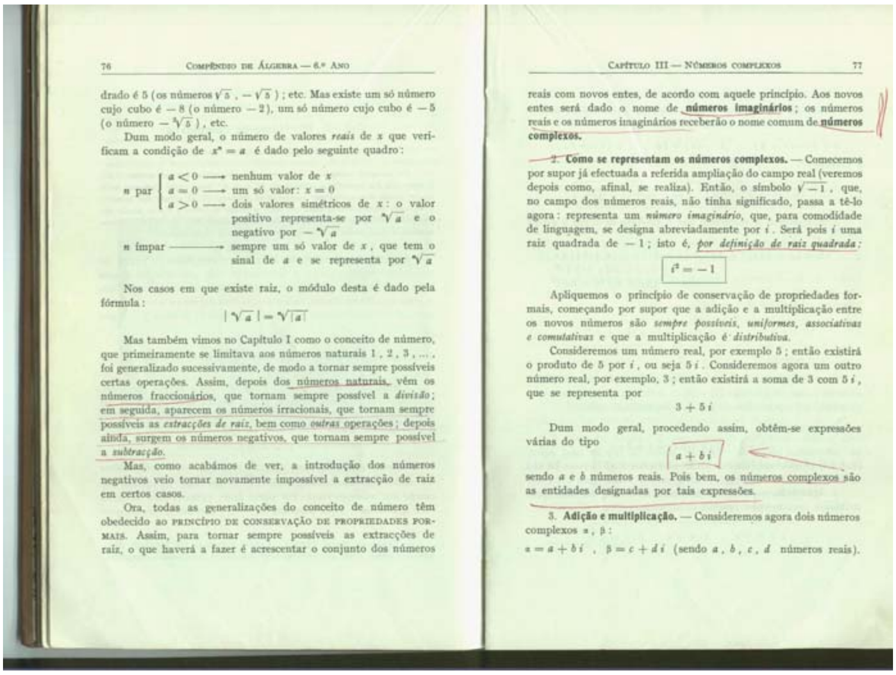
II) Prove que, se α e β verificam tal condição, também a verificam $\alpha \,.\, \beta$, $\alpha : \beta$, e α^n, com *n* natural qualquer (pode utilizar resultados do exercício 14)

Nos Exercícios propostos surgem:

- Operações algébricas simples;
- Algumas demonstrações algébricas;
- Poucos exercícios com visualização geométrica.

Organização e grafismo

Tamanho das páginas: A5



76 COMPÊNDIO DE ÁLGEBRA — 6.º ANO

drado é 5 (os números $\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$); etc. Mas existe um só número cujo cubo é -8 (o número -2), um só número cujo cubo é -5 (o número $-\sqrt[3]{5}$), etc.

Dum modo geral, o número de valores *reais* de x que verificam a condição de $x^n = a$ é dado pelo seguinte quadro:

n par: $a < 0 \longrightarrow$ nenhum valor de x; $a = 0 \longrightarrow$ um só valor: $x = 0$; $a > 0 \longrightarrow$ dois valores simétricos de x: o valor positivo representa-se por $\sqrt[n]{a}$ e o negativo por $-\sqrt[n]{a}$

n ímpar $\longrightarrow$ sempre um só valor de x, que tem o sinal de a e se representa por $\sqrt[n]{a}$

Nos casos em que existe raiz, o módulo desta é dado pela fórmula:

$$|\sqrt[n]{a}| = \sqrt[n]{|a|}$$

Mas também vimos no Capítulo I como o conceito de número, que primeiramente se limitava aos números naturais 1, 2, 3, ..., foi generalizado sucessivamente, de modo a tornar sempre possíveis certas operações. Assim, depois dos números naturais, vêm os números fraccionários, que tornam sempre possível a *divisão*; em seguida, aparecem os números irracionais, que tornam sempre possíveis as *extracções de raiz*, bem como *outras* operações; depois ainda, surgem os números negativos, que tornam sempre possível a *subtracção*.

Mas, como acabámos de ver, a introdução dos números negativos veio tornar novamente impossível a extracção de raiz em certos casos.

Ora, todas as generalizações do conceito de número têm obedecido ao PRINCÍPIO DE CONSERVAÇÃO DE PROPRIEDADES FORMAIS. Assim, para tornar sempre possíveis as extracções de raiz, o que haverá a fazer é acrescentar o conjunto dos números

CAPÍTULO III — NÚMEROS COMPLEXOS 77

reais com novos entes, de acordo com aquele princípio. Aos novos entes será dado o nome de **números imaginários**; os números reais e os números imaginários receberão o nome comum de **números complexos.**

2. **Como se representam os números complexos.** — Comecemos por supor já efectuada a referida ampliação do campo real (veremos depois como, afinal, se realiza). Então, o símbolo $\sqrt{-1}$, que, no campo dos números reais, não tinha significado, passa a tê-lo agora: representa um *número imaginário*, que, para comodidade de linguagem, se designa abreviadamente por i. Será pois i uma raiz quadrada de -1; isto é, *por definição de raiz quadrada*:

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Apliquemos o princípio de conservação de propriedades formais, começando por supor que a adição e a multiplicação entre os novos números são *sempre possíveis*, *uniformes*, *associativas e comutativas* e que a multiplicação é *distributiva*.

Consideremos um número real, por exemplo 5; então existirá o produto de 5 por i, ou seja $5i$. Consideremos agora um outro número real, por exemplo, 3; então existirá a soma de 3 com $5i$, que se representa por

$$3 + 5i$$

Dum modo geral, procedendo assim, obtêm-se expressões várias do tipo

$$a + bi$$

sendo a e b números reais. Pois bem, os números complexos são as entidades designadas por tais expressões.

3. **Adição e multiplicação.** — Consideremos agora dois números complexos α, β:

$\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$ (sendo a, b, c, d números reais).

Fig.7-As páginas 76 e 77 deste manual

O capítulo está dividido em pontos (do 1 ao 14), sem subpontos, com excepção do tema de carácter opcional "Os números complexos como medidas de grandeza", que apresenta 3 subpontos. Cada ponto tem um título, em negrito, sem parágrafo de seguida.

As chamadas de atenção são feitas quer pela mudança da letra para itálico, quer por uma caixa. São poucas as figuras, o texto é denso e o tamanho das letras pequeno.

Análise de alguns aspectos didácticos

Na página 80 é colocada a questão seguinte, seguida de resposta:

> *O que são números complexos?*
> Convém desde já salientar o seguinte: o que interessa essencialmente é que tais números existam e que se saiba trabalhar com eles, porque daí resulta uma grande comodidade no estudo de importantes questões da Matemática e da física. O que eles *são* ou *podem ser* na realidade pouco interessa, contanto que existam e verifiquem as condições devidas. (…)
> Portanto, segundo a convenção adoptada, os números imaginários são as próprias expressões do tipo *a+bi*, com $b \neq 0$, e como tais existem, sem dúvida nenhuma. Exprime-se este facto dizendo que os números imaginários têm *existência simbólica*.
> A escolha do adjectivo "imaginário" para distinguir este números é apenas uma reminiscência do estado de espírito dos matemáticos que primeiro trabalharam com tais números, de cuja existência sinceramente duvidavam, embora reconhecendo a sua utilidade. *Mas como se vê, a existência dos números imaginários é tão real como a dos números reais, uma vez que nos fixemos numa determinada interpretação dos símbolos a+bi.* (Sebastião e Silva, J. e Paulo, J.D., 1963, p. 80)

E ainda:

> Os números complexos podem ser tratados em todos os cálculos como polinómios em *i*, com esta diferença: o símbolo i^2 pode sempre ser substituído pelo símbolo -1 (o que faz sempre descer abaixo de 2 o grau desses polinómios (Sebastião e Silva, J. e Paulo, J.D., 1963, p. 81)

É tema asterisco (isto é, opcional) o tópico "Os números complexos como medidas de grandezas." Neste é abordada a multiplicação de um vector por *i*, depois por um número complexo qualquer, e finalmente a divisão. E finalizando, afirmam os autores "Assim os números complexos são interpretados como medidas de vectores no plano." (Sebastião e Silva, J. e Paulo, J.D., 1963, p. 91)

Encontra-se também explicado neste manual que a multiplicação por i corresponde à rotação de 90º no sentido positivo.

Registo a preocupação dos autores em expôr claramente as propriedades algébricas destes números, preocupando-se também em que os alunos percebam a sua real existência destes números. É feito um apelo à capacidade de abstracção, para que os alunos percebam que antes de mais, os "números imaginários têm existência simbólica" (Sebastião e Silva, J. e Paulo, J.D., 1963, p. 81)

A História da Matemática não surge neste manual como instrumento pedagógico. Já disse que surge uma nota histórica, mas não há sugestão de leitura de textos originais ou trabalho de pesquisa ou uma referência às dificuldades sentidas pelos matemáticos.

- **Análise do "livro único" adoptado em Portugal para aplicação do Programa Oficial do 7º ano do liceu, em vigor desde 7 de Setembro de 1954**

***Compêndio de Álgebra 2º Tomo – 7º ano*, por J. Sebastião e Silva e J. D. da Silva Paulo**

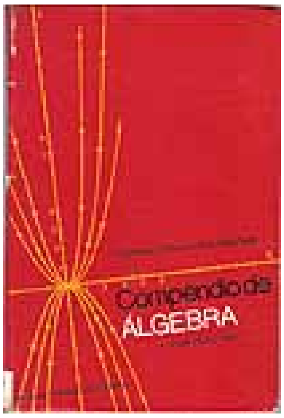


Fig. 8 A capa do manual

Descrição

Neste manual surge, no final do estudo da resolução de equações algébricas, uma interessante e muito completa nota histórica relativa a este tópico. (p. 211) Sendo colocada no final do capítulo, percebemos que surge como valorização e contextualização do estudo efectuado, e que completa a pequena introdução que surge no manual do 6º ano. Um aluno interessado poderá assim, depois de conhecer o assunto, inteirar-se de algumas dificuldades que surgiram durante o desenvolvimento deste tópico ao longo dos anos e perceber que também alguns Matemáticos de renome experimentaram dissabores ao trilhar o caminho da investigação relativa aos números complexos.

Tal nota surge após terem sido estudados os tópicos:

- Equação do 2º grau numa incógnita
- Equação biquadrada
- Equações algébricas irracionais redutíveis a equações do 2º grau
- Trinómio do 2º grau
- Inequações
- Problemas

Iremos cingir a análise destes capítulos, à semelhança do estudo noutros manuais, às referências aos números imaginários, assim chamados pelos autores.

São estudadas com pormenor todo o tipo de equações do 2º grau, bem como o tipo de raízes que pode surgir, tanto imaginários puros, no caso de equações incompletas, como reais ou complexas.

A propósito da aplicabilidade da fórmula resolvente quando o discriminante da equação é negativo, é dito:"Quando uma equação do 2º grau, **de coeficientes reais**, admite como raiz um número imaginário, a outra raiz da equação é o número conjugado do primeiro" (Sebastião e Silva, J. e

Paulo, J.D, 1970, p. 107), apresentando tais raízes, a saber: $x_1 = -\frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = -\frac{b}{2a} - i\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$, onde Δ é o binómio discriminante.

Ainda a propósito da teoria da equação do 2º grau, é determinada a raiz quadrada do número imaginário *-5+12i*, para depois se concluir que "dado um número complexo não nulo, existem sempre dois, e só dois, complexos cujo quadrado é igual ao número complexo dado e que são portanto as suas raízes quadradas." (Sebastião e Silva, J.S. e Paulo, J.D, 1970, p. 131)

É o seguinte o processo de resolução desta questão descrito nestas páginas:

Seja $x+yi$ a raiz quadrada daquele número. Então $(x+yi)^2=-5+12i$ ou, equivalentemente, $x^2 - y^2 + 2xyi = -5 + 12i$, o que nos conduz a que $x^2 - y^2 = -5$ e $xy=12$.

Fazendo $-y^2 = z^2$ temos que $\begin{cases} x^2 + z^2 = -5 \\ x^2 z^2 = -36 \end{cases}$

Conhecendo a soma e o produto de dois números podemos escrever a equação $X^2 + 5X - 36 = 0$, da qual, aplicando a fórmula resolvente resulta que $X = \frac{-5 \pm 13}{2}$, donde $X_1 = 4$, $X_2 = -9$.

Então $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$ e $z^2 = -9 \Leftrightarrow y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm 3$

Se atendermos a que $xy=6$, sabemos que x e y têm o mesmo sinal e portanto, teremos duas determinações para a raiz de *-5+12i* : *2 + 3i* e *-2 - 3i*.

A lição em relação ao trinómio do 2º grau, à resolução de inequações de grau 2 continua, não fugindo aos casos em que $\Delta<0$, ou seja, quando surgem raízes imaginárias. Todos os casos são devidamente explorados.

Este manual caracteriza-se por uma grande clareza e organização da exposição dos assuntos, bem como a oportunidade dos exemplos apresentados, que se adequam, em cada ponto, ao que está a ser referido e que surgem apenas quando julgados oportunos, num número nunca excessivo.

Organização e grafismo

Sendo um manual contemporâneo do anterior, o aspecto gráfico é em tudo semelhante a esse. Os autores são os mesmos, pelo que as opções de organização são também semelhantes.

Os capítulos são divididos em pontos e o tamanho e estilo de letra é variado, quer para os títulos desses pontos, quer para chamadas de atenção, oscilando entre o negrito e o itálico ou entre o Times New Roman ou o Arial.

Tamanho das páginas: A5
São poucas as figuras, o texto é denso e o tamanho das letras pequeno.

Análise de alguns aspectos didácticos

O programa de álgebra debruça-se essencialmente sobre resolução de equações e inequações. Os números complexos surgem como raízes das equações e são discutidos os casos em que eles surgem. No fim de cada capítulo surgem os exercícios, em número reduzido, uma vez que foram dados muitos exemplos no decorrer da exposição do assunto.
O conceito de número complexo não parece estar, portanto, em questão, mas tão-somente a sua aplicabilidade à resolução de equações e inequações.

- Análise do manual
Compêndio de Matemática, 1º volume, 2º tomo e também 3º volume, de José Sebastião e Silva, 1975

Descrição

Fig. 9 A capa do manual

Estes manuais surgem no âmbito de uma experiência de modernização, dirigida pelo próprio Sebastião e Silva e realizada pelo Ministério da Educação em colaboração com a OCDE. Constituem ainda hoje uma referência obrigatória no ensino da Matemática. A obra completa está dividida em 5 volumes: 4 destinados aos alunos e um "Guia", em três volumes, destinado aos professores, para complemento dos anteriores e contendo indicações metodológicas.

Interessa-nos analisar, no entanto, com mais detalhe, o 1º volume, 2º tomo e o 3º volume, por conterem conteúdos relacionados com os números complexos.

A introdução do conceito é fortemente histórica, apresentando-se a fórmula de Tartaglia para resolução da cúbica do tipo $x^3 + ax + b = 0$ e apresentando o problema que Cardan também enfrentou da impossibilidade de encontrar, por essa via, a solução da equação, que existe.

Sebastião e Silva utiliza o Método do Problema Resolvido para mostrar a existência do corpo $\mathbb{C}$ e todas as suas propriedades. Denomina por números complexos os elementos deste corpo e apresenta o isomorfismo com $\mathbb{R}^2$. Por tal, afirma o autor:

> Assim, o que interessa no corpo complexo não é propriamente o MATERIAL com que o construímos, isto é, a natureza dos entes a que convencionámos chamar "números complexos", mas sim a sua ESTRUTURA, isto é o conjunto de propriedades formais que caracterizam esse corpo. (Sebastião e Silva, 1975a, p. 151)

Face tal posição, vemos claramente o carácter formal e algébrico pela qual se vai pautar o ensino dos números dos números complexos. No entanto, o isomorfismo com $\mathbb{R}^2$ permite estabelecer facilmente a correspondência entre os pontos do plano e $\mathbb{C}$, pelo que é apresentada logo de seguida a representação geométrica dos números complexos.

No 3º volume é retomado o tema da representação dos números complexos, feita a passagem para a análise vectorial e apresentada a representação trigonométrica dos mesmos. Os exercícios que apresentam são demonstrativos do pensamento deste autor, que afirma:

> É preciso combater o excesso de exercícios que, como um cancro, acaba por destruir o que pode haver de nobre e vital no ensino. É preciso evitar certos exercícios artificiosos ou complicados, especialmente em assuntos simples. (…) É mais importante reflectir sobre o mesmo exercício que tenha interesse, do que resolver vários exercícios diferentes, que não tenham interesse nenhum. (…) Entre os exercícios que podem ter mais interesse figuram aqueles que se aplicam a situações reais, concretas**.** (Sebastião e Silva, 1975c, p. 11-12.)

Organização e grafismo

O manual está organizado em capítulos e estes divididos em pontos: 1),2),…No caso da criação do Corpo Complexo, as operações apresentadas são ordenadas por letras: a), b), …As definições são também numeradas, para serem chamadas mais tarde: (1), (2), (3), …

As figuras continuam a ser escassas, o texto denso e o tipo de letra oscila entre o itálico, o normal e o negrito. Também a fonte é diferente para algumas chamadas de atenção.

Análise de alguns aspectos didácticos

Há preocupação do autor em explicar com bastante detalhe a Matemática envolvida no assunto em questão, quase fornecendo todas as bases que eventualmente estariam em falta.

O autor atribuía grande importância às aplicações da Matemática, não perdendo oportunidade de as explorar. Tal verifica-se também neste capítulo onde se pode ler:

> Veremos no 7º ano como os números complexos podem também representar operadores sobre vectores do plano. É essa, aliás, a interpretação dos números complexos mais usada nas aplicações à física, à electrotecnia, etc., (Sebastião e Silva, 1975a, p. 153)

Este manual, em três volumes, não é dedicado em particular à álgebra, é já um livro de Matemática.

Os exercícios propostos surgem durante a exposição do assunto em causa, pelo que não existem exercícios finais de capítulo. O autor remete também o aluno para o manual Compêndio de Álgebra, 6º ano, p. 87-91.[17]

E acrescenta:

[17] Trata-se do manual analisado em primeiro lugar (pág.71)

> Além dos que são propostos no referido Compêndio, interessa resolver os três seguintes:
> (…)
> III. Prove que as potências de expoente inteiro de $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ formam um grupo multiplicativo isomorfo ao módulo H (Bailado das horas) e que todas são raízes de índice 12 de 1. (Sugestão: pondo $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\theta$, comece por verificar que $\theta^3 = i$ e que portanto $\theta^4 = i\theta$, $\theta^5 = i\theta^2$, etc.) (Sebastião e Silva, 1975a, p. 153)

Neste manual não é utilizada a História da Matemática como instrumento pedagógico. De facto, embora haja a preocupação de se referirem os nomes de alguns intervenientes, não há recurso a textos ou actividades que a utilizem.

No entanto, embora a abordagem do item se faça em termos de Corpo Complexo, existe anteriormente o recurso à fórmula de Tartaglia para mostrar que, por exemplo a equação, tendo três raízes reais, nela não é aplicável a referida fórmula sem o alargamento de $\mathbb{R}$ aos números imaginários.

- Análise do manual

"Livro de texto 12º ano Matemática",

Neves, Maria Augusta Ferreira & outros, Porto Editora, 1987

Fig. 10 A capa do manual

de acordo com o Programa Oficial em vigor desde 1984

Descrição

Os itens enunciados no programa são todos abordados, nomeadamente as operações com números complexos e a representação de conjuntos de números que satisfazem uma ou mais condições na variável complexa. A abordagem indicada no Programa é que se mostre que $\mathbb{C}$ é um corpo, e é por aí que é a iniciado o capítulo, na página 62 deste manual.
Depois do estudo das operações entre dois números complexos é apresentada a representação geométrica dos números complexos, onde é feita a <u>única</u> referência histórica: É referido que o nome de *Plano de Argand* homenageia "o matemático francês Argand, que ao mesmo tempo que Gauss, estudou o assunto". (Neves, Maria Augusta Ferreira & outros, 1987, p. 70)

A representação geométrica das operações com complexos é um dos tópicos do programa, pelo que surge na página 82 a sua exploração, nomeadamente a adição, a subtracção e a multiplicação de complexos. A divisão é remetida para a multiplicação pelo inverso de um complexo.
O último ponto exposto é o que se relaciona com condições envolvendo números complexos.
O Programa Oficial refere:

"Apresentação das expressões $sen(a \pm b) = sena.\cos b \pm \cos a.senb$ e $\cos(a \pm b) = \cos a.\cos b \mp sena.senb$",

incluído no capítulo dos complexos, que surge no manual no capítulo anterior a este, por opção dos autores.

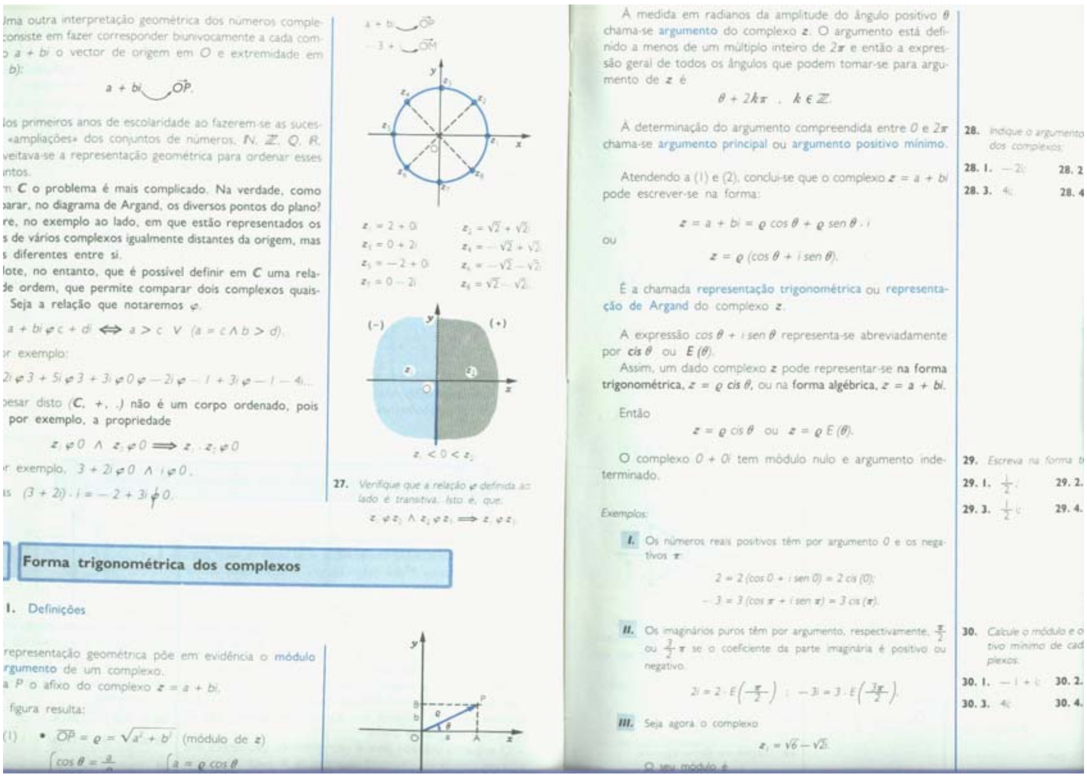
Organização e grafismo

Dimensões do livro:17 x 25 cm

Em relação aos manuais anteriormente estudados, existem diferenças relevantes neste manual. A primeira é a utilização da cor azul nos títulos e figuras. Os factos relevantes ou a fixar, como fórmulas ou propriedades, surgem também nessa cor. O facto de os exercícios de aplicação aparecerem lateralmente constitui também uma novidade.

O texto passa a ser menos denso, mais espaçado e é sempre utilizado o mesmo tipo de letra. As figuras que surgem são adequadas à representação dos números complexos no plano.

O capítulo é dividido em pontos, com títulos e existem subdivisões destes, em pontos com subtítulos. Os exercícios laterais são também numerados independentemente.



Forma trigonométrica dos complexos

1. Definições

A medida em radianos da amplitude do ângulo positivo θ chama-se **argumento** do complexo z. O argumento está definido a menos de um múltiplo inteiro de 2π e então a expressão geral de todos os ângulos que podem tomar-se para argumento de z é

$$\theta + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}.$$

A determinação do argumento compreendida entre 0 e 2π chama-se **argumento principal** ou **argumento positivo mínimo**.

Atendendo a (1) e (2), conclui-se que o complexo $z = a + bi$ pode escrever-se na forma:

$$z = a + bi = \varrho \cos\theta + \varrho \operatorname{sen}\theta \cdot i$$

ou

$$z = \varrho (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta).$$

É a chamada **representação trigonométrica** ou **representação de Argand** do complexo z.

A expressão $\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$ representa-se abreviadamente por **cis** θ ou $E(\theta)$.

Assim, um dado complexo z pode representar-se **na forma trigonométrica**, $z = \varrho \operatorname{cis}\theta$, ou na **forma algébrica**, $z = a + bi$.

Então

$$z = \varrho \operatorname{cis}\theta \quad \text{ou} \quad z = \varrho E(\theta).$$

O complexo $0 + 0i$ tem módulo nulo e argumento indeterminado.

Exemplos:

I. Os números reais positivos têm por argumento 0 e os negativos π:

$$2 = 2(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 2 \operatorname{cis}(0);$$
$$-3 = 3(\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi) = 3\operatorname{cis}(\pi).$$

II. Os imaginários puros têm por argumento, respectivamente, $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3}{2}\pi$ se o coeficiente da parte imaginária é positivo ou negativo.

$$2i = 2 \cdot E\left(\frac{\pi}{2}\right) \ ; \ -3i = 3 \cdot E\left(\frac{3\pi}{2}\right).$$

III. Seja agora o complexo

$$z_1 = \sqrt{6} - \sqrt{2}i.$$

28. Indique o argumento dos complexos:

29. Escreva na forma

30. Calcule o módulo e o ... tivo mínimo de cad... plexos.

Fig. 11 - As páginas 78 e 79 deste manual

Análise de alguns aspectos didácticos

Todo o texto é bem esquematizado e organizado. A pesquisa de informação torna-se fácil ao aluno, que, por força da diferenciação de cores, facilmente localiza as propriedades em estudo.

Em relação aos exercícios que acompanham a exposição da matéria, tratam-se de aplicações simples e directas dos conteúdos que estão a ser apresentados no corpo do texto.

Por outro lado, relativamente aos exercícios de final de capítulo, o grau de dificuldade destes é bastante inferior ao apresentado nos manuais anteriores e semelhante aos exercícios laterais. Não existem pedidos de demonstração de propriedades e todos os exercícios são numéricos, bem concretizados.

Na página 78 deste manual fala-se da (im)possibilidade de ordenação de $\mathbb{C}$. É apresentada uma tentativa de ordenação, referindo-se que, com aquela relação de ordem, falha a propriedade $z_1 \varphi 0 \wedge z_2 \varphi 0 \Rightarrow z_1 . z_2 \varphi 0$, o que faz com que $\mathbb{C}$ não seja um corpo ordenado." (Neves, 1989,p. 78)

Talvez fosse de esperar que um manual dos anos 80 começasse a introduzir a História da Matemática como instrumento pedagógico. Este manual não só não transmite como foi o processo de descoberta dos números complexos, como não apresenta nem uma pequena nota biográfica sobre os intervenientes nesse processo.

Fig. 12 A capa do manual

- Análise do manual

M12 Matemática 12º ano
Machado, Armando & outros, Texto Editora, 1988

Descrição

Os autores começam por fazer a contextualização do surgimento dos números complexos, referindo-se à noção de número e de como surgiu a necessidade de criar os números complexos. Informam da fórmula de Scipione Del Ferro e indicam as suas limitações. Não há referência a Bombelli, embora esteja indicado que apenas três séculos mais tarde a desconfiança em relação aos números complexos desapareceu, o que indicia a continuação do desenvolvimento desta teoria.

Passam então os autores à construção do Corpo Complexo, definindo as operações de adição e multiplicação e indicando algumas propriedades destas operações.
É referida a impossibilidade de definir uma relação de ordem, remetendo para o não cumprimento dos axiomas que se verificam no conjunto $\mathbb{R}$.
Neste manual é nítida a preocupação em explicar, em linguagem corrente, o que se está a demonstrar ou a que correspondem os resultados que se encontram.
A margem é aproveitada pelos autores para propor actividades que completam o estudo da teoria ou que visam levar o aluno a reflectir um pouco mais sobre o que foi dito. Em alternativa, surgem também notas adicionais ao texto, sugestões para demonstrações ou indicações para pesquisa. Existe um apelo muito grande a que o aluno reflicta sobre algumas concepções que adquiriu anteriormente e que as compare com o que está a ser estudado, como por exemplo, uma reflexão que é feita na página 82 a propósito dos sentido directo e retrógrado e escolhas de referenciais:

> (…). Não há, (portanto), uma noção absoluta de sentido directo válida em qualquer plano e só se pode falar dessa noção quando, além do plano, se escolhe um dos semiespaços que ele determina e então a rotação no sentido directo corresponde à rotação da direita para a esquerda relativamente a um observador que olhe para o plano a partir desse semiespaço. Quando se escolhe um dos semiespaços diz-se também que se está a orientar o plano. O que acontece é que, quando se está a figurar o plano sobre uma página de papel ou um quadro negro, se convenciona que o semiespaço escolhido é aquele que fisicamente permite ver o que se está a escrever. (…), (Abrantes, 1988, p.82)

Organização e grafismo

Dimensões do livro: 24 x 17 cm

A diferença mais evidente é a opção de a altura do livro ser a medida menor.
Na contracapa podem ler-se as opções dos autores:

> (…) É importante conhecer, interpretar, e estudar situações concretas, extraídas da realidade ou de outras ciências que tenham motivado a criação de modelos e teorias Matemáticas e que estas ajudem a explicar. (…) Exige-se ao estudante do 12º ano um maior esforço de abstracção, propondo-lhe, nomeadamente, o estudo de diversas estruturas Matemáticas ou a prática da demonstração.

A cor escolhida é o vermelho para o título, subtítulo, algumas chamadas de atenção e para uma setinha que indica que é oportuna a resolução do exercício para o qual ela aponta.

Análise de alguns aspectos didácticos

Depois dos habituais exercícios de fim de capítulo surgem alguns prolongamentos ao Programa, nomeadamente sobre a relação entre equações algébricas e números complexos e um recurso à tecnologia – apresenta-se um programa em Basic para determinar as raízes de ordem n de um número complexo.

No fim do capítulo surgem, seguindo a mesma orientação que é dada a todo o texto, perguntas para serem meditadas que apelam à compreensão do conceito de raiz de um número complexo e que pretendem alertar para os problemas que podem surgir quando consideramos a raiz índice *n* de um número complexo. A nota da página 92 é bem demonstrativa de tal:

ACT 19

Ao contrário do que acontecia no caso dos números reais, não há, em geral, razões para considerar uma das raízes de índice n de um número complexo como melhor que as outras. Por esse motivo, se $z \in \mathbb{C}$ e $n \geq 2$, o significado a dar à expressão $\sqrt[n]{z}$ é uma «dor de cabeça» para os matemáticos. Alguns tentam resolver a questão dizendo que se trata de uma expressão que «pode tomar vários valores» mas isso conduz a contradições. Por exemplo, quando dizemos que $\sqrt{-1}$ pode tomar os valores i e $-i$ estaríamos a dizer que $\sqrt{-1} = i$ e $\sqrt{-1} = -i$ são proposições verdadeiras, mas daí poder-se-ia deduzir pelas propriedades da igualdade que $i = -i$ o que é evidentemente falso! O ideal seria talvez evitar, sempre que possível, o uso de tais expressões; a melhor saída parece ser a de considerar que, salvo convenção explícita em contrário, $\sqrt[n]{z}$ designa o conjunto de todos os complexos cuja potência de expoente n é z, e de cada um desses complexos dizer-se que é uma determinação de $\sqrt[n]{z}$. Nesse sentido não se deveria escrever $\sqrt{-1} = i$, mas sim $i \in \sqrt{-1}$. Se formos cuidadosos, esta interpretação não nos causará problemas, mas em qualquer caso será frequente aparecerem situações delicadas.

Não sendo possível dar resposta prévia a todas as situações delicadas que possam aparecer, deixamos no ar algumas perguntas para serem meditadas:

Que significado dar a $\sqrt[2]{i} + \sqrt[3]{-i}$?

Será que $(\sqrt[3]{i})^3 = i$?

O que é $\sqrt[2]{i} - \sqrt[2]{i}$?

O que é $\sqrt[3]{i^3}$?

É um manual deveras interessante, que parece querer acompanhar o aluno na sua aprendizagem, alertando para algumas questões Matemáticas que mostram ao aluno que há necessidade de reflectir profundamente nos conceitos que vai aprendendo.

A História dos números complexos fica para trás, depois dos autores afirmarem que "Só com a construção explícita de tais números a partir dos números reais, feita quase três séculos mais tarde, essa desconfiança acabou por desaparecer" (Machado, 1988, p. 70)

Por comparação com o manual anteriormente analisado, nota-se já um avanço na utilização da História da Matemática. A preocupação com a contextualização temporal e espacial é evidente, embora se restrinja a uma nota e não exemplos significativos.

Fig. 13 A capa do manual

- Análise do manual
Livro de texto 12º ano Matemática
Neves, Maria Augusta Ferreira e Brito, Mª Luísa C, Porto Editora, 1995

A divisão deste manual em dois volumes surge como uma vantagem, face às Orientações de gestão do programa, a que já nos referimos. De facto, os dois volumes iniciais deram, na prática, lugar à leccionação dos conteúdos presentes apenas no primeiro volume. Os números complexos foram um dos itens retirados do programa, pelo que se poderá perder um pouco o interesse da análise deste manual. No entanto, podem ainda ser feitas algumas observações:

Descrição

A extensão de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ fazia parte do programa, sendo opcional o seu estudo na forma trigonométrica. Assim, os complexos surgem em dois capítulos distintos, a saber, no 6º e 7º. A primeira parte do 6º capítulo é dedicada às operações binárias, pelo que faz sentido que sejam "apresentadas", logo de início, as operações com números complexos na mesma linha de raciocínio. A representação de números complexos no plano de Argand é dada de um modo simples, focando-se a propriedade rotacional da multiplicação por *i* e a conexão à análise vectorial. A história dos números complexos surge numa pequena nota, onde surgem os nomes de Sérgio del Feno, (supostamente Scipione Del Ferro), Tartaglia e Cardano, sem ser indicado algum contexto para a descoberta destes números.

No final do capítulo surgem exercícios simples, de aplicação das propriedades das operações e de resolução de equações.

No capítulo 7 surge a representação na forma trigonométrica de um número complexo e as fórmulas de De Moivre para as diversas operações. Surgem também conjuntos definidos por condições, correspondentes aos diferentes lugares geométricos, com as ilustrações a acompanhar as diferentes situações: Circunferência e círculo, mediatriz, rectas paralelas aos eixos coordenados, semi-recta e ainda as cónicas.

Organização e grafismo

A organização deste manual é em tudo semelhante ao anterior desta autora, de 1987. No entanto, a profusão de cores é muito maior. São utilizadas as cores preta, vermelho e azul na letra. A banda lateral é amarelada, azul ou roxa. Os exercícios laterais acompanham os conteúdos a que se refere o texto.

No início de cada capítulo há uma tentativa de fazer versos com a Matemática, por exemplo, na página183, pode ler-se: “Trigonometria, Álgebra e Geometria/Tudo junto para complicar/Mas as relações são tão interessantes/Que até dá gosto estudar”

No final do capítulo surgem exercícios resolvidos, exercícios propostos e exercícios de revisão. Estes incluem afirmações para atribuir valor lógico, exercícios de cálculo e problemas e aplicações.

Análise de alguns aspectos didácticos

O aluno ficará com a ideia de que os números complexos surgiram para que as equações do tipo $x^2 = -4$ tenham solução. De facto, na página 168 pode ler-se:

> Para que a equação $x^2 = -4$ tenha duas soluções teremos de, mais uma vez, ampliar o conceito de número. Novos números terão de existir porque dos conhecemos não há nenhum que elevado ao quadrado seja – 4 (Neves, 1985, p. 168)

A nota histórica introduzida nessa mesma página é manifestamente insuficiente para a compreensão de que as descobertas Matemáticas não se processam desse modo. Este manual afasta-se claramente da utilização da História da Matemática na sala de aula, não traduzindo nas suas páginas nada do que foi o processo de descoberta dos números complexos ou das dificuldades sentidas pelos matemáticos envolvidos.

Os exercícios apresentados são essencialmente de cálculo. Surge também a representação, no plano de Argand, dos pontos que satisfazem determinada condição.

- Análise do manual
Livro de texto 12º ano Matemática
Neves, Maria Augusta Ferreira & outros, Porto Editora, 1999

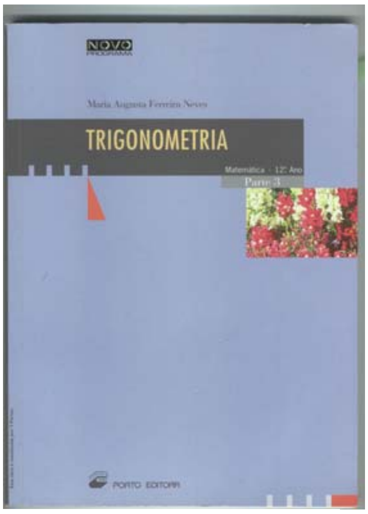


Fig. 14 A capa do manual

de acordo com o Programa Oficial em vigor desde 1997

Descrição

Este manual inicia na página 112 do 3º volume a Introdução aos números complexos e ao conjunto $\mathbb{C}$. Lateralmente são indicados alguns nomes de matemáticos, " que estão ligados de uma forma ou de outra aos números complexos" (Neves, M. Augusta, 1997, página 112). São referidos os seguintes nomes: Luca Pacioli, Scipione del Ferro, Tartaglia, Cardano, Bombelli, Girard, Simpson, Euler, Gauss, Kummer, De Morgan, Wessel e Argand .

A análise da evolução do conceito de número percorre todos os conjuntos de números, desde $\mathbb{N}$ até $\mathbb{C}$, numa visão um pouco simplista da história da criação dos números, já que se refere que cada conjunto é inventado para que determinado tipo de equação possa ser resolvido. Tal apresentação pode comprometer a imagem que o aluno vai criar sobre o surgimento dos conceitos na Matemática. Por exemplo, refere-se:

> Qual é o número cujo quadrado é 2?
>
> $x^2 = 2$
>
> Para que a equação tenha solução foi necessário criar novos números: os números irracionais.
>
> A equação tem duas soluções:
>
> $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ (Neves, Mª Augusta, 1999, p. 113)

No caso particular dos números complexos:

> Qual é o número cujo quadrado é -1?
>
> $x^2 = -1$
>
> Para que a equação tenha solução foi necessário criar novos números: os números imaginários.
>
> Definiu-se um novo número $\sqrt{-1} = i$ (Neves, Mª Augusta, 1999, p.114)

Parece-me que, nestas condições, o aluno não irá entender a morosidade de um processo de construção de conceitos, das dificuldades de aceitação de uma ideia, das consequências epistemológicas da introdução de novos entes e aceitará a Matemática como um produto que surge "pronto a usar". Os matemáticos surgirão, perante o aluno, não como pessoas que trabalham a realidade, que erram, que começam e recomeçam um estudo, por vezes sem ideias originais para ultrapassar dificuldades, mas sim como alguém que pensou, escreveu sobre as suas conclusões e que os seus pares aceitaram como produto acabado.

É apresentada a representação geométrica de um número complexo no plano de Argand e as operações com os mesmos. É dada a representação geométrica da adição e da subtracção, mas não da multiplicação ou divisão. O tema da representação geométrica das operações é retomado algumas páginas à frente, quando se introduz a representação geométrica de um complexo. *i* é então apresentado como operador da rotação de 90º.

O manual contém uma anotação, baseada no programa oficial, que diz: "A demonstração de propriedades da geometria usando números complexos deve ser entendida não como tema obrigatório para exame, mas como complemento de formação. Se gosta de explorar esta matéria poderá encontrar muitas outras situações em livros ou na Internet" (Neves, Mª Augusta, 1999, p. 145) Não seria melhor endereçar o aluno para o professor que o acompanha no seu percurso escolar ou para um ou mais livros em concreto?

O tema é encerrado com o tópico "Conjuntos definidos por condições envolvendo números complexos".

Não existe neste manual uma referência à impossibilidade de ordenação dos números complexos. Tal pode ter a ver com a tentativa, por parte dos autores, de se afastarem das estruturas algébricas, já que tal não é preconizado no programa. Há, no entanto, outros autores contemporâneos que o fazem, como veremos.

Organização e grafismo

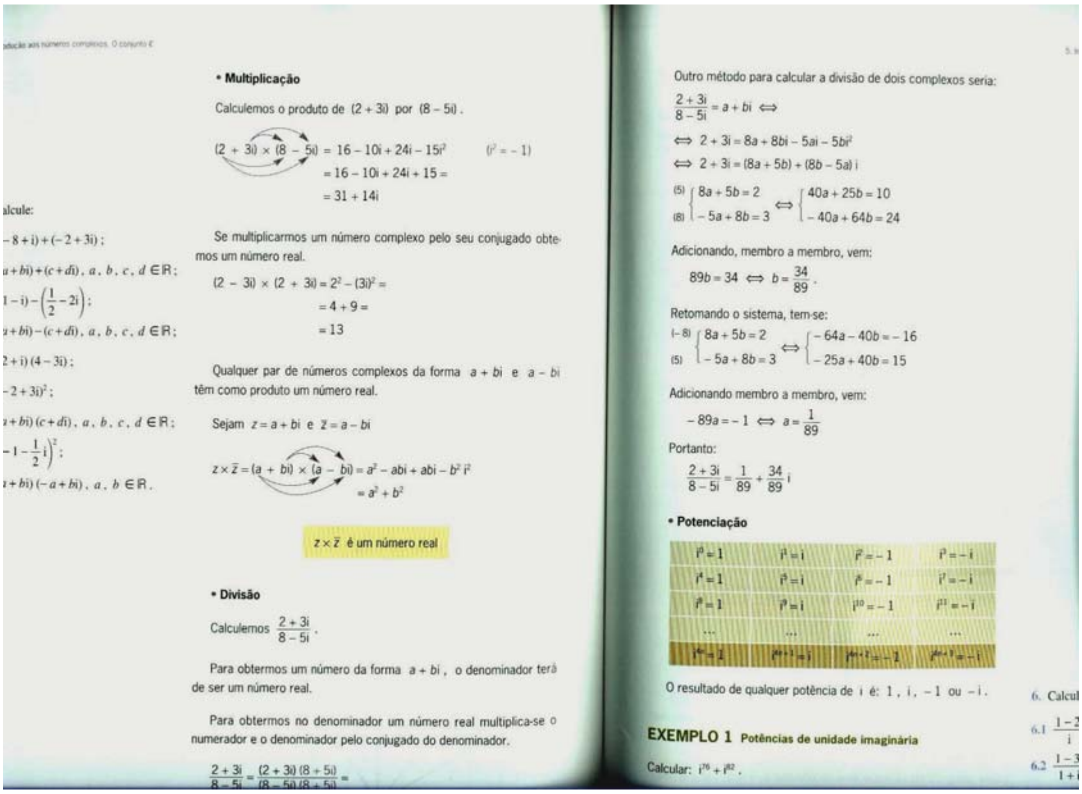
O manual está dividido em três volumes, contendo, cada um, os conteúdos relativos a cada um dos três temas principais do programa. Os títulos são numerados com pontos: 5.1, 5.2,…e escritos numa cor acastanhada.

O texto não invade a banda lateral (que não está demarcada noutra cor) e está escrito a uma ou a duas linhas. Os exercícios laterais são aplicações dos conteúdos presentes no texto. As chamadas de atenção são feitas através de uma caixa de fundo bege.

No final do capítulo surge uma lista dos itens estudados.

Os exercícios resolvidos são em número de três. Os problemas propostos seguem-se, com os títulos: "…conhecer…calcular…representar…", "…verdadeiro ou falso…", "…resolver..aplicar…investigar…"

As cores utilizadas são muito variadas.



• **Multiplicação**

Calculemos o produto de $(2+3i)$ por $(8-5i)$.

$$(2+3i)\times(8-5i) = 16-10i+24i-15i^2 \qquad (i^2=-1)$$
$$= 16-10i+24i+15 =$$
$$= 31+14i$$

Se multiplicarmos um número complexo pelo seu conjugado obtemos um número real.

$$(2-3i)\times(2+3i) = 2^2-(3i)^2 =$$
$$= 4+9 =$$
$$= 13$$

Qualquer par de números complexos da forma $a+bi$ e $a-bi$ têm como produto um número real.

Sejam $z = a+bi$ e $\bar{z} = a-bi$

$$z\times\bar{z} = (a+bi)\times(a-bi) = a^2-abi+abi-b^2i^2$$
$$= a^2+b^2$$

$z\times\bar{z}$ é um número real

• **Divisão**

Calculemos $\frac{2+3i}{8-5i}$.

Para obtermos um número da forma $a+bi$, o denominador terá de ser um número real.

Para obtermos no denominador um número real multiplica-se o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador.

$$\frac{2+3i}{8-5i} = \frac{(2+3i)(8+5i)}{(8-5i)(8+5i)} =$$

Outro método para calcular a divisão de dois complexos seria:

$$\frac{2+3i}{8-5i} = a+bi \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2+3i = 8a+8bi-5ai-5bi^2$$
$$\Leftrightarrow 2+3i = (8a+5b)+(8b-5a)i$$

$$\begin{matrix}(5)\\(8)\end{matrix}\begin{cases}8a+5b=2\\-5a+8b=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}40a+25b=10\\-40a+64b=24\end{cases}$$

Adicionando, membro a membro, vem:

$$89b = 34 \Leftrightarrow b = \frac{34}{89}.$$

Retomando o sistema, tem-se:

$$\begin{matrix}(-8)\\(5)\end{matrix}\begin{cases}8a+5b=2\\-5a+8b=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-64a-40b=-16\\-25a+40b=15\end{cases}$$

Adicionando membro a membro, vem:

$$-89a = -1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{89}$$

Portanto:

$$\frac{2+3i}{8-5i} = \frac{1}{89}+\frac{34}{89}i$$

• **Potenciação**

$i^0=1$	$i^1=i$	$i^2=-1$	$i^3=-i$
$i^4=1$	$i^5=i$	$i^6=-1$	$i^7=-i$
$i^8=1$	$i^9=i$	$i^{10}=-1$	$i^{11}=-i$
…	…	…	…
$i^{4n}=1$	$i^{4n+1}=i$	$i^{4n+2}=-1$	$i^{4n+3}=-i$

O resultado de qualquer potência de i é: 1, i, -1 ou $-i$.

EXEMPLO 1 Potências de unidade imaginária

Calcular: $i^{76}+i^{82}$.

Fig. 15 - As páginas 118 e 119 deste manual

Análise de alguns aspectos didácticos.

O tema transversal "Lógica e raciocínio Matemático" marca presença nas páginas 154 e 155, através da análise do valor lógico do resultado das operações conjunção, disjunção e negação de proposições. São ainda apresentadas "tabelas de verdade".

Os exercícios propostos são essencialmente de cálculo, existindo também, em menor número, alguns exemplos de apelo à compreensão do conceito de módulo de um número complexo ou das propriedades rotacionais da multiplicação de complexos.

O manual inicia-se, em cada capítulo, com a formalização das definições e das propriedades que interessam ao estudo. Trata-se, assim, de um manual essencialmente de estudo da teoria, onde a construção do conhecimento, por parte do aluno, está muito pouco presente.

- Análise do Manual “Infinito 12”, 3º volume
Jorge, A.M. & outros, Areal Editores, 1999

Descrição

O livro abre com um índice muito completo, onde, para cada item são indicadas as páginas dos conteúdos, das aplicações do conteúdo e dos textos complementares.
De seguida é explicada a organização do livro, no que diz respeito a: (seguindo a explicação das autoras) Programa, Descobrindo, Um pouco de história, Calculadora gráfica, Computador, Lógica e raciocínio matemático, aplicando.
Deste volume faz parte apenas a transcrição do tema 3 do programa e do Tema Geral Lógica e raciocínio matemático.

Fig. 16 A capa deste manual

Organização e grafismo
O manual está, à semelhança do anterior, dividido em três volumes, cada um se referindo a cada um dos três temas principais do programa. O 3º volume, que aborda o tema 3, *Trigonometria e números complexos*, tem uma estrutura semelhante aos outros dois volumes.
Uma banda lateral azul surge quando há anotações a fazer ao texto.
Os títulos não apresentam qualquer numeração, apresentando-se num tamanho maior de letra ou simplesmente num tom mais carregado.
A cor utilizada oscila entre o verde, no realce de pequenas conclusões ou fórmulas e o azul, que surge quando são dados exemplos de aplicações, notas históricas ou resolução de problemas. A cor da letra é praticamente sempre preto.

Este manual caracteriza-se por um grande número de aplicações dos temas que estão a ser tratados, apresentando muitas conexões a outras disciplinas e outros ramos da Matemática, tal como preconiza o programa no qual se baseia. As notas históricas que surgem são pertinentes e em número equilibrado, inseridas no texto explicativo da teoria.

Análise de alguns aspectos didácticos.

Este manual tem sempre uma actividade introdutória, procurando que o aluno construa o conhecimento, se aperceba dos conceitos que estão envolvidos e que percorra um pouquinho da história dos matemáticos que a fizeram. No caso dos números complexos, a actividade baseia-se na História da Matemática e na evolução do conceito de número. A definição de número complexo é apresentada na sétima página de exposição deste conteúdo, seguindo-se as operações com os números complexos.

Quanto à radiciação em $\mathbb{C}$, tal como num manual anterior, surge um apontamento pertinente quanto à utilização do símbolo $\sqrt[n]{z}$:

Que significado atribuir a $\sqrt[n]{z}$, se $z \in \mathbb{C}$ e $n \geq 2$?

Em $\mathbb{R}$, quando há mais do que uma raiz, $\sqrt[n]{x}$ representa, como se sabe, a raiz positiva.

Em $\mathbb{C}$, este critério não pode ser usado, nem há, de um modo geral, razões para que se destaque uma das **n** raízes relativamente às restantes.

Para resolver esta questão, diz-se, por vezes, que $\sqrt[n]{z}$ é uma expressão que *pode tomar vários valores*; no entanto, esta afirmação dá origem a contradições.

Por exemplo, dizer que $\sqrt{-1}$ pode tomar os valores i e $-$ **i** seria o mesmo que afirmar que são verdadeiras as proposições

$$\sqrt{-1} = i \quad \text{e} \quad \sqrt{-1} = -i$$

e, então, poderíamos concluir que $i = -i$, o que é falso.

Além disso, a utilização do símbolo $\sqrt[n]{z}$, com $z \in \mathbb{C}$, pode conduzir-nos a inúmeras situações *delicadas*, como por exemplo:

Que significado atribuir a $\sqrt[3]{i}$ ou a $-\sqrt[3]{i}$?

Será que $\sqrt[3]{i} = \sqrt[6]{i^2}$? E será que $(\sqrt[6]{i})^2 = \sqrt[6]{i^2}$? O que representa $\sqrt[3]{i^3}$?

Como não é possível encontrar um critério que atribua significado preciso a $\sqrt[n]{z}$ em $\mathbb{C}$, **não usaremos** este símbolo.

Este assunto não só não surge explicitamente em todos os manuais, como se utiliza o símbolo de $\sqrt[n]{z}$ sem pensar que tal se pode referir a vários números, como é explicado neste parágrafo do *Infinito 12*.

Os exercícios que surgem nas bandas laterais que acompanham o texto explicativo são de aplicação directa dos conhecimentos adquiridos, com um grau baixo de dificuldade. Surgem também exercícios resolvidos um pouco mais elaborados nas páginas finais do conteúdo tratado. Os exercícios finais englobam os conteúdos tratados neste tema. Alguns exercícios apelam à utilização da tecnologia, à semelhança do que é feito durante a exposição do tema. Há ainda exercícios indicados para resolução em grupo ou para pequenas pesquisas. Os exercícios são ricos e variados, apresentando-se situações muito diversificadas.

Pelo que verifiquei, dos manuais analisados, este é o que faz o maior recurso à História da Matemática, em particular dos números complexos. Os textos apresentados são de autores variados, como Bento de Jesus Caraça (do seu livro *Conceitos Fundamentais da Matemática,* *Gradiva, 1988*), Jaime Carvalho e Silva e António Leal Duarte, bem como outros apontamentos históricos que surgem ao longo do texto, das próprias autoras. As actividades propostas tentam transmitir aos alunos algumas das dificuldades que foram surgindo aos matemáticos, ao longo do processo de descoberta destes números. As actividades passam não só pela leitura e discussão de textos originais, mas também pela aplicação da fórmula de Cardano como proposta de trabalho. As autoras têm ainda a preocupação acrescida de se referirem aos matemáticos portugueses (Anastácio da Cunha, Bento de Jesus Caraça). Lamento que não haja referência a Gomes Teixeira, que tanto contribuiu para o reconhecimento do nosso país, neste e noutros ramos da Matemática.

Embora as autoras optem por introduzir rapidamente a definição de Número Complexo, esta é perfeitamente contextualizada. Esta opção poderá ser justificada pela necessidade de fazer opções que se prendem com a gestão do tempo, já que esta é outra preocupação que os autores de manuais têm de ter.

4.3 Sobre outras categorias para uma análise dos manuais escolares

Segundo Sá & al. (1999) interessa considerar três categorias na análise de um manual: a de natureza científica, a de natureza pedagógica e a de natureza técnica. Se aquando da elaboração do manual ou da sua adopção interessa considerar estes três aspectos, neste estudo debruçar-me-ei em particular sobre a primeira categoria e um pouco sobre a segunda e tentarei medir o grau de proximidade entre o desenvolvimento do tópico em análise nos manuais – os números complexos – e a respectiva evolução histórica, em termos cronológicos.

Nas orientações de natureza científica, o citado estudo aponta como aspectos a considerar:

Conteúdos correctos e actuais
Aspecto linguísticos (terminologia, vocabulário, estrutura lógica das frases)
Exemplos adequados à idade e experiência dos alunos (meio envolvente)
Actividades correctamente concebidas
Fidelidade aos objectivos e conteúdos dos programas

Nas orientações de natureza pedagógica surgem ainda entre outros:

Equilíbrio dos conteúdos
Aspectos metodológicos (apelo a métodos expositivo- repetitivos, genéticos)
Importância dada ou papel pedagógico atribuído a
Exercícios e outras actividades
Ilustrações, gravuras, figuras e outros elementos
Informações científicas

Mas antes de me debruçar sobre a avaliação dos manuais escolares no que respeita a estes aspectos, interessa também explorar o papel desempenhado pelas definições no ensino/aprendizagem dos números complexos.

- **O papel das definições em Matemática**

Em Matemática, enquanto estrutura científica, desempenham um papel fundamental dois processos: o de definir e o de demonstrar; processos estes que, de resto, estão na génese dos sistemas axiomático-dedutivos. No presente caso, estamos particularmente interessados nas definições do conceito matemático de Número Complexo, quer por causa do papel que estas desempenham no contexto geral do raciocínio matemático, quer também por causa dos problemas de ordem educacional (no contexto de actividades lectivas) que as definições também acarretam.

Hoje em dia, na prática do ensino dos conceitos matemáticos, é frequentemente verem-se defendidas (por exemplo: Freudenthal (1973) ou De Villiers (1998)) as chamadas *abordagens genéticas*, em oposição à sua apresentação numa forma fechada de "produto acabado", pronto a ser subsequentemente memorizado pelos aprendizes. Perante estes factos não é possível ignorar-se o processo, da responsabilidade do professor, de selecção de uma "boa definição" para um determinado conceito matemático, como também não é possível menosprezar-se o processo de exposição dos alunos a um conceito matemático através da sua definição, independentemente de se optar ou não pela dita abordagem genética.

Sabe-se também, através de inúmeros estudos conduzidos a este respeito (por exemplo: Fischbein (1993)), que em Matemática, e muito particularmente em Geometria, os conceitos têm muitas vezes uma natureza dual: a figural e a conceptual. Sendo assim não é difícil imaginar que os nossos alunos têm representações mentais do conceito, imagens visuais ou outras, mas não estão preparados para, sozinhos, percorrerem um caminho de organização de ideias conducente à descoberta/invenção de uma definição para o conceito. Em teoria, segundo Freudenthal (1973), existem em Matemática duas formas distintas de apresentar uma definição:

-*Construtivamente: "... the algorithmically constructive and creative definition... models new objects out of familiar ones".*

- Descritivamente: *"... the describing definition... outlines a known object by singling out a few characteristic properties".*

A definição pode pois ser introduzida no início e seguir-se o desenvolvimento da teoria, com as suas características e propriedades ou, construtivamente, ser apresentada após o aluno conhecer bem o ente com que está a trabalhar. O aluno sentir a necessidade do novo conceito poderá ser uma abordagem que propiciará a abordagem histórica.

Por outro lado, qualquer definição traz representações mentais ao aluno, que poderão diferir segundo a introdução feita. No caso dos números complexos, essas representações poderão ser algébricas, geométricas,etc. O professor tem por isso de escolher o papel que a definição terá no desenvolvimento dos conteúdos e manter-se coerente. Por estas razões escolhemos apresentar uma tabela de análise deste ponto separadamente.

Aspectos que iremos analisar na definição de Número Complexo apresentada em cada manual:

- Construtiva/descritiva
- Componentes do conceito
- Representações/ Imagens produzidas
- Função (da definição)
- Características (da definição)

Seguindo estes pontos, debruçar-me-ei sobre os livros dos quais foi feita na secção anterior uma análise detalhada e que interpretam os diferentes programas desde 1950:

[1] -"Compêndio de Álgebra Tomo I - VI ano", por J. Sebastião e Silva e J.D. da Silva Paulo,

[2] "Compêndio de Álgebra 2º Tomo – 7º ano", por J. Sebastião e Silva e J.D. da Silva Paulo[18]

[3] "Compêndio de Matemática", 1º volume, 2º tomo e também 3º volume, de José Sebastião e Silva, 1975

[4] "Livro de texto 12º ano Matemática", Neves, Maria Augusta Ferreira & outros, Porto Editora, 1989

[5] M12 Matemática 12º ano, Machado, Armando & outros, Texto Editora, 1985

[6] "Livro de texto 12º ano Matemática", 2º vol, Neves, Maria Augusta Ferreira e Brito, M. Luísa Carvalho, Porto Editora, 1995

[7] "Livro de texto 12º ano Matemática", Neves, Maria Augusta Ferreira & outros, Porto Editora, 1999

[8] "Infinito 12 " 3º volume, Jorge, Ana M.B. e outros, Areal Editores, 1999.

[18] A análise deste manual não irá ser incluída na tabela referente à definição, pois no programa de 7º ano consideravam-se introduzidos os Números Complexos, não sendo apresentada qualquer definição. Mantemos a numeração dos manuais analisados para facilidade de comparação nas grelhas seguintes.

A definição	[1]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]
Construtiva/descritiva	Descritiva	Descritiva	Descritiva	Descritiva/ Construtiva	Descritiva	Descritiva	Construtiva/Descritiva
Pág em que surge a definição	3ª	1ª	1ª	4ª	2ª	4ª	7ª
Características	A introdução do conceito é feita pela necessidade de obedecer ao princípio de conservação das propriedades formais	Supõe a existência do corpo $\mathbb{C}$. A sua prova é feita no final da construção de $\mathbb{C}$. (Método do Problema Resolvido)	$\mathbb{C}$ como corpo isomorfo a $\mathbb{R}^2$. Propriedades do isomorfismo verificadas após a introdução de $\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$ como corpo isomorfo a $\mathbb{R}^2$. Primeiro são verificadas as propriedades das operações em $\mathbb{R}^2$.	$\mathbb{C}$ como extensão de $\mathbb{R}$. Apresentação de $\mathbb{C}$.	Extensão do conceito de número;	Extensão do conceito de número. Existência de um novo símbolo – número – cujo quadrado é um numero negativo.
Componentes do conceito	Extensão de número	Estruturas algébricas	$\mathbb{C}$ como corpo isomorfo de $\mathbb{R}^2$	$\mathbb{C}$ como corpo isomorfo de $\mathbb{R}^2$	Extensão de número	Extensão de número	Extensão de número
Representações	Possibilidade de extracção de raízes de índice par de números negativos	$\mathbb{C}$ como corpo isomorfo de $\mathbb{R}^2$	Os complexos como elementos de uma estrutura algébrica.	Os complexos como elementos de uma estrutura algébrica.	Entes com os quais se pode operar e que são soluções de equações impossíveis em $\mathbb{C}$.	Entes com os quais se pode operar e que são soluções de equações impossíveis em $\mathbb{C}$.	Escrita do mesmo número de formas diferentes.
Imagens produzidas	Matemática Formal. A definição é arbitrária, desde que obedeça aos requisitos indicados	Existência de soluções da equação quadrática e cúbica. Representação no plano. Movimento no plano relacionado com as operações	Manipulação algébrica dos novos entes	Possibilidades operatórias como: adição, subtracção, multiplicação, radiciação, etc. Impossibilidade de ordenação.	Possibilidades operatórias como: adição, subtracção, multiplicação, radiciação, etc	Manipulação algébrica de novos entes	Dificuldades anteriores à existência dos números complexos. Novas possibilidades operatórias. Diferentes representações dos números complexos.

Quadro 5 A definição

Note-se que a definição formal pode nada acrescentar à compreensão por parte do aluno, do conceito. As imagens produzidas podem ou não ser alteradas pela introdução da definição.

Há, no entanto, princípios que uma definição tem de obedecer em nome dos princípios lógicos:

i. O nome do conceito deve aparecer uma só vez na frase usada como definição;
ii. Na definição de um conceito só podem ser usados conceitos anteriormente definidos;
iii. Uma definição estabelece condições necessárias e suficientes;
iv. O conjunto das condições deve ser minimal;
v. Uma definição é arbitrária.

Mas também, segundo Poincaré (1909)

> Para o filósofo ou para o cientista uma boa definição é uma definição que se aplica a todos os objectos a serem definidos e somente a estes; é a que satisfaz as regras da lógica. Mas em educação não é assim; é aquela que pode ser compreendida pelos alunos (p.123)

De um modo geral, vi que os autores dos manuais optam por apresentar cedo a definição de número complexo e só depois desenvolvem as propriedades que estes apresentam. A introdução do estudo dos números complexos pode levar ao estudo das estruturas algébricas ou ao alargamento do conceito de número, nomeadamente aos quaterniões de Hamilton, mas não parece ser esta a direcção preconizada pelos autores dos manuais consultados. De facto, este novo conjunto de números é quase sempre apresentado como o elo seguinte da cadeia $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, e o estudo que se segue, no nível seguinte, é o das estruturas algébricas e das suas propriedades. Este estudo está, de acordo com o programa actualmente em vigor, remetido para o Ensino Superior. Poucos alunos, mesmo universitários, terão ouvido falar dos quaterniões de Hamilton, mas a maior parte dos licenciados que frequentou alguma cadeira de Matemática, ouviu falar de grupos, corpos, anéis, etc.

Existem diferenças óbvias na apresentação da definição, relacionadas pela abordagem prevista no programa: Se em 1950 a introdução dos complexos era feita pela extensão de conceito de número, como no programa actual, a definição apresentada pelo *Infinito12* está correcta, de acordo com os princípios analisados:

> Chama-se número complexo a todo o número da forma a+bi em que $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$ (Jorge, 1999,p.71)

Mas nos programas em que os números complexos surgem como elementos de um corpo ($\mathbb{C}$), a definição terá de passar pelas operações introduzidas nesse conjunto de modo que os seus elementos verifiquem as condições para que $\mathbb{C}$ seja corpo.

Por exemplo, no manual M12, pode ler-se:

> O conjunto $\mathbb{R}^2$, quando considerado com estas duas operações costuma ser notado $\mathbb{C}$. Dizemos que $\mathbb{C}$ é o corpo dos números complexos e aos elementos de $\mathbb{C}$ damos o nome de números complexos (Machado, 1985, p.72)

A diferença entre as definições apresentadas traz representações diferentes aos alunos e imagens mentais também diferentes. O modo de apresentação do conceito trará ao aluno visões diferentes do mesmo.

- **Outros aspectos na análise dos manuais**

Podemos propor para análise dos manuais que interpretam o Programa, no que diz respeito aos números complexos, também os seguintes tópicos:

Considerações de natureza científica

Erros de carácter científico
Aspectos linguísticos (terminologia, vocabulário, Estrutura lógica das frases, Simbologia)
Exemplos que apresenta – adequação ao aluno
Actividades correctamente concebidas
Fidelidade ao programa

Especificamente quanto aos <u>números complexos:</u>

Evolução do conceito ao longo do tempo
Orientações de natureza pedagógica (Metodologias que preconizam):
  Proposta de leitura de textos originais
  Utilização de técnicas da época e comparação com as actuais por exemplo, resolução de equações
  Integram tecnologias
  Os textos que enriquecem
  Notas biográficas
  Proposta de trabalho de pesquisa
  Aspectos para além do programa devidamente assinalados
  Aspectos optativos do programa
  Desafios aos alunos
  Equilíbrio dos conteúdos
Representação no plano de Argand
Multiplicação por i – rotação de 90º
Conexão com a análise vectorial

Nos manuais analisados poucos são os que reforçam a ideia da necessidade da existência dos números complexos. O que mais se alonga neste ponto, incluindo na sua abordagem vários textos cuja leitura propiciarão aos alunos compreender um pouco do percurso histórico da construção deste novo conjunto de números, é o *Infinito 12*, embora opte por introduzir imediatamente a definição e desistir da perspectiva construtiva que inicialmente parece querer imprimir ao estudo.

Tais opções, por parte dos autores dos diferentes manuais, poderão contribuir para a ideia de que os números complexos são uma invenção humana, e que não existem na realidade. O aluno poderá vir a saber manipular estes números, pode representá-los e até mesmo os aceitar, mas tenho dúvidas que nas condições do actual ensino – tal como vemos preconizado pelos manuais analisados – venha algum dia a desempenhar estas "tarefas"/desafios com a consciência da sua real existência.

Veja-se agora, em relação aos manuais referidos na página 98, uma grelha de análise que contempla aspectos mais gerais:

Ano da reforma e indicação do manual		[1] 1948	[2] 1948	[3] 1976 Compêndio	[4] 1983 P. Editora	[5] 1983 M12	[6] 1992 P. Editora	[7] 1996 P. Editora	[8] 1996 Infinito 12
Orientação Programática	(Abordagem prevista)	Generalização da noção de número	Complexos como raízes de equações do 2º grau	Corpo Complexo	Corpo Complexo	Corpo Complexo	Corpo Complexo	Histórica (resolubilidade algébrica)	Histórica (resolubilidade algébrica)
	Erros científicos	Não	Não	Não	Não	Não	O problema de multiplicar complexos na forma $\sqrt[n]{z}$ (pág 194)	Pág 142 - O problema de multiplicar complexos na forma $\sqrt[n]{z}$	Não
Aspectos linguísticos	Terminologia	Complexos ou imaginários	Complexos ou imaginários	Complexos ou imaginários	Complexos	Complexos	Complexos	Complexos ou imaginários	Complexos
	Estrutura das frases Tipo de texto.	Frases completas e elaboradas	Frases completas e elaboradas.	Bastante texto explicativo. Frases elaboradas e completas.	Pouco texto. Frases curtas e simples	Frases elaboradas	Frases simples. Pouco texto	Frases simples	Texto elaborado.
	Simbologia Matemática	a+bi	a+bi	a+bi	a+bi	a+bi; $\rho cis\theta$	a+bi; $\rho cis\theta$	a+bi; $\rho cis\theta$	a+bi; $\rho cis\theta$
	Exemplos adequados ao aluno	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	sim	Sim	Sim
	Actividades correctamente concebidas	Só existem exercícios	Só existem exercícios	Exercícios	Só existem exercícios	Sim	sim	Sim	Sim
	Fidelidade ao programa	Sim (livro único)	Sim (livro único)	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
História da Matemática	Evolução do conceito ao longo do tempo	Sim	Não é conteúdo programático	Sim	Não	Sim	Não	Não	Sim
	Introdução do conceito	$\sqrt[n]{a}$, com n inteiro qualquer	Não se aplica	Histórico: Fórmula de Cardan	Elementos do Corpo $\mathbb{C}$	Histórico; Construção do corpo complexo	Apresentação dos números complexos	Apresentação dos números complexos	Histórico
	Proposta de leitura de textos originais	Não	Não	Não	Não	Não	Não	Não	Sim
	Utilização de técnicas da época e comparação com as actuais por exemplo, resolução de equações	Não	Não	Não	Não	Não	Não	Não	Sim

	Notas biográficas	Não	Sim	Sim	Não	Não	Não	Não	Sim
Metodologias	Os textos que enriquecem (p.)	71 a 74	211 a 220	158	Não	69 a 70; 82; 92; 97 a 102	Não existem	Não	p. 66 a 71; 77; 78; 87; 98; 103; 104
	Integram tecnologias	Não	Não	Há referências ao desenvolvimento da tecnologia (ex, p.307, 3º vol.)	Não	Sim (p. 100 a 102)	Não	Não	Não neste item.
	Proposta de trabalho de pesquisa	Não	Não	Não	Não	Não	Não	Pesquisa de biografias	Não
	Aspectos para além do programa devidamente assinalados	Sim	Não existem	Sim	Não existem	Sim	Sim	Sim	Sim
	Aspectos optativos do programa devidamente assinalados	Sim	Sim	Sim	Não existem	Não existem	Não existem	Não existem	Não existem neste capítulo
	Desafios aos alunos	Não	Não	Não	Não	Sim (p.92,p.e.)	Não	Não	não
	Representação no plano de Argand	Não	Não se aplica	Sim	Sim	Sim.	Sim	Sim	sim
	Multiplicação por i como rotação de 90º	Sim	Não se aplica	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	sim
	Conexão com a análise vectorial	Sim	Não se aplica	Sim	Sim	Sim	não	Não	sim
Total de páginas dedicadas ao tema/total de páginas do manual		19/314 (6%)	Os Complexos surgem quando oportuno ao longo do capítulo (263 págs.)	1º volume: 18/299 (6%) 3º volume 20/222 (9%)	30/275 (11%)	34/383 (9%)	50/526 (9,5%)	55/450 (12%)	73/450 (16 %)
Nº de aulas previstas no programa		Não indicada	Não indicada	Não indicada	Não indicada	Não indicada	Não indicada	14 (de 50 min)	14 (de 50 min)

Quadro 6 Outros aspectos da análise de manuais

- Análise da grelha apresentada

A comparação de manuais referentes a diferentes épocas, diferentes autores e diferentes programas não pode resumir-se a uma simples grelha de análise. De facto, se itens como a presença ou não de erros científicos, a construção das frases, a evolução do conceito, etc., são intemporais, existem outros que advêm do desenvolvimento da tecnologia, da didáctica e que dificilmente fariam parte de épocas que não aquela dos manuais onde surgem.
Optei, no entanto, por me referir a todos itens para cada manual analisado.

Se quando o livro era único o problema da fidelidade ao programa não se punha, uma vez que estava aprovado oficialmente, com a proliferação dos manuais podem colocar-se algumas questões: O que se entende quando se afirma que um manual é fiel ao programa? Se se trata de abordar todos os itens listados no programa, podemos dizer que todos os manuais cumprem o programa. Todos os manuais contemplam o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos para leccionação previstos no programa oficial. Mas se se trata de contemplar todas as competências e todos os temas do programa, a questão refina-se e teríamos que colocar algumas negativas na análise apresentada. De facto, os autores parecem ignorar a importância da evolução histórica do conceito, a necessidade de conhecer as mentes Matemáticas que abordaram o conceito e ainda a vantagem de conhecer textos originais. O uso da tecnologia na sala de aula também é frequentemente menosprezado e pouco referido nos manuais. Evidentemente, este ponto tem relevância de alguns anos para cá, dado o desenvolvimento das calculadoras gráficas e a introdução dos computadores nas escolas. Não era de esperar que surgisse alguma actividade envolvendo esta tecnologia num manual de 1960…, mas esperar-se-ia a sua inclusão num manual actual. De facto, embora a discussão existisse em torno da sua utilização, ou não, na sala de Matemática, a sua concretização e generalização estava, nos anos 60 a umas décadas de ser conseguida.

Também a resolução de problemas é pouco desenvolvida em alguns manuais. As propostas que se encontram não são em números suficiente, nem de uma diversidade tal que se possa dizer que a resolução de problemas é verdadeiramente fomentada pelos manuais escolares.

O facto de os números complexos serem actualmente o último item programático na leccionação do Ensino Secundário, leva necessariamente a tomada de decisões por parte dos autores dos manuais e dos professores que leccionam a disciplina. O tempo torna-se escasso, as revisões para o exame nacional que se aproxima impõem-se e a leccionação dos números complexos raramente se faz em todas as vertentes que porventura mais interessariam aos alunos. A humanização da Matemática sai a perder, o conceito de número é, por isso, prejudicado.

O estudo/conhecimento de autores como Euler ou Anastácio da Cunha poderiam evitar frases como:

As propriedades

- $\sqrt[n]{z_1}.\sqrt[n]{z_2} = \sqrt[n]{z_1.z_2}$
- …
- …

São verificadas sem qualquer restrições (Neves, 1995, p. 194)

que muito provavelmente se repetem exponencialmente nas aulas do nosso país.

Dado que, como foi referido anteriormente, a *Álgebra* de Euler, de 1707, continha já um erro na multiplicação de números complexos e Anastácio da Cunha, nos seus *Princípios Matemáticos* chama a atenção para esta questão da multiplicação de complexos, pareceria imperdoável o desconhecimento destes factos.

Contudo, a diferença mais evidente que decorre da análise dos manuais está no modo como é feita a introdução dos números complexos. Para lá da abordagem prevista no programa, o enfoque na história da descoberta destes números é muito mais evidente no manuais [1], [5] e [8]; nomeadamente *Compêndio de Álgebra*, de J. Sebastião e Silva e J. D. Silva Paulo, do *M12* e do *Infinito 12*. Por comparação com manuais que se referem ao mesmo programa, é reconhecida a importância que os autores destes manuais dão à contextualização histórica dos conteúdos apresentados. Existem manuais que apenas indicam alguns nomes sobre os quais os alunos poderão pesquisar, como os manuais [4], [6] e [7].

A proximidade da exposição do tema em cada um dos manuais e o modo como se desenrolou a descoberta dos números complexos é muito pouca. Já antes tecemos considerações sobre as condicionantes que se impõem aos professores e as decisões que têm de tomar. Mas cada vez mais importa que estas decisões se tomem conscientes das vantagens que cada metodologia traz aos nossos alunos. Nem todos os professores possuem uma formação inicial em História da Matemática capaz de os ajudar, de um modo eficiente a elaborar uma actividade para a sala de aula, mas este não pode ser um argumento defensável quando se assiste a uma oferta alargada desta temática em termos de formação contínua e, simultaneamente, se assiste a um cumprimento dos critérios de progressão na carreira docente à custa principalmente de formações em áreas como " O papel do Director de Turma", " A organização escolar", "Fotografia", etc., etc. É aqui que a capacidade de investigação de um professor tem de vir ao de cima: o que ele pede a um seu aluno tem de ser sempre estudado por si próprio em primeiro lugar.

Capítulo V

A História dos Números Complexos na sala de aula

5.1 História na aula de Matemática

Segundo Man-Keung Siu (1996), um professor que utiliza a História da Matemática na sala de aula é mais paciente e menos dogmático, mais humano, e com uma mente mais aberta. A introdução histórica permite assumir conjuntamente as questões relativas à natureza dos objectos matemáticos e às características do desenvolvimento matemático. Ela favorece

> o espírito crítico ao constituir um saber verdadeiramente estruturante do pensamento do aluno, pois fornece respostas a diversas questões e abre outras tantas novas questões, sendo que respostas e questões seguem o movimento do progresso científico (Boye, Anne et al, 1998, p. 7)

A perspectiva histórica fará o aluno compreender que a Matemática não é feita de *golpes de génio*, mas apenas de respostas audaciosas a um problema. Eventualmente, poderá ajudar a compreender que o desenvolvimento desta disciplina se faz em grande parte por tentativas de resposta a problemas do quotidiano e que estes encontram uma abordagem apropriada na Matemática.

Habituados que somos hoje ao cálculo literal, é-nos difícil medir com toda a sua plenitude todas as transformações que introduzimos no desenvolvimento e mesmo na concepção da Matemática.

> A utilização de símbolos literais não é um artifício de forma, uma espécie de estenografia específica e eficaz. A letra vai libertar o pensamento da âncora da realidade concreta. (Boye, Anne et al, 1998, p. 9)

- **Sobre a importância da história dos números complexos na aula da Matemática**

Os alunos do ensino secundário não passam pelas hesitações de Bombelli, antes de publicar os seus trabalhos, nem pelos escrúpulos Cartesianos, ou pelas audácias Gaussianas. Em compensação, parece-me desejável que os alunos leiam alguns textos onde esteja presente a construção da teoria dos números. A história dos problemas irá certamente contribuir para uma melhor percepção do processo de construção dos conceitos, ao descrever as surpresas, as limitações, as estratégias utilizadas para contornar o problema, o enquadramento na teoria mais vasta. Acresce ainda a vantagem de que "Se o professor de Matemática pode e deve ser competente em História da Matemática, não tem a responsabilidade de formar historiadores" (Boye, Anne et al, 1998, pág 358)

A utilização da História da Matemática na sala de aula tem-se mostrado difícil de concretizar. Algumas tentativas tímidas têm sido feitas, mas pouco conhecimento se tem das experiências realizadas em Portugal. Num círculo de estudos on-line (na plataforma prof2000) que frequentei, até Dezembro de 2004, sobre a História da Matemática na sala de aula tive oportunidade de tomar conhecimento de algumas tentativas realizadas e do modo como decorreram. Houve também espaço para a formulação de tarefas[19], baseadas na História da Matemática e nos programas em vigor, que não chegaram a ser experimentadas em sala de aula. De qualquer modo, os participantes foram unânimes em considerar que, apesar de difícil, a utilização da História da Matemática, na sala de aula, é muito útil e fértil. É claramente necessário, por parte dos professores, um maior investimento neste assunto.

Muitas das vantagens da utilização da História da Matemática foram sendo referidas ao longo deste estudo. Mas essas vantagens são transversais: alcançam-se não apenas com um

[19] Duas das tarefas formuladas podem ser vistas em http://www.prof2000.pt/users/amma/af33/TF/FT10a.htm e em http://www.prof2000.pt/users/mosteiro/Pagina pessoal/fichaparatarefasete.htm

conteúdo em particular, mas qualquer que seja o tema escolhido para utilizar a História e contribuem para a formação integral do indivíduo. Sintetizando, algumas vantagens são:

- Ajuda a aumentar a motivação para aprender
- Humaniza a Matemática
- O desenvolvimento histórico ajuda a ordenar a apresentação dos assuntos no currículo
- Mostrar aos alunos como os conceitos se desenvolveram ajuda-os na sua compreensão
- Muda a percepção que os alunos têm da Matemática
- Comparar o antigo e o moderno valoriza as técnicas modernas
- Ajuda a desenvolver uma aproximação multicultural
- Proporciona oportunidades para realizar investigações
- Os obstáculos ao desenvolvimento no passado ajudam a explicar aquilo que os alunos de hoje acham difícil
- Os alunos sentem-se melhor ao perceberem que não são únicos a terem dificuldades
- Encoraja os alunos a ir mais longe
- Ajuda a explicar o papel da Matemática na sociedade
- Torna a Matemática menos assustadora
- Explorar a história ajuda a manter o nosso interesse e entusiasmo na Matemática
- Fornece oportunidades de realização de trabalhos inter-curriculares com outros professores ou disciplinas.

(Fauvel, 1997,p.17)

Existem várias formas de se usar a história da Matemática na sala de aula. Algumas dessas formas são também apresentadas por Fauvel (1997,p.18):

- Mencionar episodicamente os matemáticos antigos
- Fazer introduções históricas aos conceitos que são novos para os alunos
- Encorajar os alunos a compreender os problemas históricos dos quais os conceitos que estão a aprender são resposta
- Dar aulas de "História da Matemática"
- Apresentar exercícios na aula ou como trabalho para casa baseados em textos matemáticos antigos
- Dirigir actividades teatrais que reflictam interacção Matemática
- Encorajar a criação de cartazes ou outros projectos com temas históricos
- Realizar projectos sobre a actividade Matemática local no passado

- Usar exemplos críticos do passado para ilustrar técnicas e métodos
- Explorar mal entendidos/erros/visões alternativas do passado para ajudar na compreensão e na resolução de dificuldades dos alunos actuais
- Optar por uma abordagem pedagógica de um tópico em sintonia com o seu desenvolvimento histórico
- Ordenar e estruturar os temas do programa tendo em consideração o seu enquadramento histórico.

Mas é necessário ter em consideração que

(1) A história da Matemática deve ser estritamente auxiliar e subordinar-se ao ensino da Matemática
(2) Só devem ser utilizados os aspectos que ajudem realmente o aluno

(G. Heppel, 1893 *citado por* Fauvel, 1997,p.18)

5.2 Obstáculos epistemológicos à aprendizagem do conceito de número complexo

"As questões de existência, realidade, coerência lógica, põem-se a cada aluno quando se iniciam os números complexos. Não é suficiente defini-los de um modo puramente formal e depois desenrolar a teoria. (…) Não chega justificar a introdução dos números complexos pela necessidade de uma equação do segundo grau ter sempre solução. Este tipo de necessidade raramente convence um aluno que foi sancionado durante anos por se esquecer que a raiz quadrada de um número *a* só estava definida para *a* positivo. Dizer-lhe que a partir do 12º ano[20] mudam as regras do jogo e o que era verdadeiro será falso a partir de agora, poderá ser desastroso para a imagem dada ao aluno da Matemática e da ciência em geral. " (Boye, Anne et al,1998, p. 7)

Para compreender a nova noção é necessário ter presente as concepções Matemáticas que os algebristas do Renascimento possuíam sobre entidades numéricas: A noção de número, ligada à ideia de descontinuidade, e a de grandeza, ligada à ideia da continuidade. Esta distinção continuidade/descontinuidade estava revitalizada no período entre os séculos XVII e XIX, quando o desenvolvimento do cálculo infinitesimal, levantou a questão de decidir se os infinitamente

[20] *Classe terminal*, no original

pequenos deveriam ser tomados como indivisíveis ou "quantidades evanescentes". Os infinitamente pequenos e os complexos surgiam como "ficções do espírito"(Boye, Anne et al,1998, p. 80)

Os Pitagóricos distinguiam entre número e grandeza: Tudo era número (inteiro) ou razão de inteiros, o que levou à crise da racionalidade, aquando da descoberta dos números irracionais. A falta de representação numérica para a diagonal do quadrado estava em contradição não só com a possibilidade de construção da mesma, mas também com o lema da Escola: "Tudo é número". Com efeito, para os Pitagóricos, o número não remetia para a arte de contar, um artifício de ordem prática, logístico, mas para uma concepção metafísica de entidade numérica, portadora de uma interrogação filosófica fundamental sobre a origem e geração das coisas. Os números e os conjuntos exprimiam no seu sentido a harmonia e perfeição do cosmos.

Euclides, nos *Elementos*, não define grandeza, define antes medida com ajuda de outra grandeza. O comprimento não é mais do que uma razão entre duas grandezas do mesmo género, *homogéneas* (comprimentos, superfícies, volumes).

As operações de adição, subtracção, multiplicação e divisão são definidas para certas grandezas associadas aos objectos de geometria. A adição (ou subtracção) de 2 segmentos é um segmento, o seu produto um rectângulo ou um volume e podemos repetir uma grandeza um certo número de vezes. Então adicionar é juntar, subtrair é tirar uma parte de um todo, um todo maior que a parte, concepção que entra em contradição com a ideia de que um número possa ser "menos que nada".

Em suma, a questão de definição de número preocupou sempre os matemáticos, que tentaram utilizar as palavras número, grandeza e quantidade para contornar as suas dificuldades conceptuais de aceitação de novas entidades. Jean le Rond d'Alembert (1717- 83) atribui a Newton a seguinte classificação:

> M. Newton define mais precisamente o número, não pela multiplicidade de unidades, como Euclides, mas a relação abstracta de uma quantidade em relação a outra da mesma espécie, que toma por unidade; depois desta ideia, divide os números em três espécies: os números inteiros, (...) os números quebrados ou fracções e os números surdos ou incomensuráveis"(Boye, Anne et al,1998, p. 97)

Descartes, na sua *Geometria*, trata as raízes complexas por "imaginárias" (dando origem a esta terminologia), afastando-as para o domínio da imaginação e consagrando a dificuldade dos seus predecessores em integrar estas novas entidades.

> Se as raízes negativas das equações suscitam ainda desconfiança, a possibilidade, demonstrada por Descartes, de substituir as raízes negativas por uma mudança adequada de variável, parece atribuir a intervenção ao modo de pôr o problema, mais do que a uma existência em si de tais entidades. (Boye, Anne et al, 1998, p. 103).

A interpretação dos números negativos, em termos de débito, afasta a dificuldade em aceitar os cálculos com números "menores que nada". O problema surge com a utilização do símbolo – : símbolo de subtracção e símbolo de número negativo. (É interessante apontar aqui que esta problemática se tornou a reavivar com a utilização das calculadoras, já que estas fazem a distinção entre os dois sinais de *menos*: os alunos têm de perceber muito bem de que situação se trata, utilizar parêntesis se necessário, sob o risco de obterem um resultado completamente errado. Talvez fosse uma boa ocasião para lhes transmitir que este problema também existia no século XVII, embora por razões diferentes).

No campo operatório as transformações conceptuais para a aceitação dos complexos têm de ser ainda mais radicais: Por exemplo, o argumento da soma não é a soma dos argumentos, as partes reais e imaginárias do produto não são os produtos respectivos das partes reais e imaginárias. É necessário renunciar à relação de ordem e, por outro lado, dissociar a relação de ordem das operações. A representação geométrica das operações implica uma concepção dinâmica dessas mesmas operações: a adição associada à construção do paralelogramo de forças paralelas estudadas em mecânica e a multiplicação apoiada na rotação em torno da origem das coordenadas. Considerados geometricamente, os complexos têm lugar num plano concebido dinamicamente, onde traduzem movimento.

Para garantir a permanência das operações e a universalidade da sua validação em todas as interpretações é necessário considerar apenas o carácter simbólico das operações, tratá-las como leis e clarificar as condições de validade no momento de interpretação de resultados.

Considerados do ponto de vista algébrico, a definição das mesmas operações passa por um desdobramento, pois é necessário considerar a parte real e imaginária, ou módulo e argumento e distinguir entre igualdade dos próprios números e igualdade dos seus módulos.

> Tudo se passa como se fosse na coerência teórica de vários níveis de linguagem que se encontrasse tecido o significado dos números complexos. (…) esse significado passou por uma renovação profunda do significado das operações e pela colocação em evidência das ligações estruturais entre a definição dos objectos matemáticos e das operações onde eles surgem. (Boye, Anne et al,1998, p. 117).

Outro problema que surge com frequência aos nossos alunos surgiu também a matemáticos de renome: a utilização do símbolo $\sqrt[n]{z}$ e o seu significado. De facto, sabemos que o número de raízes de um complexo é igual ao índice dessa mesma raiz. Então é necessário extremo cuidado quando multiplicamos complexos na forma algébrica, pois não estamos a multiplicar dois números: estamos, de facto, a multiplicar os elementos de dois conjuntos.

Não posso, portanto, concordar com a afirmação de alguns autores de manuais, que escrevem: $\sqrt[n]{z_1}.\sqrt[n]{z_2} = \sqrt[n]{z_1.z_2}$ e elogio a nota referente a este aspecto que outros optam por incluir, chamando a atenção dos alunos para as notações que utilizam.

Estudar como as notações evoluíram permitir-lhes-à perceber a força das mesmas, mas também os problemas que podem surgir e que foram encontrados ao longo dos tempos.

5.3 Actividades para a sala de aula

Após a análise dos manuais no capítulo anterior, mais concretamente no respeitante ao estudo dos números complexos, consciente dos desafios que se colocam aos nossos alunos e dos objectivos da disciplina, consagrados em documentos como as *Normas*, o Programa de Matemática actualmente em vigor e outros, coloquei-me a questão:

Concretamente, que actividades posso apresentar aos meus alunos, que aproveitem as vantagens da utilização da História da Matemática?

Serão apresentados alguns exemplos que ilustram algumas das sugestões de Fauvel (1997) acima enumeradas.

- Um problema extraído da álgebra de Pedro Nunes:

(adaptado de *Infinito 10*, p.31)

Lê o seguinte texto, extraído do *Libro de Algebra*, de Pedro Nunes

65. Partamos .12. en tales dos partes q̃ la raiz de la vna multiplicada por la raiz de la otra, haga .5. Pornemos la vna parte ser .1. co. y sera luego la otra .12. m̃ .1. co. y las sus raizes seran R.1. co. y R.12. m̃ .1. co. y multiplicando la vna por la otra haremos R.v.12. co. m̃ .1. ce. que sera ygual a .5. Ygualaremos multiplicãdo la raiz por si misma, y el numero .5. por si mismo, y haremos .12. co. m̃ .1. ce. yguales a .25. y restaurando lo diminuto, resultaran .12. co. yguales a .1. ce. p̃ .25. que es la tercera de las compuestas. La mitad de las cosas es .6., que multiplicados en si, hazen .36., de los quales sacãdo .25., quedaran .11. y sacaremos de .6. la raiz de .11., y quedarã* .6. m̃ R.11. por valor de la cosa, que sera la vna de las partes, y la otra sera .6. p̃ R.11. Assi que R.v.6. m̃ R.11. multiplicada por R.v.6. p̃ R.11. hara .5., y la experiencia assi lo dize, porque multiplicando estas dos raizes vna por otra, haremos R.25. Por conjugacion simple, que es menos obra, podremos tambien hazer esto. Porque pornemos q̃ la vna parte es .6. p̃ 1. co. y la otra sera luego .6. m̃ .1. co. y multiplicaremos por tanto R.v.6. p̃ .1. co. por R.v.6. m̃ .1. co. y haremos R.v.36. m̃ .1. ce. *que* ha de ser ygual a .5., y los sus quadrados tambien seran yguales s. .36. m̃ .1. ce. serã yguales a .25. Ygualaremos restaurando lo diminuto, y quedaran .36. yguales a .1. ce. p̃ .25. y sacando lo superfluo, resultarã finalmente .11. yguales a .1. ce. que es simple conjugacion.

*P. 175 *r*.

— 210 —

Partiremos .11. por .1., y vernan los mismos .11. por valor del censo, y sera luego la cosa R.11. assi que la parte mayor sera .6. p̃ R.11. y la otra sera .6. m̃ R.11.

1) Sublinha, no texto, as palavras que pensas traduzirem operações Matemáticas e procura entender o seu significado;
2) A resolução deste problema está descrita de um modo muito diferente do actualmente utilizado. Qual a diferença mais evidente?
3) Traduz em linguagem moderna o problema e resolve-o
4) Compara a resolução de Pedro Nunes com a tua. Há alguma semelhança entre as duas resoluções?
5) Compara o conjunto-solução obtido em cada resolução. Que concluis?
6) Propõe uma explicação para o que constataste.
7) Procura conhecer um pouco mais da vida e obra de Pedro Nunes, grande matemático português. Algumas fontes de informação poderão ser:

   http://www.apm.pt/gt/gthem/PedroNunes/PedroNunes.htm

   História concisa das Matemáticas, de Dirk J. Struik

   História da Matemática, de Carl B. Boyer

- Resolução da cúbica: Para quê? Como?

A sequência de actividades seguinte, disponível on-line, foi formulada como tarefa, durante a presente investigação, em Dezembro de 2004 num Círculo de Estudos sobre *História da Matemática com o Cinderella*, com o formador Dr. José Miguel Sousa, e pretendia aliar a História da Matemática com o Programa de Matemática do Ensino Secundário e os números complexos. Contém uma pequena introdução para professores, o enunciado das tarefas e alguns comentários destinados a professores. Embora esteja ainda disponível on-line, transcrevo uma parte desse trabalho por mim efectuado.

- **Uma construção de um eneágono segundo Al–Biruni**

(adaptado de "L'origine algébrique", de Boye, A. et al, (1998). *Images, Imaginaires, Imaginations, Une perspective historique pour l'íntroduction des nombres complexes*)

Por volta do ano mil, o persa Al-Biruni utilizava o teorema de Ptolomeu para construir um eneágono, a partir de uma solução aproximada de uma equação do 3º grau. Vamos ver como:

1. Por volta de 150 d.C., o astrónomo grego Ptolomeu enunciava:

Seja um quadrilátero qualquer PQRS inscrito num círculo; Sejam as diagonais [PR] e [QS]. (…) O rectângulo construído sobre [PR] e [QS] é igual aos dois rectângulos de lados opostos [PQ], [RS] e [PS], [QR].

Este enunciado é conhecido pelo **teorema de Ptolomeu**:

Num quadrilátero inscrito num círculo, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos.

Escreve, em linguagem Matemática, a relação expressa por Ptolomeu.

2. Seja ABCDEFGHI um eneágono. Aplica o teorema de Ptolomeu aos quadriláteros ABDE e ABCD e escreve duas relações entre estes elementos do eneágono.

3. Seja M o ponto de intersecção de [DH] e [AE].

3.1) Demonstra que o triângulo EDM é equilátero;

3.2) Demonstra que ABDM é um paralelogramo.

4. Al – Biruni Considerava que cada lado do eneágono era igual a 1 , e que a pequena diagonal BD era desconhecida. Designando BD por x, deduz que x era a solução da seguinte equação do 3º grau: $x^3=1+3x$

5. Al – Biruni deu a solução aproximada com a notação sexagesimal utilizada habitualmente pelos astrónomos:

1º52'45''47'''13''''. Quer dizer,

$$1+\frac{52}{60}+\frac{45}{60^2}+\frac{47}{60^3}+\frac{13}{60^4}$$

Compara este valor com uma solução decimal aproximada a 10^{-9} : 1,879385241

6. Aplica os resultados de Al – Biruni para construir um eneágono de lado 60 mm.

Na seguinte actividade, é proposta outra construção do eneágono. É devida a Abu-l-Gud, matemático árabe do século XI.

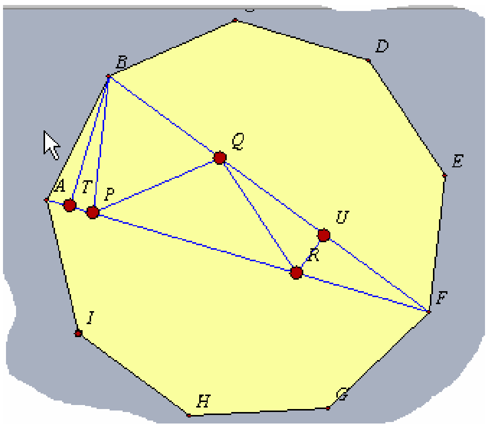
Abu-l-Gud retoma a problemática de Al-Biruni, mas ao contrário. Com efeito, ele considera que o lado é desconhecido mas que a grande diagonal é igual à unidade. Ele obtém também uma equação do 3º grau. O estudo geométrico que precede é interessante, pois pode-se aplicar, em teoria, à construção de outros polígonos regulares.

- **Uma construção de um eneágono segundo Abu-I-Gud**

(adaptado de "L'origine algébrique", de Boye, A. et al, (1998). *Images, Imaginaires, Imaginations, Une perspective historique pour l'íntroduction des nombres complexes*)

No século XI o matemático árabe Abu-I-Gud expôs uma construção de um eneágono regular, a partir de uma equação do 3º grau. Vamos seguir os seus passos, com a notação moderna:

Seja ABCDEFGHI um eneágono. Abu-I-Gud considerava a linha quebrada BPQR da figura abaixo tal que $\overline{AB}=\overline{BP}=\overline{PQ}=\overline{QR}$



1 – Justifica que o triângulo ABF é isósceles;

2 - Considerando os ângulos dos diversos triângulos formados, indica, em graus, o valor dos ângulos do triângulo QRF. O que concluis?

3 - Compara os triângulos FAB e BAP. Dizemos que esses triângulos são semelhantes. Deduz que

$\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AF}}$ (1)

4 – Tracemos as perpendiculares BT e RU. Deduz-se que $\dfrac{\overline{FT}}{\overline{FB}}=\dfrac{\overline{FU}}{\overline{FR}}$ (2)

Exprime $\overline{FT}$ e $\overline{FU}$ em função de $\overline{FA}$ e $\overline{AB}$

(sugestão: $\overline{FT}=\overline{FA}-\dfrac{1}{2}\overline{AP}$ e $\overline{FU}=\dfrac{1}{2}\left(\overline{FB}-\overline{BQ}\right)$)

5 – Abu-l-Gud considerava que $\overline{FB}$ era igual à unidade e que AB era desconhecido. Se notarmos por *x* esse comprimento, deduz uma relação verificada por *x*, utilizando (1) e (2).

6 – Efectua um estudo semelhante para o pentágono regular. Qual é a equação verificada?

- **A fórmula de Cardano**

(adaptado de *Teaching sixth form mathematics with a historical perspective*, Friedelmeyer, 1990)

1. Considera a equação $x^3 = 6x + 6$ (1)

1.1 Coloca-a na forma $x^2 = 6 + \frac{6}{x}$

1.2 Considera as funções de expressão geral $f(x) = x^2$ e $g(x) = 6 + \frac{6}{x}$. Traça, no mesmo referencial, o gráfico das duas funções.

1.3 Existe algum ponto de intersecção dos dois gráficos? Indica uma janela de visualização que permita dizer qual o número de pontos de intersecção.

1.4 Indica um enquadramento para o(s) valor(es) da(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de intersecção.

1.5 Considerando a função $h(x) = x^3 - 6x - 6$ mostra que a solução da equação (1) é maior do que $\sqrt{2}$. (Sug. Analisa o sinal da derivada)

1.6 No século 16, Cardano, um proeminente Matemático, usava a fórmula $x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$ para resolver as equações do tipo $x^3 = px + q$. Indica, assim, o valor exacto da solução da equação.

1.7 Aplica a mesma fórmula para calcular as raízes de $x^3 = 15x + 4$. O que verificas?

1.8 Verifica graficamente que a equação tem três soluções reais.

1.9 Lê o seguinte exemplo:

A equação $x^3 + 3x = 14$ admite a solução x=2. Aplicando a fórmula da Cardan, no entanto, obtemos o resultado $x = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$. Se encontrarmos dois valores α e β tais que $\left(7 \pm 5\sqrt{2}\right) = \left(\alpha \pm \beta\sqrt{2}\right)^3$ será fácil verificar a igualdade desses dois valores. Neste caso, α = β =1

Mostra, aplicando este método, que a equação da alínea 1.7 admite a solução x=4.

- A Concóide de Sluse

Triângulos Semelhantes

Dois triângulos dizem-se semelhantes quando têm os lados proporcionais dois a dois e os ângulos homólogos iguais.

Prova-se que se dois triângulos

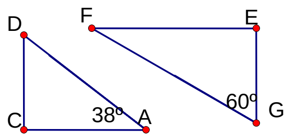
Têm dois ângulos iguais, cada um a cada um, ou têm dois lados proporcionais, cada um a cada um, e o ângulo por eles formado igual, ou têm os três lados proporcionais

então são semelhantes.

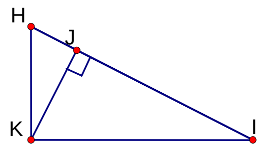
1.1) Diz, se os seguintes pares de triângulos rectângulos são ou não semelhantes:

Identifica os elementos do triângulo que te permitem justificar essa semelhança.

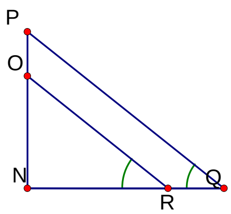
a)ADC e EFG



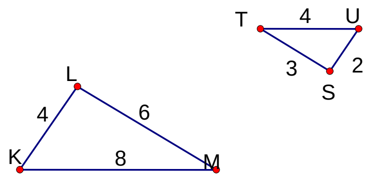
b) IHK e IJK



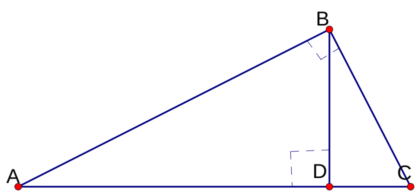
c)RNO e QNP



d)KLM e UST



1.2) Identifica, nos três triângulos desenhados na figura, os elementos que permitem justificar que os triângulos são semelhantes.



D

1.3) Justifica, por palavras tuas, apoiando-te na figura anterior, a afirmação "Em qualquer triângulo rectângulo, a altura relativa à hipotenusa divide-o em dois triângulos semelhantes entre si, e cada um deles semelhante ao triângulo original."

1.4

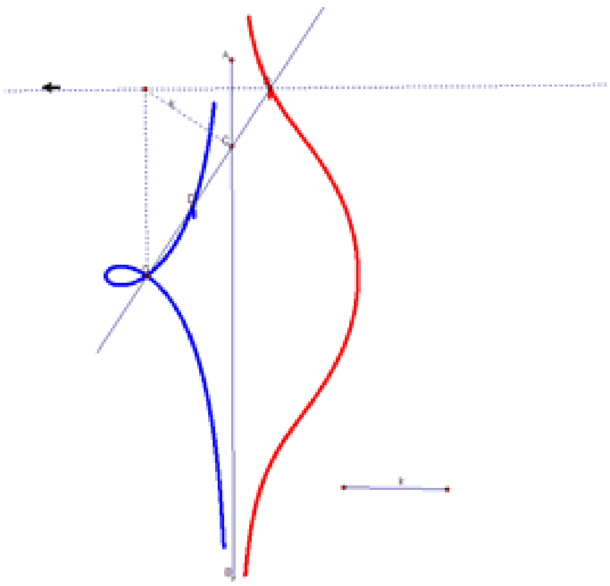
1.4.1) Com as medidas do exemplo anterior concretiza a frase seguinte: "No triângulo ABC, o segmento da altura do triângulo é **meio proporcional** entre os segmentos de recta AD e DC".

1.4.) Explica porque se pode dizer que "Um segmento de recta de medida k é **meio proporcional** entre outros dois de medidas a e b, quando $\frac{a}{k} = \frac{k}{b}$ ou $a.b = k^2$ "

1.5) Vamos agora usar o Geometer's Sketchpad para "fazer" história.

Seja AB uma recta e O um ponto dado que não pertence à recta dada. Sobre cada uma das rectas OC que passam por O, tomemos, a partir do ponto C, (ou seja, onde a recta OC intersecta AB), na direcção de OC, um segmento [CD] tal que $OC \times CD = k^2$, sendo k^2 uma quantidade dada. Onde poderá estar D? Qual é o lugar geométrico dos pontos D?

Sug: Procura perceber em que é que a revisão feita anteriormente te pode ajudar na construção da figura



1.5) Construíste a **Concóide de Sluse**! Sobre ela, procura responder às seguintes questões:

1.5.1) Em que século viveu Sluse? Procura na Internet dados sobre outros Matemáticos que tenham estudado a Concóide, não esquecendo os matemáticos portugueses.

1.5.2) O que é uma concóide?

1.5.3) Faz variar a medida de alguns dos segmentos de recta. A Concóide tem sempre o mesmo aspecto?

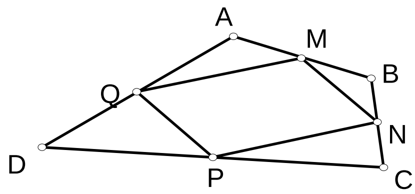
Podes procurar ajuda na Internet:
http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/,
http://es.rice.edu/ES/humsoc/Galileo/Catalog/Files/sluse.html
http://webs.ono.com/usr004/rpe/corbes.htm,
http://www.museoinformatica.it/SITE%20FAUSTO/CULTURALE/encyc.htm

- O velho problema dos pontos médios dos lados de um quadrilátero

Mostra que num quadrilátero qualquer os pontos médios dos lados são vértices de um paralelogramo.

Esta actividade pode ser encontrada na Brochura *Trigonometria e números complexos*, editada pelo Ministério da Educação. Já havia sido apresentada uma resolução recorrendo a um problema de geometria dinâmica, mas pode ser também resolvido com recurso aos números complexos. Trata-se de um exemplo que traduz "a perspectiva unificadora dos complexos". (Loureiro, 2000). Muitos matemáticos consideram que os números complexos podem ser um tema aglutinador, ao darem oportunidade de rever sistemas de números, vectores, trigonometria, geometria e outros tópicos, para não falar de uma visão de funções elementares. (Loureiro, 2000)

Resolução da actividade



Para simplificar, vamos trabalhar com a mesma designação para cada ponto e para o número complexo que ele representa num referencial fixado. Neste caso, os números complexos A, B, C, D, M, N, P e Q. Também para simplificar, vamos já traduzir a hipótese e a tese em linguagem de números complexos e da maneira mais económica possível.

Hipótese: $M = \frac{A+B}{2}$; $N = \frac{B+C}{2}$; $P = \frac{C+D}{2}$ e $Q = \frac{D+A}{2}$

Tese: $N - M = P - Q$

Demonstração:

$$N - M = \frac{B+C}{2} - \frac{A+B}{2} = \frac{B+C-A-B}{2} = \frac{C-A}{2}$$

$$P - Q = \frac{C+D}{2} - \frac{D+A}{2} = \frac{C+D-D-A}{2} = \frac{C-A}{2}$$

logo

$$N - M = P - Q$$

Capítulo VI – Epílogo/ Conclusões

Abordarei esta ponta final do trabalho com reflexões de duas naturezas: uma mais local onde tentarei, a partir dos estudos que efectuei, responder às questões específicas que fui enunciando e que foram surgindo ao longo do período de tempo que dediquei a esta investigação; depois tentarei ir um pouco mais longe e abordarei as conclusões de um ponto de vista mais global onde tentarei fazer uma análise mais filosófica mas, acredito, que igualmente fundamentada, dos ensinamentos que recolhi deste percurso, nem sempre linear, de aprendizagem/maturação profissional. Finalmente reflectirei sobre as possíveis investigações futuras e pelas quais ganhei também entusiasmo no seguimento do presente estudo.

Assim, e relativamente às questões que me propus estudar, algumas respostas poderão ser agora dadas.

Na Introdução foram levantadas as seguintes questões:

- Quais são os factos relevantes da história dos números complexos que podem contribuir para uma construção mais profícua do conceito de número?

- Quem foram os principais intervenientes no processo de descoberta/invenção dos números complexos? E ainda: Qual o papel que desempenharam no desenvolvimento destes números?

- O que deve ser transmitido aos alunos, de modo que eles percebam que a Matemática evolui a partir do carácter criativo e das certezas dos que a esta disciplina se dedicam, mas também por causas relacionadas com a necessidade das populações e com inúmeras dúvidas dos que com ela trabalham?

No Capítulo III tivemos oportunidade de conhecer o contributo de matemáticos como Cardano, Bombelli, Wessel, Argand e Gauss na descoberta dos números complexos. No caso de Portugal, foram referidos matemáticos como Pedro Nunes, Anastácio da Cunha e Gomes Teixeira. As dificuldades experimentadas, a descoberta de como representar geometricamente estes números, por exemplo, são questões que devem ser explicadas aos alunos, para que possam entender como evolui a Matemática e, em particular, como foram descobertos os números complexos. A referência aos matemáticos portugueses e ao seu prestígio internacional contribuirá também para a formação de uma desejável identidade e de um orgulho nacional que todos nós partilhamos quando sabemos que os portugueses também fizeram "história".

No capítulo V tentei dar exemplos do papel da História da Matemática na sala de aula e como é que a utilização de textos/fontes antigos nos permite ensinar conteúdos programáticos e mostrar ao aluno a evolução da disciplina. Mostrei ainda como é que as "novas" tecnologias se podem interligar com a "velha" História, numa ligação natural como no exemplo da Concóide de Sluse; abrem-se, deste modo, novas perspectivas quer a professores, quer a alunos. Direccionar o aluno na pesquisa sugerindo bibliografia e outras fontes de informação credíveis, pode ser uma ajuda preciosa que o professor oferece ao aluno como forma de fomentar o seu entusiasmo pela disciplina. Mas o conhecimento em primeira-mão, por parte do professor, dessa bibliografia também não pode ser minimizado, em vez do mais comum recurso a listagens que outros sugerem.

- Quais as transformações/adaptações que o conceito de número complexo sofreu, desde a sua descoberta histórica até à forma como é tradicionalmente ensinado na actualidade?

A resposta a esta questão passa pela análise feita nos capítulos I, II e IV, pela necessidade de compreensão dos curricula, do conhecimento dos Programas Oficiais e pela análise de manuais escolares. O contexto em que estes últimos surgem está relacionado com os outros dois elementos e só fazem sentido juntos.

Ora, na análise que efectuei, verifiquei que a evolução histórica do número é frequentemente minimizada nos Programas e nos manuais que os interpretam, não surgindo de todo em outros casos, parecendo todavia estar a ganhar alguma importância nos actuais programas e manuais. Como corpo complexo, como ampliação de $\mathbb{R}$ ou como intervenientes em problemas de resolubilidade algébrica, a aprendizagem dos números complexos, por parte dos alunos do ensino secundário, só tem a ganhar com esta última abordagem. Esta parece-me ser a que melhor permite o envolvimento com a História da Matemática e que melhor consegue relacionar o tema com outros itens programáticos anteriormente abordados, como a geometria, a álgebra, etc.

- Que competências matemáticas aspiramos desenvolver no aluno com o ensino dos números complexos?

O facto de os números complexos permitirem várias conexões a outros ramos da Matemática pode contribuir para que o aluno desenvolva competências não só no domínio da manipulação algébrica destes números, mas também na sua visualização geométrica, nas transformações geométricas como a rotação e translação, na compreensão da construção do sentido de número, etc. Não esquecendo que as calculadoras usadas no 12º ano facilmente convertem números complexos escritos na forma algébrica para a forma trigonométrica e vice-versa, a competência algorítmica/mecânica perde porventura importância e reúnem-se, deste modo, as condições para que se chame a atenção do aluno para, por exemplo, a geometria ou a História.

Também no capítulo V foram referidas as vantagens da utilização da História da Matemática na aula de Matemática. Sendo essas vantagens transversais e portanto aplicáveis na leccionação de qualquer item, relembro agora novamente algumas delas:

- Explorar a história ajuda a manter o nosso interesse e entusiasmo na Matemática
- Mostrar aos alunos como os conceitos se desenvolveram ajuda-os na sua compreensão
- Oferece oportunidades para a realização de investigações.

No capítulo II foram analisadas algumas questões relativas aos números complexos, de exames nacionais. Mostrei algumas diferenças entre as questões de exames mais antigos e as de exames mais recentes. Neste vemos claramente o crescer da importância da representação geométrica, aliada às transformações geométricas e da compreensão da necessidade destes números. O facto de os alunos poderem utilizar a sua calculadora gráfica em exame retira alguma importância à manipulação algébrica. Mas as questões continuam sem avaliar verdadeiramente se o aluno compreendeu o conceito global de número.

No Capítulo I interroguei-me se:

-Terá justificação a presença dos números complexos nos currículos de todos os alunos? Será necessário que todos os alunos tenham conhecimento da existência de outros números para além dos reais?
Que sentido de número importará criar/desenvolver nos alunos de Artes, por exemplo? Ou nos alunos de Humanidades?

No capítulo II a questão surgia na continuação da anterior:

Quais são as razões para a presença, no Programa da disciplina de Matemática, dos números complexos? O que leva à sua inclusão nos Programas da disciplina?
Compreensão do conceito de número?
Definição de operações entre novos "entes"?
Oportunidade de humanizar a Matemática através da Histórica?
Compreender que ainda há muitas possibilidades para o conhecimento humano e que ainda há novos campos na Matemática por explorar?

Foi referido que no programa de Matemática B não figurava explicitamente o tema dos números complexos. Mas o facto de conhecerem estes números será para alguns alunos o concluir de uma aprendizagem sobre a evolução do número, um ponto de chegada de uma caminhada de 12 anos. Um local onde os saberes podem ser revisitados, repensados sob um novo ângulo, o das conexões a outros temas, o da possibilidade de novas demonstrações. Para outros alunos, os que estudam mais profundamente o assunto e que continuarão a estudar no ensino superior, este é um ponto de partida para novos saberes: A Análise Complexa, a electrotecnia, as artes, a física, etc., precisam dos números complexos e os alunos gostarão de saber que ainda há muito para descobrir, aprofundar, demonstrar…

Por último, parece-me poder afirmar que os professores que conhecem a História da Matemática, que conhecem as personalidades, as suas obras e as suas dúvidas, que sabem que os conceitos não surgem num estalar de dedos, que compreendem as razões que levam a que os matemáticos não aceitem facilmente novas identidades, podem ser melhores professores. Mais cultos, mais humildes, mais humanos, mais compreensivos, mais condescendentes, compreenderão mais detalhadamente melhor as dúvidas e erros dos alunos, pois elas já passaram pelas suas mãos, no estudo histórico que efectuou. Mas também são porventura mais exigentes: esperarão que os seus alunos se entusiasmem tanto quanto eles e que este interesse conduza a níveis de conhecimento superiores, enfim ao sucesso.

Os alunos gostarão de saber que os grandes génios também tiveram as suas dúvidas e os professores reconhecerão no ensino dos números complexos algumas dificuldades que, às vezes, até parecem sequer imaginar quando a ênfase se coloca somente na técnica, no "como se faz" em vez do" porque é que se faz"; por exemplo

- Gauss estudou as geometrias não-euclidianas durante mais de 50 anos, sem nunca ter publicado sobre o assunto e os nossos alunos certamente gostarão de partilhar esse sentimento de "dificuldade" com Gauss mas, muito em particular,

- a História dos números complexos surge povoada de exemplos de pessoas reconhecidamente inteligentes a quem afinal também custou aceitar factos provenientes destes novos campos do saber: Anastácio da Cunha chamava "expressões absurdas" aos números complexos; Descartes, disse que eram "imaginários". Gomes Teixeira, incidentalmente, até definiu uma relação de ordem em $\mathbb{C}$.

Registaram-se as mudanças no ensino dos números complexos desde 1950 até ao presente em Portugal. Os estudos feitos a este propósito (relacionados com os programas oficiais e estes com os currículos) permitem constatar que: após a *Matemática Moderna* ter sido abandonada, os programas de Matemática passam, pelo menos em teoria, a dar mais relevo à geometria, às aplicações na vida real, preconizam a utilização de tecnologias, apoiam-se na resolução de problemas como metodologia de ensino e assiste-se a uma desvalorização do chamado "formalismo" substituído por uma grande ênfase na compreensão dos conceitos matemáticos.

Surge, assim, como crucial, a necessidade de envolver o professor de Matemática da actualidade no desenvolvimento do sentido crítico nos alunos, num saber verdadeiramente estruturante do pensamento e, em particular no que se refere aos números complexos, no envolvimento efectivo dos alunos na descoberta do sentido do número.

A ideia de que um Matemático pode, arbitrariamente, mudar as regras do jogo de tempos a tempos e fazer, por exemplo, com que a equação $x^2+1=0$ passe a ter solução, acarreta necessariamente o sentimento de arbitrariedade na disciplina de Matemática e não está, por razões que tive oportunidade de esclarecer ao longo desta investigação, concordante com o envolvimento efectivo do aluno nas matérias que aprende nem com a ênfase destacada na compreensão dos conceitos. Parece, acima de tudo, importante que o aluno sinta a necessidade interna da aprendizagem do conceito: a invenção Matemática pode permitir ultrapassar um obstáculo de aprendizagem, mas tal não pode ser conduzido de um modo arbitrário, injustificado; existem, em particular, considerações de ordem filosófica, física, etc. que devidamente incorporadas na aprendizagem retiram a arbitrariedade com que, muitas vezes, camuflamos o ensino dos conceitos matemáticos.

Ora o estudo de textos antigos afigura-se imprescindível neste desafio de ensino dos números complexos: permite esclarecer o saber actual e pode contribuir para ajudar o aluno a ir mais longe; guiado por questões que se puseram a outros, ajudado/acompanhado pelas dificuldades que outros sentiram teremos o aluno finalmente capacitado para agarrar a complexidade do conceito. Compreender porque foi difícil, ao longo dos tempos, que os matemáticos aceitassem os números complexos, permitirá, em suma, conhecer um pouco mais da história do pensamento matemático mas, acima de tudo, poderá ajudar o aluno na compreensão/construção do conceito de número complexo, em primeira instância, mas também do conceito lato de número.

Há, por conseguinte, aspectos históricos que não podem ser esquecidos aquando da leccionação dos números complexos, no 12º ano, nomeadamente:

i) A evolução histórica da resolução da cúbica, através dos seus protagonistas:
- A importância da resolução da equação; Métodos de resolução da equação
- O papel de Scipion del Ferro, Tartaglia e Cardano.

ii) O surgimento dos números complexos:
- Os contributos de Cardano e Bombelli.

iii) A representação geométrica dos complexos:
- O papel desempenhado por Wessel, Argand e Gauss.

Há ainda relevantes indicações lectivas que se podem retirar do estudo conduzido, nomeadamente:

- A importância da representação figurativa dos números complexos, na consolidação histórica do conceito
- A evolução do conceito de número
- A conexão entre os números complexos e a geometria
- A ligação dos números complexos à análise vectorial; mas também
- A utilização de programas de geometria dinâmica como ferramenta actual no ensino dos números complexos, ou
- O estudo/revisita às transformações geométricas, no contexto aplicação de números complexos.

Nas palavras de Liang-shin Hahn,

> "O desenvolvimento da geometria projectiva mostra que os números complexos são também indispensáveis na geometria. À medida que a investigação avança, tem-se tornado cada vez mais claro que para compreender verdadeiramente a Matemática, mesmo que seja só o cálculo, o campo dos números reais é estranhamente estreito, e é imperativo que trabalhemos com os números complexos para atingir a uniformidade e a harmonia." (Hahn, 1994, p. 2)

Os manuais têm, como se viu, um papel fundamental na leccionação do tema. "Embora o manual escolar não seja o único instrumento educativo a que o aluno tem acesso para procurar e referenciar informação, é certamente um dos instrumentos que lhe está mais próximo". (Silva, 2003)

No capítulo IV detive-me detalhadamente sobre alguns dos manuais escolares adoptados nas escolas, desde 1950. Foi feita uma análise do modo como a definição de número complexo era introduzido em cada um deles, quais as componentes do conceito que valorizavam e que imagens produziam ao leitor. Assim, um manual reforça o facto de a definição ser arbitrária (Compêndio de Algebra), outros insistem na manipulação algébrica (*Livro de Texto 12º ano Matemática*, 1989 e 1995), e no manual analisado em último lugar (*Infinito 12*) surgem, de um modo expressivo, as diferentes representações dos números complexos. Acima de tudo assiste-se a uma descrição detalhadíssima da componente algorítmica associada aos números complexos; a um "formalismo", um tanto desajustado (atendendo às directivas programáticas) do desejável e a uma arbitrariedade de informações conceptuais que podem não contribuir (porventura atrapalham) a compreensão do conceito que aspiramos transmitir aos nossos alunos.

O modo como são apresentados os conteúdos é também determinante na construção do conhecimento e das imagens de um conceito. Embora o programa actual enfatize a utilização da História da Matemática e em particular no que respeita aos números complexos, a verdade é que este estudo também permitiu concluir que, as mais diversas razões conduzem a que raramente essa informação/metodologia é desenvolvida plenamente para o caso dos números complexos.

A análise que efectuei incidiu também sobre outros aspectos dos mesmos manuais. Entre outros, destaco a identificação de erros científicos, a comparação entre a apresentação dos conteúdos nos manuais escolares e a evolução histórica dos mesmos conteúdos. O manual condicionará certamente a actuação, por parte do professor, porquanto apresenta diferentes valorizações de cada componente. A maior parte dos manuais não apresenta, objectivamente, afirmações que possam ser classificadas de erros científicos. A única falha que detectei a este nível surge apenas em dois manuais, (*Livro de Texto 12º ano Matemática*, 1992 e 1996) e prende-se com a multiplicação de números escritos na forma $\sqrt[n]{z}$. Outros autores evitam esta forma de escrita, declarando-o expressamente, se bem que não justificam claramente a sua opção.

Também a comparação que conduzi no que respeita à evolução/apresentação cronológica do tema dos números complexos na História da Matemática e nos manuais deixa antever que há ainda algum trabalho a desenvolver por parte de alguns dos autores. Enquanto nos manuais mais antigos se justifica que este ramo da Matemática não surja como instrumento pedagógico explícito (as vantagens da utilização da História da Matemática só começaram a ser estudadas na década de 70), dos manuais mais recentes esperar-se-ia uma maior preocupação com o modo como são transmitidos aos alunos os novos conceitos e as referências históricas correspondentes. O manual *Livro de Texto 12º ano Matemática*, 1996 é por estas razões um exemplo a evitar: O modo escolhido para introduzir os números complexos tem poucos ou nenhum pontos de contacto com a História. Já o manual *Infinito 12* adopta claramente a postura oposta, apresentando/explorando várias das dificuldades que surgiram ao longo do tempo.

Existiriam muitos mais manuais escolares actuais para analisar, mas acredito que a mais valia dessa análise pudesse, por um lado, não trazer muitas coisas diferentes daqueles que foi possível identificar na amostra analisada e, por outro lado, acabar-se-ia então com um estudo porventura demasiado longo e menos atento a outras questões que também tivemos em linha de conta (os exames, por exemplo). Os oito manuais que analisei permitiram dar uma perspectiva da evolução do ensino, culminando nos actuais, de que escolhi dois, que acredito serem os mais adoptados em Portugal[21].

Segundo Abrantes, Serrazina e Oliveira, (1999) "Todos os alunos devem adquirir uma compreensão global do número e das operações a par da capacidade de usar essa compreensão de maneira flexível."

Ainda segundo os mesmos autores,

> "Este sentido de número – como diversos autores lhe chamam – não é algo que se aprenda de uma vez por todas numa dada fase do percurso escolar dos alunos, mas sim uma competência genérica que se desenvolve ao longo de todo o ensino obrigatório e não obrigatório e mesmo ao longo de toda a vida." (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999, p. 46)

Depois do estudo que efectuei, acabei convencida de que o capítulo dos números complexos não tem efectivamente merecido a devida reflexão, pelos professores, sobre o modo de ser

[21] No momento de fecho deste trabalho, começam a chegar às mãos dos professores novos manuais para o 12º ano. Será obviamente interessante comparar as alterações que os respectivos autores entenderam efectuar.

adequadamente leccionado. A sua posição, no final do programa de Ensino Secundário, poderia favorecer um "final em grande": por si só o fechar de um ciclo e de uma compreensão a um nível mais elevado e mais globalizante do conhecimento alcançado em 12 anos de percurso escolar justificariam esse esforço mas, por outro lado, esta mesma fase poderia significar o "abrir de portas" à curiosidade, ao querer saber mais. Ora os números complexos – quero acreditar que numa escolha consciente por parte dos conselheiros especialistas dos legisladores – cumprem essa dupla função de "final em grande": são pontos de chegada (o fecho do conceito de número) e pontos de partida (o abrir de portas para o estudo de áreas tão reconhecidamente importantes como o são as engenharias ou as ciências, em geral).

"Não basta aprender procedimentos; é necessário transformá-los em instrumentos de pensamento." (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999, p. 47)

O Futuro

Os números complexos, como tema aglutinador, têm sido menosprezados face aos timings em que são leccionados. É necessário compreender a riqueza que o seu estudo traz aos alunos em vários campos da Matemática, como seja a Álgebra, a Geometria ou a utilização de novas tecnologias, etc.

O trabalho de pares entre professores torna-se fundamental no desenvolvimento de tarefas a implementar na sala de aula. Os exemplos que foram apresentados não foram experimentados em ambiente de sala de aula, pelo que será necessário reflectir sobre o melhor meio de o fazer e quais as alterações/melhoramentos a introduzir.

Ficam portanto, adiadas, várias questões, com timings claramente diferenciados:

1. Como optimizar, de um modo completo, a leccionação deste conteúdo?
2. Que tipo de actividades podemos propor, em alternativa ao estado actual, aos alunos? Destas, como envolver a História da Matemática?
3. De que modo é construído, desde o ensino básico, um percurso coerente para a compreensão do conceito de número?
4. Que sentido de número poderão desenvolver os alunos, se modificarmos o modo de leccionar, minimizando a componente algorítmica e valorizando a intuição, a componente geométrica, a compreensão?

5. Em que medida a aquisição deste saber contribui para a construção de uma ideia diferente da que muitos alunos possuem hoje, algorítmica, mecanizada em vez de instrumento do raciocínio?

É sobre este tipo de questões que procurarei reflectir em estudos posteriores.

Bibliografia

- Abrantes, P., Serrazina, L. e Oliveira, I., (1999). *A Matemática na Educação Básica,* Colecção Reflexão Participada sobre os currículos do Ensino Básico, Ministério da Educação, Departamento na Educação Básica, Lisboa
- Alves, Mª da G. D. F, (2004). *Francisco Gomes Teixeira*, *O homem, o cientista, o pedagogo*, Volume II, (Tese de doutoramento não publicada), Universidade do Minho, Braga
- Anastácio da Cunha, J., (1987a). *Princípios Matemáticos*, Reprodução fac-simile da edição publicada em Lisboa de 1790, Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra
- Anastácio da Cunha, J., (1987b). *Principes Mathématiques*, Reprodução fac-simile da edição publicada em Bordéus em 1811, Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra
- Argand, R., (1971). *Essai sur une maniére de représenter Les Quantités Imaginaires dans les constructions Géometriques*, Paris
- Barros, L., (1950), Crítica de livros, in *Gazeta de Matemática, 46*,19-24,
- Bombelli da Bologna, R., (1966). *L'Algebra Prima edizione Integrale Introduzione di U. Forti – Prefazione di E. Bortolotti*, 1ª edição integral, Feltrini Editore Milano,
- Bosmans, S. J. H. (1908). *L'Algèbre de Pedro Nunez*, in Annaes da Academia Polytechnica do Porto, Tomo III, Coimbra, Imprensa da Universidade
- Boye, A., Clero, J., Richard, M., Friedelmeyer, J., Hallez, M., Hamon, G., Kouteynikoff, O., Thiron, M. & Verley, J., (1998). *Images, Imaginaires, Imaginations, Une perspective historique pour l'íntroduction des nombres complexes*, IREM, Ellipses,
- Boyer, C. B, (1996). *História da Matemática*, (2ª edição), Editora Edgard Blucher Ltda, Brasil
- Cajori, F., (1993). *A History of Mathematical Notations*, Dover Publications, Inc, New York
- Calinger, R., (1999). *A contextual history of Mathematics*, Preutice – Hall, Upper Saddle River
- Caraça, B.J., (Julho de 1942). Nota. In *Gazeta da Matemática*, *11*, 16
- Caraça, B.J., (Outubro de 1942). Resposta Às Considerações anteriores. In *Gazeta da Matemática*, *12*, 14-17

- Cardano, G., (1993). *Ars Magna or the rules of algebra*, Dover Publications, New York,
- Carvalho, R. de, (1986). *História do Ensino em Portugal*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa
- Casalderrey, F. M., (2000). *Cardano y Tartaglia Las Matemáticas en el Raneciemento italiano,* Colecção La Matemática en sus personajes, Nivola libros y ediciones, S.L., Madrid
- Collette, J.-P., (1979). *Histoire des mathématiques*, vol.2, Éditions du Renouveau Pédagogique Inc, Montréal
- Costa Almeida, L. da, (1891). Primeiras noções sobre o cálculo das Quantidades Geométricas, Lisboa, *O Instituto*, vol nº39, *563-577 e 626-639*
- Crowe, M. J., (1967). *A history of vector analysis The evolution of the idea of a vectorial system*, University of Notre Dame Press,
- Crowe, M. J.,(1975). Ten "Laws"concerning patterns of change in the History of Mathematics" In Historia Mathematica 2, 161-166
- Descartes, R., (1954). *The Geometry of René Descartes with a fac simile of the first edition*, Dover Publications, Inc, New York
- *De Villiers, M. (1998).* To teach Definitions in Geometry or teach to define? *In Proceedings of PME 22, South Africa, vol.2, 248-255*
- Departamento do ensino secundário (1991). *Programas de Matemática (10º-12º anos) Ensino Secundário*, Imprensa Nacional Casa da Moeda
- Dias, J. S. da S., (1982). "Os Descobrimentos e a problemática cultural do século XVI", Editorial Presença, Lisboa.
- *Dombres, J. e outros, (1987).* Mathématiques au fil des ages*, IREM, gauthier-villars (ed), Paris.*
- Euler, (1840). *Elements of Álgebra*, Springer-Verlag,
- Estrada, F, Sá, C. C. de, Queiró,J. F.,Silva, Mª do C., Costa, Mª J. (2000). História da Matemática , Universidade Aberta, Lisboa
- Fauvel, J (1997). A utilização da História em Educação Matemática in *Relevância da História no Ensino da Matemática*, Colecção História da Matemática Cadernos do GTHEM, GTHEM/APM
- Flament, D., (2003). *Histoire de Nombres Complexes Entre algèbre et géométrie*, CNRS ÉDITIONS, Paris
- Freudenthal, H., *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures,* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht – Holland, 1983.

- Freudenthal, H., *Mathematics as an Educational Task,* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht – Holland, 1973.
- Friedelmeyer, J. – P.,(1990).Teaching sixth form mathematics with a historical perspective. In J.Fauvel (ed.), *History in the mathematics classroom: the IREM papers* (vol. 1), 1-16
- Garber, S.,(2003). The Sputnik and the Dawn of the Space age. [online] disponível em *http://www.hq.nasa.gov/office/pao/History/sputnik/*, em 24 de Janeiro de 2005.
- Gauthier-villars (ed) , (1938). *Oeuvres Completes D'Augustin Cauchy*, IIª Série Tome XIV, , Paris
- Gomes Teixeira, F., (1887). *Curso de Analyse Infinitesimal*, 1ª edição, Porto
- Gomes Teixeira, F., (1890). *Curso de Analyse Infinitesimal*, 2ª edição, Porto,
- Guimarães, H. M. et al, (Março 1998). Matemática 2001 – Diagnóstico e Recomendações para o Ensino e Aprendizagem da Matemática (Relatório Preliminar), APM (Ed.)
- Hahn, L.-s., (1994). *Complex Numbers and Geometry*, The Mathematical Association of América, Washington DC
- Houel, M.J., (1869). *Sur le Calcul des équipollence, méthode d'analyse Géometrique de M. Bellavitis*, Paris.
- Jayawardene, S.A., (1973). The influence of Practical Arithmetics on the Álgebra de Bombelli, *Isis*, *64*, 510-523
- Jayawardene, S.A., (1991). Bombelli. In "Biographical Dictionary of Mathematicians", (Vol.4, pp 305-307), Charles Scribner's Sons (ed.).
- Jones, P. S., (1991). Argand. In "Biographical Dictionary of Mathematicians", (Vol.4, pp 105-108), Charles Scribner's Sons (ed.).
- Jones, P. S., (1991). Wessel. In "Biographical Dictionary of Mathematicians", (Vol.4, pp 2560-2561), Charles Scribner's Sons (ed.).
- Jorge, A.M.B., Alves, C.B., Fonseca, G. & Barbedo, J. (1999). *Infinito 12*, vol. 3, Areal Editores, Porto,
- Jorge, A.M.B., Alves, C.B., Fonseca, G. & Barbedo, J. (2003). *Infinito 10*, vol. 1, Areal Editores, Porto,
- Katz, V. J., (1992), *A History of Mathematics An introduction*, HarperCollins College Publishers, Nova Iorque,

- Loureiro, C., Oliveira. A. F., Silva, J. N., & Bastos R., (2000). *Trigonometria e números complexos*, Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário, Lisboa
- Macedo, A.A. Ferreira e outros, s/ data.*Álgebra 6º ano*, Livraria Studium Editora
- Machado, A., Abrantes, P. & Carvalho, R.F. (1985). *M12 Matemática 12º ano*, Texto Editora,
- Mankiewicz, R., (2000). *The story of mathematics*, Cassel & Co, Londres,
- Marachia, S., (1979). *Da Cardano a Galois Momenti di storia dell'algebra*, Feltrinelli, 1ª edição,
- Marques de Almeida, A.A., (1997). *Estudos de História da Matemática*, Editorial Inquérito
- Matos, J. M., (1989). *Cronologia recente do ensino da Matemática*, Lisboa, APM,
- Ministério da Educação (2003). *Matemática Questões de exame do 12º ano 1997-2002*, Ed. Ministério de Educação, Gave, Lisboa,
- Ministério da Educação e da Cultura, *Programa para o ano lectivo 1974-1975, Matemática*, Ensino Liceal, Lisboa
- Ministério da Educação, (1995). *Matemática - Orientações de Gestão do programa*, DES, Lisboa
- Ministério da Educação, (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências essenciais,* DEB, Lisboa
- Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário, (1999), Ciclo de Conferências - Comunicações, Colecção O Ensino Secundário em Debate, Ed. Ministério da Educação, Lisboa,
- National Council of Teachers of Mathematics, (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*, Lisboa: APM e IIE. (edição original em inglês de 1989)
- Neves, Mª A. F. e Brito, Mª L. C., (1995). *Livro de texto 12º Matemática*, 2º vol. Porto Editora, Porto
- Neves, Mª A. F., (1999). *Livro de texto 12º Matemática*,3º volume, Porto Editora, Porto,
- Neves, Mª A. F., Vieira, Mª T. e Alves, A. G., (1989). *Livro de texto 12º Matemática*, Porto Editora, Porto,
- Nunes, P., (1950). *Obras (,) Nova edição revista e anotada por uma comissão de sócios da Academia das Ciências, vol.VI Libro de Álgebra en arithmetica y geometria*, Imprensa Nacional de Lisboa.

- Nunes, P., (2002). *Obras, vol.I Tratado da esfera*, Academia das Ciências de Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian.
- Nunes, P., (2002). *Obras, vol.II De Crepusculis*, Academia das Ciências de Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian.
- Oliveira, P., (2000). *Brevíssima História dos números complexos*, Colecção História da Matemática, Cadernos do GTHEM, APM
- Pacheco, J. A., (1996). *Currículo: Teoria e Praxis*, Colecção Ciências da Educação, nº 22,Porto Editora, Porto,
- Palma Fernandes, A. e Gonçalves, F., (1955 (?)). *Elementos de Geometria para o 6º ano dos liceus*, Didáctica,
- Poincare, H. (1927). *Science et methode*, Col. Bibliotheque de philosophie scientifique, Flammarion, Paris
- Ponte, J. P. (2002). *O ensino da Matemática em Portugal: Uma prioridade educativa?* [Online] disponível em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/02-Ponte(cne).pdf, em 15 de Outubro de 2004,
- Ponte, J.P. (1989), Como diversificar os Programas de Matemática? In Ministério da Educação, Departamento do ensino Secundário, (1998), *Projectar o futuro: Políticas Currículos Práticas*, (p.101-116), Colecção O Ensino Secundário em Debate, Ed. Ministério da Educação, Lisboa,
- Ponte, J.P. et al, (1988). *Renovação do currículo de Matemática (,) Documentos para discussão – I Seminário de Milfontes*, APM (ed.), Lisboa.
- Ponte, J.P., (2004), As equações nos manuais escolares. [Online] disponível em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/04-Ponte(Equacoes).pdf, em 27 Outubro de 2004
- Programas do Ensino liceal, Decreto nº 37:112,
- Programas do Ensino liceal, Decreto nº 39 80
- Sá, E., Reis, I., Ramos, M. & Pato, J., (Março de 1999). Critérios de elaboração de Manuais escolares e guiões para professores de Matemática, do 7º ao 12º ano, Instituto de Inovação Educacional, SPM.

- Silva, C. (2003). O estado dos manuais escolares de Matemática em Portugal in *Educação e Matemática*, 80, *46-50*.
- Silva, J. C. e, *O pensamento pedagógico de José Sebastião e Silva – uma primeira abordagem*, [online], disponível em http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/pessoal/sebsiva.html, em 15 de Outubro de 2004,
- Silva, J. C., *Alguns marcos da Matemática na Universidade de Coimbra no período 1772-1936*, disponível em http://www.mat.uc.pt/preprints/ps/p0442.pdf em 7 de Outubro de 2005
- Sebastião e Silva, J. e Paulo, J.D. da S., (1963). *Compêndio de Álgebra Tomo 1 – VI ano*, Bertrand (Irmãos), Lda, Lisboa
- Sebastião e Silva, J. e Paulo, J.D. da S., (1970). *Compêndio de Álgebra" 2º Tomo 7º ano,* Livraria Cruz, Braga
- Sebastião e Silva, J., (1953). *Álgebra - Separata da "Enciclopédia da Vida Corrente*, Livraria Avelar Machado,
- Sebastião e Silva, J., (1975a). *Compêndio de Matemática*, 1ºvolume, 2º tomo, Curso Complementar do Ensino Secundário, Edições Gep, Lisboa,
- Sebastião e Silva, J., (1975b). *Compêndio de Matemática*, 3º volume Curso Complementar do Ensino Secundário, Edições Gep, Lisboa,
- Sebastião e Silva, J., (1975c). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática*, (1º,2º e 3º volumes), Curso Complementar do Ensino Secundário, Edições Gep, Lisboa,
- Silva, M. e Tamen, Mª. I., (1981). *O sistema de Ensino em Portugal*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.
- Sousa, C. L. T. de M. e, (2002). *Um estudo sobre as origens e as influências do currículo da Matemática do Ensino Secundário em Portugal*, vol. I e II, (Tese de Mestrado não publicada), Universidade do Minho,
- Struik, D. J. (1997). Porquê estudar a história da Matemática in *Relevância da História no Ensino da Matemática*, Colecção História da Matemática Cadernos do GTHEM, GTHEM/APM
- Swetz, F. J. (1997). Quer dar significado ao que ensina? Tente a História da Matemática in *Relevância da História no Ensino da Matemática*, Colecção História da Matemática Cadernos do GTHEM, GTHEM/APM

- Tietze, U.P., Mathematical Curricula and the Underlying Goals"in *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, 41-53, 1994, Kluwer Academic Publishers
- Verley, J.-L., (1981). *La controverse dês logarithmes dês nombres négatifs et imaginaires, in* Fragments d'histoire dês mathemathiques, Brochure A.P.M.E.P., *41*, 121-140
- Wessel, C., (1897). *Essai sur La Représentation Analytique de la direction*, Academia Real das Ciências, Copenhaga
- Windred, G. (1929). History of the Theory of Imaginary and Complex Quantities. *The Mathematical Gazette,* 14, p. 533-541.

Sites consultados:

http://members.tripod.com/jeff560/index.html, em 21 de Janeiro de 2005

http://bnd.bn.pt/ed/pedro-nunes/obras/fontes-p-nunes/pn_fontes_outras_32_zoom.html, em 18 de Dezembro de 2004

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Bombelli.html, em 15 de Maio de 2004

http://www.prof2000.pt/users/mosteiro/Pagina_pessoal/fichaparatarefasete.htm, em 20 de Janeiro de 2005,

http://www.prof2000.pt/users/amma/af33/TF/FT10a.htm, em 20 de Janeiro de 2005

http://www.physlink.com/Education/AskExperts/ae547.cfm, em 26 de Abril de 2005

Anexos

Anexo 1

Introdução à tarefa “Resolução da cúbica: Para quê? Como?”

Introdução[22]

Uma das razões da falta de interesse pela Matemática e portanto do insucesso nesta disciplina pode residir na imposição que é feita ao aluno, das noções bem estabelecidas e bem construídas, duma obra bem feita, que ele não tem mais do que utilizar. A necessidade interior da construção das suas etapas, as bifurcações possíveis, as hesitações, são totalmente desconhecidas; a intervenção humana torna-se misteriosa, o *sentimento* está ausente da Matemática. O *bom aluno* em Matemática é aquele que sabe aplicar as regras, que assimilou o *jogo do raciocínio*. E se se coloca o *porquê* das regras, uma resposta coerente será, por uma ideia vulgarmente transmitida, que a construção da Matemática se efectua a partir de regras bem estabelecidas, os famosos axiomas e que, de tempos em tempos, um matemático muda as regras do jogo, como se irá ver. Classicamente, o professor de Matemática contará que um dia os Matemáticos decidiram que a equação $x^2+1=0$ teria de ter uma solução: inventaram i !

Quais serão os estragos provocados por esta introdução dos números complexos? A brutalidade da ruptura cria um malefício que não se recomporá. A ideia da arbitrariedade em Matemática fica ainda reforçada. É normal, para um aluno do secundário, que uma equação possa não ter solução. Porquê então inventá-la?

É necessário o esforço para jamais introduzir uma noção sem a sua necessidade interna; a invenção Matemática deve ser capaz de transpor um obstáculo. O matemático tem, por vezes, muitas maneiras de transpor um obstáculo; tem de fazer escolhas, que raramente são arbitrárias, mas guiadas por considerações filosóficas, até físicas, pois o desenvolvimento da Matemática não se faz fora do homem ou do seu meio ambiente.

A descoberta dos números complexos fornece uma ocasião privilegiada de aplicar este princípio de ensino. Aí podemos fazer sentir aos alunos o que pode ser uma invenção em Matemática: porque um novo conceito foi criado? Como evoluiu? Quando adquiriu um verdadeiro estatuto matemático? Como podemos ir mais longe e fazer outras descobertas Matemáticas?

Faz sentido, portanto, respeitar a ordem cronológica e centrar o trabalho na problemática da resolução das equações de 3º grau. Trata-se de colocar em relevo que foi o problema da resolução da equação de terceiro grau que originou a criação do objecto $\sqrt{-1}$ e não, como poderíamos pensar à partida, a resolução de equações de segundo grau.

[22] Adaptado de “L’origine algébrique”, de Anne Boye em Boye, A. Clero, J.,Richard, M., Friedelmeyer, J., Hallez, M., Hamon, G., Kouteynikoff,O.,Thiron, M., Verley, J., (1998). *Images, Imaginaires, Imaginations, Une perspective historique pour l’íntroduction des nombres complexes*, IREM, Ellipses

Quatro etapas têm de ser consideradas, numa abordagem histórica:

1. As tentativas mais ou menos frutuosas de resolução de equações de 3º grau, através de resoluções geométricas de matemáticos árabes, como Al-Biruni, Abu-l-Gud e Omar Khayyam; depois a pesquisa das formulas pelos Matemáticas da renascença italiana, em particular Scipione del Ferro , Tartaglia e Cardano;

2. O trabalho de Rafael Bombelli

3. A entidade imaginária necessária para a coesão das regras algébricas, a partir de Albert Girard e René Descartes

4. Os trabalhos de Argand, Wessel e Carl Gauss,

Não se trata, nas actividades propostas, de fazer um trabalho sobre a história da ciência; o estudo de textos antigos deve sobretudo esclarecer o saber actual, de ajudar os alunos a ir mais longe, guiados por questões que se colocaram a outros, para que possam agarrar a complexidade da construção histórica do saber, e a relativização desse mesmo saber. Conhecerão a Matemática dos grandes sábios do século XVI. Utilizarão os seus conhecimentos e a facilidade das notações para tirar mais proveito dos textos que lhes são propostos.

O Programa de 12º ano contempla cerca de 20 aulas para o Tema III, incluindo-se neste a Trigonometria e os números complexos
Se é fácil encontrar nesta parte do Programa referências à utilização da História da Matemática, não é tão fácil encontrar tempo para, com o aproximar do término do ano lectivo, tratar os números complexos com as referências que deveriam ser feitas. Só um professor que tenha conhecimento e gosto pela História da Matemática e que esteja plenamente convicto das vantagens da utilização da História da Matemática encontrará modo de o fazer.

Ainda que traduzidos algebricamente, alguns dos numerosos problemas clássicos resumem-se à resolução de equações do 3º grau. É assim, por exemplo, com a trissecção do ângulo, a duplicação do cubo, ou a construção de polígonos regulares. Para exemplificar esta questão, vamos ver dois exemplos da construção do eneágono regular, i.e., um polígono regular de nove lados.

Esta construção pode com efeito ser relacionada com a trissecção do ângulo, pois o ângulo sobre o qual vemos um dos lados do eneágono dum ponto do círculo circunscrito é de 20º, isto é, o terço de 60º. Os antigos gregos preocuparam-se com o problema geral da trissecção do ângulo e Papo (séc. IV) transmitiu-nos três métodos, cada um deles utilizando secções cónicas. Encontramos também estas últimas nas resoluções geométricas das equações do 3º grau propostas por Omar Khayyam.

Por agora, o persa Al-Biruni é quem nos convida a utilizar o teorema de Ptolomeu para construir um eneágono regular a partir da solução aproximada duma equação do 3º grau.

Os problemas de ângulos eram essenciais em astronomia e Ptolomeu serviu-se do seu teorema para construir as tabelas de cordas (antepassadas das nossas tábuas trigonométricas). Al-Biruni era também astrónomo. Matemática e Astronomia estão assim relacionadas.

Comentários para professores (Uma construção de um eneágono segundo Al–Biruni)

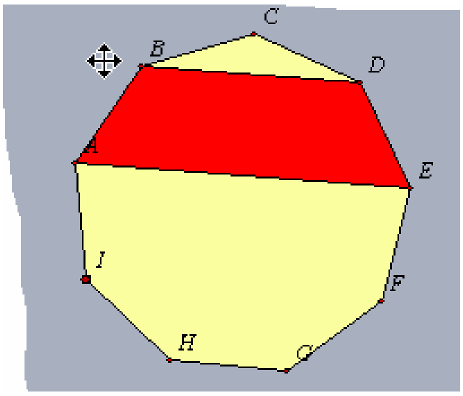
Como foi dito na introdução desta tarefa, há necessidade que os alunos se apercebam da importância da necessidade da resolução da cúbica.
Esta actividade 1 pretende iniciá-los nessa problemática, sentindo algumas dificuldades, tal como outros matemáticos.

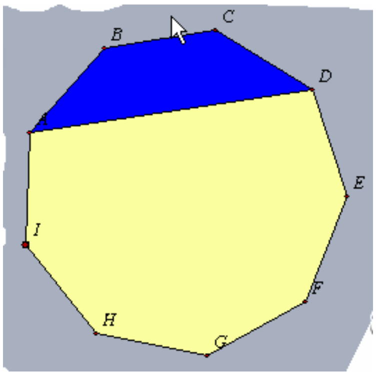
Na actividade original, em francês, são utilizadas apenas as letras, em maiúsculas, dos pontos que constituem as extremidades dos segmentos de recta, para indicação do comprimento do segmento de recta.
Por facilidade de escrita, usarei nestes comentários para professores também essa notação.

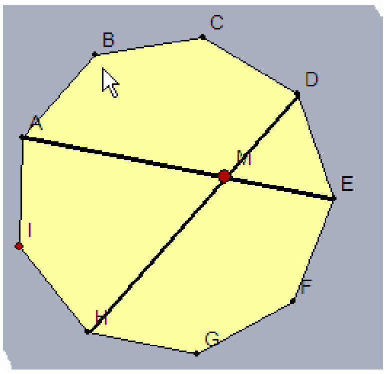
Actividade 1

1) PR . QS = PQ .RS + QR . PS
2) BE . DA = BA . DE + BD . AE e AC . BD = AB . DC + BC . DA

3.1) poderão ser úteis as figuras:

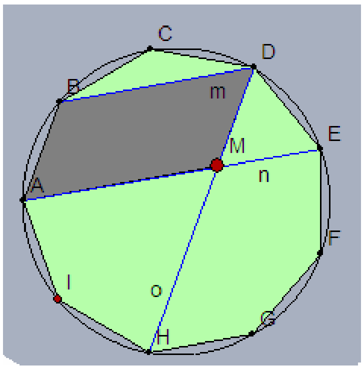






Para provar que o triângulo é equilátero poderão usar-se as relações entre os ângulos inscritos num arco de circunferência

3.2



Novamente se poderão usar as relações entre ângulos e arcos de uma circunferência

4.

Podemos escrever sucessivamente as igualdades:

AC.BD=BC.AD + AB.CD ou x.x = 1.AD + 1.1, isto é, AD =x^2-1

AD.BE = AE.BD + AB.DE ou AD.BE = (x+1).x + 1.1, isto é, AD.BE = (x+1).x +1.1

BD.CE =BC . DE + CD . BE ou x.x =1.1 +1.BE , isto é , BE =x^2-1

Donde é fácil deduzir que

$(x^2-1)(x^2-1)=x^2+x+1$

$X^4-3x^2-x=0$ e uma vez que a solução x=0 não tem interesse, obtemos

$X^3=1+3x$

6.

Comentários para professores (Uma construção de um eneágono segundo Al–Biruni)

1. Considerando o eneágono regular, AF e BF serão duas cordas iguais da circunferência.
2. O triângulo QRF é isósceles. As amplitudes dos ângulos em Q, R e F são, respectivamente, 20º, 140º, 20º.
3. Como os dois triângulos são isósceles, é fácil decidir quais os lados proporcionais
4. $\overline{FB} = \overline{FQ} + \overline{QB} \Leftrightarrow \overline{FB} = 2\overline{FU} + \overline{AB} \Leftrightarrow \overline{FU} = \dfrac{\overline{FB} - \overline{AB}}{2} \Leftrightarrow \overline{FU} = \dfrac{1-x}{2}$

E também,

Como $\overline{AP} = 2\overline{AT}$ temos que $2\overline{FA}\times\overline{TA} = \overline{AB}^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 2\overline{FA}\left(\overline{FA}-\overline{FT}\right) \Leftrightarrow \overline{FA}-\overline{FT} = \dfrac{\overline{AB}^2}{2\overline{FA}}$

$$\Leftrightarrow \overline{FT} = \overline{FA} - \frac{\overline{AB}^2}{2\overline{FA}} \Leftrightarrow \overline{FT} = 1 - \frac{x^2}{2}$$

5. da igualdade (2) temos que $\dfrac{1-\frac{x^2}{2}}{1} = \dfrac{\frac{1-x}{2}}{x} \Leftrightarrow x^3+1 = 3x$

6. $x^3+1=2x$