

# MÉTODOS RÍGIDO-PLÁSTICOS E MÉTODOS ELÁSTICO-PERFEITAMENTE PLÁSTICOS PARA OBTENÇÃO DO COEFICIENTE DE SEGURANÇA NA AVALIAÇÃO DA ESTABILIDADE DE TALUDES

## RIGID-PLASTIC AND ELASTIC-PLASTIC METHODS TO OBTAIN THE SAFETY FACTOR IN THE SLOPES STABILITY ANALYSIS

Martins, Francisco F., *Universidade do Minho, Departamento de Engenharia Civil, Guimarães, Portugal*, [ffm@civil.uminho.pt](mailto:ffm@civil.uminho.pt)

Martins, Júlio B., *Universidade do Minho, Departamento de Engenharia Civil, Guimarães, Portugal*, [jbm@civil.uminho.pt](mailto:jbm@civil.uminho.pt)

### RESUMO

É feita referência à análise da estabilidade de taludes usando métodos rígido-plásticos (MRP) e modelos elástico-perfeitamente plásticos usando o Método dos Elementos Finitos (MEF). Apresenta-se um exemplo onde se verifica que os coeficientes de segurança  $F_s$  obtidos usando os métodos de Bishop e dos Elementos Finitos são praticamente iguais. Esta conclusão não pode ser generalizada a maciços terrosos muito heterogéneos ou com inclusões. É ainda analisada a influência das constantes elásticas na estabilidade de taludes. Os cálculos numéricos confirmam que as mesmas não têm influência no factor de segurança ao deslizamento geral, o que, teoricamente, numa análise qualitativa já seria de esperar.

### ABSTRACT

A reference to the slope stability analysis is done using rigid-plastic methods and elastic-plastic models associated to the finite element method (FEM). An example is presented where it can be seen that the safety factor  $F_s$  obtained by the Bishop's method is practically the same that obtained by the FEM. This conclusion cannot be generalized to strongly heterogeneous soil masses. Also the influence of the elastic parameters on safety factor has been examined. The numerical calculations show that the values of the elastic constants have no effect on safety factor, as it should be expected from a theoretical qualitative analysis.

### 1. INTRODUÇÃO

A análise da estabilidade de taludes por métodos rígido-plásticos ou de equilíbrio limite (MEL) e por métodos elástico-perfeitamente plásticos usando o Método dos Elementos Finitos (MEF) continua a ser objecto de grande interesse da comunidade científica [1 e 2]. É propósito deste trabalho acrescentar mais alguns elementos para a discussão.

### 2. MÉTODOS RÍGIDO-PLÁSTICOS E MÉTODOS ELÁSTICO-PERFEITAMENTE PLÁSTICOS

Na análise tradicional da estabilidade de taludes por métodos rígido-plásticos das fatias estabelece-se uma superfície potencial de deslizamento cilíndrica de directriz circular [3 e 4] ou não-circular [5, 6, 7, 8 e 9] e considera-se o equilíbrio da massa deslizante que é dividida em fatias. Para um conjunto de potenciais superfícies de deslizamento é escolhida aquela que

conduz ao menor factor de segurança,  $F_s$ . Esse factor, por definição, é tal que, reduzindo as características de resistência dos terrenos na proporção de  $F_s$  (equações 1 e 2), se obtém ainda assim uma situação de equilíbrio limite, ou seja, de rotura incipiente.

$$c_d = \frac{c}{F_s} \quad (1)$$

$$\phi_d = \arctan\left(\frac{\tan \phi}{F_s}\right) \quad (2)$$

Deve, entretanto, dizer-se que no caso das superfícies de deslizamento de directriz não circular, para o problema ter convergência numérica garantida, essa superfície (arbitrada) deve ser cinematicamente admissível. Quer dizer, a massa de solo, por ventura heterogéneo, que desliza como corpo rígido, deverá poder deslocar-se como mecanismo (sistema hipostático) com um grau de liberdade. Isto implica que se for dado um deslocamento arbitrário a um ponto dessa massa todos os outros pontos dela se terão de deslocar de forma “compatível”, isto é, mantendo fixa a distância entre dois quaisquer pontos da massa durante o movimento. É evidente que estas condições são satisfeitas com uma superfície de escorregamento de directriz circular, mas não por qualquer outra. No caso dos métodos elástico-plásticos (MEF) a nível de elemento, à partida, são satisfeitas não só as condições de equilíbrio de forças mas também as de compatibilidade de deslocamentos.

As soluções rígido-plásticas onde se arbitra, à partida, uma superfície de deslizamento cinematicamente compatível, poderão considerar-se soluções de “limite superior” e, por isso, o coeficiente  $F_s$  que se obtém não estará do lado da segurança. Como, porém, se experimentam muitas superfícies (pelo menos nos métodos de Fellenius e Bishop) e se toma o mínimo dos  $F_s$  calculados, é de esperar que esse mínimo não esteja longe do “verdadeiro”. Note-se, todavia, que no método de Fellenius não se consideram, à partida, forças entre as fatias e por isso a dissipação de energia faz-se apenas na base das fatias, na superfície circular de deslizamento. No método de Bishop e nos outros (com superfícies não circulares de deslizamento) são consideradas forças entre fatias, mas também não consideram explicitamente o trabalho de dissipação de energia por deslocamentos relativos entre fatias. De facto, no problema rígido-plástico, para ser bem posto, deve dividir-se a massa de solo em blocos com interfaces entre materiais diferentes. Considerar o equilíbrio de cada bloco e as condições de plasticidade (Mohr-Coulomb) nas interfaces:

$$T \leq \frac{C'}{F_s} + \frac{N' \operatorname{tg} \phi'}{F_s} \quad (3)$$

onde  $T$  é a força tangencial na interface (incluindo a superfície de deslizamento exterior) e  $N'$  a força normal na mesma, sendo  $C'$  o integral das coesões na interface.

As inequações (3) em conjunto com as equações de equilíbrio de cada bloco ou elemento, traduzem um problema de programação não linear, em que  $F_s$  será a variável a minimizar [10, 11 e 12]. Todavia, o problema pode reduzir-se a um problema de programação linear se se arbitrar  $F_s$  e se afectarem as cargas exteriores (incluindo o peso próprio dos blocos) de um factor  $\lambda$  majorante dessas cargas. Neste caso esta seria a incógnita e o problema seria de programação linear. Existem programas para computador como os designados de “Simplex” que optimizam uma função (neste caso  $\lambda$ ) sujeita a condições de vínculo representadas matematicamente por sistemas de equações e inequações. Claro que no nosso caso haveria que experimentar vários

valores de  $F_s$  e calcular os  $\lambda_s$  correspondentes. O verdadeiro  $F_s$  seria aquele para o qual  $\lambda=1$ . As condições acima indicadas dão soluções de limite inferior. Jiang e Magnan [13] obtiveram soluções de limite superior partindo da condição de plasticidade de Mohr-Coulomb e uma função de escoamento associada. Esses autores usaram o método dos elementos finitos como técnica de integração e compararam os resultados com os obtidos pelos métodos das fatias.

Como alternativa aos métodos das fatias e aos métodos rígido-plásticos que usam a programação linear têm vindo a ser usados há vários anos métodos elástico-perfeitamente plásticos associados ao Método dos Elementos Finitos [14, 15, 16 e 17]. Usando este método reduz-se gradualmente as características de resistência do solo aumentando sucessivamente  $F_s$  (equações 1 e 2) e observa-se o deslocamento de um ponto escolhido, em geral, no topo ou na base do talude (ponto A, Figura 1) por se verificarem aí os maiores deslocamentos. O factor de redução que provoca um salto brusco no deslocamento (teoricamente infinito) representa o factor de segurança ao deslizamento.

Neste trabalho analisou-se a estabilidade de um talude fazendo variar as constantes elásticas,  $E$  e  $\nu$ . A análise com elementos finitos foi efectuada com a versão profissional 7 do programa PLAXIS [18]. Neste programa para calcular o estado de tensão inicial é activada a opção “ligação da gravidade” (gravity switch on). Nesse caso parte-se de tensões iniciais nulas no aterro e na fundação e aplica-se o peso próprio do terreno em várias etapas de cálculo. No final obtém-se o estado de tensão inicial.

Foram considerados elementos triangulares de 6 nós e foi usado o critério de rotura de Mohr-Coulomb. Na lei de escoamento plástico tomou-se a dilatância  $\psi=0$ .

Paralelamente calculou-se também  $F_s$  pelos métodos das fatias de Fellenius e de Bishop

### 3. EXEMPLO

Trata-se de um aterro com 7 m de altura colocado sobre um terreno argiloso assente numa formação rígida (Figura 1).

As características dos solos são as seguintes (cálculo 1):

Aterro:  $\gamma=19.5 \text{ kN/m}^3$ ,  $\phi'=32^\circ$ ,  $c'=5 \text{ kN/m}^2$ ,  $E=70000 \text{ kN/m}^2$ ,  $\nu=0.3$ ;

Terreno argiloso:  $\gamma=17 \text{ kN/m}^3$ ,  $\phi_u=0^\circ$ ,  $c_u=40 \text{ kN/m}^2$ ,  $E=9000 \text{ kN/m}^2$ ,  $\nu=0.495$ .

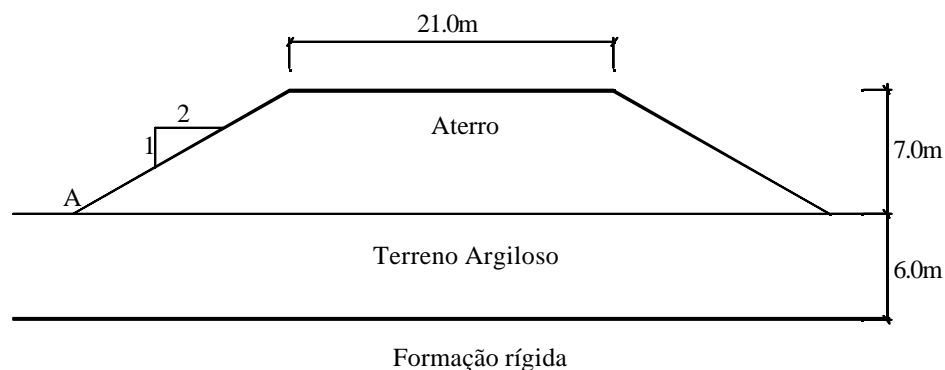


Figura 1 – Aterro analisado

A análise por elementos finitos foi efectuada usando uma malha de 81 elementos. Foram ainda efectuadas análises tradicionais usando os métodos de Fellenius e Bishop através de um programa desenvolvido na Universidade do Minho. Nesse programa estabelece-se uma rede de centros de círculos de deslizamento e para cada centro calculam-se os  $F_s$  aumentando por incrementos o raio do círculo até se atingir o terreno rígido. Para a série de círculos correspondente a cada centro obtém-se um  $F_s$  mínimo e entre os mínimos  $F_s$  relativos aos vários centros toma-se o menor. Os factores de segurança assim obtidos foram 1,55 para o Método de Fellenius, 1,71 para o Método de Bishop e 1,75 para o Método dos Elementos Finitos.

Na Figura 2 são apresentados os deslocamentos do maciço terroso que elucidam sobre o mecanismo de rotura do mesmo. A Figura 3 indica as zonas de plastificação no estágio final do cálculo. Na Figura 4 é representada a variação do deslocamento total do nó A com o factor de segurança para a mesma análise.

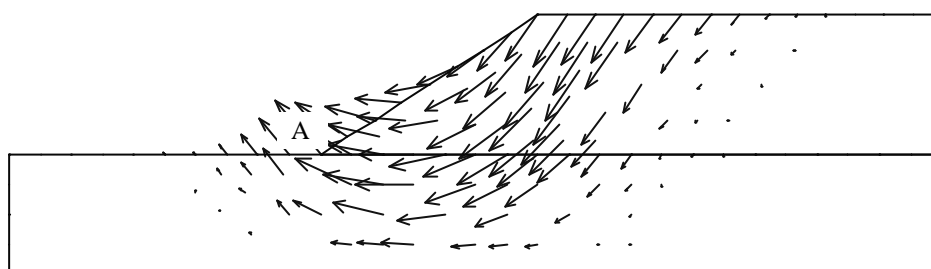


Figura 2 - Vectores deslocamento no estágio final do cálculo.

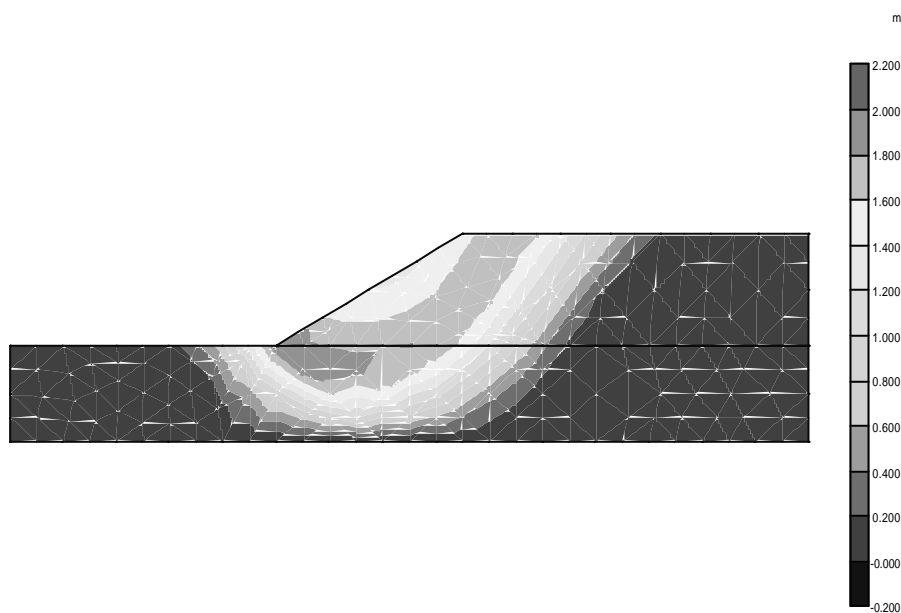


Figura 3 –Zonas de plastificação no estágio final do cálculo.

A superfície circular do deslocamento para os factores de segurança mínimos é apresentada na Figura 5.

Para analisar a influência das constantes elásticas  $E$  e  $\nu$  foram efectuados vários cálculos. Nos primeiros só se fizeram variar os módulos de deformabilidade,  $E$ , mantendo os coeficientes de Poisson os valores iniciais.

No Quadro 1 são apresentados os valores dos módulos de deformabilidade usados. Os índices 1 e 2 nesse quadro, bem como no Quadro 2, referem-se ao aterro e solo de fundação (terreno argiloso), respectivamente.

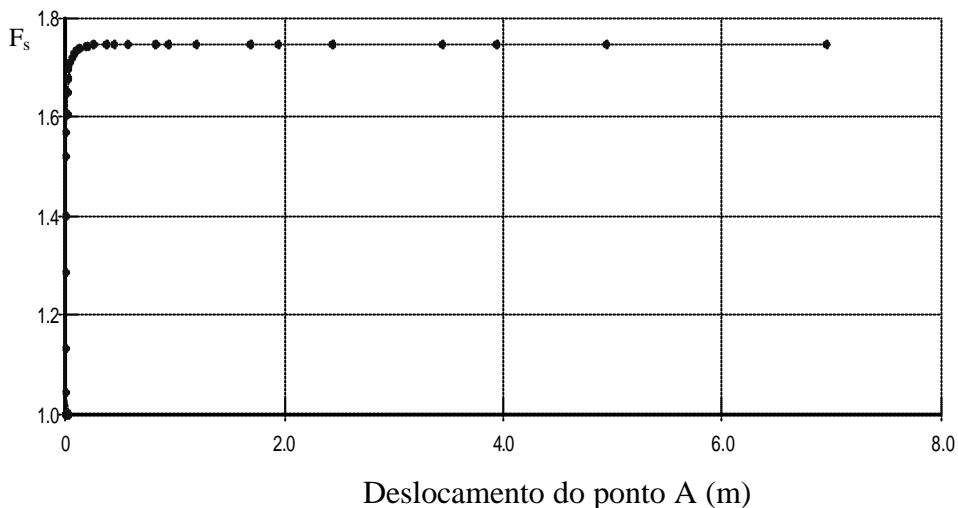


Figura 4 - Evolução do deslocamento do ponto A com o factor de redução das características de resistência ( $c'$  e  $\text{tg}\phi'$ ) dos solos.

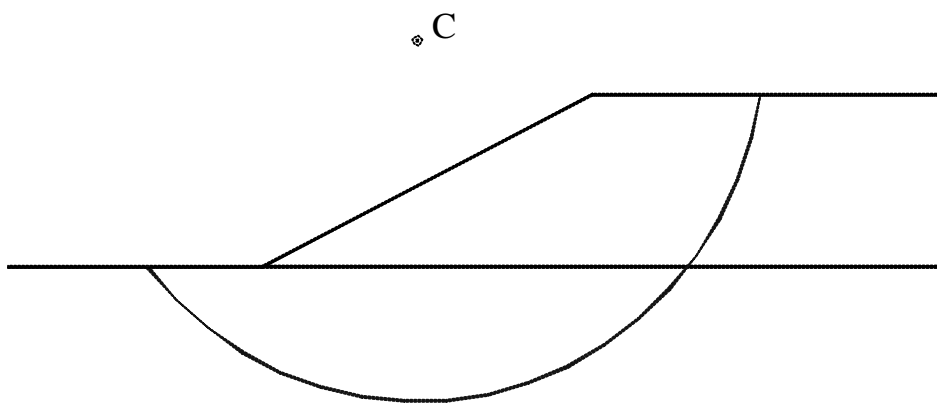


Figura 5 - Superfície de deslizamento para o coeficiente de segurança mínimo.

Quadro 1 - Módulos de deformabilidade usados nos cálculos

Cálculo	$E_1$ (MPa)	$E_2$ (MPa)	$F_s$
2	350	45	1,75
3	700	90	1,75
4	14	1,8	1,75
5	7	0,9	1,75

Em todos estes cálculos foi obtido o mesmo valor do cálculo 1 para o factor de segurança (1,75).

Seguidamente foi analisada a influência do coeficiente de Poisson. Neste caso mantiveram-se constantes os valores de  $E_1$  (350 MPa) e  $E_2$  (45MPa). Os valores usados para o coeficiente de Poisson encontram-se no Quadro 2, verificando-se que os factores de segurança foram também sensivelmente os mesmos.

Quadro 2 - Coeficientes de Poisson usados e coeficientes de segurança obtidos

Cálculo	$\nu_1$	$\nu_2$	$F_s$
6	0,400	0,495	1,75
7	0,495	0,495	1,74
8	0,200	0,495	1,75
9	0,200	0,330	1,74
10	0,100	0,495	1,74
11	0,100	0,165	1,75
12	0,100	0,200	1,75

#### 4. DISCUSSÃO

Nos métodos rígido-plásticos das fatias há que fixar um conjunto de superfícies de deslizamento e, “a priori” não se sabe qual a que dá o menor dos  $F_s$ . Para se terem soluções de limite superior terão as superfícies de deslizamento e as das interfaces de constituir um conjunto cinematicamente compatível (mecanismo). Por outro lado, para se terem soluções de limite inferior as forças em cada fatia terão de estar em equilíbrio.

No método dos elementos finitos associado a um modelo elástico-perfeitamente plástico (usualmente o de Mohr-Coulomb) todas as condições de equilíbrio e de compatibilidade cinemática são, à partida, estabelecidas, o que não acontece nos métodos das fatias com superfícies de deslizamento não circulares.

Mesmo no caso de se usarem soluções rígido-plásticas de limite superior (com compatibilidade cinemática) os deslocamentos da superfície de deslizamento e das interfaces dos blocos ou fatias têm de constituir um mecanismo e, dos mecanismos possíveis, há que escolher o que dá o menor  $F_s$ . Nos métodos elástico-plásticos não se estabelece um mecanismo de rotura, embora na fase final do cálculo o conjunto dos vectores deslocamento sugira superfícies de deslizamento ou mecanismo de rotura.

#### 5. CONCLUSÕES

i) Nos métodos rígido-plásticos (de equilíbrio limite) há que distinguir as soluções rigorosas baseadas na teoria da plasticidade (limite superior ou limite inferior) das soluções obtidas com os métodos das fatias. Os valores de  $F_s$  obtidos com os métodos elástico-perfeitamente plásticos são, em geral, comparados com os obtidos com estes últimos.

ii) Tanto os métodos das fatias como os métodos elástico-perfeitamente plásticos que usam elementos finitos apresentam dificuldades no caso de terrenos bastante heterogéneos. Neste último caso é preciso usar elementos de interface e técnicas de refinamento especiais para se ter sucesso [1].

iii) Os elementos indicados na Figura 2 e a Figura 3 sugerem um “superfície de rotura” que não é exactamente circular. Todavia, neste caso existe uma boa concordância entre o método de Bishop e o dos elementos finitos. O valor de  $F_s$  no Método de Bishop é ligeiramente inferior ao obtido com o método dos elementos finitos. O valor de  $F_s$  obtido com o método de Fellenius é inferior ao de Bishop, como é usual, o que terá a ver com o facto de no método de Bishop se considerarem forças interfatias e no de Fellenius não.

iv) Constata-se que os valores das constantes elásticas não têm influência no coeficiente de segurança ao deslizamento geral. Afigura-se intuitivo que as componentes da deformação elástica na fase de colapso não devem afectar o mecanismo de rotura, que por isso se não deve afastar muito do mecanismo previsto nos métodos rígido-plásticos. Todavia, importava fazer a verificação através de uma experimentação numérica.

## AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT), Projecto I/D POCTI/ECM/2521/95.

## REFERÊNCIAS

- [1] Griffiths, D.V. e Lane, B.A., “Slope Stability Analysis by finite elements”, *Géotechnique*, 49, N.º.3 (1999), pp.387-403.
- [2] Cai, F. e Ugai, K. *Géotechnique*, discussão do trabalho “Griffiths, D.V. e Lane, B.A., Slope Stability Analysis by finite elements, *Géotechnique*, 49, N.º.3, 1999, pp.387-403”, Vol. 51, N.º.7 (2001), pp. 653-654,
- [3] Fellenius, W., *Erdstatische berechnungen mit reibungund kohesion*, Ernest Verlag, Berlim (1927).
- [4] Bishop, A. W., The use of the slip circle in the stability analysis of slopes, *Géotechnique*, March (1955), pp. 7-17.
- [5] Janbu, N. Application of composite slip surface for stability analysis. *Proceed. of the European conf. on stability earth slopes*, Stockholm, vol. 3 (1954), pp.43-49.
- [6] Morgenstern, N. R. e Price, V. E., The analysis of the stability of general slip surfaces. *Géotechnique*, Vol. 15, n.º 1 (1965), pp. 79-93.
- [7] Spencer, E. A method of analysis of the stability of embankments assuming parallel interslice forces. *Géotechnique*, 17, N.º.1 (1967), pp.11-26.
- [8] Sarma, S. K., Stability analysis of embankments and slopes, *Géotechnique*, Vol. 23, n.º 7 (1973), pp. 423-433 .
- [9] Matos, A. C., Martins, J. B. e Quintanilha Menezes, J., Stability of soil and rock masses evaluated in microcomputers. Comparison of safety factors obtained by different methods, EPMESEC, Macau (1986).
- [10] Xiong Zhang, Slope Stability analysis based on rigid finite element method, *Géotechnique*, Vol. 49, n.º 5 (1999), pp.585-593.
- [11] Freitas, J. C. G.; Silva Cardoso, A., Resolução de problemas de capacidade de carga por aplicação do teorema da região inferior e da programação linear, *Revista Geotecnia*, n.º 77 (1997), pp. 29-44.
- [12] Matos, A. C., Marques, P. S. e Martins, J. B., Stability of Soil and Rock masses. Factor of safety calculated by non-linear analysis and by linear programming, NUMOG II, 2.nd Int. Conf. On Num. Models in Geomech., Univ. Ghent, Bélgica (1986), pp.1-7.
- [13] Jiang, G.-J. e Magnan, J.-P. Stability analysis of embankments: comparison of limit analysis with methods of slices, *Géotechnique*, vol.47, N.º. 4 (1997), pp.857-872.

- [14] Duncan, J. M., State of art: limit equilibrium and finite element analysis of slopes, *J. Geotechnical Engineering*, Vol. 122, n.º 7 (1996), pp. 577-596.
- [15] Dawson, E. M., Roth, W. H. and Drescher, A., Slope stability analysis by strength reduction, *Géotechnique*, Vol. 49, n.º 6 (1999), pp. 835-840.
- [16] Martins, F. F.; Vieira, C. F. S.; Martins, J. B., Slope stability in PC. Comparisons of the slices and Finite Element Methods. Proceedings VI International Conference on Education and Practice of Computational methods in Engineering and Science, Guangzhou, August, Han Dajian & Mo Haiong (eds), South China University of Technology Press (1997), pp. 828-833.
- [17] Martins, F. F., Vieira, C. F. S., Martins, J. B., Slope stability of embankments on soft clay, Proceed. 4<sup>th</sup> European Conference on Numerical Methods in Geotechnical Engineering, CISM, Udine, Italy (1998), pp. 635-643.
- [18] PLAXIS - Finite element code for soil and rock analyses. Version 7. P.A Vermeer, R.B.J. Brinkgreve (eds.). A.A.Balkema, Rotterdam (1998).