

# Introdução à Análise Probabilística Simplificada da Segurança Estrutural

Luís A. C. Neves<sup>1</sup>, Paulo J. S. Cruz<sup>2†</sup>

*Universidade do Minho, Departamento de Engenharia Civil  
Azurém, 4800-058 Guimarães Portugal*

## RESUMO

A análise da segurança de estruturas com vidas úteis diferentes das correntes, de estruturas existentes, de estruturas submetidas a acções invulgares, ou de estruturas reforçadas, é bastante complexa. A abordagem correcta deste problema não pode dispensar a utilização de modelos probabilísticos, que são desconhecidos da maioria dos engenheiros civis.

Neste trabalho é apresentada uma breve introdução à análise probabilística simplificada da segurança, dando especial destaque à descrição dos modelos de acções e à análise de exemplos de aplicação.

## 1. INTRODUÇÃO

Hoje em dia, os países mais avançados começam a ganhar consciência de que muitas causas podem contribuir para a drástica redução da vida útil de uma estrutura: utilização de normas e de critérios de projecto errados ou obsoletos; falta de qualidade na construção; agravamento das cargas a que a estrutura está sujeita; etc.

Uma estrutura poderá ser considerada durável se ao longo da sua vida útil (tipicamente 50 a 100 anos) mantiver a sua integridade e qualidade estética, sem a necessidade de grandes intervenções. A durabilidade não é uma propriedade intrínseca dos materiais, mas sim uma função relacionada com o desempenho dos mesmos sob determinadas condições ambientais. O envelhecimento destes resulta das alterações das propriedades mecânicas, físicas e químicas, tanto na superfície como no seu interior, em grande parte devidas à agressividade do meio ambiente. É, pois, evidente que com o passar dos anos qualquer estrutura se torna menos segura.

Com efeito, quanto mais tempo uma estrutura estiver em funcionamento maior será a probabilidade de ocorrerem acções de valor extremamente elevado, para além de ser maior a variabilidade das resistências. Assim, uma determinada probabilidade de rotura deve estar associada a um horizonte de projecto, ou seja, a um intervalo de tempo para o qual a estrutura é dimensionada.

Um risco de colapso nulo numa estrutura é um objectivo impossível de atingir. Com efeito, por muito que sejam sobrestimadas as acções, ou subestimadas as resistências, existe a probabilidade, ainda que ínfima, de se produzir o colapso da estrutura. De facto, a incerteza

---

<sup>1</sup> Assistente

<sup>2</sup> Professor Auxiliar

† Autor para quem a correspondência deverá ser enviada ([pcruz@civil.uminho.pt](mailto:pcruz@civil.uminho.pt))

quanto às acções e às propriedades dos materiais, a utilização de hipóteses simplificativas, as limitações dos métodos de cálculo utilizados e os eventuais erros humanos na fase de execução, fazem com que não seja possível conhecer, com rigor absoluto, o comportamento duma estrutura existente.

A probabilidade aceitável de não cumprimento dum requisito só pode ser analisada em função do custo associado a esse não cumprimento. A resposta às questões de “qual o risco que a sociedade considera aceitável” e “qual o preço que está disposta a pagar pela diminuição do risco” é um problema complexo. O custo do colapso deve considerar, entre outros, o custo de reparação ou substituição da estrutura e o custo da perda de vidas humanas.

Atendendo a que em Portugal se tem dedicado, ultimamente, muita atenção à discussão destes temas e que a nível europeu se têm dado passos decisivos para o desenvolvimento de um regulamento de verificação de segurança baseado em métodos probabilísticos “JCSS Model-Code” (Vrouwenvelder, 2000), pareceu oportuno efectuar uma breve introdução à análise probabilística simplificada da segurança.

## 2. MÉTODOS DE ANÁLISE DE SEGURANÇA ESTRUTURAL

Em geral, os métodos de análise da segurança estrutural dividem-se em quatro níveis: (0) Determinísticos; (1) Semi-probabilísticos; (2) Probabilísticos simplificados; (3) Puramente probabilísticos.

As análises determinísticas não consideram directamente a variabilidade das resistências ou das acções. A incerteza de ambos os factores é considerada num único coeficiente de segurança. Embora muito utilizado no passado, este formato de verificação de segurança está obsoleto. Com efeito, verifica-se que o coeficiente global de segurança depende das grandezas comparadas e dos referenciais utilizados e não pode, portanto, ser considerado como uma medida da segurança estrutural (Ditlevsen and Madsen, 1996).

Os métodos semi-probabilísticos de análise de segurança baseiam-se na utilização de coeficientes parciais de segurança. A maioria das normas em vigor, como sejam o regulamento de Segurança e Acções -RSA (1983)- e o Eurocódigo 1 -EC1 (CEN, 1994;-), estão baseadas neste tipo de métodos. As acções e resistências são caracterizadas por valores médios ou característicos afectados de coeficientes de segurança. As várias grandezas são todas consideradas independentes ou perfeitamente dependentes entre si. A utilização destes métodos torna-se complexa quando se pretende: (a) analisar estruturas com comportamento não-linear; (b) conseguir uma maior margem de segurança; (c) assegurar uma maior vida útil; (d) avaliar a segurança de estruturas existentes.

Numa análise probabilística simplificada as variáveis são descritas pela sua média e desvio padrão. A relação de dependência entre as diversas variáveis é traduzida pela matriz de covariância. Neste tipo de análise a segurança é definida em termos de situações desfavoráveis, definidas a partir de uma função estado limite, que toma valores positivos, se não for ultrapassado o limiar aceitável, e negativos, no caso contrário. Uma estrutura é considerada suficientemente segura, em relação a um estado limite, se a probabilidade da função estado limite assumir um valor negativo for inferior a um determinado valor. No entanto, esta probabilidade não deve ser considerada de um modo estrito, pois na realidade corresponde à probabilidade de haver colapso, considerando que não foram cometidos erros significativos, quer no dimensionamento, quer na construção da estrutura.

Uma análise probabilística completa é realizada considerando a distribuição conjunta de probabilidade de todas as variáveis. Nas variáveis em que a dispersão é independente do valor médio é comum utilizar a variância ou o desvio padrão. No casos contrários é, em geral, utilizada uma medida adimensional da dispersão, tal como o coeficiente de variação. A partir de observações realizadas são propostas distribuições estatísticas que aproximem as diversas

variáveis aleatórias. A quantidade de informação necessária para uma análise deste tipo torna incomportável a sua aplicação corrente.

Atendendo a que a maioria dos colapsos estruturais resultam da ocorrência de erros construtivos não previstos na fase de projecto (Vrouwenvelder, 2000), a probabilidade de rotura deve ser encarada como uma medida de comparação e não como uma medida da frequência com que se observa o colapso de estruturas. Como esta probabilidade assume valores extremamente baixos, é costume definir a probabilidade de rotura através do índice de fiabilidade ( $\beta$ ) dado por:

$$p_f = \Phi(-\beta) \quad (1)$$

em que  $\Phi$  é a função de distribuição normal. Um índice de fiabilidade mais alto implica uma probabilidade de rotura mais baixa.

### 3. PRINCÍPIOS FUNDAMENTAIS DE ANÁLISE PROBABILÍSTICA

Nas últimas décadas têm sido dados alguns passos para o desenvolvimento de um novo regulamento para a verificação probabilística da segurança de estruturas. Estes esforços resultaram da publicação do código-modelo do JCSS. De acordo com este regulamento uma estrutura deve ser dimensionada, construída e mantida por forma a que seja, de um modo económico, adequada ao seu uso durante a sua vida.

Com uma margem de segurança suficiente, a estrutura deve: permanecer adequada ao uso para o qual foi prevista (estado limite de serviço ou de utilização - ELS); resistir a acções extremas durante a construção e a vida útil (estado limite último - ELU); não sofrer danos desproporcionados, isto é, não sofrer danos graves devido a acções de pequena intensidade, sob acções acidentais como incêndios, explosões, impactos ou acções humanas (estado limite de robustez - ELR). Para cada um destes estados limites são definidos índices de fiabilidade mínimos, em função da severidade das consequências.

#### 3.1 Estados limites últimos

Ao contrário dos regulamentos em vigor em Portugal, o código modelo do JCSS permite que se considerem margens de segurança diferentes, consoante a estrutura que se está a analisar. Para estados limites últimos o índice de fiabilidade mínimo é função das consequências da rotura e do custo relativo do aumento da segurança. As consequências da rotura são medidas por:

$$\rho = \frac{\text{Custo de construção} + \text{Custo da rotura}}{\text{Custo de construção}} \quad (2)$$

Em termos do custo das consequências da rotura as estruturas são divididas em três classes:

1. Consequências pequenas ( $\rho < 2$ ): no caso de colapso, o risco de perda de vidas humanas é pequeno ou desprezável e as consequências económicas são pouco significativas (estruturas agrícolas, silos,..);
2. Consequências moderadas ( $2 < \rho < 5$ ): o risco de perda de vidas humanas é médio ou as consequências económicas são significativas (edifícios de escritórios ou habitação);
3. Consequências graves ( $5 < \rho < 10$ ): o risco de perda de vidas humanas é elevado ou as consequências económicas são graves (grandes pontes, teatros, hospitais,..).

Para estruturas em que  $\rho$  é maior que 10 (barragens de grandes dimensões, centrais nucleares,..), deve ser realizada uma análise custo-benefício mais elaborada. Em particular, pode chegar-se à conclusão que a estrutura não deve ser construída.

As consequências da rotura dependem ainda do modo de rotura. De facto, no caso de uma rotura dúctil pode ser possível a evacuação da estrutura resultando em menores custos de rotura. É portanto, razoável considerar que elementos com rotura frágil sejam dimensionados para um índice de fiabilidade mais alto que elementos com comportamento dúctil.

Os custos associados ao aumento da segurança estão, fundamentalmente, relacionados com a incerteza associada às variáveis fundamentais do problema, ao controlo de qualidade e ao horizonte de projecto.

Em função destes custos as estruturas são divididas em três classes: (A) - Custos elevados; (B) - Custos normais; (C) - Custos reduzidos.

A classe B está associada a acções e resistências com variabilidade média (coeficiente de variação entre 0.1 e 0.3) e a um horizonte de projecto comum (50 anos).

No que diz respeito às classes A e C o regulamento não define quais são os limites a considerar. No entanto considera que a dispersão das variáveis, a garantia de qualidade e o horizonte de projecto, implicam a alteração da classe a considerar.

A garantia de qualidade implica custos mais elevados. No entanto, conduz, em geral, a uma menor variabilidade das variáveis básicas, sendo difícil definir uma regra geral que relacione o controlo de qualidade com a classe de fiabilidade a utilizar.

Em estruturas existentes o custo do aumento da margem de segurança é extremamente elevado, logo são aceitáveis índices de fiabilidade mais baixos. Quando se utilizam estruturas com horizontes de projecto curtos é possível reduzir a classe de fiabilidade, pois a variabilidade das variáveis aleatórias é reduzida.

Na tabela 1 são apresentados os índices de fiabilidade recomendados pelo regulamento para as várias situações referidas.

Tabela 1– Índice de fiabilidade mínimo para ELU, referentes a um período de um ano.

Custo de segurança	Consequências reduzidas	Consequências moderadas	Consequências graves
Elevado	$\beta = 3.1$	$\beta = 3.3$	$\beta = 3.7$
Médio	$\beta = 3.7$	$\beta = 4.2$	$\beta = 4.4$
Reduzido	$\beta = 4.2$	$\beta = 4.4$	$\beta = 4.7$

### 3.2 Estados limites de serviço

No caso de estados limites de serviço, o índice de fiabilidade apenas depende do custo associado ao aumento da segurança. Os valores do índice de fiabilidade mínimo para estados limites de serviço irreversíveis assumem, respectivamente, o valor 1.3, 1.7 ou 2.3, se o custo de segurança for considerado elevado, médio ou reduzido. Para estados reversíveis não são indicados valores de referência, no entanto, os valores a utilizar serão mais baixos que estes, pois as consequências do não cumprimento são menores.

### 3.3 Verificação de robustez

A verificação da robustez não é, explicitamente, considerada na verificação da segurança de acordo com o RSA e o EC1. Com esta verificação pretende garantir que situações invulgares, como a explosão de um veículo sobre uma ponte, não põem em causa a estabilidade da estrutura.

A verificação da robustez de uma estrutura é, em geral, feita de um modo simplificado, através da consideração da possibilidade de um elemento da estrutura ser removido ou danificado. Considera-se, assim, que a estrutura deve verificar os estados limites últimos, durante o período necessário para proceder às reparações necessárias, com uma

margem de segurança suficiente. Com esta verificação é possível garantir, com uma determinada margem de segurança, que acções não previstas inicialmente não provocam o colapso da estrutura.

### 3.4 Variáveis básicas

O modelo de cálculo para a verificação da segurança a um estado limite deve incluir, como variáveis, as quantidades físicas que caracterizam as acções, os materiais e a geometria da estrutura. Além destes, deve incluir variáveis que caracterizem os modelos utilizados. Em geral, todas as variáveis que interferem no processo de dimensionamento são aleatórias. No entanto, muitas delas apresentam uma variabilidade tão pequena que pode ser desprezada, sem que os resultados obtidos sejam alterados de modo apreciável.

### 3.5 Modelos do comportamento

Os modelos utilizados devem permitir descrever o comportamento da estrutura até se atingir o estado limite em análise. Estes modelos podem ser divididos em: modelos de acções; modelos estruturais; modelos de resistência e modelos de comportamento dos materiais e da geometria.

#### 3.5.1 Modelos de acções

O modelo de uma acção deve descrever correctamente a intensidade, posição, direcção e duração da acção. Quando existe uma interacção entre a estrutura e a acção esta deve ser incorporada neste modelo.

Tipicamente a intensidade de uma acção pode ser decomposta em:

$$F = \varphi(F_0, W) \quad (3)$$

em que  $\varphi$  é uma função apropriada, geralmente um produto;  $F_0$  é a variável básica que caracteriza a acção, em geral depende do tempo e do espaço mas é independente da estrutura;  $W$  é uma variável aleatória ou determinística que incorpora a interacção entre a estrutura e a acção.

Como exemplo considere-se a acção da neve. O termo  $F_0$  representa o peso da neve ao nível do solo e  $W$  é o factor de conversão do peso ao nível do solo para a estrutura, considerando a forma da superfície onde se deposita a neve. A função  $\varphi$  é um produto.

#### 3.5.2 Modelos estruturais

Os modelos estruturais a utilizar são comuns à análise baseada em coeficientes parciais de segurança. Assim, o modelo estrutural pode basear-se na teoria da elasticidade, pode considerar o comportamento não linear da estrutura ou pode ser fundamentado na teoria da análise limite. No entanto, ao contrário do que acontece numa análise semi-probabilística, a influência da menor ou maior exactidão do modelo pode ser considerada na análise de segurança.

Considere-se um modelo dado por:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (4)$$

em que  $Y$  é a resposta da estrutura,  $X_i$  são as variáveis básicas e  $f$  é a função que descreve o modelo. A função  $f$  não é exacta, tendo associado um erro que é modelado utilizando a seguinte expressão:

$$Y' = \theta \cdot f(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (5)$$

em que  $\theta$  é a variável aleatória associada aos erros do modelo. Na tabela 2 apresentam-se os valores sugeridos no regulamento para a média e coeficiente de variação de  $\theta$ , assim como a distribuição de probabilidades a utilizar, no caso dos esforços serem calculados com base no método dos elementos finitos.

Tabela 2 – Caracterização das propriedades estatísticas dos modelos estruturais.

Grandeza	Tipo Distr.	Média	CV
Momentos flectores em pórticos	<i>LN</i>	1.0	0.10
Esforço normal em pórticos	<i>LN</i>	1.0	0.05
Esforço transversal em pórticos	<i>LN</i>	1.0	0.10
Momentos flectores em lajes	<i>LN</i>	1.0	0.20
Esforço transversal em lajes	<i>LN</i>	1.0	0.10
Tensões em modelos 2D	<i>N</i>	1.0	0.05
Tensões em modelos 3D	<i>N</i>	1.0	0.05

### 3.5.3 Modelos de resistência

Os modelos de resistência a utilizar são, em geral, comuns à análise semi-probabilística. Assim, os modelos descritos nos Eurocódigos 2 a 7 e 9 são utilizáveis numa análise deste tipo. É necessário, no entanto, caracterizar correctamente as propriedades estatísticas de todos os parâmetros utilizados no regulamento (propriedades dos materiais, excentricidades, imperfeições, etc.). A incerteza quanto aos modelos pode ser incorporada de modo semelhante ao introduzido na alínea anterior.

### 3.5.4 Modelos de geometria

A análise de uma estrutura baseia-se, em geral, nos valores nominais das características geométricas. Normalmente, as características reais diferem das nominais e esta incerteza, quando significativa, deve ser considerada na análise estrutural.

### 3.5.5 Modelos dos materiais

O modelo de comportamento dos materiais baseia-se numa equação constitutiva que relaciona as tensões ou as forças com as deformações. Os parâmetros dessa relação (módulo de elasticidade, tensão de cedência, tensão última, etc.) são variáveis aleatórias e, em alguns casos, variáveis no tempo. É comum existir correlação entre os vários parâmetros (por exemplo, entre a tensão última e o módulo de elasticidade do betão).

## 4. MODELOS DE ACÇÕES

As acções podem ser classificadas quanto às suas causas e quanto à sua variação no tempo ou no espaço. Quanto à causa, estas podem ser divididas em: (i) Peso próprio; (ii) Acções devidas à ocupação de edifícios; (iii) Acções devido a actividades industriais; (iv) Acções devidas a meios de transporte; (v) Acções climatéricas; (vi) Acções hidráulicas; (vii) Acções provocadas por impulsos de solo ou rochas, incluindo sismos.

Quanto à variabilidade no tempo as acções são divididas em:

1. Permanentes: Acções que variam pouco em torno do seu valor médio (peso próprio) ou que tendem monotonamente para um valor limite (retracção, fluência);
2. Variáveis: Acções cujas variações no tempo são frequentes e de grande amplitude (sobrecarga, vento);

3. Excepcionais: Acções de grande intensidade mas cuja probabilidade de ocorrência é muito baixa (sismo, explosões).

Quanto à variabilidade no espaço as acções podem ser classificadas como acções fixas e livres. Acções fixas são aquelas cuja distribuição no espaço é determinística e que, portanto, podem ser definidas pela sua intensidade apenas num ponto da estrutura (impulso da água). Acções livres são aquelas cuja distribuição no espaço é variável (ocupação de edifícios).

#### 4.1 Modelos de variação no tempo

A maioria das acções também varia no tempo. A quantidade de pessoas numa sala, assim como a velocidade do vento ou a intensidade do tráfego sobre uma ponte não são constantes ao longo da vida da estrutura. No entanto, os métodos tradicionais de análise de fiabilidade apenas consideram variáveis aleatórias e não processos estocásticos.

As formulações independentes do tempo são correntemente aceites por ser possível transformar um processo dependente do tempo num processo independente deste. Em particular, é possível modelar uma variável como a velocidade do vento através da distribuição de probabilidades do seu valor máximo num dado período.

A análise torna-se bastante mais complexa se a estrutura for sujeita a mais que uma acção variável no tempo. A primeira questão a ter em conta é que duas acções independentes muito dificilmente atingirão a sua amplitude máxima no mesmo instante.

O modelo mais simples para realizar esta análise baseia-se na regra de Turkstra (1972). Considere-se  $p_1(t)$  e  $p_2(t)$  dois carregamentos actuando em simultâneo, tal que a acção combinada dos dois carregamentos possa ser obtida por combinação linear entre eles. Então o efeito máximo das duas acções é dada por:

$$X = \max \left\{ \begin{array}{l} \max_T \{p_1(t)\} + p_2(t) \\ p_1(t) + \max_T \{p_2(t)\} \end{array} \right. \quad (6)$$

Isto corresponde à metodologia corrente nos regulamentos semi-probabilísticos. Assim, considera-se cada uma das acções variáveis como acção de base. Para essa acção é considerado o efeito do seu valor máximo, para a outra é considerado o efeito provocado pelo valor observado no instante em que a acção de base é máxima. O valor máximo dos efeitos das acções é o máximo dos valores assim calculados, considerando cada uma das acções variáveis como acção de base.

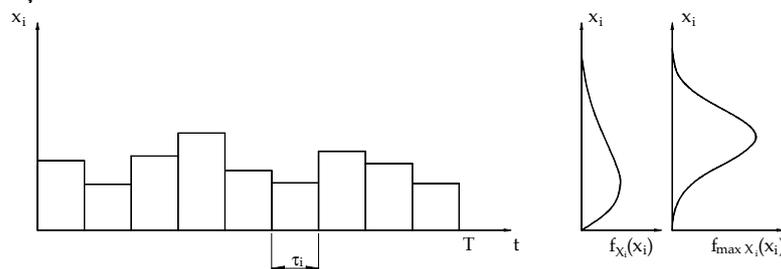


Figura 1 – Modelo de Ferry Borges-Castanheta.

Um processo mais exacto que este pode ser definido quando se consideram processos do tipo dos propostos, em 1971, por Ferry Borges-Castanheta (FBC). Um processo FBC é gerado por uma sequência de variáveis aleatórias igualmente distribuídas e independentes, cada uma actuando ao longo de um intervalo de tempo de duração determinística.

Considerando que todos os intervalos têm a mesma duração  $\tau$ , então o número de intervalos é dado por:

$$n = \frac{T}{\tau} \quad (7)$$

em que  $T$  é a vida útil da estrutura.

Devido à independência dos valores nos vários intervalos, a distribuição de probabilidades do valor máximo do processo é dada por:

$$F_{\max X_i}(x_i) = [F_{X_i}(x_i)]^n \quad (8)$$

Quando vários processos deste tipo actuam simultaneamente é possível, pelo menos em princípio, calcular a distribuição de extremos do processo resultante através de uma expressão recursiva.

Um processo mais simples consiste na discretização do horizonte de projecto da estrutura em intervalos de tempo mais pequenos (Melchers, 1987). É possível, a partir de observações ou distribuições aproximadas, determinar a distribuição de probabilidade do valor máximo de cada acção nesse intervalo. Esta será, como é claro, diferente da distribuição de probabilidades para o horizonte de projecto, com probabilidades de ocorrência mais altas para intensidades mais baixas.

Se se considerar como unidade de tempo a duração da acção que varia mais rapidamente, então todas as outras têm, nesse período, um valor constante. Conhecendo a distribuição de probabilidades do valor máximo de cada acção no período considerado é possível calcular a probabilidade de rotura nesse intervalo, sem que para isso se tenha que considerar a variabilidade no tempo. Conhecendo a probabilidade para todos os intervalos é possível calcular a probabilidade de rotura ao longo da vida útil da estrutura.

#### 4.2 Modelos de variação no espaço

O modelo mais simples de análise de acções variáveis no espaço consiste na consideração de uma carga uniformemente distribuída equivalente (EUDL).

Uma carga variável no espaço pode ser escrita como:

$$q(x, y) = q_0 + q_{loc}(x, y) \quad (9)$$

em que  $q_0$  incorpora a variabilidade entre estruturas ou elementos estruturais diferentes e  $q_{loc}(x, y)$  modela a flutuação da carga de ponto para ponto.

A carga uniformemente distribuída equivalente é dada por:

$$q_{EUDL}(t) = \frac{\int q(x, y, t) \cdot i(x, y) dA}{\int i(x, y) dA} \quad (10)$$

em que  $i(x, y)$  é a função de influência para o esforço ou tensão num ponto da estrutura. Considerando que as propriedades estatísticas da carga não dependem da posição, então a carga equivalente é caracterizada pela seguinte média e variância:

$$\mu(q_{EUDL}) = \mu(q_0) \quad (11)$$

$$\sigma^2(q_{EUDL}) = \sigma^2(q_0) + \sigma^2(q_{LOC}) \frac{\iiint i(x, y) \cdot i(\xi, \eta) \cdot \rho(d) dx dy d\xi d\eta}{\left(\iint i(x, y) dx dy\right)^2} \quad (12)$$

em que  $\rho(d)$  é a correlação entre o ponto  $(x, y)$  e  $(\xi, \eta)$ , afastados de uma distância  $d$ . Em geral, esta função toma a forma:

$$\rho(d) = \exp\left\{-\frac{d^2}{d_c^2}\right\} \quad (13)$$

em que  $d_c$  é uma distância de referência.

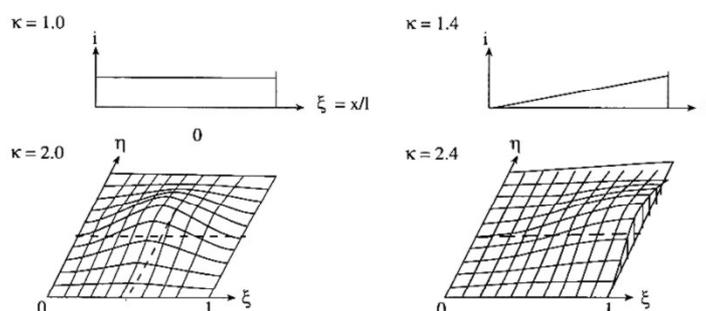


Figura 2 – Exemplos de valores do índice  $\kappa$  em função da linha de influência. (Vrouwenvelder, 2000)

No caso das cargas poderem ser modeladas como um campo de FBC a expressão (12) reduz-se a:

$$\sigma^2(q_{EUDL}) = \sigma^2(q_0) + \sigma^2(q_{LOC}) \kappa \frac{A_0}{A} \quad (14)$$

em que  $A_0$  é a área de referência do modelo de Ferry Borges-Castanheta,  $A$  é a área sob análise e  $\kappa$  é um factor que depende da função de influência.

### 4.3 Peso próprio

O peso próprio diz respeito à acção do peso de elementos estruturais e não estruturais. As principais características do peso próprio são: probabilidade de ocorrência, num determinado instante, muito próxima de 1; variação no tempo desprezável; incerteza da sua intensidade pequena quando comparada com a de outras acções.

A incerteza quanto à intensidade do peso próprio pode ser separada em: variabilidade num elemento; variabilidade de elemento para elemento da mesma estrutura; variabilidade entre elementos de estruturas diferentes. A variabilidade num elemento é, em geral, tão pequena que pode ser desprezável.

As características do peso específico de vários materiais são apresentados na tabela 3.

A correlação ( $\rho$ ) entre dois membros da mesma estrutura pode ser considerada constante. Na ausência de dados mais detalhados este valor pode ser considerado igual a 0.70.

O volume de um elemento pode ser analisado com base no seu valor nominal. Considera-se que o valor médio das dimensões coincide com aquele.

Tabela 3 – Média e coeficiente de variação do peso específico.

Material	Média (kN/m <sup>3</sup> )	Coeficiente de variação
Aço	77	<0.01
Betão corrente	24	0.04
Betão de elevado desempenho	24-26	0.03
Alvenaria	--	0.05
Madeira de Pinho	5.1	0.10
Madeira de Carvalho	6.5	0.10

#### 4.4 Sobrecarga

As sobrecargas sobre pisos de edifícios são devidas ao peso de mobiliário, de equipamentos e de pessoas. A primeira distinção que deve ser feita, quando se analisa a sobrecarga, é o tipo de utilização que se prevê para o piso, nomeadamente se se trata de habitação, de um hotel, de um hospital, de escritório, de uma escola, etc. A variação da sobrecarga no tempo pode ser dividida em duas parcelas: carga ininterrupta (continuada, constante) e carga intermitente.

A carga ininterrupta considera o peso do mobiliário e do equipamento pesado. Alterações significativas desta parcela são devidas a alterações no uso do edifício, donde se pode considerar serem relativamente raras.

A carga intermitente considera todas as outras sobrecargas. Os valores máximos desta parcela são, em geral, devidas a grandes concentrações de pessoas, à acumulação de mobiliário durante remodelações, etc. A duração da carga intermitente é relativamente pequena. A parcela ininterrupta da sobrecarga pode ser decomposta da seguinte forma:

$$W(x, y) = m + V + U(x, y) \quad (15)$$

em que  $m$  é o valor médio da sobrecarga, para um determinado tipo de utilização do edifício,  $V$  é uma variável com média nula, que modela as especificidades de cada edifício e  $U$  modela a variabilidade da sobrecarga de ponto para ponto da estrutura.

Na parcela intermitente esta expressão resume-se a:

$$W(x, y) = m + U(x, y) \quad (16)$$

Verifica-se que ambas as parcelas são enviesadas para a direita, verificando-se, em geral, uma distribuição *Gamma* constitui uma boa aproximação.

Como foi referido anteriormente, a variabilidade no espaço da sobrecarga pode ser modelada utilizando uma carga uniformemente distribuída equivalente. A média e a variância da carga ininterrupta podem ser descritas a partir de:

$$E[q] = m_q \quad (17)$$

$$Var[q] = \sigma_v^2 + \sigma_u^2 \frac{A_0}{A} \kappa \quad (18)$$

De modo similar, para a parcela intermitente:

$$E[p] = m_p \quad (19)$$

$$Var[p] = \sigma_u^2 \frac{A_0}{A} \kappa \quad (20)$$

A duração de aplicação da carga intermitente é expressa por  $d_p$ , sendo considerada determinística.

Tabela 4 – Parâmetros estatísticos da sobrecarga em edifícios.

Tipo de utilização	$A_0$	$m_q$	$\sigma_v$	$\sigma_u$	$m_p$	$\sigma_u$	$d_p$
Escritórios	20	0.5	0.30	0.60	0.2	0.4	1-3
Habitação	20	0.3	0.15	0.30	0.3	0.6	1-3
Bibliotecas	20	1.7	0.50	1.00			

Os parâmetros necessários para aplicação destas expressões estão, para algumas utilizações correntes de edifícios, descritas na tabela 4. A média e a variância assim calculadas são apresentadas na tabela 5.

Tabela 5 – Média e variância da sobrecarga em edifícios.

Tipo de utilização	$E[q]$	$E[p]$	$Var[q]$	$Var[p]$
--------------------	--------	--------	----------	----------

Escritórios	0.5	0.2	$0.09 + \frac{7.2}{A} \kappa$	$\frac{3.2}{A} \kappa$
Habitação	0.3	0.3	$0.0225 + \frac{1.8}{A} \kappa$	$\frac{7.2}{A} \kappa$
Bibliotecas	1.7	-----	$0.25 + \frac{20}{A} \kappa$	-----

## 5. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Como exemplo de aplicação deste regulamento será analisada uma viga de betão armado bi-apoiada de vão  $L$ .

As características da estrutura, assim como das acções, são modeladas de acordo com o JCSS Model-Code. Os valores nominais que caracterizam a estrutura são:

Vão ( $L$ )	8 m	Densidade do betão ( $\rho_c$ )	2400 kg/m <sup>3</sup>
Altura da viga ( $h$ )	0.65 m	Espessura da laje ( $t$ )	0.15 m
Largura da viga ( $b$ )	$h/3$	Horizonte de projecto ( $T$ )	50 anos
Percentagem de armadura ( $A_s / bh$ )	0.01	Área de referência ( $A_0$ )	$2.L.a$
Recobrimento inferior ( $d$ )	30 mm	Factor de influência ( $\kappa$ )	2.0
Distância entre vigas ( $a$ )	5 m		

### 5.1 Função estado limite

Considerando que apenas o estado limite de flexão é significativo, a função estado limite último pode ser expressa como:

$$g = \theta_R \cdot M_u - \max[\theta_E \cdot M(t)] \quad (21)$$

em que  $M_u$  e  $M$  são os momentos flectores resistente e actuante máximo, respectivamente, e  $\theta_R$  e  $\theta_E$  modelam as incertezas do modelo.

O momento resistente é uma função não linear das propriedades dos materiais e da geometria. Esta pode ser calculada de uma forma simplificada através de:

$$M_u = A_s \cdot f_y \cdot [(1 - \rho) \cdot h - d] \quad (22)$$

em que  $\rho$  é a percentagem mecânica de armadura dada por:

$$\rho = \frac{A_s \cdot f_y}{b \cdot h \cdot f_c} \quad (23)$$

em que  $A_s$  é a área da armadura traccionada,  $f_y$  é a tensão de cedência do aço e  $f_c$  é a tensão de resistência à compressão do betão.

As incertezas do modelo podem ser caracterizadas por distribuições lognormais com os parâmetros apresentados na tabela 6.

Tabela 6 – Média e coeficiente de variação dos modelos.

	Média	Coeficiente de variação
Resistência	1.2	0.15
Acção	1.0	0.10

## 5.2 Acções

As vigas estão afastadas, entre si, de uma distância  $a$  e são submetidas à acção do peso próprio ( $q_{pp}$ ) e da sobrecarga. O peso próprio é considerado constante ao longo da vida útil da estrutura. A sobrecarga é dividida em duas parcelas, correspondentes à parcela ininterrupta ( $q_{SC.s}$ ) e à parcela intermitente ( $q_{SC.t}$ ). Considera-se que a parcela ininterrupta está sempre presente, enquanto a parcela intermitente apenas apresenta valores significativos em pequenos períodos. Considerou-se que estes períodos tinham a duração de um dia e apenas ocorriam uma vez por ano.

Ambas as parcelas da sobrecarga foram modeladas usando processos FBC, conforme se apresenta na Figura 3.

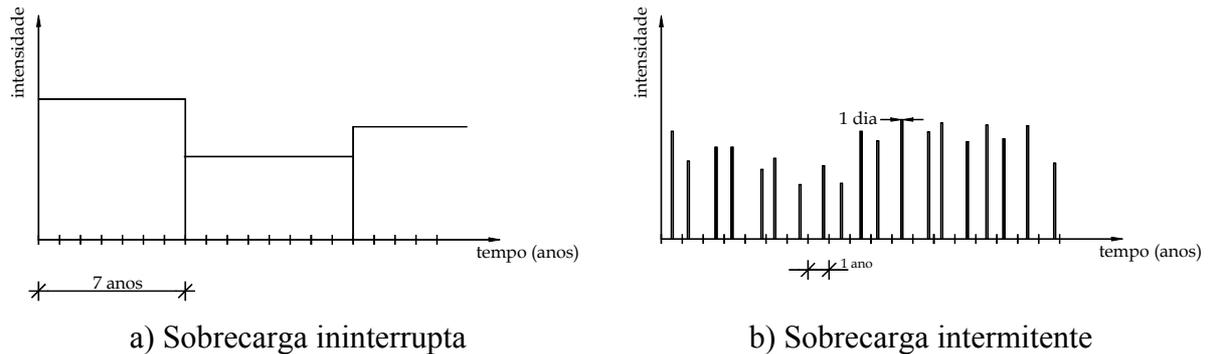


Figura 3 – Variação no tempo da sobrecarga.

A carga devida ao peso próprio pode ser calculada, somando o peso da viga e da laje, a partir de:

$$q_{pp} = t \cdot a \cdot \rho_c \cdot g + A_{viga} \cdot \rho_c \cdot g \quad (24)$$

Sabendo que a incerteza do valor da sobrecarga em cada ponto da estrutura é considerada utilizando uma carga uniformemente distribuída equivalente, todas as cargas aplicadas à viga são uniformemente distribuídas e, portanto, o momento máximo é o momento a meio vão, dado por:

$$M_{\max} = \max \left\{ \frac{1}{8} L^2 [q_{pp} + a \cdot q_{SC.q} + a \cdot q_{SC.p}] \right\} \quad \text{para } 0 < t < T \quad (25)$$

## 5.3 Resistência

As variáveis que caracterizam a resistência da viga são consideradas constantes no tempo e no espaço.

As propriedades estatísticas das variáveis envolvidas são apresentadas na tabela 7. Os valores apresentados para a média e para o desvio padrão da tensão de cedência do aço foram extraídos do regulamento. As propriedades da resistência à compressão do betão foram consideradas a partir das recomendações do (CEB-FIP, 1991). Isto tornou-se necessário pelo facto do regulamento em análise não apresentar nenhum modelo simples para esta grandeza.

Tabela 7 – Média e desvio padrão das características associadas à resistência

Símbolo	Variável	Tipo Distr.	Média	Desvio padrão
$f_c$	tensão de compressão do betão	$LN$	28MPa	$\sigma = 4.88\text{MPa}$
$f_y$	tensão de cedência da armadura	$LN$	560MPa	$\sigma = 30\text{MPa}$

## 5.4 Propriedades geométricas

As propriedades geométricas dos elementos estruturais são variáveis aleatórias. Em geral a sua variação no tempo não é significativa. A variação de ponto para ponto pode ter alguma importância, no entanto, não foi considerada neste exemplo. A média e o desvio padrão das variáveis geométricas são apresentadas na tabela 8.

Tabela 8 – Média e desvio padrão das variáveis geométricas

Símbolo	Variável	Tipo Distr.	Média	Desvio padrão
$h$	altura da viga	$N$	nominal	$4+0.006 \times h$
$b$	largura da viga	$N$	nominal	$4+0.006 \times h$
$d$	recobrimento inferior	$N$	nominal+5mm	5mm

## 5.5 Variáveis aleatórias

A partir das expressões apresentadas e tendo em consideração os valores nominais já definidos, é possível calcular a média e a variância de cada variável considerada. Os valores assim obtidos estão expressos na tabela 9. Nesta tabela são, ainda, apresentados os resultados descritos em 5.6.1.

## 5.6 Análise de fiabilidade estrutural

O principal problema com que nos deparamos na análise deste problema é a variação no tempo dos valores de algumas variáveis aleatórias. A análise foi feita considerando que o período de vida útil da estrutura era dividido em períodos de um ano. A probabilidade associada a cada um destes períodos foi calculada com base no Método de Fiabilidade de Primeira Ordem (*FORM*).

### 5.6.1 Probabilidade de rotura para o intervalo de um ano

Em cada período de um ano a sobrecarga ininterrupta é constante. A sobrecarga intermitente apresenta valores máximos um dia por ano. Assim, a probabilidade de rotura da estrutura no período de um ano pode ser avaliada considerando apenas o período em que actua a sobrecarga intermitente.

Com efeito, se a função estado limite não for violada quando está a actuar a sobrecarga intermitente e considerando que, em cada período de um ano, todas as outras variáveis são constantes, então a condição de estado limite também não pode ser ultrapassada quando a sobrecarga intermitente não está a actuar.

Tabela 9 – Variáveis aleatórias e resultados da análise de fiabilidade para o período de 1 ano.

Símbolo	Tipo Distr.	Média	Variância	U	X	$\alpha$
$q_w$ [kN/m]	<i>N</i>	20.9524	2.810	21.9	0.560	0.1327
$q_{SC,q}$ [kN/m <sup>2</sup> ]	<i>GAM</i>	0.3	0.0675	0.361	0.507	0.1202
$q_{SC,p}$ [kN/m <sup>2</sup> ]	<i>GAM</i>	0.3	0.18	3.79	3.37	0.7975
$f_c$ [MPa]	<i>LN</i>	28	23.74	26.2	-0.299	-0.0709
$f_y$ [MPa]	<i>LN</i>	560	900	540	-0.666	-0.1578
$h$ [m]	<i>N</i>	0.65	$6.24 \times 10^{-5}$	0.647	-0.357	-0.0847
$b$ [m]	<i>N</i>	0.216667	$2.81 \times 10^{-5}$	0.215	-0.350	-0.0829
$d$ [m]	<i>N</i>	0.035	$2.50 \times 10^{-5}$	0.0357	0.130	0.0308
$\theta_E$	<i>N</i>	1	0.01	1.15	1.41	0.3348
$\theta_R$	<i>N</i>	1.2	0.0225	0.956	-1.77	-0.4183

Para aplicação do *FORM* foi utilizado um programa base denominado *Reliab* desenvolvido por Tarp-Johansen (1999). A este programa foram adicionadas subrotinas que permitem analisar este problema particular.

O ponto médio,  $\mu$ , o ponto de dimensionamento no espaço normalizado,  $X$ , e no espaço não normalizado,  $U$ , assim como os factores de sensibilidade,  $\alpha$ , obtidos são apresentados na tabela 9. A partir destes resultados pode concluir-se que a segurança da estrutura varia, fundamentalmente, com a dispersão das acções e das variáveis que modelam a incerteza do modelo. O sinal do factor  $\alpha$  revela a influência positiva ou negativa que cada variável tem na segurança da estrutura. Para o índice de fiabilidade,  $\beta$ , obteve-se um valor de 4.22. Este corresponde a uma probabilidade de rotura igual a  $1.22 \times 10^{-5}$ .

A partir dos valores apresentados na tabela 1, conclui-se que, se se considerar que esta é uma estrutura corrente, o índice de fiabilidade é ligeiramente superior ao limite imposto, donde a estrutura está bem dimensionada.

### 5.6.2 Probabilidade de rotura para o intervalo de cinquenta anos

O método mais simples para calcular uma aproximação à probabilidade de rotura da estrutura ao longo da sua vida útil é considerar que a rotura em cada ano é independente da rotura em todos os outros anos. Assim,

$$P(F) \leq \sum_{i=1}^{50} P(F_i) \quad (26)$$

Considerando que a distribuição estatística de todas as variáveis é constante no tempo, então  $P(F_i)$  é constante e igual ao valor calculado em 5.6.1. Este resultado, no entanto, conduz a estimativas muito exageradas da probabilidade de rotura. Com efeito, sabendo que as variáveis associadas à resistência são constantes ao longo do tempo e que as acções também apresentam distribuições de probabilidades constantes, é fácil concluir que a probabilidade de rotura num dado ano é fortemente correlacionada com a probabilidade de rotura noutra ano e, portanto, a consideração de independência afasta-se bastante da realidade.

Um limite superior para a probabilidade de rotura, mais próximo do valor exacto, foi proposto por Ditlevsen (1979). Este pode ser calculado por:

$$P(F) \leq \sum_{i=1}^{50} P(F_i) - \sum_{i=2}^{50} \max_{j < i} P(F_i \cap F_j) \quad (27)$$

A utilização desta expressão é bastante simplificada se o cálculo da probabilidade de rotura em cada ano for realizado utilizando o Método de Fiabilidade de Primeira Ordem.

Considerando que neste método a análise se faz num espaço normalizado, a probabilidade da intersecção de dois conjuntos pode ser obtida através de:

$$P(F_i \cap F_j) = \Phi_2(-\beta_i, -\beta_j, \rho_{i,j}) \quad (28)$$

em que  $\Phi_2(\dots)$  é a função distribuição de probabilidades da distribuição Gaussiana bidimensional,  $\beta_i$  e  $\beta_j$  são os índices de fiabilidade correspondentes a cada ano e  $\rho_{i,j}$  é a correlação entre a probabilidade de rotura entre os dois anos. Esta pode ser dada por:

$$\rho_{i,j} = \sum_{k \in A} \alpha_k^2 \quad (29)$$

em que  $\alpha_k$  é a  $k$ -ésima componente do vector dos cosenos directores e  $A$  é o conjunto de variáveis aleatórias que são iguais no ano  $i$  e  $j$ .

A correlação entre as variáveis pode ser calculada se se considerar que: todas as variáveis excepto as associadas à sobrecarga são constantes; a sobrecarga ininterrupta é constante em períodos de 7 anos; a sobrecarga intermitente varia de ano para ano.

Considerando a equação (29) podemos concluir que a correlação entre as funções de estado limite em dois anos diferentes pertencentes ao mesmo período de 7 anos é dada por:

$$\rho_{i,j} = \rho_{1,2} = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_4^2 + \alpha_5^2 + \dots + \alpha_{10}^2 \quad (30)$$

no caso dos anos  $i$  e  $j$  não pertencerem ao mesmo intervalo de 7 anos a correlação é dada por:

$$\rho_{i,j} = \text{Cov}_{1,8} = \alpha_1^2 + \alpha_4^2 + \alpha_5^2 + \dots + \alpha_{10}^2 \quad (31)$$

Considere-se novamente a equação (27). O valor máximo de  $P(F_i \cap F_j)$  é obtido quando existir a correlação máxima entre  $g_i$  e  $g_j$ . No caso de  $i$  ser tal que exista um  $j < i$  que pertença ao mesmo período de 7 anos, o valor máximo da correlação corresponde ao valor  $\rho_{1,2}$ ; quando isso não acontecer o valor máximo corresponde a  $\rho_{1,8}$ . Assim, para todos os anos que não correspondem ao primeiro ano de um destes períodos a correlação toma o valor  $\rho_{1,2}$ , caso contrário toma o valor  $\rho_{1,8}$ . Assim:

$$P(F) \leq 50 \cdot P(F_1) - 7 \cdot P(F_1 \cap F_8) - 42 \cdot P(F_1 \cap F_2) \quad (32)$$

Considerando os resultados apresentados em 5.6.1 obtemos:

$$\text{Cov}(g_1, g_2) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_4^2 + \alpha_5^2 + \dots + \alpha_{10}^2 = 3.640 \times 10^{-1} \quad (33)$$

no caso de os anos  $i$  e  $j$  pertencerem ao mesmo período de 7 anos e, caso contrário, a:

$$\text{Cov}(g_i, g_j) = \text{Cov}(g_1, g_8) = \alpha_1^2 + \alpha_4^2 + \alpha_5^2 + \dots + \alpha_{10}^2 = 3.496 \times 10^{-1} \quad (34)$$

Assim:

$$P(F_1) = \Phi(-\beta) = \Phi(-4.22) \quad (35)$$

$$P(F_1 \cap F_8) = \Phi_2(-4.22, -4.22, 0.3640) = 3.1584 \times 10^{-7} \quad (36)$$

$$P(F_1 \cap F_2) = \Phi_2(-4.22, -4.22, 0.3496) = 3.6520 \times 10^{-7} \quad (37)$$

Obtendo-se,

$$P(F) \leq 5.9321 \times 10^{-4} \quad (38)$$

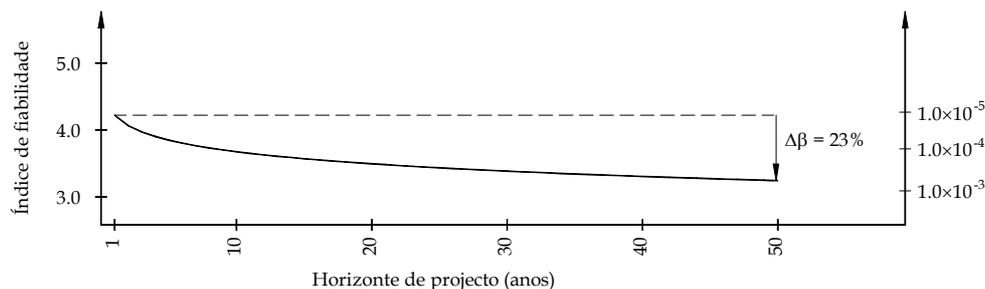


Figura 4 – Evolução do índice de fiabilidade com o horizonte de projecto da estrutura.

Na Figura 4 é apresentada a evolução do índice de fiabilidade para horizontes de projecto entre 1 e 50 anos. Como se pode concluir a segurança da estrutura diminui com o aumento do horizonte de projecto, sendo essa variação cada vez mais lenta. Esta diminuição da variação da segurança é facilmente justificável se se tiver em conta que, como as variáveis são estacionárias. Quanto mais longa for a vida útil da estrutura menos provável será que, no último ano, tenha sido atingida a combinação mais desfavorável de variáveis aleatórias.

## 6. CONCLUSÕES

Neste artigo foi apresentada uma síntese do novo código-modelo de verificação probabilística de estruturas. Ficaram patentes as principais diferenças entre um regulamento deste tipo e a regulamentação actualmente em vigor em Portugal.

Ficou ainda claro que a utilização de um regulamento deste tipo é bastante mais complexa que a de regulamentos semi-probabilísticos. Assim, a sua utilização restringir-se-á, nos próximos anos, a estruturas especiais ou a estruturas existentes, onde a utilização de modelos de análise não-linear torna difícil a aplicação de modelos semi-probabilísticos.

Foi ainda mostrado que algumas práticas correntes da engenharia, como sendo a adopção de coeficientes de segurança mais elevados em elementos com rotura frágil ou a utilização de controlo de qualidade para aumentar a segurança de estruturas através de redução da variabilidade dos vários intervenientes, têm um fundamento teórico válido.

## 7. REFERÊNCIAS

CEB-FIP (1991), *CEB-FIP Model Code 1990 – Final Draft*, Bulletin d'Information No. 1999, Comité Euro-International du Béton, Paris, France.

CEN (1992), *ENV-1993-1 - Eurocode 3: Design of steel structures - Part 1.1: General rules and rules for buildings*, European Committee for Standardisation (CEN), Brussels.

CEN (1994), *ENV-1991-1 - Eurocode 1: Basis of design and actions on structures*, European Committee for Standardisation (CEN), Brussels.

Ditlevsen, O. (1979), Narrow reliability bounds for structural systems, *Journal of Structural Mechanics*, 7, 435-451.

Ditlevsen, O., Madsen, H. O. (1996), *Struct. Reliability Methods*, John Wiley & Sons.

Ferry Borges, J., Castanheta, M. (1971), *Structural Safety*, Curso 101, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa.

Hasofer, A.M., Lind, N.C. (1974), Exact and Invariant Second Moment Code format, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 100 n° EM1 pp111-121.

Melchers, R.E. (1987), *Structural Reliability: Analysis and Prediction*, Ellis Horwood Ltd., Chichester, West Sussex, England.

Neves, L.A.C. (2001), *Análise de Fiabilidade de Ligações Semi-Rígidas*, Trabalho de síntese para Provas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica.

RSA (1983), Reg. de Segurança e Acções para Estruturas de Edifícios e Pontes.

Tarp-Johansen, N.J. (1999), Rellab Version 1.0 – User's Reference, , Course on Structural Reliability and Stochastic Load Modelling, Lingby.

Turkstra, C.J. (1972), *Theory of Structural Design Decisions*; Study N° 2, Solid Mechanics Division University of Waterloo, Waterloo, Canada.

Vrouwenvelder, A. (1999), *Course on Structural Reliability and Stochastic Load Modelling*, Joint Committee on Structural Safety, Lingby.

Vrouwenvelder, A. (2000), JCSS Probabilistic Model Code, Joint Committee on Structural Safety, 12th draft.