



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# Sobre a Xeometría e Topoloxía das Curvas Alxébricas

Pablo Irimia Rega

Xullo 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRAO DE MATEMÁTICAS

**Traballo Fin de Grao**

# Sobre a Xeometría e Topoloxía das Curvas Alxébricas

Pablo Irimia Rega

Xullo 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



Papá, sempre nos dixeches que che encantaría ver como nos graduábase.

Este traballo vai por ti.



# Traballo proposto

<b>Área de Coñecemento: Álgebra</b>
<b>Título: Sobre a Xeometría e Topoloxía das Curvas Alxébricas</b>
<b>Breve descrición do contido</b>
Este traballo é fruto de conversas co profesor Manuel Pedreira ante a miña proposta de realizar un TFG onde se relacionen conceptos e resultados co estudado no grao. Por exemplo topoloxía de superficies, estruturas alxébricas, xeometría de superficies e incluso algún que completase a miña formación. Deste modo, nestre traballo realizarei un estudo clásico das curvas alxébricas proxectivas: curvas alxébricas, modelos da curva no plano e a superficie de Riemann asociada.
<b>Recomendacións</b>
Ter unha mínima base sobre conceptos básicos de xeometría alxébrica, como por exemplo os conceptos cursados na asignatura Álgebra, números e xeometría de cuarto curso do grao de matemáticas.
<b>Outras observacións</b>





# Índice

<b>Resumo</b>	<b>VIII</b>
<b>Introdución</b>	<b>XI</b>
<b>0. Definicións e resultados previos</b>	<b>1</b>
0.1. Espazo Proxectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ . Conxuntos alxébricos . . . . .	1
0.2. Singularidades dunha hipersuperficie . . . . .	5
0.3. Teoría de intersección de curvas . . . . .	7
0.4. Aplicacións racionais e birracionalis . . . . .	9
0.4.1. Proxeccións dende un punto . . . . .	10
0.4.2. Inmersións de Veronese . . . . .	11
0.4.3. Inmersións de Segre . . . . .	12
0.5. Morfismos entre espazos proxectivos . . . . .	13
<b>1. Existencia do modelo non singular dunha curva</b>	<b>15</b>
1.1. Teorema de Noether-Kronecker-Albanese . . . . .	19
<b>2. Proxección dunha curva a <math>\mathbb{P}^3</math>, <math>\mathbb{P}^2</math> e <math>\mathbb{P}^1</math></b>	<b>25</b>
2.1. Proxección dunha curva lisa de $\mathbb{P}^n$ a $\mathbb{P}^3$ e a $\mathbb{P}^2$ . . . . .	25
2.1.1. Existencia dunha boa bisecante . . . . .	27
2.2. Proxección dunha curva de $\mathbb{P}^n$ a $\mathbb{P}^1$ . . . . .	33

---

<b>3. Teorema de Riemann-Noether: igualdade do xénero topolóxico e aritmético</b>	<b>39</b>
3.1. Xénero aritmético de Clebsch-Noether . . . . .	39
3.2. Teorema de Riemann-Noether . . . . .	50
3.3. Xénero xeométrico dunha curva plana . . . . .	53
<b>Bibliografía</b>	<b>57</b>

## Resumo

O traballo centrarase en probar que o xénero topolóxico dunha curva alxébrica proectiva coincide co xénero aritmético de Clebsch-Noether, entendendo o primeiro deles como o xénero topolóxico da súa superficie de Riemann asociada. Comezarase vendo a existencia do modelo non singular dunha curva. Posteriormente, obtense que tal curva lisa pode ser encaixada isomorficamente en  $\mathbb{P}^3$  e, dende aquí, esta pode ser proxectada ao plano nunha curva con nodos ordinarios como únicas singularidades. Esta resultará ser un modelo birracional da orixinal. Chegados a este punto pódese definir o xénero aritmético. Utilizarase a proxección da curva con só nodos ordinarios como singularidades sobre unha recta  $\mathbb{P}^1$  para o cálculo dunha triangulación da superficie de Riemann asociada á curva. Este feito permitirá obter a igualdade dos xéneros.

## Abstract

This document focuses on proving the equality of the topological and the arithmetic genus of an algebraic projective curve, understanding the former as the topological genus of its associated Riemann surface. We start by proving the existence of a non singular model of a curve. Then, we obtain that said curve can be projected isomorphically into  $\mathbb{P}^3$  and, from there, can be projected into a plane in a curve with only ordinary nodes as singularities. This curve will be a birational model of the initial one. Given all of this, the arithmetic genus can be defined. We will use the projection of the curve with only nodes as singularities into a line to calculate a triangulation of the Riemann surface associated to the curve. This fact will lead us to obtain the equality of both genus.



# Introdución

Sen dúbida algunha, un dos resultados máis importantes da xeometría alxébrica é o teorema de Riemann-Roch. Hoxe en día este resultado pódese enunciar con toda xeneralidade grazas ós traballos de Hirzebruch, Grothendieck, e Fulton-MacPherson. O estudo da xeometría alxébrica ten o seu limiar na década de 1830 [JC31] cos traballos de J. Plücker sobre as curvas alxébricas planas. Plücker, sendo o primeiro matemático en estudar a xeometría proxectiva polo método analítico, obtén relacións entre o grao da curva e as ordes das súas posibles singularidades. Fai intervir tamén a súa curva dual; é dicir, a curva do plano proxectivo dual que parametriza as tanxentes da curva orixinal. Porén, o máis importante do traballo de Plücker é procurar un invariante que dea conta de canto de lonxe unha curva está de ser parametrizable; é dicir, de ser racional. Para isto, introduce por primeira vez o concepto de *deficiencia* dunha curva plana que ten como singularidades nodos e cúspides. Este concepto será xeneralizado case ao mesmo tempo por Clebchs, facendo uso da *cota de MacLaurin* para a contribución das singularidades ordinarias dunha curva plana en relación co seu grao. Aínda así, o feito de que a deficiencia definida deste modo poida chegar a ser un invariante birracional, terá que agardar ao traballo de Noether [MN83], no que introduce o concepto de *isomorfismo birracional*, facendo uso das *transformacións de Cremona* no plano proxectivo. Proba que nunha clase birracional de curvas planas, existe unha deficiencia mínima e, tal deficiencia, si que é un invariante birracional que se chamará *xénero aritmético*. A súa expresión en función do seu grao e as ordes das singularidades foi obtida independentemente por Clebchs. Actualmente, a fórmula do xénero aritmético dunha tal curva alxébrica coñécese como *fórmula de Clebsch-Noether*.

Por outra banda, o estudo das curvas alxébricas do plano proxectivo foi feito indirectamente por B. Riemann [BR57]. O seu achegamento vén do estudo da teoría de *funcións abelianas*. A idea de Riemann é procurar un modelo proxectivo que chamou *superficie de Riemann*, que vén a ser unha variedade analítica complexa 1-dimensional. Agora ben, pensada como unha superficie real, é unha superficie compacta, conexas e orientable; en consecuencia, topoloxicamente isomorfa a unha esfera cun certo número de asas,  $g$ , que é o *xénero topolóxico* da superficie de Riemann. O traballo de Riemann, parte da procura deste xénero dentro da xeometría analítica da variedade complexa. O resultado é que dito xénero coincide co que Riemann chama *xénero xeométrico*,  $p_g$ ,

que é o máximo número de 1-formas holomorfas linearmente independentes definidas sobre a variedade analítica complexa 1-dimensional. O método está ben explicado no libro de Briesker-Horrer, [BK86]. Esencialmente a idea de Riemann é semellante á de Plücker. Dar conta de que é o que diferencia analiticamente unha superficie de Riemann de xénero  $g$ ,  $\tilde{\mathcal{C}}$ , dunha esfera. O obxectivo de Riemann é estudar os posibles revestimentos  $\tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbb{P}^1$ , procurar unha relación entre as características de Euler-Poincar-Poincarè e expresar dita relación en termos analítico-xeométricos. De feito, o traballo de Riemann, foi xeneralizado por Hurwitz para revestimentos entre dúas superficies de Riemann calesquera, obtendo a coñecida como *fórmula de Riemann-Hurwitz*. A primeira versión do Teorema de Riemann foi probar que o xénero topolóxico coincide co xénero xeométrico. O resultado que hoxe se coñece como Teorema de Riemann-Roch, non se alonxa deste punto de vista.

Realmente, quen pon orde no estudo do Teorema de Riemann-Roch, é Max Noether. Noether [MN83] é o primeiro en refacer todos os resultados de Riemann dende o contexto proxectivo. Introduce o concepto de *sistema linear e completo* nunha curva alxébrica con singularidades ordinarias; de feito nunha curva lisa, probando a súa existencia. Noether relaciona a desigualdade de Riemann co concepto de *xénero de Weierstrass*, de onde distingue os 0-ciclos da curva (hoxe coñecidos como *divisores*) en dúas familias: *divisores non especiais*, que son aqueles para os que se dá a igualdade de Riemann; e os *divisores especiais*, que son aqueles para os que se ten unha desigualdade estrita. Neste segundo caso e canda o seu discípulo Brill, dan unha interpretación proxectiva do *termo corrector de Roch*, facendo uso do divisor canónico que obteñen como un divisor especial maximal. Xorde así a chamada *teoría de Brill-Noether de sistemas lineares especiais* que aínda é obxecto de estudo na actualidade. Noether proba a igualdade de todos os invariantes que xorden no estudo simultáneo de superficies de Riemann e de curvas alxébricas: *xénero topolóxico*, *xénero xeométrico*, *xénero aritmético* e mesmo o *xénero de Weierstrass*.

No libro de K. Kendig [K77], pódese atopar a relación entre as curvas alxébricas planas e as superficies de Riemann. A Superficie de Riemann, como variedade complexa 1-dimensional, pode considerarse o modelo abstracto dunha clase birracional de curvas alxébricas. Proxectivamente unha Superficie de Riemann é unha curva lisa, que é o modelo non singular e proxectivo desa clase birracional de curvas. Son moitos os libros que traballan directamente con superficies de Riemann para chagar ao chamado *Teorema de Riemann-Hurwitz*. O desenrolo é longo e mesmo pesado. Agora ben, un pode considerar o modelo non singular proxectivo, que é único, para unha clase birracional de curvas alxébricas, e estudar as posibles proxeccións da curva no espazo ordinario  $\mathbb{P}^3$ , logo unha boa proxección no plano  $\mathbb{P}^2$ , e xa no plano procurar unha proxección a unha recta  $\mathbb{P}^1$ . Traballando ca estrutura topolóxica desta proxección pódese calcular directamente a relación entre as características de Euler-Poincaré da curva e de  $\mathbb{P}^1$ , facendo intervir o xénero aritmético da curva en función das singularidades da curva plana e dos puntos de ramificación da proxección, chegando á igualdade do xénero aritmético e do xénero topolóxico.

O obxectivo deste traballo é expor unha proba xeométrico-alxébrica de que o xénero topolóxico coincide co xénero aritmético facendo argumentos rigorosos, mais baseados nas técnicas hiperespaciais introducidas por Corrado Segre e Eugenio Bertini [B23] ao cabo do século *XIX* e comezos do *XX*. Todo o que se precisa para a proba, expónse ao longo do traballo nun total de tres capítulos, sen ter en conta o capítulo introdutorio (Capítulo 0).

No Capítulo 1, próbase a existencia do modelo non singular proxectivo dunha curva alxébrica. O resultado era coñecido por Noether, aínda que non deu unha proba explícita. Kronecker demostrou e, xa co uso dos métodos hiperespaciais, Albanese, argumentou unha demostración que esencialmente di: na clase birracional de curvas alxébricas pódese considerar un modelo plano, e mesmo con singularidades ordinarias. Facendo uso dunha *inmersión de Veronese* nun espazo proxectivo de dimensión o suficientemente grande, tense unha imaxe espacial da curva mais, polo isomorfismo, ten singularidades. A cuestión é facer uso de proxeccións que sexan birracionais e polo tanto conservan o xénero aritmético da curva, pero baixan o grao da curva inmersa. Tales proxeccións fanse sucesivamente dende os puntos singulares da curva, que son un número finito. O grao da curva vai baixando estritamente, mais sempre acotado inferiormente polo xénero aritmético, que é non negativo, polo que necesariamente se chega a un modelo birracional liso. O método aquí exposto é importante xa que, hoxe en día, a desingularización dunha curva alxébrica faise polo método de explodir as singularidades. Dalgún xeito, un para desingularizar a curva coa explosión, resolve as singularidades subindo a curva a un espazo, mentres que co método de Noether-Kronecker-Albanese, a idea é case oposta; lévase a curva singular a un espazo de dimensión grande e dende alí proxéctase dende os puntos singulares.

No Capítulo 2, estúdanse as proxeccións dunha curva lisa proxectiva a espazos de dimensión inferior. O estudo é moi clásico, mais leva implícito conceptos que logo a álgebra dos anos 60 tería moi en conta. Por citar un exemplo, o concepto de *variedade de incidencia* non é máis que o concepto de *obxecto universal* en teoría de categorías. Neste capítulo trabállase o concepto de *variedade secante* a unha curva e ilústrase xeometricamente como xorden os isomorfismos usando a linguaxe da xeometría analítica complexa e diferencial. En realidade estase a comprobar que as boas proxeccións ata  $\mathbb{P}^3$  son o que en xeometría diferencial se coñece como submersións. Na argumentación vese como o feito de que a diferencial dun morfismo sexa inxectiva, permite afirmar, polo teorema da función inversa, que se está ante un isomorfismo local. No caso de proxectar dende  $\mathbb{P}^3$  sobre o plano  $\mathbb{P}^2$ , faise uso dun resultado forte e importante, debido a Corrado Segre [DM76]: a clausura dun conxunto na topoloxía de Zariski, coincide con facer a clausura na topoloxía clásica. Este resultado, permite atopar unha boa bisecante e de feito un número finito delas, para que unha curva lisa en  $\mathbb{P}^3$  se poida proxectar birracionalmente no plano, tendo unicamente nodos como singularidades ordinarias. Finalmente, a proxección dunha curva proxectiva plana, tendo unicamente nodos como singularidades, sobre unha recta, permite ver explicitamente na proxección como xorden os puntos de ramificación e atopar unhas relacións numéricas que levan

implícito o xénero aritmético da curva.

Xa no Capítulo 3, expóñese a proba da igualdade entre o xénero topolóxico e o xénero aritmético. Para iso, nunha primeira sección introdúcese o concepto de xénero aritmético dunha curva plana. A formalización máis sinxela débese aos traballos de Plücker, Clebsch e Noether [SR49], partindo da idea de atopar un invariante que dea conta de canto unha curva alxébrica plana se alonxa de ser racional. O primeiro concepto que xorde é a deficiencia dunha curva plana. Para lograr un invariante birracional, Noether estuda o comportamento da curva ante as *transformacións de Cremona* do plano,  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ . O grupo deste tipo de transformacións, está xerado polas chamadas *transformacións cuadráticas estándar*. Noether proba que a partir dunha tal curva con singularidades calesquera, unha transformación cuadrática dá lugar a outra curva con deficiencia menor ou igual que a deficiencia da curva orixinal e, de feito, a deficiencia deixa de baixar cando se chega a unha curva con singularidades ordinarias. Así, nunha clase birracional de curvas planas existe unha *deficiencia mínima* que é o que Noether chama *xénero aritmético* da curva, que é un invariante birracional. Resulta interesante amosar o método de Noether, xa que nel está implícito o concepto de explosión nun punto, aínda que a transformación cuadrática estándar é realizada no plano proxectivo. Por este feito, Noether xa tiña admitido que calquera curva plana  $\mathcal{C}$  con singularidades é birracional a unha curva lisa proxectiva  $\tilde{\mathcal{C}}$  nun espazo de dimensión maior ou igual a tres.

Na segunda sección do capítulo faise uso dos resultados do Capítulo 2. A partir dunha curva lisa pódese chegar, na súa clase birracional, a unha curva plana tan só con nodos como singularidades e logo proxectar xenericamente, nese plano, a unha recta  $L = \mathbb{P}^1$ . Calculando a característica de Euler-Poincaré da curva  $\tilde{\mathcal{C}}$  en función da característica de Euler-Poincaré, o grao e os puntos de ramificación da proxección, obtense a igualdade  $g = p_a$ . Na derradeira sección faise unha exposición das diferentes nocións de xénero para unha curva plana ou espacial, xa que son invariantes birracionais para a curva. Demostrarase, na sección previa, que o xénero topolóxico é igual ao xénero aritmético da curva plana. Historicamente este resultado foi obtido por Noether como consecuencia do seguinte: sendo  $\mathcal{C}$  unha variedade complexa 1-dimensional, Riemann estuda o espazo vectorial de 1-formas holomorfas definidas sobre  $\mathcal{C}$ , e o seu primeiro resultado é probar que a dimensión dese espazo vectorial, que chamou xénero xeométrico  $p_g$ , coincide co xénero topolóxico  $g$ . Débese a Noether identificar o espazo vectorial de 1-formas holomorfas sobre  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$  pensada como unha curva do plano de grao  $d$ , co espazo de formas de grao  $d - 3$  que son as ecuacións das curvas adxuntas á curva  $\mathcal{C}$  e que a dimensión deste espazo é o xénero aritmético  $p_a$  da curva  $\mathcal{C}$ . Tense así a igualdade dos tres xéneros  $g = p_g = p_a$ .

No traballo explícase con detalle o comentado nesta introdución. A maioría das ideas e dos resultados están sacados do libro de Mumford [DM76]. Primeiro comézase cun capítulo inicial para expoñer resultados e definicións imprescindibles para o correcto seguimento do escrito.



# Capítulo 0

## Definicións e resultados previos

Todas as definicións e resultados deste capítulo pódense ver con moito máis detalle nos libros de *W. Fulton* [WF71], de *Miles Reid* [MR88] e de *R. Hartshorne* [RH77].

### 0.1. Espazo Proxectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ . Conxuntos alxébricos

Comézase definindo o espazo proxectivo que será onde se traballará ao longo deste traballo. Para iso, defínese antes de nada o espazo afín:

**Definición 0.1** (Espazo afín). Sexa  $K$  un corpo. Denótase por  $\mathbb{A}^n(K)$ ,  $\mathbb{A}_K^n$ , ou simplemente  $\mathbb{A}^n$  cando se sobreentende cal é o corpo  $K$ , ao produto cartesiano de  $K$  consigo mesmo  $n$  veces.  $\mathbb{A}^n$  será o conxunto de  $n$ -tuplas de elementos de  $K$  e coñecerase como o  $n$ -espazo afín sobre  $K$ .

**Definición 0.2** (Espazo proxectivo). Sexa  $K$  un corpo. Defínese o  $n$ -espazo proxectivo sobre  $K$ ,  $\mathbb{P}_K^n$ ,  $\mathbb{P}^n(K)$  ou simplemente  $\mathbb{P}^n$ , como o conxunto de todas as rectas que pasan por  $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{A}_K^{n+1}$ . Calquera punto  $x = (x_0, \dots, x_n)$  distinto do vector nulo, determina unha única recta  $\{(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) : \lambda \neq 0\}$  e dous puntos distintos,  $x$  e  $y$ , determinan a mesma recta se existe unha constante non nula,  $\lambda \neq 0$ , tal que  $x_i = \lambda y_i$  con  $i = 0, \dots, n$ . Se un punto  $P \in \mathbb{P}_K^n$  está determinado por  $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{A}_K^n$ , dirase que  $(x_0, \dots, x_n)$  son as *coordenadas homoxéneas* e denotaranse por  $(x_0 : \dots : x_n)$ .

Nótese que se  $U_i := \{(x_0 : \dots : x_n) : x_i \neq 0\}$ , todo punto  $P \in U_i$  pode ser escrito como  $P = \frac{1}{x_i}(x_0 : \dots : x_n) = (x'_0 : \dots : 1 : \dots : x'_n)$ . Intúese así como se pode pasar do espazo proxectivo a calquera das cartas afíns  $\mathbb{A}^n$  de coordenadas  $\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\hat{x}_i}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)$ , que se denotará por  $\mathbb{A}_{\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\hat{x}_i}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}}^n$ . Estes procesos son os procesos de *homoxeneización* e *deshomoxeneización*.

**Definición 0.3** (Homoxeneización). O proceso de *homoxeneización* con respecto á variable  $x_i$ , consiste en pasar dende a carta afín  $\mathbb{A}^n$  ao conxunto  $U_i$  mediante a seguinte aplicación  $\varphi_i: \mathbb{A}^n \longrightarrow U_i$  definida por  $\varphi_i(a_1, \dots, a_n) = (a_1 : \dots : a_{i-1} : 1 : a_i : \dots : a_n)$

**Definición 0.4** (Deshomoxeneización). O procedemento de *deshomoxeneización* con respecto á variable  $x_i$ , consiste no inverso do anterior, é dicir, en pasar dende o conxunto  $U_i$  á carta afín  $\mathbb{A}^n$  mediante a seguinte aplicación  $\psi_i: U_i \longrightarrow \mathbb{A}^n$  dada por  $\psi_i(x_0 : \dots : x_n) = (\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\hat{x}_i}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}) \in \mathbb{A}^n$

Nótese que  $\psi_i$  e  $\varphi_i$  son inversas, logo existe unha correspondencia 1-1 entre os puntos de  $\mathbb{A}^n$  e os puntos de  $U_i$ . Ademais, como  $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^n U_i$ , entón, o  $n$ -espazo proxectivo, estará cuberto por  $n + 1$  espazos afíns  $n$ -dimensionais. A anterior correspondencia entre os conxuntos  $U_i$  e os  $n$ -espazos afíns, permite ver o  $n$ -espazo proxectivo como variedade analítica, con aplicacións racionais de transición  $\frac{x_i}{x_j}$ . O  $n$ -espazo proxectivo tamén se pode ver como a unión dunha carta afín co seu hiperplano do infinito,  $H_\infty$ . Por convenio, tómase  $U_n$  para definir  $H_\infty$ :

$$H_\infty := \mathbb{P}^n \setminus U_n = \{(x_0 : \dots : x_n) : x_n = 0\}.$$

A correspondencia  $(x_0 : \dots : x_{n-1} : 0) \leftrightarrow (x_0 : \dots : x_{n-1})$  amosa que  $H_\infty$  pode ser identificado con  $\mathbb{P}^{n-1}$  e, polo tanto,  $\mathbb{P}^n = U_n \cup H_\infty$ , obténdose que o  $n$ -espazo proxectivo é a unión dun  $n$ -espazo afín (carta afín) co seu correspondente hiperplano do infinito.

**► Cal é o motivo de considerar, neste traballo, como espazo de estudo o  $n$ -espazo proxectivo complexo?**

Ao longo deste traballo tómase como corpo  $K$ , o corpo dos números complexos,  $\mathbb{C}$ . O motivo é moi sinxelo: as curvas alxébricas, non deixan de ser máis que o conxunto de ceros comúns dun número finito de polinomios. Ao considerar un corpo alxebricamente pechado, como o é  $\mathbb{C}$ , nunca se chegará a unha situación na que o conxunto de ceros dados por un polinomio non constante sexa baleiro. O motivo de considerar espazos proxectivos é que, tales espazos son compactos, facendo que o estudo das curvas sexa máis completo e podendo chegar a resultados máis xerais. De aquí en diante, denótase simplemente por  $\mathbb{P}^n$  o  $n$ -espazo proxectivo complexo,  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ , pois será o espazo no que se traballará.

**Definición 0.5** (Polinomio homoxéneo). Un *polinomio homoxéneo* ou *forma* de grao  $d$ ,  $F \in K[x_0, \dots, x_n]$ , onde  $K[x_0, \dots, x_n]$  denota o anel de polinomios con coeficientes en  $K$  e variables  $x_0, \dots, x_n$ ; é un polinomio de ecuación

$$F = \sum a_{i_0 \dots i_n} x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n}$$

onde  $a_{i_0 \dots i_n} \neq 0$  soamente se  $i_0 + \dots + i_n = d$

Algún resultado importante relacionado con polinomios homoxéneos, móstrase deseguido.

**Proposición 0.6.**

1. Se  $f$  é un polinomio calquera, ten unha única expresión

$$f = F_0 + F_1 + \dots + F_N$$

onde cada  $F_d$  é un polinomio homoxéneo de grao  $d$ , sendo  $d = 0, 1, \dots, N$ .

2. Se  $F$  é un polinomio homoxéneo de grao  $d$ , entón

$$F(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d F(x_0, \dots, x_n) \quad \forall \lambda \neq 0 \in K$$

Ademais, se  $K$  é infinito, entón a outra implicación mantense.

3. Se  $F(x_0, x_1, \dots, x_n)$  é un polinomio homoxéneo de grao  $d$ , entón verifícase a fórmula de Euler:

$$d \cdot F(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial F}{\partial x_0} \cdot x_0 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot x_i + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \cdot x_n$$

**Definición 0.7** (Conxunto alxébrico proxectivo). Dado  $S$  un conxunto de polinomios homoxéneos en  $K[x_0, \dots, x_n]$ , denótase por

$$Z(S) = \{P \in \mathbb{P}^n : f(P) = 0 \quad \forall f \in S\} = \bigcap_{f \in S} Z(f) \subset \mathbb{P}^n$$

ao conxunto de ceros comúns a todos os polinomios de  $S$ . Un subconxunto  $X \subset \mathbb{P}^n$  é un *conxunto alxébrico proxectivo* se  $X = Z(S)$  para algún conxunto de polinomios  $S$ .

Un exemplo de conxunto alxébrico proxectivo é o seguinte:

**Exemplo 0.8.** Se  $Z(F) := \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{P}^n : F(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0\}$ ,  $Z(F)$  dise unha *hipersuperficie de grao  $d$* , sendo  $d$  o grao do polinomio homoxéneo  $F$ . Dito grao interprétase xeometricamente como o número de puntos distintos nos que a hipersuperficie atopa a unha recta xenérica  $r$  (no sentido de que tal recta non é tanxente en punto algún, nin está contida na hipersuperficie). O exemplo máis sinxelo de hipersuperficie é unha curva plana definida por  $F(x_0 : x_1 : x_2) = 0$  no plano proxectivo  $\mathbb{P}^2$ .

Restrinxindo un conxunto alxébrico proxectivo a unha carta afín, obtense un *conxunto alxébrico afín* que estará xerado por polinomios en  $K[x_1, \dots, x_n]$ , en xeral non homoxéneos. Nótese que para pasar de conxuntos alxébricos afíns a proxectivos, e viceversa, poden empregarse os procesos de homoxeneización e deshoxeneización. En xeral, salvo que se diga o contrario, consideraranse conxuntos alxébricos proxectivos.

**Definición 0.9** (Conxunto alxébrico irreducible e Variedade). Un conxunto alxébrico proxectivo (resp. afín)  $X$ , dise *irreducible* se non existe unha descomposición  $\mathcal{C} = X_1 \cup X_2$  de modo que  $X_1, X_2 \subsetneq X$  son conxuntos alxébricos. Noutro caso, dise *reducible*. Un conxunto alxébrico proxectivo (resp. afín) irreducible chamarase *variedade alxébrica proxectiva* (resp. afín).

**Definición 0.10** (Dimensión dunha variedade). Dada unha variedade alxébrica (proyectiva),  $V$ , as seguintes dúas definicións de dimensión dunha variedade son equivalentes:

1. Defínese a *dimensión de  $V$*  como o maior natural,  $k$ , para o cal existe unha cadea de pechados irreducibles da forma  $V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \dots \subsetneq V_{k-1} \subsetneq V_k = V$ .
2. Existe un aberto  $U \subset V$  tal que para todo  $P \in U$ ,  $\dim T_P(V) = k$ , sendo  $T_P(V)$  o espazo tanxente a  $V$  en  $P$ . Tal natural  $k$ , será a *dimensión da variedade alxébrica  $V$* .

**Definición 0.11** (Curva alxébrica proyectiva). Chámase *curva alxébrica proyectiva* a un conxunto alxébrico irreducible  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^n$  de dimensión 1. Cando  $n = 2$ , unha tal curva alxébrica está definida por un polinomio homoxéneo irreducible  $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ . Unha tal curva, é o que se coñece como *curva plana*.

**Definición 0.12** (Curva alxébrica afín). Una curva alxébrica afín será a restrición a unha carta afín  $\mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n$  dunha curva alxébrica proyectiva.

*Observación 0.13.* Unha curva alxébrica  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^n$ , sendo  $n \geq 3$ , nunca está definida por unha única ecuación polinómica homoxénea. Unha variedade xerada por un único polinomio ten dimensión  $n - 1$  e por ser  $n \geq 3$ , a dimensión de tal variedade é sempre maior que un. Así, unha curva alxébrica en  $\mathbb{P}^n$  virá xerada por un conxunto de polinomios.

Un dos motivos polos que se considera unha topoloxía nun conxunto é para ser capaz de ter veciñanzas dun punto. En ocasións, isto permitirá desfacerse dun conxunto (que non contén ao punto) onde ocorre algo non desexado. Deste xeito, considérase a *topoloxía de Zariski*.

**Definición 0.14** (Topoloxía de Zariski). Dado un conxunto alxébrico  $X$ , a *topoloxía de Zariski* en  $X$  defínese como segue: un conxunto  $U \subset X$  é aberto se  $X \setminus U$  é un conxunto alxébrico. En particular, os pechados na topoloxía de Zariski son os conxuntos alxébricos.

*Observación 0.15.* A importancia dos conxuntos alxébricos é que con respecto á topoloxía clásica, ademais de ser pechados, son compactos. Máis aínda, un resultado importante de Corrado Segre (pódese ver no libro de Mumford, [DM76]), di que se  $Y \subset \mathbb{P}^n$  é un subconxunto calquera, a súa clausura na topoloxía de Zariski, coincide coa clausura na topoloxía clásica.

Algúns exemplos de pechados na topoloxía de Zariski son as curvas alxébricas ou os puntos. Ademais, considerando esta topoloxía, o conxunto de puntos singulares dunha hipersuperficie dada por  $Z(F) \subset \mathbb{P}^n$ , que se denota por  $\text{Sing}(Z(F))$ , onde  $F$  é un polinomio homoxéneo do anel de polinomios  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ , é un pechado propio, pois tales puntos conséguense como solución do sistema de ecuacións  $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$ . En consecuencia  $\mathbb{P}^n \setminus \text{Sing}(Z(F))$  é un aberto denso.

Un concepto importante relacionado cunha variedade alxébrica,  $V \subset \mathbb{P}^n$ , é o seu grao, que xeneraliza o grao dunha hipersuperficie visto anteriormente no *Exemplo 0.8*.

**Definición 0.16** (Grao). Dada unha variedade alxébrica  $k$ -dimensional  $V \subset \mathbb{P}^n$ , defínese o seu grao como o número de puntos distintos,  $d$ , nos que corta a  $V$  un subespazo xenérico  $\mathbb{P}^{n-k} \subset \mathbb{P}^n$ .

**Definición 0.17** (Curva polar). Sexa  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^n$  unha curva alxébrica de ecuación  $F(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$ . Denomínase *curva polar de  $\mathcal{C}$  respecto do punto  $\mathcal{O} = (\alpha_0 : \alpha_1 : \dots : \alpha_n) \notin \mathcal{C}$*  e denótase por  $Polar(\mathcal{O}, \mathcal{C})$  á curva definida pola ecuación:

$$\alpha_0 \cdot \frac{\partial F}{\partial x_0} + \alpha_1 \cdot \frac{\partial F}{\partial x_1} + \dots + \alpha_n \cdot \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

## 0.2. Singularidades dunha hipersuperficie

Para introducir o concepto de singularidade, comézase no caso de curvas planas e despois xeneralízase para o caso dunha hipersuperficie. O que se mencionará sobre este tipo de curvas, pódese ver de modo máis detallado no libro de *W. Fulton* [WF71]. Formalmente pódese definir unha *curva alxébrica plana* como unha clase de equivalencia de polinomios non constantes dentro da relación de equivalencia dada por,  $f \sim g \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0$  tal que  $f = \lambda g$ . Unha curva plana está xerada por un único polinomio (salvo clase de equivalencia) e o grao da curva coincide co grao do polinomio en cuestión. Unha tal curva alxébrica pode ter puntos de non diferenciabilidade. Ditos puntos son os que se coñecen como *singularidades da curva*:

**Definición 0.18** (Puntos singulares e lisos). Dada  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$  unha curva plana proxectiva, definida polo polinomio homoxéneo de grao  $d$ ,  $F(x_0, x_1, x_2)$ . Un punto  $P = (a : b : c) \in \mathcal{C}$  dise *liso* ou *simple* se algunha das derivadas parciais,  $\frac{\partial F}{\partial x_i}(P)$ , é distinta de cero, para algún  $i \in \{0, 1, 2\}$ . Nesta situación, defínese a *recta tanxente a  $\mathcal{C}$  no punto  $P$*  como a recta de ecuación

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}(P)(x_0 - a) + \frac{\partial F}{\partial x_1}(P)(x_1 - b) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(P)(x_2 - c) = 0.$$

Noutro caso, é dicir, cando  $\frac{\partial F}{\partial x_0} = \frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0$ , o punto dise *singular* ou *múltiple*.

Faise un abuso de linguaxe e denotarase, indistintamente, por  $F$  ou por  $\mathcal{C}$  á curva correspondente aos ceros do polinomio  $F$ . Así, un punto  $P \in \mathcal{C}$  ou  $P \in F$  será un cero do polinomio  $F$ . Suporase de aquí en diante que  $P = (1 : 0 : 0)$ , é dicir, o punto  $(0, 0)$  na carta afín de coordenadas  $\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}$ . Defínese agora o concepto de *multiplicidade* dun polinomio nun determinado punto. Este concepto é unha propiedade local, polo que se define sobre a curva de ecuación  $f(x, y) = 0$  pensada na carta afín  $\mathbb{A}_{x,y}^2$ , onde  $x = \frac{x_1}{x_0}$ ,  $y = \frac{x_2}{x_0}$  e  $f$  é o polinomio resultado de deshoxeneizar  $F$ .

**Definición 0.19** (Multiplicidade de  $f$  en  $P$ ). Sexa  $f$  unha curva,  $P = (0, 0)$ . Escríbese  $f$  como suma de formas:  $f = F_m + F_{m+1} + \dots + F_d$  onde cada  $F_i$  é unha forma en  $K[x, y]$  de grao  $i$  e  $F_m \neq 0$ . Defínese  $m$  como a *multiplicidade de  $f$  en  $P$*  e denótase por  $m_P(f) = m$ .

Desta definición sácase en claro que  $P \in f$  se e só se  $m_P(f) > 0$  e tamén que  $P$  será un punto simple, se e só se  $m_P(f) = 1$  (neste caso  $F_1 = 0$  será a recta tanxente) e será múltiple no caso de que  $m_P(f) > 1$ . En particular se  $m_P(f) = 2$  dise que o punto é *múltiple de orde dous* ou que é un *punto dobre*, se  $m_P(f) = 3$ ,  $P$  será *múltiple de orde tres* ou un *punto triple*, e así sucesivamente. Agora ben, como  $F_m$  é unha forma en dúas variables, pódese escribir  $F_m = \prod L_i^{r_i}$  onde as  $L_i$  son as ecuacións homoxéneas das tanxentes principais pasando polo punto  $P$ , todas elas distintas, e onde os  $r_i$  suman  $m$ , que é o grao do polinomio homoxéneo.

**Definición 0.20** (Punto múltiple ordinario). Na situación anterior, dise que o punto  $P \in F$  é un *punto múltiple ordinario de orde  $m$*  se  $F_m$  ten  $m$  tanxentes principais distintas (simples) no punto.

Se  $P$  é un punto dobre e ordinario, dirase que  $P$  é un *nodo*. De ser un punto dobre mais con tanxente dobre,  $P$  será unha *cúspide* e no caso de ter un punto  $P$  con multiplicidade catro e dúas tanxentes dobres, entón estarase ante un *tacnodo*.

**Definición 0.21** (Inflexión). Un punto liso,  $P$ , dunha curva,  $\mathcal{C}$ , é un *punto de inflexión* ou é unha *flexión* se a recta tanxente á curva en  $P$ , corta en dito punto con multiplicidade maior ou igual que tres. Se tal multiplicidade é exactamente tres, dirase que o punto é un *punto de inflexión ordinario* ou unha *flexión ordinaria*. Representarase por  $Flex(\mathcal{C})$ , ao conxunto dos puntos de inflexión da curva  $\mathcal{C}$ .

Xeneralízase todo o comentado sobre curvas planas, para hipersuperficies,  $Z(F) \subset \mathbb{P}^n$ , é dicir conxuntos alxébricos xerados por un único polinomio homoxéneo,  $F$ :

**Definición 0.22.** O punto  $Q = (a_0 : a_1 : \dots : a_n)$  dise *punto liso* para a hipersuperficie  $Z(F)$  precisamente se existe  $i \in \{0, \dots, n\}$  tal que  $\frac{\partial F}{\partial x_i}(Q) \neq 0$ . En tal caso, chámase hiperplano tanxente á hipersuperficie en  $Q$  e denótase por  $T_Q(Z(F))$  ao hiperplano de ecuación:

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}(Q) \cdot (x_0 - a_0) + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_i}(Q) \cdot (x_i - a_i) + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(Q) \cdot (x_n - a_n) = 0$$

Con maior xeneralidade, pódese definir o que é un *punto singular de multiplicidade  $s$* ,  $Q$ , para a hipersuperficie  $Z(F)$ . Tal punto satisfai por definición que todas as parciais de  $F(x_0, x_1, \dots, x_n)$  de orde  $\leq s - 1$  sse anulan no punto  $Q$ .

Un punto singular  $Q = (1 : 0 \dots : 0)$  de multiplicidade  $s$ , está caracterizado xeometricamente porque toda recta  $r$  pasando por  $Q$ , corta á hipersuperficie nese punto con multiplicidade  $\geq s$  e, de feito, existen rectas cortando con multiplicidade exactamente  $s$ . É sinxelo ver isto tomando a restrición da hipersuperficie á carta afín  $x_0 = 1$  con coordenadas afíns  $y_i := \frac{x_i}{x_0}$ . A ecuación da hipersuperficie nesta carta coordenada coincide co seu desenrolo de Taylor en torno á orixe e sendo  $Q$  un punto singular de multiplicidade  $s$ , tal desenrolo comeza coa parte homoxénea de

grao  $s$  correspondentes ás parciais de orde  $s$ . Deste modo, cualquera recta pasando por  $Q$  con ecuacións paramétricas  $y_i = b_i t$ ,  $i = 1, \dots, n$  ten en común coa hipersuperficie a solución  $t^s = 0$ ; é dicir, a recta e a hipersuperficie córtanse en  $Q$  con multiplicidade  $s$ .

**Definición 0.23.** (Cono tanxente) Dado un punto singular  $Q \in Z(F)$  de multiplicidade  $s$ , denomínase *cono tanxente á hipersuperficie en  $Q$*  ao lugar xeométrico das rectas que cortan a  $Z(F)$  en  $Q$  con multiplicidade  $\geq s + 1$ . Denótase por  $E_{Q,Z(F)}^*$  e a súa ecuación vén dada pola nulidade da forma homoxénea de grao  $s$ , consistente nas parciais de orde  $s$  avaliadas no punto  $Q$ .

Xa un derradeiro resultado ten que ver co concepto de curva dual asociada a unha curva plana  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$ . Para cada punto liso  $P \in \mathcal{C}$  considérase a recta tanxente  $T_P(\mathcal{C}) \subset \mathbb{P}^2$ , que, dualmente, define un punto  $P^* := [T_P(\mathcal{C})]$  no plano proxectivo dual. Tense a seguinte definición:

**Definición 0.24.** Dada unha curva plana  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$ , chamarase *curva dual  $\mathcal{C}^*$*  á clausura de Zariski da imaxe da aplicación regular  $P \in \mathcal{C} \setminus \text{Sing}(\mathcal{C}) \rightarrow P^* \in (\mathbb{P}^2)^*$ .

**Teorema 0.25** (Teorema de Reflexividade de Corrado Segre). *Sexa  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$  unha curva plana, e sexa  $\mathcal{C}^* \subset (\mathbb{P}^2)^*$  a súa curva dual. Entón, ao facer novamente a curva dual,  $(\mathcal{C}^*)^* = \mathcal{C}$ .*

### 0.3. Teoría de intersección de curvas

Procédese agora a facer unha breve descripción sobre algunha definición e resultado importante sobre a Teoría de intersección de curvas alxébricas proxectivas.

**Definición 0.26** (Multiplicidade de intersección). Dadas dúas curvas planas irreducibles  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$ , de graos  $n$  e  $m$  e ecuacións  $F(x_0, x_1, x_2) = 0$  e  $G(x_0, x_1, x_2) = 0$ . Defínese a *multiplicidade de intersección de  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  no punto  $P = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$*  como a multiplicidade alxébrica da raíz  $P = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$  no polinomio resultante,  $\mathcal{R}es_{x_2}(F, G)$ .

Un resultado fundamental na teoría de intersección para curvas proxectivas é o teorema de Bezout. Botarase man deste resultado en numerosas ocasións ao longo de todo o traballo. Primeiro enúnciase o resultado para curvas planas proxectivas. Pódese consultar o libro de *W. Fulton* [WF71], para máis detalles.

**Teorema 0.27** (de Bezout para curvas planas). *Sexan  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  dúas curvas planas proxectivas definidas polos polinomios  $F$  e  $G$ , respectivamente. Suponse que  $\mathcal{C}$  ten grao  $n$  e  $\mathcal{D}$  ten grao  $m$ . Asíumese que as curvas non teñen compoñentes comúns. Entón*

$$\sum_{P \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}} m_P(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = m \cdot n$$

**Corolario 0.28.** *Calquera par de curvas planas proxectivas, teñen intersección non baleira.*

**Corolario 0.29.** *Se  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  son curvas alxébricas proxectivas xeradas polos polinomios  $F$  e  $G$ , respectivamente, e non teñen compoñentes comúns, entón:*

$$\sum_{P \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}} m_P(F) \cdot m_P(G) \leq \deg(F) \cdot \deg(G).$$

**Corolario 0.30.** *Se a intersección de dúas curvas alxébricas proxectivas son un total de  $n \cdot m$  puntos (sendo  $n$  e  $m$  o grao de cada unha das curvas), entón tales puntos son todos simples.*

**Corolario 0.31.** *Se dúas curvas de graos  $n$  e  $m$  teñen máis de  $n \cdot m$  puntos en común, entón teñen unha compoñente común.*

Un resultado adicional importante para a comprobación do teorema de Bezout para curvas planas, de forma explícita, e que permite calcular a multiplicidade de intersección  $m_P(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  é o seguinte:

**Proposición 0.32** (Desigualdade fundamental). *Sexan  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  dúas curvas proxectivas e  $P \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ , entón verifícase:*

$$m_P(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \geq m_P(\mathcal{C}) \cdot m_P(\mathcal{D})$$

*e dase a igualdade precisamente se  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  non teñen tanxentes principais comúns no punto  $P$ .*

Nótese que todos estes resultados non se poderían obter, en xeral, para curvas alxébricas afíns, pois o teorema de Bezout non se verifica no plano afín. Por exemplo, en  $\mathbb{A}^2$  dúas rectas paralelas non se cortan en punto algún, mais o teorema de Bezout di que o fan nun único punto.

Pódese enunciar unha versión xeral do teorema de Bezout, mais antes é preciso dar unha definición:

**Definición 0.33.** *Dúas subvariedades  $Z$  e  $W$  córtanse propiamente en  $\mathbb{P}^n$  precisamente se cada compoñente irreducible do conxunto alxébrico  $Z \cap W$  ten dimensión  $\dim(Z) + \dim(W) - n$ .*

**Teorema 0.34** (de Bezout). *Sexan  $Z, W \subset \mathbb{P}^n$  dúas variedades alxébricas proxectivas de dimensións  $k$  e  $k'$ . Supóñase que  $k + k' \geq n$  e que  $Z$  e  $W$  se cortan transversalmente. Entón:*

$$\deg(Z \cap W) = \deg(Z) \deg(W)$$

*En particular, se  $Z$  e  $W$  se cortan propiamente e  $k+k' = n$ , a igualdade garante que a intersección  $Z \cap W$  consiste en  $\deg(Z) \cdot \deg(W)$  puntos.*



## 0.4. Aplicacións racionais e birracionais

Ao longo do traballo estúdanse modelos birracionais de curvas. Estes conséguense aplicando unha aplicación birracional a dita curva, polo que será preciso definir este concepto. Estas definicións, en particular, están sacadas do libro de Miles Reid [MR88]. Primeiro defínese o concepto de *función racional* nunha variedade alxébrica, obténdose o *corpo das funcións racionais*. Este concepto será empregado para definir as *aplicacións racionais* entre variedades.

**Definición 0.35** (Función racional). Considérase  $V$  unha variedade alxébrica proxectiva, unha *función racional en  $V$*  é unha función parcialmente definida  $F: V \dashrightarrow K$  dada por  $F(P) = \frac{G(P)}{H(P)}$ , onde  $G, H \in K[x_0, \dots, x_n]$  son polinomios homoxéneos de igual grao  $d$ .

Nótese que se  $H(P) \neq 0$ , o cociente está ben definido pois a imaxe mediante a aplicación así dada non depende de representante:

$$F(\lambda(x_0, \dots, x_n)) = \frac{G(\lambda(x_0, \dots, x_n))}{H(\lambda(x_0, \dots, x_n))} = \frac{\lambda^d G(x_0, \dots, x_n)}{\lambda^d H(x_0, \dots, x_n)} = \frac{G(x_0, \dots, x_n)}{H(x_0, \dots, x_n)} = F(x_0, \dots, x_n).$$

Ademais,  $\frac{G}{H}$  e  $\frac{G'}{H'}$  definen a mesma aplicación racional se e só se:

$$\frac{G}{H} = \frac{G'}{H'} \Leftrightarrow GH' = G'H \Leftrightarrow GH' - G'H = 0 \Leftrightarrow G(P)H'(P) - G'(P)H(P) = 0, \forall P \in V$$

Así, o conxunto de funcións racionais é o corpo

$$K(V) = \left\{ \frac{G}{H} : G, H \in K[x_0, \dots, x_n] \text{ homoxéneos de igual grao e } H(P) \neq 0, \forall P \in V \right\} / \sim$$

onde  $\sim$  é a relación de equivalencia definida por

$$\frac{G}{H} \sim \frac{G'}{H'} \Leftrightarrow GH' - G'H = 0$$

**Definición 0.36** (Función regular). Dada  $F \in K(V)$  e  $P \in V$ , dise que  $F$  é *regular en  $P$*  se existe unha expresión  $F = \frac{G}{H}$  onde  $G, H$  son polinomios homoxéneos do mesmo grao, tales que  $H(P) \neq 0$ . Se  $F$  é regular en todo punto de  $V$ , entón  $F$  é unha *función regular*.

**Definición 0.37** (Aplicación racional). Se  $V \subset \mathbb{P}^n$  é unha variedade alxébrica, unha *aplicación racional* será unha aplicación (parcialmente definida) da forma:

$$\begin{aligned} V \subset \mathbb{P}^n & \dashrightarrow \mathbb{P}^m \\ P & \longmapsto (F_0(P) : F_1(P) : \dots : F_m(P)) \end{aligned}$$

onde  $F_i \in K(V)$ . Está claro que tal aplicación deixa de estar definida onde  $F_i = 0$  para todo  $i = 0, \dots, m$ . Así, a definición de aplicación regular será a seguinte:

**Definición 0.38** (Aplicación regular). Unha aplicación racional  $F: V \dashrightarrow \mathbb{P}^m$  é *regular no punto*  $P \in V$  se existe unha expresión  $F = (F_0, F_1, \dots, F_m)$  tal que cada  $F_i$  é regular en  $P$  no sentido da Definición (0.35), e polo menos un dos  $F_i$  é non nulo en  $P$ . De verificarse para todo punto de  $V$ , entón  $F$  sería unha *aplicación regular*.

**Definición 0.39.** (Morfismo). Por un *morfismo*  $\varphi: V \rightarrow W$  entre dúas variedades alxébricas, entenderase unha aplicación racional  $\varphi: V \rightarrow W$  que é regular en todo punto  $P \in V$ .

Relacionado con esta definición tense o seguinte resultado cuxa proba se pode ver no libro de I. Shafarevich [SH88], Capítulo I, Sección 5.2:

**Teorema 0.40.** *A imaxe dun pechado mediante un morfismo  $\varphi: V \rightarrow W$  entre variedades proxectivas é un pechado na topoloxía de Zariski.*

**Definición 0.41** (Aplicación brracional). Sexan  $V$  e  $W$  dúas variedades alxébricas (afíns ou proxectivas) irreducibles. Entón unha aplicación racional,  $F: V \dashrightarrow W$ , é *birracional* ou é unha *equivalencia birracional* se ten unha inversa racional. Isto é, se existe unha aplicación racional  $G: W \dashrightarrow V$  tal que  $F \circ G = id_W$  e  $G \circ F = id_V$ . Unha segunda definición equivalente de aplicación birracional sería:

$F: V \dashrightarrow W$  é unha *aplicación birracional* se e só se existen abertos  $U \subset V$  e  $U' \subset W$  tales que ao restrinxir  $F$  a  $U$ ,  $F: U \rightarrow U'$  é un isomorfismo.

Un resultado importante neste sentido é que unha aplicación regular  $F: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^m$  é unha composición dunha inmersión de Veronese, unha proxección dende algún subespazo linear, e un automorfismo de  $\mathbb{P}^m$ . Este resultado aparece por primeira vez no Tratado de E. Bertini en [B23] e contemporaneamente en [RH77] no Capítulo II, Exercício 7.3. Demostrarase na última sección deste capítulo. A continuación expónse o que se entende por *proxección dende un punto* e por *inmersión de Veronese*.

#### 0.4.1. Proxeccións dende un punto

Considérase  $Q = (0 : 0 : \dots : 1) \in \mathbb{P}^n$  e o hiperplano  $H \equiv \mathbb{P}^{n-1}$  que non pasa por  $Q$ , definido por  $x_n = 0$ . Defínese a proxección con centro en  $Q$  como a aplicación:

$$\begin{aligned} \pi_Q: \quad \mathbb{P}^n \setminus \{Q\} &\longrightarrow H \equiv \mathbb{P}^{n-1} \\ X = (x_0 : x_1 : \dots : x_n) &\longmapsto \pi_Q(X) := (x_0 : x_1 : \dots : x_{n-1}) \end{aligned}$$

A aplicación proxección é unha aplicación racional e ademais, é un morfismo no aberto  $\mathbb{P}^n \setminus \{Q\}$ . Xeometricamente, asóciase a un punto  $X$  o punto de intersección da recta  $\overline{QX}$  co hiperplano  $H \subset \mathbb{P}^n$ . Nótese que se obtén unha correspondencia biunívoca entre os hiperplanos de  $\mathbb{P}^{n-1}$  e os

hiperplanos de  $\mathbb{P}^n$  que pasan por  $Q$ . Ao restrinxir  $\pi_Q$  a unha variedade  $V$ , atópase que as fibras desta proxección son agora finitas pois, nunha recta  $l$ , o conxunto alxébrico  $V \cap l$  é finito a non ser que  $l \subset V$ . A proxección  $\pi_Q(V) \subset \mathbb{P}^n$  é unha variedade alxébrica da mesma dimensión que  $V$ , e o seu grao é o de  $V$  menos o número de puntos de  $V$  na recta proxectante xenérica. Nótese que  $\pi_Q(V) \subset \mathbb{P}^n$  é un pechado xa que, as súas ecuacións, obtéñense das ecuacións de  $V$  máis as ecuacións da proxección.

Supóñase  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$  unha curva plana e  $\pi_{\mathcal{O}}: \mathbb{P}^2 \setminus \{Q\} \rightarrow H \equiv \mathbb{P}^1$  unha proxección con centro  $\mathcal{O} \notin \mathcal{C}$ . En tal caso, pódese definir o seguinte concepto:

**Definición 0.42** (Punto de ramificación). Sexa  $\pi_{\mathcal{O}}: \mathcal{C} \rightarrow H \equiv \mathbb{P}^1$  a restrición de  $\pi_{\mathcal{O}}$  á curva  $\mathcal{C}$ . Un punto liso  $P \in \mathcal{C}$  dise de *ramificación* se a recta proxectante  $\overline{\mathcal{O}P}$  é tanxente a  $\mathcal{C}$  no punto  $P$ .

### 0.4.2. Inmersións de Veronese

A inmersión de Veronese foi historicamente o modo no que os clásicos producían variedades alxébricas racionais. Defínirase unha aplicación regular en todo punto entre dous espazos proxectivos. Por unha banda, o espazo proxectivo numérico o habitual  $\mathbb{P}^n$ , e por outra banda, o espazo proxectivo  $(\mathbb{P}^N)^* := \mathbb{P}((\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_d)^*)$  dual do que parametriza as hipersuperficies de grao  $d$ . Se  $\mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]_d = \langle x_0^d, x_0^{d-1}x_1, \dots, x_n^d \rangle$ , defínese:

$$\begin{aligned} \nu_{n,d}: \quad \mathbb{P}^n &\longrightarrow (\mathbb{P}^N)^* := \mathbb{P}((\mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]_d)^*) \\ x = (x_0 : x_1 : \dots : x_n) &\longmapsto \nu_{n,d}(x) := [ev_x] = (x_0^d : x_0^{d-1}x_1 : \dots : x_n^d) \end{aligned}$$

onde  $ev_x: \mathbb{C}[X_0, X_1, \dots, X_n]_d \rightarrow \mathbb{C}$  é a forma linear que consiste en avaliar no punto  $x$  as hipersuperficies de grao  $d$ . Esta aplicación está ben definida en todo punto xa que sempre existe unha forma homoxénea de grao  $d$  que non se anula nun punto dado  $x$ , basta considerar o produto de  $d$  hiperplanos que non pasan polo punto  $x$ .

Restrinxindo ás cartas coordenadas, compróbase que esta aplicación é un isomorfismo local ou mergullo local no sentido da xeometría diferencial. É dicir, a aplicación é un homeomorfismo e a diferencial en todo punto é inxectiva.

A imaxe desta aplicación é unha variedade racional  $V_n^{d^n}$  de dimensión  $n$  e grao  $d^n$ . O grao de  $V_n^{d^n}$ , defínese como o número de puntos de  $V_n^{d^n}$  con un subespazo  $L_{N-n} \equiv \mathbb{P}^{N-n} = H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_n \subset \mathbb{P}^N$  xenérico intersección de  $n$  hiperplanos  $H_i$ . Agora ben, dado un hiperplano  $H \subset \mathbb{P}^N$ ,  $\nu^{-1}(H) \subset \mathbb{P}^n$  é unha hipersuperficie de grao  $d$  e as  $n$  hipersuperficies  $\nu^{-1}(H_i) \subset \mathbb{P}^n$  córtanse transversalmente en  $d^n$  puntos, polo Teorema de Bezout.

Os clásicos buscaban o que chamaban *boas proxeccións* de variedades  $Z \subset \mathbb{P}^n$ . Unha boa proxección era aquela proxección que permitía construír unha variedade birracional a partir

doutra dada. Isto significa que mediante  $\pi_O$ , dous abertos  $U \subset Z$  y  $V \subset \pi_O(Z)$  son isomorfos. Por tanto, débese verificar:

1. Para cada punto  $Q \in U$ , a recta  $\overline{OQ}$  tan só ten en común con  $U$ , o punto  $Q$ . Equivalentemente, dita recta non é bisecante a  $Z$  no aberto  $U$ .
2. Ademais a diferencial  $d_Q(\pi_O)$  é inxectiva, o que significa que o espazo tanxente  $T_Q(Z)$  se aplica inxectivamente no espazo proxeccionado  $\mathbb{P}^{n-1}$ . Xeometricamente estase a dicir que ningunha das rectas tanxentes a  $Z$  en  $Q$  é unha recta pasando por  $O$ .

Vese así que ser birracional é, en esencia, a existencia dun isomorfismo local. Cando a proxección define un isomorfismo, está definindo un isomorfismo local en todo punto  $Q \in Z$  da variedade. Así pois, o criterio de existencia de mergullos era algo moi coñecido para os clásicos, empregando proxeccións.

**Teorema 0.43** (Criterio de inmersión para variedades.). *Sexa  $V \subset \mathbb{P}^n$  unha variedade proxeccionada e  $Q \notin V$  un punto dende o cal se realiza unha proxección a un hiperplano  $\mathbb{P}^{n-1} \equiv H$  que non pasa por  $Q$ . A proxección é unha inmersión de  $V$  precisamente se:*

1. O punto  $Q$  non está en recta bisecante algunha á variedade  $V$ ; é dicir,  $Q \notin \text{Sec}(V)$ .
2. O punto  $Q$  non está en ningunha recta tanxente á variedade  $V$ ; é dicir,  $Q \notin \text{Tan}(V)$ .

### 0.4.3. Inmersións de Segre

No emprego dos métodos hiperespaciais na xeometría alxébrica, hai dous tipos de inmersións importantes. Unha delas é a *inmersión de Veronese*, e a outra é a *inmersión de Segre*.

**Definición 0.44.** Sexan  $\mathbb{P}^n$  con coordenadas homoxéneas  $\{x_0, \dots, x_n\}$  e  $\mathbb{P}^m$  con coordenadas homoxéneas  $\{y_0, \dots, y_m\}$ , dous espazos proxeccionados. Sendo  $N = (n+1)(m+1) - 1$ , chamarase *inmersión de Segre* ao morfismo definido do seguinte xeito:

$$s_{n,m}: \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m & \longrightarrow & \mathbb{P}^N \\ (x_0 : \dots : x_n) \times (y_0 : \dots : y_m) & \longmapsto & (x_0 y_0 : \dots : x_i y_j : \dots : x_n y_m) \end{array}$$

Considerando un polinomio bi-homoxéneo  $G(x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_m)$  nos dous conxuntos de variábeis  $\{x_0, \dots, x_n\}$  e  $\{y_0, \dots, y_m\}$ , mediante a inmersión de Segre, dito polinomio produce outro homoxéneo nas variables  $\{x_i y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ . A inmersión de Segre permite a construción de lugares xeométricos definidos paramétricamente, como por exemplo a *variedade secante* ou lugar xeométrico das rectas secantes a unha curva hiperespaciai  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^n$ .

## 0.5. Morfismos entre espazos proxectivos

Nesta sección próbase un resultado clásico importante que aparece xa no libro de E. Bertini [B23]. Contemporaneamente pódese ver en [RH77], no capítulo *II*, exercicio 7.3. Este resultado é moi empregado nos métodos da xeometría alxébrica hiperespacial, e de feito neste traballo utilizarase para probar a existencia do modelo liso dunha curva alxébrica. A resolución deste exercicio na linguaxe do [RH77], fai uso da teoría de feixes, mais co fin de evitala, expónse a seguinte demostración:

**Proposición 0.45.** *Sexa  $\varphi: \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^m$  un morfismo. Entón verifícase:*

1. *Ou ben  $\varphi(\mathbb{P}^n)$  é un punto; ou  $m \geq n$  e  $\dim(\varphi(\mathbb{P}^n)) = n$ .*
2. *No segundo caso,  $\varphi$  obtense como unha composición de :*
  - *Unha  $d$ -inmersión de Veronese para un único  $d \geq 1$  ben determinado.*
  - *Unha proxección linear,  $\mathbb{P}^N \setminus L \longrightarrow \mathbb{P}^m$ .*
  - *Unha proxectividade ou automorfismo,  $\mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^m$ .*

*Ademais, neste segundo caso, o morfismo  $\varphi: \mathbb{P}^n \longrightarrow \varphi(\mathbb{P}^n)$  ten fibras finitas.*

*Proba.* Como  $\varphi$  é unha aplicación pechada e  $\mathbb{P}^n$  é irreducible, a imaxe  $\varphi(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^m$  é un pechado irreducible. Polo tanto, ou ben  $\varphi(\mathbb{P}^n)$  é un punto, ou ben  $\varphi(\mathbb{P}^n)$  é un conxunto alxébrico irreducible (variedade alxébrica) de dimensión  $r$ .

Polo concepto topolóxico de dimensión e sendo  $n = \dim(\mathbb{P}^n)$ , existe unha cadea maximal de pechados irreducibles:

$$\{P\} = Y_1 \subsetneq Y_2 \subsetneq \dots \subsetneq Y_n = \mathbb{P}^n.$$

Aplicando  $\varphi$ , tense unha cadea de pechados irreducibles:

$$\{\varphi(P)\} = \varphi(Y_1) \subseteq \varphi(Y_2) \subseteq \dots \subseteq \varphi(Y_n) = \varphi(\mathbb{P}^n) \subseteq \mathbb{P}^m.$$

Nesta cadea pode acontecer que  $\varphi(Y_j) = \varphi(Y_{j+1})$ , para algún  $1 \leq j \leq n$ . En consecuencia,  $r \leq n$ . Tamén pode acontecer que para conseguir unha cadea maximal en  $\mathbb{P}^m$  se teñan que engadir pechados irreducibles no contido  $\varphi(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^m$ . Isto é,  $r \leq n \leq m$ . Para chegar a probar 1, débese chegar á seguinte igualdade  $r = n$ , para o que se probará que  $r \geq n$ .

Se  $H \subset \mathbb{P}^m$  é un hiperplano, logo unha variedade de codimensión 1; entón  $\varphi^{-1}(H)$  tamén é unha variedade de codimensión 1, xa que se fose  $\varphi^{-1}(H) = \mathbb{P}^n$ , daquela  $\varphi(\mathbb{P}^n) \subseteq H \cong \mathbb{P}^{m-1}$ , entón pódese supoñer que a imaxe de  $\varphi$  é non dexenerada, é dicir, non está contida en hiperplano algún. Polo tanto,  $\varphi^{-1}(H) \subset \mathbb{P}^n$  é unha hipersuperficie dun certo grao  $d$ .

Sendo  $r = \dim(\varphi(\mathbb{P}^n))$ , pola caracterización xeométrica do grao,  $r$  é o natural máis pequeno tal que a súa intersección cun subespazo xenérico de codimensión  $m - r - 1$  é baleira. Isto é, sexan  $H_0, \dots, H_r$  hiperplanos xenéricos en  $\mathbb{P}^m$ , tales que  $H_0 \cap H_1 \cap \dots \cap H_r \cap \varphi(\mathbb{P}^n) = \emptyset$ . Sexan  $Z_i := \varphi^{-1}(H_i) \subset \mathbb{P}^m$  hipersuperficies de grao  $d$ , entón  $Z_0 \cap Z_1 \cap \dots \cap Z_r = \emptyset$ . Pola dimensión da intersección de variedades nun espazo proxectivo tense

$$\dim(Z_0 \cap Z_1 \cap \dots \cap Z_r) = n - r - 1 \leq -1,$$

xa que, polo teorema de Bezout (*Teorema 0.34*), se  $\dim(Z_0 \cap Z_1 \cap \dots \cap Z_r) = n - r - 1 \geq 0$ , entón  $Z_0 \cap Z_1 \cap \dots \cap Z_r \neq \emptyset$ . Polo tanto,  $n - r - 1 \leq -1$ , é dicir  $r \geq n$ .

Para probar 2, utilízase que para o morfismo  $\varphi$ , sendo  $\varphi(\mathbb{P}^n) \subseteq \mathbb{P}^m$  non dexenerada, existe unha correspondencia 1-1 entre as seccións hiperplanas de  $\varphi(\mathbb{P}^n)$  e un certo sistema linear  $\Delta := |Z := \varphi^{-1}(H)|$  de hipersuperficies de grao  $d$  no espazo proxectivo  $\mathbb{P}^n$ . É dicir,  $\Delta := \mathbb{P}(W)$  é un subespazo linear proxectivo do sistema linear e completo de hipersuperficies de grao  $d$ ,  $\mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_d)$ . De aquí tense que existen polinomios homoxéneos de grao  $d$ , sexan  $\{F_0(x_0, \dots, x_n), \dots, F_m(x_0, \dots, x_n)\}$  tales que  $\varphi$  ven definida nun aberto denso  $U \subset \mathbb{P}^n$  como a aplicación dada por:

$$P \in U \subset \mathbb{P}^n \longrightarrow \varphi(P) = (F_0(P) : \dots : F_m(P))$$

Supóñase que  $\dim(\{F_0(x_0, \dots, x_n), \dots, F_m(x_0, \dots, x_n)\}) = k + 1$  e que a base do subespazo ven dada polos  $k + 1$  primeiros polinomios. Ampliase  $\{F_0(x_0, \dots, x_n), \dots, F_k(x_0, \dots, x_n)\}$  a unha base  $\{F_0(x_0, \dots, x_n), \dots, F_k(x_0, \dots, x_n), G_{k+1}(x_0, \dots, x_n), \dots, G_{N(d)}(x_0, \dots, x_n)\}$  do sistema linear e completo  $\mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_d)$ , sendo  $N(d) + 1 := \dim(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_d)$ .

Sexa  $\{y_0, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots, y_{N(d)}\}$  a base dual da base canónica en  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_d$  definida por  $\{t_0 = x_0^d, t_1 = x_0^{d-1}x_1, t_2 = x_0^{d-1}x_2, \dots, t_{N(d)} = x_n^d\}$ , e considérese o subespazo  $L \subset \mathbb{P}^{N(d)}$  definido polas ecuacións  $y_0 = y_1 = \dots = y_k = 0$ . Sexa  $\nu_{n,d}: \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^{N(d)}$  a inmersión de Veronese. Sexa  $\pi_L: \mathbb{P}^{N(d)} \setminus L \longrightarrow \mathbb{P}^k$  a proxección de centro o subespazo  $L$ . Sexa  $\mathbb{P}^k \longrightarrow \mathbb{P}^k$  a restrición da proxectividade de  $\mathbb{P}^{N(d)}$  inducida polo cambio da base canónica á base  $\{F_0(x_0, \dots, x_n), \dots, F_k(x_0, \dots, x_n), G_{k+1}(x_0, \dots, x_n), \dots, G_{N(d)}(x_0, \dots, x_n)\}$  no espazo  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_d$ . Lémbrese que os polinomios  $\{F_{k+1}(x_0, \dots, x_n), \dots, F_m(x_0, \dots, x_n)\}$  son combinación linear dos  $\{F_0(x_0, \dots, x_n), \dots, F_k(x_0, \dots, x_n)\}$ . Entón a composición que garante 2 na proposición é:

$$\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^{N(d)} \setminus L \rightarrow \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k \hookrightarrow \mathbb{P}^m$$

$$\underline{x} \mapsto (t_0 : \dots : t_{N(d)}) \mapsto (t_0 : \dots : t_k) \mapsto (F_0(\underline{x}) : \dots : F_k(\underline{x})) \mapsto (F_0(\underline{x}) : \dots : F_k(\underline{x}) : F_{k+1}(\underline{x}) : \dots : F_m(\underline{x}))$$

onde  $\underline{x} \equiv (x_0, \dots, x_n)$ . Finalmente, a proba de que o morfismo  $\varphi: \mathbb{P}^n \longrightarrow \varphi(\mathbb{P}^n)$  ten fibras finitas é consecuencia de que factoriza nunha inmersión de Veronese, que é un isomorfismo na imaxe, e nunha proxección con centro un subespazo, que sempre é de fibras finitas.

□

# Capítulo 1

## Existencia do modelo non singular dunha curva

Neste capítulo, demóstrase que toda curva alxébrica proxectiva ten un modelo birracional non singular. Comézase comentando, brevemente, un método hiperespacial para curvas planas que permite obter modelos non singulares. Finalmente, procédese coa demostración do resultado principal deste capítulo: O *teorema de Noether-Kronecker-Albanese*.

Dada unha curva alxébrica plana,  $\mathcal{C}' \subset \mathbb{P}^2$ , existe un modelo birracional  $\mathcal{C}$  que se consegue mediante *transformacións cuadráticas elementais* con unicamente singularidades ordinarias.<sup>1</sup> Mediante o concepto de *explosión do plano nun punto*, pódense resolver as singularidades ordinarias de forma sucesiva e, dado que estas son un número finito, obtense un modelo birracional non singular. Realmente, o concepto de explosión non aparece ata Bertini [B23], onde o uso dos métodos hiperespaciais toma forma na xeometría alxébrica.

Noether [MN83] xa demostrara que toda curva alxébrica posee un modelo birracional liso e tamén intuíra o proceso de explosión xa que, para curvas alxébricas planas, está implícito no uso da transformación cuadrática elemental no plano. A formulación do teorema debido a Noether e posteriormente redescuberto por Kronecker e Albanese [A24], ten moita relación coa formulación alxébrica de Brill-Noether do *teorema de Riemann-Roch*. En esencia, Riemann-Roch calcula para unha curva alxébrica plana a dimensión do espazo de formas ou trazas das curvas de grao  $r$  sobre a curva dada  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$ . No último capítulo do libro de W. Fulton [WF71] atópase unha explicación con maior detalle.

O que Riemann [BR57] estuda como teoría de funcións abelianas definidas sobre unha variedade complexa 1-dimensional; unha vez reformulado por Noether, non é máis que a teoría de

---

<sup>1</sup>Este proceso comentarase no Capítulo 3, ao introducir o xénero aritmético.

funcións alxébricas definidas sobre unha curva  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$ . En realidade, as únicas funcións holomorfas definidas en  $\mathbb{P}^1$  son as funcións constantes. Un pode construír funcións meromorfas ou o seu análogo alxébrico de funcións racionais sobre  $\mathcal{C}$ . Esencialmente unha función racional en  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$  vén dada por un recubrimento aberto,  $\mathcal{C} = \bigcup U_\alpha$ , xunto con pares  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ , onde  $\varphi_\alpha$  é un cociente de polinomios homoxéneos de igual grao,  $\varphi_\alpha = \frac{f_\alpha}{g_\alpha}$  e  $g_\alpha$  non identicamente nulo; de feito é inversible nalgún aberto contido en  $U_\alpha$ . En particular cando  $\beta \neq \alpha$ , nalgún aberto contido en  $U_\alpha \cap U_\beta$ , a aplicación  $\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta$ , é un isomorfismo. Ao considerar tales obxectos, tense o corpo de funcións racionais  $K(X)$  e cando  $X$  é irreducible, resulta que  $X$  e  $Y$  son *birracionais* precisamente se  $K(X) \simeq K(Y)$ .

Cando  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^n$  é unha curva, tense un corpo de funcións racionais,  $K(\mathcal{C})$ , e o feito de que  $\mathcal{C}$  teña dimensión topolóxica un, tradúcese en que nun aberto afín  $U \subset \mathbb{P}^n$ ,  $\mathcal{C} \cap U$  é unha curva afín con anel de coordenadas  $A[\mathcal{C} \cap U]$ , tendo dimensión de Krull<sup>2</sup> igual a un. Por definición de función racional, resulta que  $K(\mathcal{C})$  é o corpo de fraccións de  $A[\mathcal{C} \cap U]$  e a lisitude de  $\mathcal{C}$  en todo un aberto de  $\mathcal{C}$ , xunto co teorema da función inversa, permite concluír con que  $K(\mathcal{C})$  é unha extensión alxébrica de  $K(t)$ , sendo  $t$  unha variable e unha base de transcendencia. De feito, dada  $K(t) \subset K(\mathcal{C})$ , existe un elemento,  $u$ , chamado *primitivo*, que é alxébrico sobre  $K(t)$  e a relación de dependencia alxébrica  $F(t, u) = 0$  é a ecuación dunha curva plana afín cuxa complementación proxectiva ten un corpo de funcións  $K(u)$  e a curva  $F(t, u) = 0$  é birracional coa curva inicial  $\mathcal{C}$ .

Polo tanto, é o mesmo falar de clases de equivalencia birracional de curvas alxébricas planas, que de corpos de funcións  $K \supset \mathbb{C}$  con grao de transcendencia un. Dito isto, o seguinte resultado é fundamental:

**Teorema 1.1.** (de Noether-Kronecker [MN83]) *Toda curva alxébrica plana  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$ , ou con maior xeneralidade, para todo corpo de funcións  $K \supset \mathbb{C}$  con grao de transcendencia un; existe unha curva non singular  $X \subset \mathbb{P}^N$  tal que o seu corpo de funcións racionais é  $K(X) = K$ .*

Na sección 1.1 deste mesmo capítulo, expónse unha demostración o máis próxima posible á argumentación de Noether. Esta formulación segue a Albanese e utiliza un resultado fundamental na xeometría alxébrica, probado no capítulo anterior na *Proposición 0.45*:

► Todo morfismo proxectivo,  $\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^m$ , é a composición dun *encaixe de Veronese*,  $\nu_{n,d} : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^{N(d)}$ , xunto cunha proxección  $\mathbb{P}^{N(d)} \rightarrow \mathbb{P}^m$ , salvo unha proxectividade de  $\mathbb{P}^m$ .

En xeral, dado un espazo proxectivo  $\mathbb{P}^n$  con coordenadas homoxéneas  $\{x_0, \dots, x_n\}$  e sendo  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$  o anel de polinomios nesas variables, se  $\{F_\alpha(x_0, \dots, x_n)\}$  é unha familia de polinomios homoxéneos de graos  $d_\alpha$ , entón estas ecuacións  $F_\alpha(x_0, \dots, x_n) = 0$ , e en consecuencia o ideal  $\mathfrak{a}_X := \langle F_\alpha \rangle$ , definen un conxunto alxébrico proxectivo  $X \subset \mathbb{P}^n$ . Como  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$  é graduado, tamén  $\mathfrak{a}_X := \bigoplus_{r>0} \mathfrak{a}_X^{(r)}$  o é, sendo  $\mathfrak{a}_X^{(r)}$  as ecuacións ou polinomios homoxéneos de grao  $r$  que se

<sup>2</sup>A dimensión de Krull é o equivalente alxébrico do concepto de dimensión topolóxica dunha variedade.



anulan en  $X$ . En consecuencia, sendo  $S(X)_r := \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_r / \mathfrak{a}_X^{(r)}$ , este é o espazo vectorial das formas (polinomios homoxéneos) de grao  $r$  non identicamente nulas en  $X$  e o proxectivo  $\mathbb{P}(S(X)_r)$  é o espazo parametrizando as hipersuperficies de grao  $r$ , que deixan unha traza ou subconxunto alxébrico de codimensión igual a un en  $X$ . Tense un anel graduado,  $S(X) := \bigoplus_{r>0} S(X)_r$ , que se chama o *anel de coordenadas homoxéneas do conxunto alxébrico  $X$* , e nel, os números  $a_r(X) := \dim_{\mathbb{C}} S(X)_r$ , dan conta das propiedades do encaixe  $X \subset \mathbb{P}^n$ . O carácter proxectivo de  $S(X)$  é evidente. Por exemplo, se  $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^2$  é unha recta, tense  $S(X) = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2] / \langle x_0 \rangle$ , sendo  $x_0 = 0$  a ecuación da recta. Deste modo, o anel de coordenadas homoxéneas dunha recta é o dominio de factorización única  $\mathbb{C}[x_1, x_2]$ . Claramente, unha curva normal racional,  $\nu_d : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^d$ , sexa  $\mathcal{C}^d$ , é isomorfa a  $\mathbb{P}^1$  pero, como curva en  $\mathbb{P}^d$ , o seu anel de coordenadas non é isomorfo a  $\mathbb{C}[y_1, y_2]$ . Por exemplo,  $\nu_2 : \mathbb{P}^1 \rightarrow (t^2 : tu : u^2) \in \mathbb{P}^2$  é unha cónica lisa; é unha hipersuperficie en  $\mathbb{P}^2(x_0 : x_1 : x_2)$  de ecuación  $x_0x_2 = x_1^2$  e o anel de coordenadas é  $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2] / \langle x_0x_2 - x_1^2 \rangle$ , que non é un dominio de factorización única pois, considerando  $x_i = x_i \bmod (x_0x_2 - x_1^2)$ , o elemento  $x_0x_2 = x_1^2$  ten dous representantes distintos. Polo tanto, estudar o encaixe é, en certo modo, entender o xeito no que a curva modelo  $X \subset \mathbb{P}^n$ , é trazada polas hipersuperficies de grao dado, é dicir  $S(X)_r = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_r / \mathfrak{a}_X^{(r)}$ .

O feito fundamental é que as dimensións  $a_r(X) = \dim_{\mathbb{C}} S(X)_r$ , cando  $r \gg 0$ , aparecen como valores dun polinomio numérico. No caso dunha curva, dito polinomio, sexa  $p_X(r)$ , é tal que para  $r \gg 0$  entón,  $p_X(r) = a_r(X) = \dim_{\mathbb{C}} S(X)_r$  ten unha expresión en función de:

- O grao da curva  $X \subset \mathbb{P}^n$ .
- O grao  $r$  das hipersuperficies en cuestión.
- O xénero aritmético da curva  $X \subset \mathbb{P}^n$ , entendendo como tal o xénero dunha proxección xenérica (birracional) de  $X$ ,  $\mathcal{C}$ , ao plano. Probarase no Capítulo 3, que a curva  $\mathcal{C}$ , pode ser obtida unicamente con nodos ordinarios. Deste xeito, o xénero aritmético da curva, coñécese como:

$$p_a(\mathcal{C}) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2) - k$$

sendo  $d$  o grao de  $\mathcal{C}$  e  $k$  o número de nodos.

Este resultado é fundamental, de feito é parte da versión forte do *teorema de Riemann-Roch* (pódese ver no libro de Mumford [DM76]):

**Teorema 1.2** (Teorema de Riemann-Roch). *Se  $X \subset \mathbb{P}^n$  é unha curva alxébrica, entón para  $r \gg 0$*

$$p_X(r) = \deg(X) \cdot r + 1 - p_a(X) = \dim_{\mathbb{C}} S(X)_r$$

Onde  $p_a(X)$  é o xénero aritmético. De feito, pódese escoller  $r$  de tal forma que

$$\deg(X) \cdot r > 2p_a(X).$$

Quérese utilizar excepcionalmente este resultado para probar o *teorema de Noether-Kronecker-Albanese*. A argumentación que se utilizará débese a Albanese [A24]. É un exemplo explícito de como os clásicos razoaban inclusive con ideas contrapostas:

1. Se unha curva  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^n$  ten singularidades, é porque esta inmersión non é a correcta dentro da clase birracional da curva; dito doutro xeito,  $\mathcal{C}$  está proxectada dunha curva lisa,  $\tilde{\mathcal{C}}$ , nun espazo de dimensión superior.
2. Un pode atopar un modelo liso non dexenerado dunha curva  $\mathcal{C}$ , é dicir, o modelo liso de  $\mathcal{C}$ , sexa  $\tilde{\mathcal{C}}$ , tal que o subespazo proxectivo máis pequeno que contén a  $\tilde{\mathcal{C}}$ , é  $\mathbb{P}^n$ .

Isto último non debe levar a confusión co feito de que toda curva lisa  $X \subset \mathbb{P}^N$  pode ser proxectada isomorficamente en  $\mathbb{P}^3$  (tal proxección será estudada no Capítulo 2), e aquí está o punto de vista contraposto a 1. Fixado o xénero aritmético e se  $X \subset \mathbb{P}^N$  é singular, pódese proxectar dende os puntos singulares para obter unha curva  $X' \subset \mathbb{P}^N$  que chegará a ser lisa.

Darase unha demostración clásica de que toda curva alxébrica proxectiva  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^N$ , ten un modelo birracional non singular. Para ser autosuficientes, demóstrase practicamente a totalidade dos resultados e argumentos utilizados polos clásicos, empregando unha linguaxe contemporánea. Comézase vendo un resultado previo:

**Proposición 1.3.** *Sexa  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^d$  unha curva irreducible non dexenerada. Entón  $\deg(\mathcal{C}) \geq d$  e se  $\deg(\mathcal{C}) = d$ , entón  $\mathcal{C}$  é unha curva racional normal.*

*Proba.* Que  $\mathcal{C}$  sexa non dexenerada significa que  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^d$  non está contida en ningún hiperplano. Polo concepto de grao, este é o número de puntos distintos nos que un hiperplano xenérico (é dicir, non garda posición particular ca curva; por exemplo, que non é tanxente nin pasa por puntos singulares) corta á curva  $\mathcal{C}$ . Tamén se pode interpretar como o número de puntos contados con multiplicidade, nos que un hiperplano calquera corta a  $\mathcal{C}$ . Polo cal, sendo  $\mathcal{C}$  non dexenerada, para todo hiperplano  $H \subset \mathbb{P}^d$ ,  $\mathcal{C} \cap H$  é un número finito de puntos. De feito, calesquera  $d$  puntos distintos  $P_1, \dots, P_d$  de  $\mathcal{C}$ , xeran un hiperplano  $H \simeq \mathbb{P}^{d-1}$ . De non ser así, xerarían un subespazo linear  $L \subset H$ , contido nun hiperplano. De forma explícita, sexa  $L = \langle P_1, \dots, P_d \rangle$  onde  $\dim L = k < d$ . Pódese escoller  $P'_{k+1}, \dots, P'_d$  tales que  $P'_{k+1} \notin L$  e  $P'_{k+i} \notin L + \langle P'_{k+1}, \dots, P'_{k+i-1} \rangle$  con  $i = 2, \dots, d$ . Sexa  $I = \langle P'_{k+1}, \dots, P'_d \rangle$  así,  $H = L + I$  é un hiperplano pois  $L$  e  $I$  son disxuntos, logo  $\dim(H) = \dim(L) + \dim(I) = k + d - k - 1 = d - 1$ . Agora ben,  $L$  e  $\mathcal{C}$  teñen polo menos  $d$  puntos comúns e  $\mathcal{C}$  e  $I$  comparten como pouco  $d - k$  puntos. Deste modo, como  $k < d$  ( $\Rightarrow -k > -d$ ), tense que  $\#(H \cap \mathcal{C}) \geq d + d - k > d$ . Agora ben, polo concepto de grao e polo teorema de Bezout, necesariamente  $H$  contén unha compoñente conexas de  $\mathcal{C}$  e por ser esta irreducible entón  $H$  contén a  $\mathcal{C}$ , en contradición coa hipótese de que  $\mathcal{C}$  é non dexenerada. Acábase

de probar que calquera  $d$  puntos de  $\mathcal{C}$ , xeran un hiperplano. Necesariamente, este cortará a  $\mathcal{C}$  en polo menos  $d$  puntos. En conclusión  $\deg(\mathcal{C}) \geq d$ .

Para a segunda parte, é dicir, se  $\deg(\mathcal{C}) = d$ , entón todo hiperplano  $H \subset \mathbb{P}^d$  corta a  $\mathcal{C}$  en  $d$  puntos contados con multiplicidade mais, sendo o hiperplano xenérico, cortará en  $d$  puntos distintos. Fíxase un subespazo linear  $\Lambda \subset \mathbb{P}^d$  de codimensión dous.  $\Lambda = \langle \{P_1, \dots, P_{d-1}\} \rangle$  xenerado por  $d - 1$  puntos xenéricos sobre a curva  $\mathcal{C}$ ; entón, os hiperplanos  $H$  contendo a  $\Lambda$  son da forma  $H = \Lambda + P_H = \langle \{P_1, \dots, P_{d-1}; P_H\} \rangle$ . Cada un destes hiperplanos  $H$  corta á curva  $\mathcal{C}$  nun punto máis, denotado por  $P_H$ , que depende do hiperplano. Estes hiperplanos son un feixe linear; isto é, estan en correspondencia biunívoca cunha recta  $\mathbb{P}^1$ . Tense logo unha parametrización da curva da forma:  $[H] \in \mathbb{P}^1 \longrightarrow P_H \in \mathcal{C}$ , e polo tanto a curva é racional.  $\square$

Reformúlase a continuación o resultado anterior:

**Proposición 1.4.** *Unha curva  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^d$ , irreducible e non dexenerada, satisfai:*

$$\deg(\mathcal{C}) \geq d - \dim(\mathcal{C}) + 1 = d$$

## 1.1. Teorema de Noether-Kronecker-Albanese

**Teorema 1.5** (de Noether-Kronecker, 1871 (Albanese 1924)). *Toda curva alxébrica proactiva  $X \subset \mathbb{P}^n$  ten un modelo birracional non singular.*

*Proba.* Sexa a curva  $X \subset \mathbb{P}^n$ . Utilizaranse os encaixes de Veronese en  $\mathbb{P}^n$ , definidos mediante os sistemas lineares e completos de hipersuperficies de grao  $r$ . É dicir, considéranse as variables  $x_0, \dots, x_n$  e para cada  $\alpha \equiv (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  tal que  $\alpha_0 + \dots + \alpha_n = r$ , fórmase o monomio  $x_0^{\alpha_0} \dots x_n^{\alpha_n}$ . Entón  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_r = \langle x_0^{\alpha_0} \dots x_n^{\alpha_n} : \alpha_0 + \dots + \alpha_n = r \rangle$ . Sexa:

$$N(r) := \binom{r+n}{n} = \dim \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_r = \dim \langle x_0^{\alpha_0} \dots x_n^{\alpha_n} : \alpha_0 + \dots + \alpha_n = r \rangle$$

Constrúese o morfismo:

$$\begin{aligned} \nu_{n,r}: \quad \mathbb{P}^n &\longrightarrow \mathbb{P}^{N(r)} \\ (x_0 : \dots : x_n) &\longmapsto (\dots : x_0^{\alpha_0} \dots x_n^{\alpha_n} : \dots) \end{aligned}$$

onde os monomios están ordenados lexicograficamente. Ademais, tense a igualdade  $\mathbb{P}^{N(r)} = \mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_r^*)$  e  $\nu_{n,r}$  defínese enviando o punto  $P = (P_0 : \dots : P_n)$  en  $[ev_P]$  onde

$$\begin{aligned} ev_P: \quad \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_r &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x_0^{\alpha_0} \dots x_n^{\alpha_n}) &\longmapsto ev_P(x_0^{\alpha_0} \dots x_n^{\alpha_n}) = (x_0(P)^{\alpha_0} \dots x_n(P)^{\alpha_n}). \end{aligned}$$

Ocorre que  $\nu_{n,r}: \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^{N(r)}$  é unha mergullo pechado ou, o que é o mesmo, un encaixe ou un isomorfismo regular na imaxe,  $\nu_{n,r}(X) = X(0) \subset \mathbb{P}^{N(r)}$ .

No espazo vectorial  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_r$ , denotarase por  $y_\alpha := y_{\alpha_0 \dots \alpha_n}$  a coordenada dual correspondente ao monomio  $(x_0^{\alpha_0} \dots x_n^{\alpha_n})$ , de forma que se  $\{y_\alpha = y_{\alpha_0 \dots \alpha_n}\}$  son coordenadas homoxéneas en  $\mathbb{P}^{N(r)}$ , mediante o encaixe de Veronese  $\nu_{n,r}: \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^{N(r)}$ , tense unha correspondencia biunívoca entre hiperplanos en  $\mathbb{P}^{N(r)}$ , con ecuación  $\sum c_\alpha y_\alpha = 0$ , e as hipersuperficies  $\sum c_\alpha x_0^{\alpha_0} \dots x_n^{\alpha_n} = 0$  en  $\mathbb{P}^n$ . En particular, dada  $X \subset \mathbb{P}^n$  e sendo  $X(0) = \nu_{n,r}(X)$ , a súa imaxe isomorfa en  $\mathbb{P}^{N(r)}$ , tense unha correspondencia biunívoca entre:

1. Hiperplanos  $\sum c_\alpha y_\alpha = 0$  en  $\mathbb{P}^{N(r)}$  contendo a  $X(0) \subset \mathbb{P}^{N(r)}$ .
2. Hipersuperficies  $\sum c_\alpha x_0^{\alpha_0} \dots x_n^{\alpha_n}$  de grao  $r$ , contendo á curva orixinal.

Sexa  $L \subset \mathbb{P}^{N(r)}$  o subespazo linear máis pequeno que contén a  $X(0)$ .  $L$  é a proxectivización do subespazo definido polas trazas en  $X$  definidas polas hipersuperficies  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_r / \mathfrak{a}_X^r$ . É dicir:

$$\dim(L) + 1 = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_r / \mathfrak{a}_X^r = p_X(r) = r \cdot \deg(X) + 1 - p_a(X),$$

onde a última igualdade vén de aplicar o *teorema de Riemann-Roch* (*Teorema 1.2*). Por ser  $\nu_{n,r}$  un isomorfismo, claramente  $p_a(X) = p_a(X(0))$  e, pola caracterización do grao, o grao de  $X(0)$  é o número de puntos de intersección de  $X(0)$  cun hiperplano xenérico de  $\mathbb{P}^{N(r)}$  e polo tanto coas solucións de  $\sum c_\alpha y_\alpha = 0$ , sendo  $c_\alpha$  xenéricos. Máis aínda:

$$\begin{aligned} \deg(X(0)) &= \# \left( X(0) \cap Z \left( \sum_{\alpha} c_{\alpha} y_{\alpha} \right) \right) \\ &= \# \left( X \cap Z \left( \sum_{\alpha} c_{\alpha} x_0^{\alpha_0} \dots x_n^{\alpha_n} \right) \right) \\ &= \deg(X) \cdot \deg \left( \sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha} \right) \end{aligned}$$

onde a última igualdade se obtén ao aplicar o teorema de Bezout (*Teorema 0.34*) sendo  $x^{\alpha} \equiv x_0^{\alpha_0} \dots x_n^{\alpha_n}$ . Así, se  $\deg(X) = d$  entón:

$$\deg(X(0)) = r \cdot d$$

Recórdese que

$$\dim(L) + 1 = p_X(r) = r \cdot \deg(X) + 1 - p_a(X) = r \cdot d + 1 - p_a(X),$$

logo,

$$\dim(L) = r \cdot d - p_a(X).$$

É dicir, tense un modelo  $X(0) \subset \mathbb{P}^{r \cdot d - p_a(X)} \simeq L$  e  $X(0)$  ten grao  $r \cdot d$ . Por construción  $X(0)$  é non dexenerado en  $L$  e pódese aplicar a *Proposición 1.3*:

$$\deg(X(0)) \geq r \cdot d - p_a(X)$$

En particular, como  $\text{deg}(X(0)) = r \cdot d$ , demóstrase que o xénero aritmético é non negativo ( $p_a(X) \geq 0$ ). Deseguido, argumentarase que tomando  $r \gg 0$  se pode conseguir que o modelo  $X(0)$  sexa non singular. En efecto, supóñase que  $X(0)$  ten un punto singular,  $x_0 \in X(0)$ . Por definición de punto singular, existe un natural,  $\text{mult}_{x_0}(X(0)) \geq 2$ , tal que toda recta pasando por tal punto, faino con multiplicidade maior ou igual a  $\text{mult}_{x_0}(X(0))$  e dase a igualdade para a recta xenérica. As rectas que o fan con multiplicidade maior estricta forman o cono tanxente a  $X(0)$  en  $x_0$ . O importante é que de todas as rectas pasando por  $x_0$  as rectas xenéricas cortan en  $x_0$  con multiplicidade exactamente  $\text{mult}_{x_0}(X(0))$ . Estas rectas pasando por  $x_0$ , son as rectas proxectantes da proxección de centro  $x_0$  sobre un hiperplano  $H = \mathbb{P}^{N(r)-1}$  que non pasa polo punto  $x_0$ ,  $\pi: \mathbb{P}^{N(r)} - \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{P}^{N(r)-1}$ . Nótese que se está a proxeccionar dende un punto singular. Estúdase a proxección de  $X(0)$  no hiperplano.

$$\begin{aligned} \pi: \mathbb{P}^{N(r)} - \{x_0\} &\longrightarrow \mathbb{P}^{N(r)-1} \\ X(0) - \{x_0\} &\longmapsto X(1) \end{aligned}$$

Agora verase como cambia o grao de  $X(1)$  e como o fai o xénero aritmético, ao proxeccionar dende un punto singular. Primeiro estúdase o caso dunha proxección dende un punto que non está na curva.

Nunha proxección  $\pi': \mathbb{P}^N - \{x\} \longrightarrow \mathbb{P}^{N-1}$ , existe unha correspondencia biunívoca entre os hiperplanos en  $\mathbb{P}^{N-1}$  e os hiperplanos en  $\mathbb{P}^N$  pasando por  $x$ . En efecto, dado  $H \subset \mathbb{P}^{N-1}$ , como  $x \notin \mathbb{P}^{N-1}$  entón,  $\langle H, x \rangle$  é un hiperplano en  $\mathbb{P}^N$  pasando por  $x$ . Reciprocamente, se  $H' \subset \mathbb{P}^N$  é un hiperplano pasando por  $x$ , entón é posible escribir  $H'$  como segue:  $H' = \langle H'', x \rangle$  sendo  $H''$  un hiperplano en  $\mathbb{P}^{N-1}$ . Como  $x \notin \mathbb{P}^{N-1}$ ,  $H' \cap \mathbb{P}^{N-1} = H''$ , que será un hiperplano en  $\mathbb{P}^{N-1}$ .

Na proxección  $\pi': \mathbb{P}^N - \{x\} \longrightarrow \mathbb{P}^{N-1}$ , suponse agora que  $x \notin X$ , sendo  $\mathbb{P}^{N-1}$  un hiperplano xenérico que non contén ao punto  $x$ . Se  $X' \subset \mathbb{P}^{N-1}$  é a curva proxeccionada e  $H \subset \mathbb{P}^{N-1}$  é un hiperplano xenérico, entón  $H \cap X'$  é un conxunto finito de puntos de cardinalidade igual a  $d = \text{deg}(X')$ . Agora ben, cada un dos hiperplanos  $H$  proporciona un hiperplano  $\langle H, x \rangle \subset \mathbb{P}^N$  e  $X \cap \langle H, x \rangle$  consiste en  $\text{deg}(X)$  puntos contados con multiplicidade. Se  $H \cap X' = \{y_1, \dots, y_d\}$ , claramente, os  $\text{deg}(X)$  puntos de  $X$  en  $X \cap \langle H, x \rangle$  están sobre as rectas proxectantes  $\overline{xy_1} \cup \overline{xy_2} \cup \dots \cup \overline{xy_d}$ .

Polo *principio de continuidade de Poncelet*, o número de puntos contados con multiplicidade sobre a recta  $\overline{xy_i}$  é constante. Este número de puntos é o grao do morfismo proxección  $\pi'$  e así:

$$\text{deg}(X) = \text{deg}(\pi') \cdot \text{deg}(X'), \text{ con } \pi': \mathbb{P}^N - \{x\} \longrightarrow \mathbb{P}^{N-1},$$

cando se toma  $\text{deg}(\pi') = \sum_{z_j \in \overline{xy_i}} \text{mult}_{z_j}(\overline{xy_i}, X)$ , onde  $\text{mult}_{z_j}(\overline{xy_i}, X)$  denota o número de intersección co que a recta  $\overline{xy_i}$  corta a curva  $X$  no punto  $z_j$ . Por exemplo, cando  $z_j \in X$  é un punto liso,  $\text{mult}_{z_j}(\overline{xy_i}, X) = 1$  e toda recta xeral pasando por  $z_j$  corta a  $X$  en  $z_j$  con multiplicidade un.

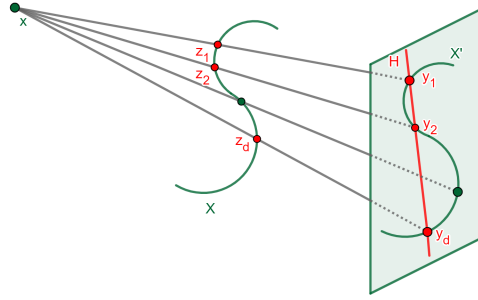


Figura 1.1: Proxección de  $X \subset \mathbb{P}^n$  dende  $x$  a  $\mathbb{P}^{N-1} \not\ni x$ .

Para ser ilustrativo, se  $X$  é unha curva, dicir que  $\text{mult}_{z_j}(\overline{xy_i}, X) \geq 2$ , significa que a recta  $\overline{xy_i}$  é tanxente á curva  $X$  no punto  $z_j$ . Isto ocořrelle á recta tanxente nun punto liso  $z_j \in X$ , mais tamén a calquera recta pasando por  $z_j \in X$  cando este é un punto singular.

Cando  $x$  é un punto xenérico respecto da curva  $X$  ou, o que é o mesmo, se  $x$  non está no pechado definido polas tanxentes a  $X$  nun punto liso e tamén multitanxentes e tanxentes a un punto singular; ocorrerá que calquera recta pasando por  $x$  corta a  $X$  nun único punto con multiplicidade un. Deste modo, lógrase que a proxección sexa un isomorfismo entre  $X$  e  $X' \subset \mathbb{P}^3$ . Proxectando a  $\mathbb{P}^2$  a mellor situación que se pode chegar a obter é conseguir un punto  $x$  polo cal hai ao sumo un número finito de bisecantes propias tales que, ao proxectar a recta, as tanxentes en cada un dos puntos de corte son distintas. En tal caso, dirase que tales bisecantes son *bisecantes estacionarias*.

Deseguido analízase que ocorre cando  $x \in X$  é un punto liso e que ocorre cando  $x \in X$  é un punto singular, na proxección con centro  $x$ :

► Se o punto  $x \in X$  é liso, toda recta proxectante pasando por  $x$  corta con multiplicidade un e ao facer a proxección  $\pi: X - \{x\} \rightarrow \overline{\pi(X - \{x\})} = X'$ , obtense unha curva,  $X'$ , de grao exactamente unha unidade menor que o grao da curva orixinal,  $X$ .

► No caso de ser  $x \in X$  un punto singular (de orde dous), entón  $\text{mult}_x(X) \geq 2$ , e agora a recta xenérica pasa por  $x$  con multiplicidade exactamente dous e hai un número finito de rectas cortando cunha multiplicidade maior estrita a dous. De forma análoga, se  $\text{mult}_x(X) \geq k$  (o punto é singular de orde  $k$ ), entón a recta xenérica pasando por  $x$  corta a  $X$  con multiplicidade de intersección exactamente  $k$  e un número finito delas corta con multiplicidade maior estrita a  $k$  ( $\text{mult}_x(X) > k$ ).

Ao proxectar dende un punto singular de orde  $k$  mediante  $\pi: X - \{x\} \rightarrow \overline{\pi(X - \{x\})} = X'$  o grao da curva  $X'$  baixa en  $\text{mult}_x(X) = k$  con respecto ao grao de  $X$ . Tense así a seguinte relación:

$$\text{deg}(X) = \text{deg}(\pi) \cdot \text{deg}(X') + \text{mult}_x(X) \geq \text{deg}(\pi) \cdot \text{deg}(X') + 2$$

A continuación, dado que o polinomio de Hilbert,  $p_X(r)$ , ten un valor dado por (Ver *Teorema 1.2*):

$$p_X(r) = r \cdot \deg(X) + 1 - p_a(X),$$

Vese que o feito de poder escoller  $r \gg 0$  para un encaixe de Veronese,  $\nu_{n,r}: X \subset \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^{N(r)}$ , obtendo unha imaxe isomorfa  $X(0) := \nu_{n,r}(X)$ ; permite concluír que de ser  $X(0)$  singular, proxectando dende o punto singular  $x_0 \in X(0)$ , é posible conseguir:

1. A proxección  $\pi_{x_0}: X(0) - \{x_0\} \rightarrow X(1) := \overline{\pi_0(X(0) - \{x_0\})}$  é birracional.
2. Nun número finito de pasos chégase a que  $X(k)$  é lisa.

O punto esencial é entón garantir que isto ocorre cando  $r \gg 0$ . Quérese demostrar por redución ao absurdo e, para chegar á contradición, exprésase a condición  $r \gg 0$ , en función de  $p_a(X)$ .

Reenúnciase o resultado poñendo condicións técnicas sobre como debe ser  $r \gg 0$ :

**Lema 1.6.** *Sexa  $d = \deg(X)$  e sexa  $r \gg 0$  tal que*

$$\dim S(X)_r = p_X(r) = r \cdot d + 1 - p_a(X)$$

*e supóñase tamén que*

$$r \cdot d > 2 \cdot p_a(X)$$

*Entón segue a ser certo (1) e (2)*

*Proba. (1)* Probarase que  $\pi_{x_0}: X(0) - \{x_0\} \rightarrow X(1)$  é birracional, ou o que é o mesmo que  $\deg(\pi_{x_0}) = 1$ . Supóñase que  $\deg(\pi_{x_0}) \geq 2$ . Polo antes razoado:

$$\deg(X(0)) \geq \deg(\pi_{x_0})\deg(X(1)) + 2 \geq 2\deg(X(1)) + 2$$

Reescribindo o anterior,

$$\deg(X(0)) - 2 \geq 2\deg(X(1)) \Rightarrow \deg(X(1)) \leq \frac{\deg(X(0)) - 2}{2}$$

Agora, con  $r \gg 0$ , utilízase o encaixe de Veronese de forma que o teorema de Bezout garante que  $\deg(X(0)) = r \cdot d$ , é dicir:

$$\deg(X(1)) \leq \frac{r \cdot d - 2}{2} \tag{1.1}$$

Agora a cuestión está en chegar a unha contradición co grao de  $X(1)$  tendo en conta que  $X(0) \subset \mathbb{P}^{N(r)} = \mathbb{P}^{r \cdot d - p_a(X)}$  e que  $X(1) \subset \mathbb{P}^{r \cdot d - p_a(X) - 1}$ . Aplícase a *Proposición 1.3* :

$$\deg(X(1)) \geq r \cdot d - p_a(X) - 1$$

Como se considera que  $r \gg 0$ , pódese aplicar que  $r \cdot d > 2 \cdot p_a(X)$  e tense que

$$\frac{r \cdot d - 2}{2} < r \cdot d - p_a(X) - 1 \quad (1.2)$$

En efecto, no caso contrario:

$$\frac{r \cdot d - 2}{2} \geq r \cdot d - 1 - p_a(X) \Rightarrow r \cdot d - 2 \geq 2r \cdot d - 2 - 2p_a(X) \Rightarrow r \cdot d \leq 2p_a(X)$$

en contradición coa hipótese de que  $r \cdot d > 2p_a(X)$ . En conclusión, por (1.1) e por (1.2) :

$$\deg(X(1)) \leq \frac{r \cdot d - 2}{2} < r \cdot d - p_a(X) - 1$$

chegando así a unha contradición pois  $\deg(X(1)) \geq r \cdot d - p_a(X) - 1$  e  $\deg(X(1)) < r \cdot d - p_a(X) - 1$  o cal non é posible. En consecuencia, necesariamente,  $\deg(\pi_{x_0}) = 1$  ou o que é o mesmo,  $\pi_{x_0}: X(0) - \{x_0\} \rightarrow X(1)$  é birracional.

(2) Por ser  $\pi_{x_0}: X(0) - \{x_0\} \rightarrow X(1)$  birracional,  $X(1)$  é unha curva de xénero aritmético  $p_a(X)$ , sobre o cal se volve a aplicar o mesmo argumento que para  $X(0)$  no caso de non ser lisa. Se, reiteradamente, se ten que  $X(i)$  ten un punto singular,  $x_i$ , considéranse as proxeccións dende ditos puntos:

$$X(0) \subset \mathbb{P}^{r \cdot d - p_a(X)} \xrightarrow{\pi_{x_0}} X(1) \subset \mathbb{P}^{r \cdot d - p_a(X) - 1} \xrightarrow{\pi_{x_1}} \dots \xrightarrow{\pi_{x_{k-2}}} X(k-1) \xrightarrow{\pi_{x_{k-1}}} X(k) \subset \mathbb{P}^{r \cdot d - p_a(X) - k}$$

Como se está a proxectar dende un punto singular, sendo cada  $\pi_{x_i}$  birracional:

$$\begin{aligned} \deg(X(k)) &= \deg(X(k-1)) - \text{mult}_{x_{k-2}}(X(k-2)) \\ &\leq \deg(X(k-1)) - 2 = \deg(X(k-2)) - \text{mult}_{x_{k-3}}(X(k-3)) - 2 \\ &\leq \deg(X(k-2)) - 2 - 2 = \deg(X(k-3)) - \text{mult}_{x_{k-4}}(X(k-4)) - 2 \cdot 2 \quad (1.3) \\ &\dots \\ &\leq \deg(X(0)) - 2k = r \cdot d - 2k. \end{aligned}$$

Ademais,  $X(k) \subset \mathbb{P}^{r \cdot d - p_a(X) - k}$  e aplicando novamente a *Proposición 1.3*

$$\deg(X(k)) \geq r \cdot d - p_a(X) - k$$

e xunto con (1.3),

$$r \cdot d - p_a(X) - k \leq \deg(X(k)) \leq r \cdot d - 2k \implies k \leq p_a(X)$$

Polo tanto, despois de como moito  $p_a(X)$  proxeccións, conséguese un modelo non singular.  $\square$



## Capítulo 2

# Proxección dunha curva a $\mathbb{P}^3$ , $\mathbb{P}^2$ e $\mathbb{P}^1$

Neste capítulo, estudaranse as proxeccións dunha curva  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^n$  ao espazo proxeectivo ( $\mathbb{P}^3$ ), ao plano proxeectivo ( $\mathbb{P}^2$ ) e por último á recta proxeectiva ( $\mathbb{P}^1$ ).

### 2.1. Proxección dunha curva lisa de $\mathbb{P}^n$ a $\mathbb{P}^3$ e a $\mathbb{P}^2$

Sexa  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^n$  unha curva alxébrica lisa e estúdase a existencia dun punto  $x \in \mathbb{P}^n$  tal que:

1.  $x \notin \bigcup_{u \in \mathcal{C}} T_u(\mathcal{C})$ ; onde  $T_u(\mathcal{C})$  é a recta tanxente a  $\mathcal{C}$  en  $u \in \mathcal{C}$ .
2.  $x$  unicamente está nun número finito de bisecantes  $\overline{u_i v_i}$ ;  $1 \leq i \leq k$
3. Para todo  $i$  con  $1 \leq i \leq k$ ,  $\overline{u_i v_i}$  non é trisecante.
4. Para todo  $i$  con  $1 \leq i \leq k$ , os planos  $\overline{x T_{u_i}(\mathcal{C})}$  e  $\overline{x T_{v_i}(\mathcal{C})}$  son distintos, equivalentemente, a bisecante é non estacionaria.

Nótese que se  $n = 3$  e tal punto  $x$  existe, ao considerar a restrición da curva  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^3$ , para a proxección ao plano,  $p_x: \mathbb{P}^3 - \{x\} \rightarrow \mathbb{P}^2$ , esta proporciona un morfismo,  $p_x: \mathcal{C} \rightarrow p_x(\mathcal{C}) := \mathcal{C}' \subset \mathbb{P}^2$ , onde  $\mathcal{C}'$  é unha curva plana. Por 2. tense que  $\mathcal{C} - \{u_1, \dots, u_k\} \rightarrow \mathcal{C}' - \{p_x(u_1), \dots, p_x(u_k)\}$  é un morfismo 1-1 e por 1. aplica a recta tanxente  $T_u(\mathcal{C})$  isomorficamente na recta tanxente  $T_{u'}(\mathcal{C}')$ , onde  $u' = p_x(u)$ . Polo tanto,  $\mathcal{C} - \{u_1, \dots, u_k\} \rightarrow \mathcal{C}' - \{p_x(u_1), \dots, p_x(u_k)\}$  ten diferencial inxectiva e tamén é biunívoca. Polo teorema da función inversa no caso analítico complexo, existen dous abertos isomorfos:  $U = \mathcal{C} - \{u_1, \dots, u_k\}$  e  $U' = \mathcal{C}' - \{p_x(u_1), \dots, p_x(u_k)\}$ . Por 3. para cada  $i$  con  $1 \leq i \leq k$ , a recta  $\overline{u_i v_i}$  é bisecante. Isto implica que se  $w_i = p_x(u_i) = p_x(v_i) = \overline{u_i v_i} \cap \mathbb{P}^2$ , atópase que  $p_x^{-1}(w_i) = \{u_i, v_i\}$ . A propiedade 4. establece que as rectas tanxentes  $T_{u_i}(\mathcal{C})$  e  $T_{v_i}(\mathcal{C})$  son proxectadas en rectas distintas pasando por  $w_i$ . Ademais, como  $u_i, v_i \in \mathcal{C}$  son puntos lisos,

existen veciñanzas  $\varepsilon_{u_i}, \varepsilon_{v_i}$  e aplicacións analíticas  $\varphi_i, \psi_i$  tales que:

$$\begin{aligned} \varphi_i: \Delta_i &\longrightarrow \varepsilon_{u_i} \cap \mathcal{C} & \psi_i: \Delta_i &\longrightarrow \varepsilon_{v_i} \cap \mathcal{C} \\ 0 &\longmapsto \varphi_i(0) = u_i & 0 &\longmapsto \psi_i(0) = v_i \end{aligned}$$

son biholomorfas. Compoñendo coa proxección  $p_x$  séguese a ter aplicacións biholomorfas:

$$\begin{aligned} p_x \circ \varphi_i: \Delta_i &\xrightarrow{\varphi_i} \varepsilon_{u_i} \cap \mathcal{C} \xrightarrow{p_x} \varepsilon_{w_i} \cap \mathcal{C}' \\ p_x \circ \psi_i: \Delta_i &\xrightarrow{\psi_i} \varepsilon_{v_i} \cap \mathcal{C} \xrightarrow{p_x} \tilde{\varepsilon}_{w_i} \cap \mathcal{C}' \end{aligned}$$

de forma que  $(\varepsilon_{w_i} \cap \mathcal{C}') \cap (\tilde{\varepsilon}_{w_i} \cap \mathcal{C}') = \{w_i\}$  e

$$\begin{aligned} T_{w_i}(\varepsilon_{w_i} \cap \mathcal{C}') &\equiv \text{imaxe mediante } p_x \circ \varphi_i \text{ de } T_{u_i}(\mathcal{C}) \\ T_{w_i}(\tilde{\varepsilon}_{w_i} \cap \mathcal{C}') &\equiv \text{imaxe mediante } p_x \circ \psi_i \text{ de } T_{v_i}(\mathcal{C}) \end{aligned}$$

É dicir, 3. afirma que  $w_i \in \tilde{\mathcal{C}}$  é un punto singular de orde exactamente dous e, por 4., tal punto é un nodo pois ten tanxentes distintas (nunca pode ser unha cúspide). O feito de que a imaxe de  $p_x \circ \varphi_i, p_x \circ \psi_i$  sexan dúas *ramas analíticas* ao redor de  $w_i$ , tamén é consecuencia de 1. De feito, unha veciñanza o suficientemente pequena de  $w_i$ , é imaxe de dúas veciñanzas de  $u_i$  e  $v_i$  en  $\mathcal{C}$ .

Quérese probar que un tal punto  $x \in \mathbb{P}^3$  existe e que o conxunto formado por tales puntos é un aberto na topoloxía de Zariski en  $\mathbb{P}^3$ , complementario dun pechado,  $\mathcal{Z} \subset \mathbb{P}^3$ , definido por ecuacións polinómicas. Para iso, considérase o produto cartesiano  $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$  como un conxunto de parámetros; se  $(u, v) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$  onde  $u \neq v$ , a recta  $\overline{uv}$  é bisecante. No caso de que  $u = v$ , pódese identificar vía o morfismo diagonal,

$$\begin{aligned} \Delta: \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C} \\ u &\longmapsto (u, u) \end{aligned}$$

coa recta tanxente  $T_u(\mathcal{C})$ . Deste xeito,  $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \setminus \Delta$ , parametriza as rectas secantes a  $\mathcal{C}$  e  $\Delta \subset \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ , parametriza as rectas tanxentes. Considérese:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n \times (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \supset I &:= \{(P, (u, v)) \in \mathbb{P}^n \times (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) : P \in \overline{uv}\} \\ &= \{(P, (u, v)) \in \mathbb{P}^n \times (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) : P, u \text{ e } v \text{ están aliñados}\} \\ &= \{(P, (u, v)) \in \mathbb{P}^n \times (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) : \text{rang}(P; u; v) \leq 2\}. \end{aligned}$$

$I$  coñécese como *variedade de incidencia*. A condición  $\text{rang}(P; u; v) \leq 2$  está definida por ecuacións alxébricas: considerando  $(P; u; v) \in \mathcal{M}_{(n+1) \times 3}$  a matriz formada polos tres puntos colocados por columnas, tense que  $\text{rang}(P; u; v) \leq 2$  se e só se todos os menores  $3 \times 3$  en  $(P; u; v)$ , teñen determinante nulo. Tales determinantes definen polinomios multi-homoxéneos e, de feito, homoxéneos logo de compoñer ca *inmersión de Segre*. Deste xeito  $I \subset \mathbb{P}^n \times (\mathcal{C} \times \mathcal{C})$  é un pechado na topoloxía de Zariski. A continuación, considérase a proxección sobre os dous últimos factores:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n \times (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \supset I &\xrightarrow{\pi_{23}} \mathcal{C} \times \mathcal{C} \\ \pi_{23}^{-1}(u, v) &\longmapsto (u, v) \end{aligned}$$

onde  $\pi_{23}^{-1}(u, v) = \{(P, (u, v)) \in \mathbb{P}^n \times (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) : P \in \overline{uv}\} \simeq \mathbb{P}^1$ . Vese así que  $I$  é un  $\mathbb{P}^1$ -fibrado sobre  $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ , de dimensión igual a tres. Convén non confundir  $I$ , coa imaxe pola primeira proxección.  $I$  é a unión disxunta das rectas bisecantes e tanxentes á curva  $\mathcal{C}$ :

$$\bigsqcup_{(u,v) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}} \pi_{23}^{-1}(u, v).$$

Tales rectas visualizadas en  $\mathbb{P}^n$  forman a *variedade secante a  $\mathcal{C}$*  e correspóndense coa imaxe de  $I$  mediante a primeira proxección,

$$\begin{aligned} \pi_1: I \subset \mathbb{P}^n \times (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) &\longrightarrow \mathbb{P}^n \\ I &\longmapsto \pi_1(I) = \text{Sec}(\mathcal{C}) \end{aligned}$$

onde  $\text{Sec}(\mathcal{C})$  denota o lugar xeométrico das bisecantes e tanxentes. Como  $\pi_1$  é unha aplicación pechada, pois é unha proxección, a imaxe de  $I$  é un pechado. En consecuencia

$$\dim(\pi_1(I)) = \dim(\text{Sec}(\mathcal{C})) \leq \dim(I) = 3.$$

Polo anteriormente dito, se  $n > 3$  obtense un pechado propio  $\text{Sec}(\mathcal{C}) \subsetneq \mathbb{P}^n$  e existirá un aberto  $U := \mathbb{P}^n - \text{Sec}(\mathcal{C})$  onde cada punto  $x \in U$  verifica:

1.  $x$  non está en  $\bigcup_{u \in \mathcal{C}} T_u(\mathcal{C})$ .
2.  $x$  non está en secante algunha de  $\mathcal{C}$ .

Entón, ao tomar un punto  $x \in U$ , considérase a proxección  $p_x: \mathbb{P}^n - \{x\} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$  e así, para cada  $u \in \mathcal{C}$ ,  $p_x(u) = \overline{ux} \cap \mathbb{P}^{n-1}$  é un único punto. En consecuencia, trátase dunha aplicación 1-1 que aplica a recta tanxente a  $u$  na recta tanxente a  $p_x(u)$ . Deste modo, dada unha curva lisa,  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^n$ , con  $n > 3$ , esta pode ser proxeccionada isomorficamente a  $\mathbb{P}^{n-1}$  e, se  $n - 1 > 3$ , é posible volver a proxeccionar isomorficamente obtendo de novo unha curva lisa isomorfa á anterior. Así, de forma sucesiva, un é capaz de empregar este argumento ata finalmente conseguir encaixar isomorficamente a curva lisa de  $\mathbb{P}^n$  en  $\mathbb{P}^3$ . Nótese que ao acadar  $\mathbb{P}^3$ , o argumento anterior xa non é válido. De ser  $\dim(\text{Sec}(\mathcal{C})) = 3$ , implicaría que  $\text{Sec}(\mathcal{C}) = \mathbb{P}^3$ . En consecuencia, tal aberto,  $U$ , non existiría. En definitiva, queda probado que toda curva lisa de  $\mathbb{P}^n$  onde  $n > 3$ , pode ser encaixada isomorficamente en  $\mathbb{P}^3$ .

### 2.1.1. Existencia dunha boa bisecante

Regrésase ao caso  $n = 3$ . Agora tal e como xa se comentou, podería ocorrer que  $\text{Sec}(\mathcal{C}) = \mathbb{P}^3$ , co cal o que se quere probar agora é o seguinte:

► "Que unha secante á curva  $\mathcal{C}$  sexa trisecante ou estacionaria, é unha propiedade pechada e estrita".

Equivalentemente,

► "Existe unha bisecante,  $\overline{uv}$ , a  $\mathcal{C}$  que non é trisecante nin estacionaria. Ademais, esta propiedade é aberta, é dicir, nun entorno desta, todas as bisecantes teñen a mesma propiedade."

O conxunto parametrizando bisecantes é  $\mathcal{C} \times \mathcal{C} - \Delta$ . Recórdese que o conxunto  $\Delta$  parametriza as tanxentes, que son unha familia 1-dimensional. Dentro de  $\mathcal{C} \times \mathcal{C} - \Delta$  considérase:

$$\begin{aligned} T &:= \{\text{trisecantes en } \mathcal{C} \times \mathcal{C} - \Delta\} \\ &= \{(u, v) : \text{ou ben } \overline{uv} \text{ corta a } X \text{ nun terceiro punto ou ben é tanxente en } u \text{ ou } v\} \\ \beta &:= \{\text{secantes a } X \text{ contidas nun plano bitanxente a } X \text{ (secantes estacionarias).}\} \end{aligned}$$

Xeometricamente, os elementos de  $T$  e  $\beta$  correspóndense coas seguintes situacións:

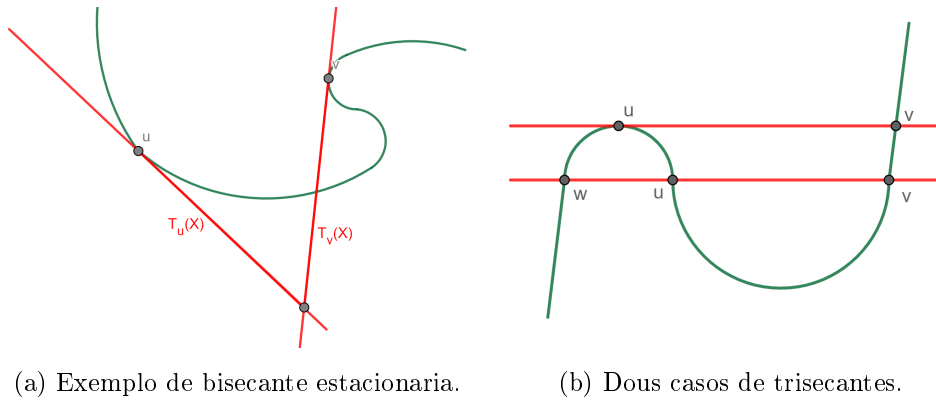


Figura 2.1: Bisecantes estacionarias ( $\beta$ ) e trisecantes ( $T$ .)

$T$  e  $\beta$  son subconxuntos pechados de  $\mathcal{C} \times \mathcal{C} - \Delta$ . En efecto,  $\overline{uv}$  é estacionaria precisamente se  $T_u(\mathcal{C})$  e  $T_v(\mathcal{C})$  se cortan ou, de forma equivalente, se xeran un plano (son coplanarios). Isto tradúcese en condicións de rango sobre o sistema de ecuacións e, polo tanto, na nulidade de determinantes. En conclusión,  $\beta \subset \mathcal{C} \times \mathcal{C} - \Delta$  pode ser xerada por un sistema de ecuacións polinómicas polo que será un pechado na topoloxía de Zariski. Analogamente, que  $\overline{uv}$  corte a  $X$  nun terceiro punto distinto de  $u$  e  $v$  é unha condición de colinearidade, logo de nulidade de determinantes e, que sexa tanxente a  $X$  en  $u$  ou  $v$ , é tamén unha condición alxébrica. Así,  $\beta$  tamén é un pechado. En definitiva, tense que  $T \cup \beta \subset \mathcal{C} \times \mathcal{C} - \Delta$  é un pechado na topoloxía de Zariski. Falta ver que tal pechado é propio, para o que se probará o seguinte teorema:

**Teorema 2.1.** *Se  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^3$  é unha curva lisa e irreducible, para o xenérico  $(x, y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} - \Delta$ , a bisecante  $\overline{xy}$  non é trisecante e non é estacionaria.*

O resultado anterior establece dous feitos importantes:

1. Existe unha bisecante  $\overline{xy}$ , onde  $x, y \in \mathcal{C}$ , que non é nin trisecante nin estacionaria. Chámase *boa bisecante* a calquera bisecante cumprindo o anterior.

2. Tales boas bisecantes forman un aberto, equivalentemente, se  $(x, y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} - \Delta$  é tal que  $\overline{xy}$  verifica 1. Entón, nun entorno de  $(x, y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} - \Delta$ , o suficientemente pequeno, todo par  $(x', y')$  verifica que  $\overline{x'y'}$  é unha bisecante con idénticas propiedades.

Deseguido constrúese unha boa bisecante. Sexa  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^3$  unha curva lisa e sexa  $x \in \mathcal{C}$  un punto da curva, denotarase por  $l := T_x(\mathcal{C})$  a recta tanxente a  $\mathcal{C}$  no punto  $x$ . En  $\mathbb{P}^3$  un pode escoller  $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^3$  de forma que  $\mathbb{P}^1 \cap l = \emptyset$  (se  $l$  se corresponde a un 2-subespazo  $V_2 \subset \mathbb{C}^4$ , bastará tomar o seu coplementario, sexa  $\overline{V}_2$ , tal que  $V_2 \oplus \overline{V}_2 = \mathbb{C}^4$ . O proxeectivo  $\mathbb{P}(V_2)$  é a recta  $\mathbb{P}^1$  buscada).

Nesta situación considérase a proxección de  $\mathbb{P}^3$  a  $\mathbb{P}^1$  con centro  $l$ ,  $\pi_l: \mathbb{P}^3 - \{l\} \rightarrow \mathbb{P}^1$ . Como  $\mathbb{P}^1 \cap l = \emptyset$ , ambas rectas nunca serán coplanarias (nunca estarán contidas no mesmo plano de  $\mathbb{P}^3$ ). Polo tanto, sendo  $y \in \mathbb{P}^3 - \{l\}$  un punto, o plano  $\langle y, l \rangle$  non contén a  $\mathbb{P}^1$ , logo corta a este nun único punto  $\pi_l(y) := \langle y, l \rangle \cap \mathbb{P}^1$ . Considérase a restrición de  $\pi_l$  á curva  $\mathcal{C}$ .

$$\begin{aligned} \pi_l: \mathcal{C} - \{l \cap \mathcal{C}\} &\longrightarrow \mathbb{P}^1 \\ y &\longmapsto \pi_l(y) = \langle y, l \rangle \cap \mathbb{P}^1 \end{aligned}$$

Como o obxectivo é proxectar unha curva  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^3$  ao plano, pódese supoñer que esta non é plana pois, o caso contrario sería trivial. Nótese que  $\pi_l$  é sobrexectiva: se  $\alpha \in \mathbb{P}^1$ , o plano  $\langle \alpha, l \rangle$  non contén a  $\mathbb{P}^1$ . En particular, existe unha correspondencia 1-1 entre os planos de  $\mathbb{P}^3$  contendo a  $l$  e os puntos de  $\mathbb{P}^1$ . Así, tales planos son un feixe (familia 1-dimensional de planos) parametrizado por  $\mathbb{P}^1$ . Nótese que:

$$\{l \subset \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^3\} \leftrightarrow \{\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{C}^3 \subset \mathbb{C}^4\} \leftrightarrow \{\mathbb{C}^3/\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{C}^4/\mathbb{C}^2\} \leftrightarrow \{\mathbb{C}^1 \subset \mathbb{C}^2\} \simeq \mathbb{P}^1$$

Máis aínda, como  $\mathcal{C}$  non é plana, para cada plano  $H \subset \mathbb{P}^3$ ,  $\mathcal{C} \cap H$  é un pechado propio en  $\mathcal{C}$ , logo un número finito de puntos. De non selo,  $\mathcal{C} \cap H$  sería todo  $\mathcal{C}$ . En consecuencia,  $\mathcal{C} \subset H$ , contradicindo a hipótese de que a curva non é plana. O teorema de Bezout garante que  $\mathcal{C} \cap H$  é un número finito e constante de puntos contados con multiplicidade. Este número é o grao da curva. En particular, se  $\alpha \in \mathbb{P}^1$ , sexa  $\langle \alpha, l \rangle$  un plano, entón  $\langle \alpha, l \rangle \cap \mathcal{C} = \{x, y_1, \dots, y_k\} = \pi_l^{-1}(\alpha)$ . Algún dos  $y_i \neq x$  verifica que  $y_i \notin l$ . En efecto, se  $\{x, y_1, \dots, y_k\} \subset l$ , entón  $l$  contén  $\deg(\mathcal{C})$  puntos de  $\mathcal{C}$ . Por conseguinte, dado  $z \in \mathcal{C} - \{l\}$ , tense que  $\mathcal{C} \cap \langle z, l \rangle$  son  $\deg(\mathcal{C}) + 1$  puntos, contradicindo o teorema de Bezout. A existencia da bisecante non estacionaria é consecuencia do seguinte lema.

**Lema 2.2.** *Existe  $\alpha \in \mathbb{P}^1$  tal que  $\forall y_i \notin l$ ,  $y_i \in \pi_l^{-1}(\alpha) = \{x, y_1, \dots, y_k\}$  se verifica que*

$$T_{y_i}(\mathcal{C}) \not\subset \langle \alpha, l \rangle$$

Primeiro realízase unha breve interpretación do resultado e posteriormente demóstrase.

► **Interpretación:** Como  $T_{y_i}(\mathcal{C}) \not\subset \langle \alpha, l \rangle$  entón  $T_{y_i}(\mathcal{C}) \cap l = \emptyset$ . Así, é posible proxectar  $T_{y_i}(\mathcal{C})$  con centro  $l$ . Efectivamente, para cada punto  $z \in T_{y_i}(\mathcal{C})$ ,  $\langle z, l \rangle$  non contén a  $T_{y_i}(\mathcal{C})$ .

Isto implica o corte nun único punto,  $T_{y_i}(\mathcal{C}) \cap \langle z, l \rangle = \{z\}$ , que está en correspondencia con  $\pi_l(y_i) = \pi_l(z) = \langle y_i, l \rangle \cap \mathbb{P}^1$ , é dicir,  $T_{y_i}(\mathcal{C})$  proxéctase isomorficamente en  $\mathbb{P}^1$ . Estase a dicir que ao considerar localmente o morfismo  $\pi_l$  nunha veciñanza de  $y_i$ :  $\varepsilon(y_i) \cap \mathcal{C} \xrightarrow{\pi_l} \mathbb{P}^1$ , a diferencial  $d_{y_i}(\pi_l)$  aplica  $T_{y_i}(\mathcal{C})$  isomorficamente en  $\mathbb{P}^1$  ou, o que é o mesmo,  $\pi_l$  é un isomorfismo local en  $y_i$ . Agora ben,  $T_{y_i}(\mathcal{C}) \cap l = T_{y_i}(\mathcal{C}) \cap T_x(\mathcal{C}) = \emptyset$ , o que significa que tales rectas tanxentes non son coplanarias, equivalentemente,  $\overline{xy_i}$  é bisecante mais non é estacionaria. A continuación procédese coa demostración.

*Proba do lema 2.2.* De non verificarse o resultado, teríase que para todo  $\alpha \in \mathbb{P}^1$ , existe  $y_\alpha \in \pi_l^{-1}(\alpha)$ ,  $y_\alpha \notin l$  de forma que  $T_{y_\alpha}(\mathcal{C}) \subset \langle l, \alpha \rangle$ . En consecuencia obtense unha familia 1-dimensional de puntos  $y_\alpha \in \mathcal{C}$  ( $\alpha \in \mathbb{P}^1$ ) de modo que  $T_{y_\alpha}(\mathcal{C})$  corta a  $l$ . Débese buscar unha contradición con algunha das hipóteses e, por redución ao absurdo, o lema queda probado. Isto é o que se leva a cabo a continuación.

Fíxase en  $l = T_x(\mathcal{C})$  dous puntos  $R, S \in l$ , ambos non pertencentes á curva  $\mathcal{C}$  e proxéctase  $\mathcal{C}$  dende  $R$  sobre o plano  $\langle \mathbb{P}^1, S \rangle$ . Como  $y_\alpha \notin l$ , ao proxectar  $\mathcal{C}$  dende  $R$ ,  $\pi_R(y_\alpha) = \overline{Ry_\alpha} \cap \langle \mathbb{P}^1, S \rangle = z_\alpha$  é un punto variando nunha curva plana,  $\mathcal{C}' \subset \langle \mathbb{P}^1, S \rangle$ , tal que  $T_{y_\alpha}(\mathcal{C})$  é proxectada en  $T_{z_\alpha}(\mathcal{C}')$ . Agora ben, todas estas rectas tanxentes pasan polo punto  $S$ . A curva  $\mathcal{C}$  ten infinitos puntos  $\{y_\alpha\}$  no cono de vértice  $R$  e base a curva plana  $\mathcal{C}'$ , logo  $\mathcal{C}$  está contida en dito cono. De probar que  $\mathcal{C}'$  é unha recta, estaríase a afirmar que a curva  $\mathcal{C}$  é unha curva plana, chegando así á contradición que se buscaba. Deste xeito, a demostración do lema 2.2, redúcese a demostrar o seguinte lema:

**Lema 2.3.** *Sexa  $\mathcal{C}' \subset \mathbb{P}^2$  unha curva plana tal que posee unha familia 1-dimensional de rectas tanxentes pasando por un punto  $S$ , entón  $\mathcal{C}'$  é unha recta.*

*Proba.* Considérese a curva dual de  $\mathcal{C}'$ , isto é, a clausura de Zariski da imaxe da aplicación:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}' \setminus \text{Sing}(\mathcal{C}') \subset \mathbb{P}^2 &\longrightarrow (\mathbb{P}^1)^* \\ Q &\longmapsto [T_Q(\mathcal{C}')] \end{aligned}$$

onde  $[T_Q(\mathcal{C}')]$  indica o punto en  $(\mathbb{P}^1)^*$  que representa á recta tanxente a  $\mathcal{C}'$  en  $Q$ . Dado  $S \in \mathbb{P}^2$ , o feixe de rectas pasando por  $S$  en  $\mathbb{P}^2$  está representado polo propio punto  $S = (\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2) \in \mathbb{P}^2$ . Isto é, sexa  $\sum_{i=0}^2 \gamma_i x_i$  a ecuación dunha recta en  $\mathbb{P}^2$ , se  $S$  está na recta, entón  $\sum_{i=0}^2 \gamma_i \alpha_i = 0$ . Pódese visualizar canonicamente  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^3 = (\mathbb{C}^3)^{**}$  como a forma linear

$$\begin{aligned} (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2): \quad (\mathbb{C}^3)^* &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (y_0, y_1, y_2) &\longmapsto \alpha_0 y_0 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \end{aligned}$$

de modo que dado  $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2) \in (\mathbb{C}^3)^*$ , é dicir  $(\gamma_0 : \gamma_1 : \gamma_2) \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)^* =: (\mathbb{P}^2)^*$ , este é un punto representando unha recta en  $\mathbb{P}^2$ , a de ecuación  $\gamma_0 x_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 = 0$ . Identifícase  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$  co seu núcleo  $\ker = \{(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2) : \gamma_0 \alpha_0 + \gamma_1 \alpha_1 + \gamma_2 \alpha_2 = 0\}$ , entón  $\ker$  é un espazo 2-dimensional

en  $(\mathbb{C}^3)^*$ , o que equivale a unha recta en  $(\mathbb{P}^2)^*$  cuxos puntos se corresponden co feixe de rectas en  $\mathbb{P}^2$  pasando por  $S = (\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2)$ . Procédese coa demostración do lema:

Se  $\mathcal{C}' \subset \mathbb{P}^2$  satisfai que case todas as tanxentes a  $\mathcal{C}'$  pasan por  $S$ , entón, tales rectas, forman parte do feixe de rectas pasando por  $S$ . Así pois, a imaxe de

$$\begin{aligned} \mathcal{C}' \setminus \text{Sing}(\mathcal{C}') \subset \mathbb{P}^2 &\longrightarrow (\mathbb{P}^1)^* \\ Q &\longmapsto [T_Q(\mathcal{C}')] \end{aligned}$$

está contida na recta  $(\mathbb{P}^1)^*$ , parametrizando o feixe de rectas pasando por  $S$ . Como a imaxe dun irreducible  $\mathcal{C}'$  é un irreducible, ou ben a imaxe de  $\mathcal{C}'$  é toda a recta, ou ben é un único punto dela. O primeiro caso non é posible debido ao *teorema de reflexividade* de Corrado Segre:  $((\mathcal{C}')^*)^* = \mathcal{C}'$ . Se  $(\mathcal{C}')^*$  é a recta citada, entón o seu dual é un punto. Por conseguinte,  $\mathcal{C}' = S$  o que é completamente falso. En consecuencia,  $(\mathcal{C}')^*$  é un punto da recta e todas as tanxentes a  $\mathcal{C}'$  redúcense a unha única recta, e en definitiva,  $\mathcal{C}'$  é unha recta.  $\square$

► **Conclusión:** Existe  $\alpha \in \mathbb{P}^1$  tal que para todo  $y_i \in \pi_l^{-1}(\alpha) = \{x, y_1, \dots, y_k\}$  de forma que  $y_i \notin l$ , entón  $T_{y_i}(\mathcal{C}) \not\subset \langle l, x \rangle$ , ou o que é o mesmo  $T_{y_i}(\mathcal{C}) \cap T_x(\mathcal{C}) = \emptyset$ . Isto establece que  $(x, y_i)$  é unha secante non estacionaria nos puntos  $x$  e  $y_i$ . A continuación, vese que a propiedade de ser non estacionaria é aberta.

**Proposición 2.4.** *Na situación anterior, a propiedade de que  $(x, y_i)$  define unha secante non estacionaria en  $x$  e  $y_i$ , matense infinitesimalmente. É dicir, ao mover  $\overline{xy_i}$  nunha veciñanza clásica dentro dunha variedade secante, a secante mantense non estacionaria.*

*Proba.* É suficiente probar que dada  $\overline{xy_i}$ , ao moverse nunha veciñanza do punto  $x$ , é dicir, cando  $x'$  tende a  $x$ ,  $x' \rightarrow x$ , a bisecante  $\overline{x'y_i}$  tampouco estaciona en  $x'$  nin en  $y_i$ . Intercambiando o papel de  $x$  co de  $y_i$  obteríase o mesmo.

Tómense coordenadas locais nunha veciñanza de  $x$ . Isto é, sexa

$$\begin{aligned} \phi: |z| < \varepsilon &\longrightarrow \mathcal{C} \\ 0 &\longmapsto \phi(0) = x \end{aligned}$$

Verase que se  $(x, y_i)$  non estaciona, entón  $\overline{\phi(z)y_i}$ , cando  $z$  tende a 0 ( $z \rightarrow 0$ ), tampouco. Supóñase que sendo  $z$  tal que  $z \rightarrow 0$ ,  $T_{\phi(z)}(\mathcal{C})$  e  $T_{y_i}(\mathcal{C})$  se cortan. Nese caso  $T_{y_i}(\mathcal{C}) \subset \langle T_{\phi(z)}(\mathcal{C}), y_i \rangle$ . Agora ben, cando  $z \rightarrow 0$ , entón  $\phi(z) \rightarrow x$  e, na topoloxía clásica,  $\langle T_{\phi(z)}(\mathcal{C}), y_i \rangle \rightarrow \langle T_x(\mathcal{C}), y_i \rangle$ . Así:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \langle T_{\phi(z)}(\mathcal{C}), y_i \rangle = \langle T_x(\mathcal{C}), y_i \rangle.$$

Como  $T_{y_i}(\mathcal{C}) \subset \langle T_{\phi(z)}(\mathcal{C}), y_i \rangle$ , tamén  $T_{y_i}(\mathcal{C}) \subset \lim_{z \rightarrow 0} \langle T_{\phi(z)}(\mathcal{C}), y_i \rangle = \langle T_x(\mathcal{C}), y_i \rangle$  polo que  $(x, y_i)$  non sería estacionaria.  $\square$

Tan só falta ver que tal bisecante non estacionaria, non é trisecante e que esta propiedade é aberta. Comprobarase deseguido.

**Proposición 2.5.** *A bisecante  $\overline{xy_1}$ , construída como no Lema (2.2), non é trisecante.*

*Proba.* Recórdese que a bisecante  $\langle x, y_1 \rangle$ , se escolle de forma que existe  $\alpha \in \mathbb{P}^1$  tal que  $\pi_l^{-1}(\alpha) = \{x, y_1, \dots, y_k\} = \langle \alpha, l \rangle \cap \mathcal{C}$ . Utilízase o anterior para ver que a bisecante non é trisecante.

Como  $\overline{xy_1} \subset \langle \alpha, l \rangle$ , se é trisecante a  $\mathcal{C}$ , existe un terceiro punto entre os  $y_2, \dots, y_k$  de  $\pi_l^{-1}(\alpha)$ , tal que está na recta  $\overline{xy_1}$ . Suponse que  $y_2$  é tal punto. Nese caso  $y_2 \notin l = T_x(\mathcal{C})$ , pois do contrario,  $l = \overline{xy_1} = \overline{xy_2}$  mais  $y_1 \notin l$ . Así, polo Lema (2.2),  $\overline{xy_2}$  é non estacionaria en  $x$  e  $y_2$ . Esta propiedade contradiría o feito de ser trisecante.

Ante todo,  $\overline{xy_1y_2} \subset \langle \alpha, l \rangle$  e, ademais, o número de puntos de  $\langle \alpha, l \rangle \cap \mathcal{C}$  proporciona o grao da curva  $\mathcal{C}$ . Por continuidade, ao mover infinitesimalmente  $\overline{xy_1y_2}$ , mantendo  $y_1$  fixo, a recta segue a ser trisecante. É dicir, existe  $\{z_n\} \rightarrow 0$  tal que  $\phi(z_n) \rightarrow x$  e a recta  $\overline{\phi(z_n)y_1}$ , mantense trisecante; contén un terceiro punto  $y_2^n \in \mathcal{C}$  tal que  $\{y_2^n\} \rightarrow y_2$ . Considérase o plano  $\langle \phi(z_n), x, y_1 \rangle$ , que contén a  $\overline{xy_1}$ , logo contén tamén a  $y_2$ .

Cando  $\{z_n\} \rightarrow 0$ ,  $\phi(z_n) \rightarrow x$  e  $\lim_{z \rightarrow 0} \langle \phi(z_n), x, y_1 \rangle = \langle T_x(\mathcal{C}), y_1 \rangle$ , mais  $y_2 \in \langle \phi(z_n), x, y_1 \rangle$  e  $y_2^n \in \langle \phi(z_n), x, y_1 \rangle$ , así pois,  $\langle T_x(\mathcal{C}), y_1 \rangle$  contén ao límite de secantes  $\overline{y_2y_2^n}$  logo tamén á tanxente  $T_{y_2}(\mathcal{C})$ . Do anterior chégase a que  $T_x(\mathcal{C})$  e  $T_{y_2}(\mathcal{C})$  están nun plano, e polo tanto que o par  $(x, y_2)$  define unha bisecante estacionaria, en contradición co obtido anteriormente.  $\square$

► **Conclusión:**  $\beta \cup T \cup \Delta \subset \mathcal{C} \times \mathcal{C}$  é un pechado e acábase de atopar un par  $(x, y_i) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$  que define unha bisecante non estacionaria e non trisecante onde tal propiedade é aberta. Así,  $\dim(\beta \cup T) < 2$ . Como  $\dim(\Delta) = 1$ , entón tamén  $\dim(\beta \cup T \cup \Delta) < 2$  ( $\leq 1$ ). Deste xeito:

$$I \cap (\mathbb{P}^3 \times (\beta \cup T \cup \Delta)) \text{ ten dimensión } < 3 (\leq 2)$$

e a súa imaxe en  $\mathbb{P}^3$  ten dimensión menor igual que dous. En consecuencia,

$$\exists x \in \mathbb{P}^3 \setminus \pi_1(I \cap (\mathbb{P}^3 \times (\beta \cup T \cup \Delta))),$$

o que quere dicir que existe  $x$  de forma que, ou ben non está na variedade secante ou, se o está, non está no lugar xeométrico das tanxentes a  $\mathcal{C}$ , as bisecantes estacionarias e as trisecantes. Proxectando dende  $x$ , dentro das rectas proxectantes, tense ao sumo un número finito de bisecantes pois, unha curva irreducible ten un número finito de singularidades. Neste caso pasaríase dunha curva lisa a unha curva con singularidades, mais singularidades que son nodos ordinarios xa que as rectas proxectantes bisecantes son non estacionarias e non trisecantes. A raíz disto, xéranse singularidades de orde dous con tanxentes distintas.



► **Resumo:** Partindo dunha curva lisa e irreducible contida en  $\mathbb{P}^n$ , esta pode ser proxectada isomorficamente a  $\mathbb{P}^3$ , obtendo unha curva irreducible e tamén lisa. Isto mesmo non pode ser obtido para a proxección ao plano. Neste último caso, non se pode garantir que tal curva proxectada birracionalmente a  $\mathbb{P}^2$ , sexa lisa. Si que será posible obter un modelo birracional da curva, sendo este unha curva irreducible onde as singularidades son nodos ordinarios.

## 2.2. Proxección dunha curva de $\mathbb{P}^n$ a $\mathbb{P}^1$

Nesta sección buscarase unha boa proxección dunha curva  $\tilde{\mathcal{C}} \subset \mathbb{P}^n$  a unha recta  $\mathbb{P}^1$ . Para iso pártese, utilizando a sección anterior, dunha curva plana,  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$ , que unicamente posee nodos como singularidades e que é un modelo birracional de  $\tilde{\mathcal{C}}$ . Comezarase con algunha que outra notación e resultado previo que permitirá obter o que se quere.

Se  $Q \in \mathcal{C}$  é un punto singular, denotarase por  $E_{Q,\mathcal{C}}^*$  o cono tanxente formado polas distintas tanxentes principais a  $\mathcal{C}$  no punto  $Q$ . Sobreenténdese que cando  $Q \in \mathcal{C}$  é un punto liso, o cono tanxente coincide coa recta tanxente:  $E_{Q,\mathcal{C}}^* \equiv T_Q(\mathcal{C})$ .

Claramente, se  $Flex(\mathcal{C})$  denota o conxunto de puntos de inflexión e  $Sing(\mathcal{C})$  o conxunto das singularidades da curva  $\mathcal{C}$ ,

$$\mathcal{Z} = \bigcup_{x \in Flex(\mathcal{C}) \cup Sing(\mathcal{C})} \mathcal{C} \cup E_{x,\mathcal{C}}^* \subset \mathbb{P}^2$$

é un pechado propio, co cal un punto  $\mathcal{O} \notin \mathcal{Z}$  é un punto xenérico no sentido de que varía nun aberto. Estudarse como é unha proxección dende o punto  $\mathcal{O}$  sobre unha recta  $\mathbb{P}^1$  que non pasa por  $\mathcal{O}$ . Cada recta pasando por  $\mathcal{O}$ , corta á curva  $\mathcal{C}$  en  $d = deg(\mathcal{C})$  puntos contados con multiplicidade. Como  $\mathcal{O}$  non se atopa en recta tanxente algunha a un punto de inflexión, de ser tanxente a  $\mathcal{C}$  nun punto  $Q$ , a multiplicidade de intersección de dita recta tanxente con  $\mathcal{C}$  é exactamente dous.

Por outra banda, se a recta pasando por  $\mathcal{O}$  pasa por un punto singular ordinario de orde de multiplicidade  $s$ , dita recta, non sendo unha tanxente principal, corta con multiplicidade exactamente  $s$ . De ser tal recta proxectante unha tanxente principal, dita multiplicidade será  $s+1$  se o punto é singular ordinario. No caso de ser o punto non ordinario, esta multiplicidade será maior estricta que  $s+1$ . En todo caso, tal e como se escolleu o punto  $\mathcal{O}$  de proxección e tendo  $\mathcal{C}$  unicamente nodos ordinarios como singularidades, a multiplicidade de intersección é exactamente dous, o que quere dicir que a recta corta de forma transversal a cada unha das ramas pasando polo punto.

En calquera proxección  $\pi_{\mathcal{O}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$  da curva  $\mathcal{C}$  sobre unha recta que non pasa polo punto  $\mathcal{O}$ , para cada  $P \in \mathcal{C}$ , a recta  $\overline{\mathcal{O}P} \equiv \overline{\mathcal{O}\pi_{\mathcal{O}}(P)}$  corta a  $\mathcal{C}$  nun total de  $d$  puntos contados con

multiplicidade. Claramente, tales puntos son todos distintos cando a recta  $\overline{\mathcal{O}P}$  non é tanxente a  $\mathcal{C}$  en punto liso algún, nin é unha tanxente principal por un punto singular. Un pode pensar que a contribución no conxunto  $\overline{\mathcal{O}P} \cap \mathcal{C}$  é a contribución como subconxunto alxébrico de  $\mathcal{C}$ , mais en relación á proxección, cambia. Isto débese a que os puntos de tanxencia lisos en  $\mathcal{C}$  das rectas pasando por  $\mathcal{O}$  e os puntos singulares, son conxuntos alxébricos que pertencen a  $\mathcal{C}$  e a polar de  $\mathcal{C}$  con respecto a  $\mathcal{O}$ .

**Proposición 2.6.** *Dada unha curva plana  $\mathcal{C}$  de grao  $d$  e ecuación  $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ , e dado un punto  $\mathcal{O} = (\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2) \notin \mathcal{C}$ , entón  $\mathcal{C} \cap \text{Polar}(\mathcal{O}, \mathcal{C}) = \Sigma \cup \text{Sing}(\mathcal{C})$  onde,*

$$\Sigma = \{Q \in \mathcal{C} : Q \text{ liso e } \overline{\mathcal{O}Q} \text{ é tanxente a } \mathcal{C} \text{ en } Q\}.$$

*Proba.* A ecuación da  $\text{Polar}(\mathcal{O}, \mathcal{C})$  é  $\alpha_0 \frac{\partial F}{\partial x_0} + \alpha_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0$ . Polo tanto, os puntos singulares de  $\mathcal{C}$  están na polar pois cumpren a súa ecuación: un punto singular verifica que  $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \forall i = 0, 1, 2$ . Queda, demostrar que un punto liso  $Q \in \mathcal{C}$  pertence a polar precisamente se  $Q \in T_{\mathcal{O}}(\mathcal{C})$  (ou o que é o mesmo, se  $Q \in \Sigma$ ). Agora ben,  $Q \in \text{Polar}(\mathcal{O}, \mathcal{C})$  cando verifica a ecuación:

$$\alpha_0 \frac{\partial F}{\partial x_0}(Q) + \alpha_1 \frac{\partial F}{\partial x_1}(Q) + \alpha_2 \frac{\partial F}{\partial x_2}(Q) = 0 \quad (2.1)$$

Nótese que por ser  $Q$  liso, a ecuación da recta tanxente a  $\mathcal{C}$  no punto  $Q$ , será:

$$x_0 \frac{\partial F}{\partial x_0}(Q) + x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1}(Q) + x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2}(Q) = 0$$

e por (2.1) tense que  $(\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2) = \mathcal{O}$  pertence á tanxente pois verifica a súa ecuación.  $\square$

Nesta situación, escóllese  $\mathcal{O} = (0 : 0 : 1) \notin \mathcal{Z}$  de forma que a polar ten ecuación:

$$\text{Polar}(\mathcal{O}, \mathcal{C}) \equiv 0 \frac{\partial F}{\partial x_0} + 0 \frac{\partial F}{\partial x_1} + 1 \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow \text{Polar}(\mathcal{O}, \mathcal{C}) \equiv \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0$$

Claramente, se  $\mathcal{C}$  está definida por  $F(x_0, x_1, x_2) = 0$  de grao  $d$ , a ecuación que define a  $\text{Polar}(\mathcal{O}, \mathcal{C})$ ,  $\frac{\partial F}{\partial x_2} = 0$  ten grao  $d - 1$  e debido ao teorema de Bezout,

$$d(d - 1) = \text{deg}(\mathcal{C} \cap \text{Polar}(\mathcal{O}, \mathcal{C})) = \sum_{Q \in \gamma} m_Q(\mathcal{C}, \text{Polar}(\mathcal{O}, \mathcal{C}))$$

onde  $\gamma = \{\text{Puntos dobres de } \mathcal{C}\} \cup \Sigma$ . Estúdase agora a contribución dos nodos ordinarios e dos puntos de ramificación da proxección co teorema de Bezout. O resultado que aparece a continuación e as ideas para a proba, están sacadas do libro de Mumford, [DM76].

**Teorema 2.7.** *Na situación descrita con anterioridade, verifícase:*

1.  $\Sigma$  coincide cos puntos lisos de ramificación para  $\pi_{\mathcal{O}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$ .
2. Se  $Q \in \mathcal{C}$  é un nodo ordinario,  $m_Q(\mathcal{C}, \text{Polar}(\mathcal{O}, \mathcal{C})) = 2$ .

3. Se  $P \in \mathcal{C}$  é un punto liso de ramificación para  $\pi_{\mathcal{O}}$ , entón  $m_P(\mathcal{C}, \text{Polar}(\mathcal{O}, \mathcal{C})) = 1$ .

4. Sendo  $\nu$  o número de nodos en  $\mathcal{C}$  e  $\beta$  o número de puntos de ramificación de  $\pi_{\mathcal{O}}$ , entón:

$$d(d-1) = \beta + 2\nu$$

*Proba.* Como  $\mathcal{O} = (0 : 0 : 1)$ , se proxecta sobre a recta  $x_2 = 0$ . Nesta recta, as coordenadas homoxéneas son  $(x_0, x_1)$ .

Considérase a carta afín  $x_1 \neq 0$ , é dicir, traballárase no plano afín  $\mathbb{A}_{u,v}^2$  onde  $u = \frac{x_0}{x_1}$  e  $v = \frac{x_2}{x_1}$ , de modo que localmente a proxección  $\pi_{\mathcal{O}}$  é a proxección do plano  $\mathbb{A}_{u,v}^2$  na recta  $\mathbb{A}_u^1$  ( $v = 0$ ). Isto é, estase a considerar a proxección ortogonal sobre a recta  $v = 0$ , que é a proxección paralela á dirección  $(0 : 0 : 1)$  que se corresponde co punto do infinito  $\mathcal{O} = (0 : 0 : 1)$ .

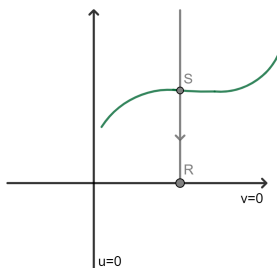


Figura 2.2: Proxección ortogonal sobre a recta  $v = 0$ .

*Próbase 1.:* Sexa  $\mathcal{C}$  unha curva dada pola ecuación  $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ . Na carta coordenada  $\mathbb{A}_{u,v}^2$  a ecuación afín será,

$$\left(\frac{1}{x_1}\right)^d \cdot F(x_0, x_1, x_2) = F\left(\frac{x_0}{x_1}, 1, \frac{x_2}{x_1}\right) = f(u, 1, v) = f(u, v) = 0$$

e a polar respecto do punto  $\mathcal{O} = (0 : 0 : 1)$ , que proxectivamente se corresponde coa curva de grao  $d-1$  dada pola ecuación  $\frac{\partial F}{\partial x_2} = 0$ , ten por restrición afín a curva dada por

$$\left(\frac{1}{x_1}\right)^{d-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_0, x_1, x_2) = \frac{\partial F}{\partial x_2}\left(\frac{x_0}{x_1}, 1, \frac{x_2}{x_1}\right) = \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = 0$$

Identifícase o pechado  $\mathcal{C} \cap \text{Polar}(\mathcal{O}, \mathcal{C})$  en  $\mathbb{A}_{u,v}^2$ . Sexa  $R \in \mathcal{C} \cap \mathbb{A}_{u,v}^2$ , entón  $R = (a : 1 : b)$  e verifícase que:

► No caso de que  $\frac{\partial f}{\partial v}(R) \neq 0$ , equivalentemente,  $R \in \mathcal{C}$  é un punto liso. Realizando un cambio de coordenadas, de modo que  $R = (0 : 1 : 0)$ , a súa ecuación será:

$$f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u}(R)u + \frac{\partial f}{\partial v}(R)v + \{\text{Termos en } (u, v) \text{ de grao } \geq 2\}$$

En particular, a recta tanxente  $T_R(\mathcal{C})$  ten ecuación vectorial,  $\frac{\partial f}{\partial u}(R)u + \frac{\partial f}{\partial v}(R)v = 0$  e, como  $\frac{\partial f}{\partial v}(R) \neq 0$ , isto implica que un vector director da recta ten coordenadas  $(\frac{\partial f}{\partial v}(R), -\frac{\partial f}{\partial u}(R))$ . Dito doutro modo, a pendente da recta tanxente a  $R$  é:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(R) = -\frac{\partial f}{\partial v}(R) \Rightarrow \frac{v}{u} = \frac{\frac{\partial f}{\partial u}(R)}{-\frac{\partial f}{\partial v}(R)}.$$

Como  $\frac{\partial f}{\partial v}(R) \neq 0$ , esta pendente estará sempre definida, é dicir, a recta tanxente nunca será paralela ao eixo de ecuación  $u = 0$ . Polo tanto, mediante a proxección sobre o eixo  $\mathbb{A}_u^1$ , dita recta proxéctase sobre toda a recta  $\mathbb{A}_u^1 (v = 0)$ .

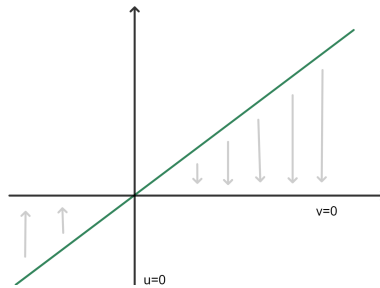


Figura 2.3: Ilustración de como a recta tanxente se proxecta sobre todo  $v = 0$ .

► No caso de que  $\frac{\partial f}{\partial v}(R) = 0$ , entón:

- i. ou ben  $\frac{\partial f}{\partial u}(R) = 0$ , e en tal caso  $R$  será un punto singular,
- ii. ou ben  $\frac{\partial f}{\partial u}(R) \neq 0$  e  $R$  será un punto liso onde a súa recta tanxente será:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(R)u + \frac{\partial f}{\partial v}(R)v = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial u}(R)u = 0 \iff u = 0. \quad \frac{\partial f}{\partial v}(R) \neq 0$$

Así, a recta proxectante polo punto  $R$  coincide coa tanxente que se proxecta nun punto de  $\mathbb{A}_u^1$ :

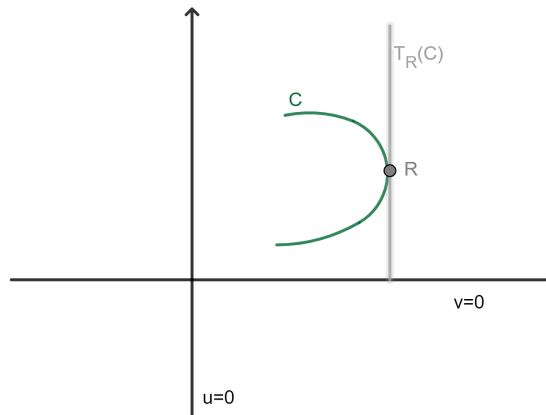


Figura 2.4: A recta tanxente coincide coa recta proxectante.

O anterior demostra o apartado 1 do teorema e, en particular, que os puntos lisos comúns a  $\mathcal{C}$  e á curva polar dende  $\mathcal{O}$  son os puntos de ramificación da proxección.

*Próbase 2.:* Supóñase que  $R \in \mathcal{C}$  é un nodo e tómanse coordenadas de forma que  $R = (0 : 1 : 0) \equiv (0, 0) \in \mathbb{A}_{u,v}^2$ . Existen dúas rectas tanxentes distintas a  $\mathcal{C}$  polo punto  $R$  e pola esolla de  $\mathcal{O}$ , ningunha delas coincide coa recta proxección  $\overline{\mathcal{O}R}$ . Pódese escribir a ecuación da curva localmente nunha veciñanza de  $R$  como

$$f(u, v) = (au + bv)(cu + dv) + \{\text{Termos en } (u, v) \text{ de grao } \geq 3\}$$

onde  $b \neq 0$  e  $d \neq 0$ , xa que as rectas tanxentes non son paralelas á dirección de proxección  $v = 0$  e  $ad - bc \neq 0$  pois as rectas son distintas. Tense así que

$$f(u, v) = acu^2 + (ad+bc)uv + bdv^2 + \dots \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v} = (ad+bc)u + 2bdv + \{\text{Termos en } (u, v) \text{ de grao } \geq 2\}$$

A curva polar no punto  $R$  vén dada pola ecuación  $\frac{\partial f}{\partial v} = 0$  logo, a súa recta tanxente será

$$(ad + bc)u + 2bdv = 0$$

A pendente da recta tanxente será:

$$-\frac{ad + bc}{2bd} \neq \begin{cases} -\frac{a}{b} \text{ pendente da recta tanxente } au + bv = 0. \\ -\frac{c}{d} \text{ pendente da recta tanxente } cu + dv = 0. \end{cases}$$

En efecto,

- Se  $-\frac{ad+bc}{2bd} = -\frac{a}{b} \iff_{b \neq 0} ad + bc = 2ad \iff ad - bc = 0$ , Contradición!
- Se  $-\frac{ad+bc}{2bd} = -\frac{c}{d} \iff_{d \neq 0} ad + bc = 2bc \iff ad - bc = 0$ , Contradición!

O que mostra que  $\mathcal{C}$  e a  $Polar(\mathcal{O}, \mathcal{C})$  non teñen tanxentes comúns, e pola desigualdade fundamental (Proposición (0.32)):

$$m_R(\mathcal{C}, Polar(\mathcal{O}, \mathcal{C})) = m_R(\mathcal{C}) \cdot m_R(Polar(\mathcal{O}, \mathcal{C})) = 2 \cdot 1 = 2$$

Xeometricamente, a recta  $T_R(Polar(\mathcal{O}, \mathcal{C}))$  é transversal en  $R$  con cada unha das tanxentes principais e a multiplicidade de intersección será dous. Isto conclúe a demostración de 2.

*Próbase 3.:* Para demostrar este apartado, utilízase o visto na demostración do apartado 1. Sexa  $R \in \mathcal{C}$  un punto liso de ramificación para  $\pi_{\mathcal{O}}$ . En tal caso,  $R \in \mathcal{C}$  será un punto liso onde a recta proxección  $\overline{\mathcal{O}R}$  coincidirá con  $T_R(\mathcal{C})$ , que ten de ecuación  $u = 0$ . Tómanse coordenadas locais de forma que  $R = (0 : 1 : 0)$ . A ecuación de  $\mathcal{C} \cap \mathbb{A}_{u,v}^2$  nunha veciñanza de  $R = (0, 0)$  é agora,

$$f(u, v) = au + bu^2 + cuv + dv^2 + \{\text{Termos en } (u, v) \text{ de grao } \geq 3\}$$

onde  $a \neq 0$ , pois  $u = 0$  é a recta tanxente. Agora utilízase que, pola elección de  $\mathcal{O} = (0 : 0 : 1)$ ,  $R$  non é un punto de inflexión, co cal  $m_R(\mathcal{C}, T_R(\mathcal{C})) = 2$ , o que significará que ao resolver o sistema de ecuacións  $\{f(u, v) = 0, v = 0\}$ , a solución será o punto  $R$  con multiplicidade igual a dous.

$$\begin{cases} f(u, v) = 0 \\ u = 0 \end{cases} \Rightarrow dv^2 = 0 \text{ e } d \neq 0$$

Tendo isto en conta, calcularase a ecuación da polar:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = cu + 2dv + \{\text{Termos en } (u, v) \text{ de grao } \geq 2\}$$

Así, a recta tanxente a  $Polar(\mathcal{O}, \mathcal{C})$  no punto  $R$  será  $cu + 2dv = 0$  onde  $d \neq 0$ , mentres que a recta tanxente a  $\mathcal{C}$  no punto  $R$  é  $u = 0$ . En consecuencia, ambas curvas non comparten rectas tanxentes no punto  $R$  e, novamente, pola desigualdade fundamental (*Proposición 0.32*):

$$m_R(\mathcal{C}, Polar(\mathcal{O}, \mathcal{C})) = m_R(\mathcal{C}) \cdot m_R(Polar(\mathcal{O}, \mathcal{C})) = 1 \cdot 1 = 1$$

onde a última igualdade se obtén debido a que, ao ser  $R$  liso para  $\mathcal{C}$ , entón tamén o será para a polar. Logo  $m_R(\mathcal{C}) = m_R(Polar(\mathcal{O}, \mathcal{C})) = 1$ .

*Próbase 4.:* Este apartado é consecuencia da directa aplicación do teorema de Bezout. Por unha banda o soporte de  $\mathcal{C} \cap Polar(\mathcal{O}, \mathcal{C})$  son as singularidades e os puntos de tanxencia das tanxentes pasando por  $\mathcal{O}$ , é dicir, os nodos e os puntos de ramificación de  $\pi_{\mathcal{O}}$ . Os nodos contribúen ao conxunto intersección con multiplicidade dous e os puntos de ramificación fano con multiplicidade igual a un. Por tanto, se  $\nu$  representa o número de nodos e  $\beta$  o número de puntos de ramificación, obtense que  $d(d-1) = \beta + 2\nu$ , sen máis que aplicar o teorema de Bezout:

$$deg(\mathcal{C}) \cdot deg(Polar(\mathcal{O}, \mathcal{C})) = \sum_{Q \in \gamma} m_Q(\mathcal{C}, Polar(\mathcal{O}, \mathcal{C}))$$

□

► **Resumo:** Ao proxectar unha curva plana,  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$ , con unicamente nodos como singularidades dende un punto  $\mathcal{O} \in \mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{Z}$  sobre unha recta  $\mathbb{P}^1$  que non pasa por  $\mathcal{O}$ , resultará que as rectas proxectantes que pasan por un nodo cortarán en  $d-2$  puntos máis, distintos e lisos. Aos puntos de ramificación da proxección ocorreralles o mesmo. O punto de ramificación, é un punto de tanxencia da recta proxectante, logo esta corta á curva en dito punto con multiplicidade dous e noutros  $d-2$  puntos lisos distintos con multiplicidade un. Finalmente, se non pasa por ningún punto de ramificación ou nodo, entón a recta proxectante cortará nun total de  $d$  puntos lisos distintos. En definitiva, nos dous primeiros casos estanse a proxectar sobre un mesmo punto un total de  $d-1$  puntos. Así, a imaxe recíproca de tal punto serán  $d-1$  puntos, sendo un deles un nodo. Namentres, no último caso, sobre un único punto proxéctanse  $d$  puntos lisos e, en consecuencia, a imaxe recíproca de tal punto serán  $d$  puntos lisos distintos. Esta observación final, cobrará unha importancia fundamental á hora de demostrar que o xénero aritmético e o topolóxico coinciden. Vese todo con máis detalle no terceiro e último capítulo deste traballo.

## Capítulo 3

# Teorema de Riemann-Noether: igualdade do xénero topolóxico e aritmético

Este capítulo, céntrase en probar a igualdade do xénero topolóxico e do xénero aritmético dunha curva lisa,  $\tilde{\mathcal{C}} \subset \mathbb{P}^n$ . De forma máis precisa, pártese do modelo birracional de  $\tilde{\mathcal{C}}$  con unicamente nodos como singularidades, sexa  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$ , que se obtén despois de proxectar a curva ao plano. Tal procedemento será descrito un pouco máis adiante.

Para devandita curva alxébrica plana,  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$ , búscase unha *boa proxección* a unha recta do plano de forma que permita calcular o seu *xénero aritmético de Clebsch-Noether* en función da proxección. Posteriormente, considerando a recta,  $\mathbb{P}^1$ , como unha esfera e a superficie real asociada á curva, dito xénero aritmético coincide co xénero topolóxico da superficie. Nótese que por ser o xénero aritmético un invariante birracional, demostrando o resultado para unha curva plana con nodos como únicas singularidades, quedará probado para unha curva alxébrica lisa xeral,  $\tilde{\mathcal{C}} \subset \mathbb{P}^n$ . Antes de comezar coa proba do resultado motívase e defínese o *xénero aritmético de Clebsch-Noether*.

### 3.1. Xénero aritmético de Clebsch-Noether

Antes de falar sobre o xénero aritmético, é necesario comezar introducindo o concepto de *deficiencia dunha curva alxébrica plana*. En primeiro lugar, defínese e despois motívase.

**Definición 3.1.** Sexa  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$  unha curva alxébrica plana de grao  $d$  con puntos singulares

$\{P_1, \dots, P_k\}$  de ordens  $\{s_1, \dots, s_k\}$ . Chámase *deficiencia de  $\mathcal{C}$*  a

$$Def(\mathcal{C}) := \frac{1}{2}(d-1)(d-2) - \sum_{i=1}^k \frac{1}{2}s_i(s_i-1)$$

Xustificase máis adiante o motivo de considerar esa expresión, que é a xeneralización de Clebsch-Noether dunha das fórmulas de Plücker. As chamadas *fórmulas de Plücker*<sup>1</sup> obtéñense de relacionar o grao dunha curva  $\mathcal{C}$  co número de puntos singulares e as súas multiplicidades e, analogamente, para a curva dual  $\mathcal{C}^*$ . Por razóns de argumentación alxébrica, as fórmulas obtéñense para a curva  $\mathcal{C}$  con singularidades ordinarias.

►► **Como aparece tal número? Que mide a deficiencia?**

Co fin de darlle resposta a estas preguntas, considérase o exemplo das cúbicas planas e analízanse as diferenzas entre os casos racionais e o caso non racional:

As dúas curvas racionais, é dicir, a cúbica nodal e a cuspidal, teñen un punto singular que é un nodo (singularidade con multiplicidade 2). A idea de explicitar a parametrización, para estas curvas, está en considerar o grao da curva: unha recta corta a unha cúbica en 3 puntos contados con multiplicidade. Se é posible escoller un feixe de rectas, o cal está parametrizado por  $\mathbb{P}^1$ , de forma que dous dos puntos de intersección sexan fixos e un libre dependendo da recta, entón tense unha parametrización. Isto ocorre coas rectas pasando polo único punto singular das cúbicas nodal e cuspidal. Para ditas rectas, dous dos tres puntos acumúlanse na singularidade e o terceiro punto de corte varía coa recta do feixe.

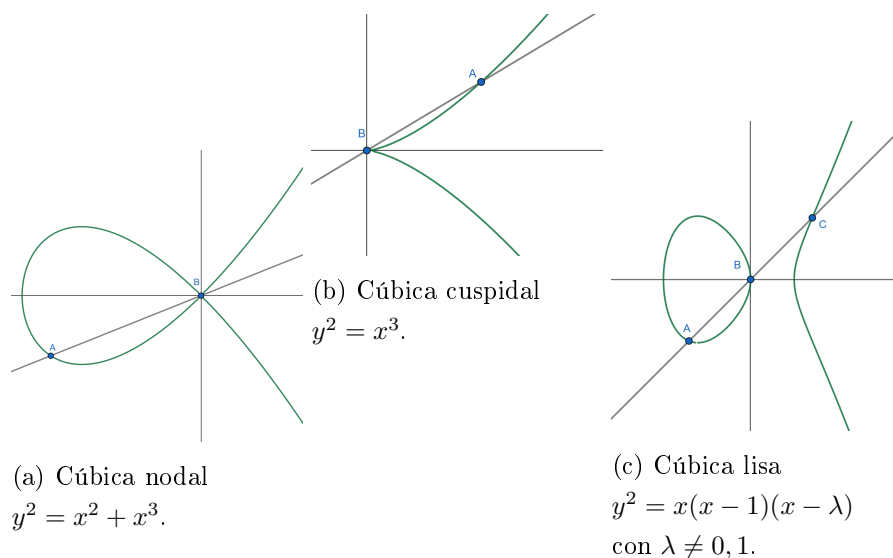


Figura 3.1: Os tres tipos de cúbicas.

<sup>1</sup>Para ver todas as fórmulas de Plücker, pódese consultar o libro de Semple e Roth [SR49], páxina 74 e seguintes.



Nótese que para a cúbica lisa unha recta non tanxente cortará en tres puntos distintos e, deste xeito, non se pode aplicar o argumento utilizado para buscar unha parametrización das outras dúas cúbicas (non hai singularidade algunha). Como cabía esperar, esta curva non é parametrizable. Unha demostración da non racionalidade da cúbica lisa pódese, ver no libro de Miles Reid, [MR88] no capítulo 1, sección 2. Estes exemplos mostran unha evidencia:

**Teorema 3.2** (Maclaurin, Plücker, Clebsch, Noether,). [SR49]

1. O número máximo de puntos singulares dunha curva irreducible  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$  de grao  $d$  é

$$\boxed{\frac{1}{2}(d-1)(d-2)}$$

2. Unha curva de grao  $d$  co número máximo de puntos singulares, pódese parametrizar.

3. De forma máis precisa, se  $\mathcal{C}$  é unha curva irreducible de grao  $d$  tendo puntos singulares de multiplicidades  $s_1, \dots, s_t$  entón:

$$\boxed{\sum_{i=1}^t s_i(s_i - 1) \leq (d-1)(d-2)}$$

Existen curvas irreducibles de grao  $d$  para as que se da a igualdade. Máis aínda, se se obtén a igualdade, entón a curva é racional.

*Demostración. 1.* O resultado é certo de forma trivial para os casos  $d = 1, 2$ . Supóñase que  $d \geq 3$ . Verase que  $\mathcal{C}$  non pode ter  $\frac{1}{2}(d-1)(d-2) + 1 = \frac{d^2 - 3d + 4}{2}$  puntos singulares. No caso de ter unha curva de grao  $d$  con ese número de singularidades, considéranse as curvas de grao  $d-2$  en  $\mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_{d-2})$  que ten dimensión:

$$\binom{d-2+2}{2} - 1 = \frac{d!}{2!(d-2)!} - 1 = \frac{d(d-1)}{2} - 1 = \frac{d^2 - d - 2}{2}.$$

Imponse a estas curvas pasar por tales puntos singulares, de modo que se ten un total de

$$\frac{d^2 - d - 2}{2} - \frac{d^2 - 3d + 4}{2} = \frac{2d - 6}{2} = d - 3$$

puntos libres. Faise que tales curvas pasen por  $d-3$  puntos máis que necesariamente serán lisos. Deste modo obtense unha única curva de grao  $d-2$ ,  $\mathcal{D}$ , pasando polas singularidades con multiplicidade  $\geq 2$  e polos outros  $d-3$  puntos con multiplicidade  $\geq 1$ . Polo tanto en  $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$  existirán, contando multiplicidade, cando menos

$$2 \frac{d^2 - 3d + 4}{2} + d - 3 = d(d-2) + 1 \text{ puntos.}$$

Isto supón unha contradición co teorema de Bezout que di que  $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ , será un total de  $d(d-2)$  puntos contados con multiplicidade.

2. Suponse que  $\mathcal{C}$  ten exactamente  $\frac{1}{2}(d-1)(d-2) = \frac{d^2-3d+2}{2}$  puntos singulares. Úsase o mesmo argumento que antes. No sistema linear  $\mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_{d-2})$  considéranse as curvas que pasan por estes  $\frac{d^2-3d+2}{2}$  puntos e a maiores outros  $\frac{d^2-d+2}{2} - \frac{d^2-3d+2}{2} - 1 = d-3$  puntos lisos de  $\mathcal{C}$ . A dimensión deste sistema linear é polo menos  $\frac{d^2-d+2}{2} - \frac{d^2-3d+2}{2} - (d-3) = 1$  e o número de puntos de intersección de  $\mathcal{C}$  e calquera de tales curvas,  $\mathcal{D}$ , é polo menos:

$$2 \cdot \frac{d^2 - 3d + 2}{2} + (d - 3) = d^2 - 2d - 1 = d(d - 2) - 1$$

Agora, polo teorema de Bezout, a intersección de  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  son un total de  $d(d-2)$  puntos contados con multiplicidade, é dicir, temos un total de  $d(d-2) - 1$  puntos fixos e 1 punto libre. Falta ver que tal sistema linear ten dimensión exactamente 1 ou, o que é o mesmo, é un feixe. Así,  $\mathcal{C}$  ten unha parametrización definida asociando a cada curva  $\mathcal{D}$  do feixe o punto libre de  $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$  (punto residual). Para ver que é un feixe, hai que ter en conta o seguinte lema:

**Lema 3.3.** *Sexa  $\Lambda$  un sistema linear de curvas de dimensión maior ou igual que un, entón equivale:*

1.  $\Lambda$  é un feixe.
2. Existe  $P \in \mathbb{P}^2$  tal que hai unha única curva de  $\Lambda$  pasando por  $P$ .
3. Existen  $P, Q \in \mathbb{P}^2$  tales que non existe en  $\Lambda$  curva algunha que pase por  $P$  e  $Q$  ao mesmo tempo.

*Demostración.* (1)  $\Rightarrow$  (2). Sexa  $P$  un punto que non pasa por algunha das curvas de  $\Lambda$ . As curvas de  $\mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_n)$  que pasan por  $P$  definen un hiperplano  $H_P \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_n)$ . Claramente, pola elección de  $P$ ,  $\Lambda \not\subset H_P$ . Pero, por ser  $\Lambda$  unha recta (pois é un feixe) e  $H_P$  un hiperplano,  $H_P \cap \Lambda$  é un punto. Deste modo, existe unha única curva en  $\Lambda$  pasando por  $P$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3). Sexa  $P \in \mathbb{P}^2$  tal que hai unha única curva en  $\Lambda$  pasando por  $P$ . Tomando un punto  $Q \notin \mathcal{C}$ , non existe curva algunha en  $\Lambda$  que pase por  $P$  e  $Q$  xa que se  $\mathcal{D}$  fose tal, entón todas as do feixe  $[\mathcal{C}] + [\mathcal{D}]$  pasarían por  $P$  (contradición coa unicidade).

(3)  $\Rightarrow$  (1). Demóstrase  $\neg(1) \Rightarrow \neg(3)$ . Supóñase que  $\dim(\Lambda) \geq 2$  ou, o que é o mesmo, que  $\Lambda$  non é un feixe. Para cada par de puntos  $P, Q$  en  $\mathbb{P}^2$  considéranse os hiperplanos  $H_Q$  e  $H_P$ ,  $H_Q \cap H_P$  ten codimensión 2 e a súa intersección con  $\Lambda$  ten dimensión cando menos cero:  $\Lambda \cap H_Q \cap H_P \neq \emptyset$  e existe unha curva pasando por ambos puntos.

□

Con este lema conclúese a demostración: tense que existe unha curva  $\mathcal{D}$ , pasando por  $d(d-2) - 1$  puntos de  $\mathcal{C}$ . Sexan  $P, Q$  dous puntos a maiores en  $\mathcal{C}$ . Unha curva,  $\mathcal{D}$ , que pase a maiores por eses dous puntos interseca a  $\mathcal{C}$  nun total de  $d(d-2) + 1$  puntos contados con multiplicidade (contradicindo o teorema de Bezout). Aplicando agora o lema, o sistema será un feixe.

3. Se  $P_i \in \mathcal{C}$  é un punto singular de orde  $s_i$ , por definición,  $P_i \in \text{Polar}(P, \mathcal{C})$  é un punto singular de orde  $s_i - 1$ . Así, polo teorema de Bezout (*Teorema 0.34*) e a desigualdade fundamental (*Proposición 0.32*), sendo  $\{P_1, \dots, P_t\}$  singularidades de  $\mathcal{C}$  con ordes  $\{s_1, \dots, s_t\}$ , verifícase:

$$\begin{aligned} \deg(\mathcal{C} \cap \text{Polar}(P, \mathcal{C})) = d(d-1) &\geq \sum_{i=1}^t m_{P_i}(\mathcal{C}, \text{Polar}(P, \mathcal{C})) \\ &\geq \sum_{i=1}^t m_{P_i}(\mathcal{C}) \cdot m_{P_i}(\text{Polar}(P, \mathcal{C})) \end{aligned}$$

É dicir,

$$d(d-1) - \sum_{i=1}^t s_i(s_i - 1) \geq 0$$

Facendo algún que outro cálculo e tendo en conta que  $d \geq 2$ , logo  $d-1 > 0$ , obtense o seguinte :

$$\begin{aligned} \frac{d(d-1)}{2} - \sum_{i=1}^t \frac{1}{2} s_i(s_i - 1) \geq 0 &\Rightarrow \frac{d(d-1)}{2} - \sum_{i=1}^t \frac{1}{2} s_i(s_i - 1) + d - 1 \geq d - 1 > 0 \\ &\Rightarrow \frac{d(d-1)+2d-2}{2} - \sum_{i=1}^t \frac{1}{2} s_i(s_i - 1) > 0 \end{aligned}$$

E así chégase á seguinte desigualdade:

$$\frac{(d-1)(d+2)}{2} - \sum_{i=1}^t \frac{1}{2} s_i(s_i - 1) > 0 \quad (3.1)$$

Analízase o termo  $\frac{(d-1)(d+2)}{2}$ : Considérese o sistema linear  $\mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_{d-1})$  de curvas de grao  $d-1$ . Tal sistema ten dimensión  $\binom{n-2+2}{2} - 1 = \frac{(d-1)(d+2)}{2}$ .

Impoñer a unha curva que pase por un punto singular de orde  $s_i - 1$  é impor que todas as parciais de orde estritamente inferior a  $s_i - 1$  se anulen. Para visualizar o número de condicións lineais que se imponen ao pedir que se anulen todas as parciais de orde igual ou inferior a  $s_i - 2$  en  $P$  para o polinomio  $F(x_0, x_1, x_2)$ , faise un cambio de coordenadas proxectivas para que  $P = (0 : 0 : 1)$ . Deste modo, pódese escribir o polinomio como segue:

$$F(x_0, x_1, x_2) = \sum_{i=0}^d F_i(x_0, x_1) x_2^{d-i}$$

sendo  $F_i(x_0, x_1)$  homoxéneo de grao  $i$ . De feito  $F_i(x_0, x_1) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_0} x_0 + \frac{\partial F}{\partial x_1} x_1\right)^i$  e utilizando a fórmula de Euler:

$$d \cdot F(x_0, x_1, x_2) = \frac{\partial F}{\partial x_0} x_0 + \frac{\partial F}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} x_2$$

está claro que a nulidade das parciais de orde dado menor ou igual que  $r$  é equivalente á nulidade dos  $F_r(x_0, x_1)$ , xa que  $F(P_i) = 0$ . Así pois, neste caso, ditas nulidades son en total o número de coeficientes dos  $F_i(x_0, x_1)$  para  $i \leq s_i - 2$ . Agora ben, sendo  $F_i(x_0, x_1)$  homoxéneo de grao  $i$ , tales coeficientes son:

$$\begin{array}{cccccccc}
 1 & & & & & & & & F_0(x_0, x_1) \\
 +2 & & & \frac{\partial F}{\partial x_0}(P) & & \frac{\partial F}{\partial x_1}(P) & & & F_1(x_0, x_1) \\
 +3 & & \frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}(P) & & \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial x_1}(P) & & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(P) & & F_2(x_0, x_1) \\
 \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\
 +s_i - 1 & \frac{\partial^{s_i-2} F}{\partial x_0^{s_i-2}}(P) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial^{s_i-2} F}{\partial x_1^{s_i-2}}(P) & F_{s_i-1}(x_0, x_1)
 \end{array}$$

e a suma será exactamente  $1 + 2 + \dots + s_i - 1 = \frac{s_i(s_i-1)}{2}$ . Deste modo, o sistema linear  $\Sigma$  de curvas de grao  $d - 1$  pasando polas singularidades  $\{P_1, \dots, P_t\}$  de orde de singularidade  $s_i - 1$ , ten dimensión

$$\dim(\Sigma) \geq \underbrace{\frac{(d-1)(d+2)}{2}}_{\dim(\Sigma) \text{ sen restricións}} - \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^t s_i(s_i-1)}_{\text{restricións}} > 0 \tag{3.1}$$

Ademais polo apartado 2 do teorema, sábese que certamente existe tal curva, polo que se dá a igualdade en determinadas curvas e, por (3.1), tense que a dimensión é positiva.

Polo tanto, existe unha curva de grao  $d - 1$  pasando polo  $P_i$  con multiplicidade  $s_i - 1$ . Dado que se ten a desigualdade, existirá unha tal curva pasando por  $\frac{(d-1)(d+2)}{2} - \sum_{i=1}^t \frac{1}{2} s_i(s_i - 1)$  puntos simples, que se denotarán por  $Q_j$ , arbitrariamente escollidos na curva de partida  $\mathcal{C}$ . Sexa entón  $\mathcal{C}'$  tal curva pasando polos  $\{P_1, \dots, P_t\}$  e os  $\{Q_j\}$ . Nótese que tales puntos están na intersección de  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}'$  e, polo teorema de Bezout e novamente a desigualdade fundamental (*Proposición 0.32*):

$$\begin{aligned}
 d(d-1) &\geq \sum_{i=1}^t m_{P_i}(\mathcal{C}, \mathcal{C}') + \sum_j m_{Q_j}(\mathcal{C}, \mathcal{C}') \\
 &\geq \sum_{i=1}^t s_i(s_i - 1) + \frac{(d-1)(d+2)}{2} - \sum_{i=1}^t \frac{1}{2} s_i(s_i - 1) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t s_i(s_i - 1) + \frac{(d-1)(d+2)}{2}
 \end{aligned}$$

Logo  $d(d-1) - \frac{(d-1)(d+2)}{2} \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t s_i(s_i - 1)$  e como  $d(d-1) - \frac{(d-1)(d+2)}{2} = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$  entón

$$\frac{(d-1)(d-2)}{2} \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t s_i(s_i - 1) \Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^t s_i(s_i - 1) \leq (d-1)(d-2)} \tag{3.2}$$

Para a proba da parte final do apartado 3, fíxase  $d$  e considérase en  $\mathbb{A}_{x,y}^2$  a curva de ecuación  $y^d + x^{d-1} = 0$ , e deste modo:

$$\frac{\partial^i}{\partial y^i} (y^d + x^{d-1}) = d(d-1) \dots (d-i) y^{d-i}$$

$$\frac{\partial^i}{\partial x^i}(y^d + x^{d-1}) = (d-1)(d-2) \dots (n-i-1)x^{d-i-1}$$

Así, o punto  $(0, 0)$ , é un punto singular de orde  $d-1$ , pois  $\frac{\partial^i}{\partial y^i}(y^d + x^{d-1}) = \frac{\partial^i}{\partial x^i}(y^d + x^{d-1}) = 0$  para  $i < d-1$  mais, para  $i = d-1$ ,  $\frac{\partial^i}{\partial x^i}(y^d + x^{d-1}) = (d-1)! \neq 0$ . A curva  $y^{d-1} + x^{d-2} = 0$  é polar de  $y^d + x^{d-1} = 0$  con respecto do punto  $P = (\frac{1}{d} : \frac{1}{d-1} : 0)$  xa que

$$\frac{1}{d} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(y^d + x^{d-1}) + \frac{1}{d-1} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(y^d + x^{d-1}) + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial x}(y^d + x^{d-1}) = y^{d-1} + x^{d-2}$$

Polo mesmo argumento, esta curva polar de grao  $d-1$  ten ao  $(0, 0)$  como punto singular de orde  $d-2$ . En consecuencia  $(0, 0)$  é a única singularidade da curva de ecuación  $y^d + x^{d-1}$ .

En definitiva, para todo  $d > 0$ , as curvas de ecuación  $y^d + x^{d-1} = 0$  verifican a igualdade en (3.2), pois ten unha única singularidade de orde  $d-1$ , logo  $\sum^t s_i(s_i - 1) = (d-1)(d-2)$ .

Falta ver que cando se dá a igualdade  $\sum^t s_i(s_i - 1) = (d-1)(d-2)$  entón a curva é racional.

Recórdese que xa se ten argumentado que impoñer a unha curva pasar por unha singularidade de orde  $s_i$ , equivale a establecer un total de  $\frac{s_i(s_i-1)}{2}$  ecuacións lineais.

Considérese entón que  $\{P_1, \dots, P_t\}$  son os puntos singulares dunha curva  $\mathcal{C}$  tales que as condicións a impoñer son o total, é dicir, que se dá a igualdade

$$\sum_{i=1}^t s_i(s_i - 1) = (d-1)(d-2)$$

Considérense en  $\mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]_{d-2})$  as curvas que teñen tales puntos singulares de orde  $s_i$ :  $\{P_1, \dots, P_t\}$ . Isto impón un total de  $\sum_{i=1}^t \frac{1}{2}s_i(s_i - 1)$  condicións que, por hipótese, tal suma é  $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$ .

Agora ben, a dimensión do sistema linear de curvas de grao  $n-2$  é:

$$\binom{d+2-2}{2} - 1 = \frac{d!}{2!(d-2)!} - 1 = \frac{d(d-1)(d-2)!}{2!(d-2)!} - 1 = \frac{d^2 - d - 2}{2} = \frac{(d+1)(d-2)}{2}$$

En consecuencia, existen curvas de grao  $d-2$  tendo ditos puntos singulares e a dimensión do sistema linear é maior ou igual a:

$$\underbrace{\frac{(d+1)(d-2)}{2}}_{\text{dimensión total}} - \underbrace{\frac{(d-1)(d-2)}{2}}_{\text{restricións}} = d-2 = d-3+1$$

Polo tanto, aínda é posible impoñer que tales curvas pasen por  $d-3$  puntos lisos máis. Obtense así un sistema linear de dimensión maior ou igual que un, que pasa por un lugar de puntos fixos de multiplicidade

$$\sum_{i=1}^t s_i(s_i - 1) + d - 3 = (d-1)(d-2) + d - 3 = d^2 - 2d - 1 = d(d-2) - 1$$

onde o primeiro sumando é a contribución das singularidades. Polo teorema de Bezout, a intersección da curva de partida e as curvas de grao  $d - 2$  son un total de  $d(d - 2)$  puntos contados con multiplicidade. Así, tense un punto libre a maiores. Se o sistema linear é un feixe, entón tense unha correspondencia 1-1 entre as curvas do feixe e os puntos da curva  $\mathcal{C}$  que proporciona a parametrización. Próbese entón que o sistema de ditas curvas pasando polos puntos singulares e  $d - 3$  puntos lisos máis é un feixe, é dicir, ten dimensión un. En efecto, de ter dimensión maior ou igual a dous, entón para calquera par de puntos  $P, Q$  en  $\mathcal{C}$ , existirá unha curva  $\mathcal{D}$  de grao  $d - 2$  no sistema linear pasando por tales puntos. Entón  $\mathcal{D}$ , que é unha curva de grao  $d - 2$ , corta á curva  $\mathcal{C}$  (de grao  $d$ ) nun total de  $d(d - 2) - 1 + 2 = d(d - 2) + 1$  puntos contados con multiplicidade, en contradición co teorema de Bezout.

□

Como consecuencia do apartado (3) do teorema anterior, tense que se  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$  é unha curva plana con un total de  $t$  puntos singulares de ordes  $s_1, \dots, s_t$  e se ademais

$$\sum_{i=1}^t s_i(s_i - 1) = (d - 1)(d - 2),$$

entón  $\mathcal{C}$  é unha curva racional. Reescríbese a última igualdade:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^t s_i(s_i - 1) = (d - 1)(d - 2) &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^t \frac{1}{2}s_i(s_i - 1) = \frac{1}{2}(d - 1)(d - 2) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(d - 1)(d - 2) - \sum_{i=1}^t \frac{1}{2}s_i(s_i - 1) = 0 \Leftrightarrow Def(\mathcal{C}) = 0 \end{aligned}$$

Chégase así ao seguinte teorema:

**Teorema 3.4.** *Se unha curva de grao  $d$ ,  $\mathcal{C}$ , con singularidades  $\{P_1, \dots, P_t\}$  e ordes  $\{s_1, \dots, s_t\}$  ten deficiencia nula, entón  $\mathcal{C}$  é racional, é dicir,  $\mathcal{C}$  pódese parametrizar.*

Polo tanto, a deficiencia semella medir o que lle falta a unha curva  $\mathcal{C}$  para ser racional. Nótese que podería ocorrer que unha curva con deficiencia positiva, fose racional. Isto débese a que a deficiencia non é un invariante birracional polo que, aplicando transformacións birracionais á curva de deficiencia positiva, pódese chegar a un modelo con deficiencia nula, logo racional. En consecuencia a curva orixinal sería parametrizable. Chegados a este punto, xorde de forma natural a seguinte pregunta:

**► Baixo que condicións se pode afirmar que se  $\mathcal{C}$  é unha curva racional, entón a súa deficiencia é nula?**

Como resposta a esta pregunta, o xénero aritmético xogará un papel fundamental. Antes de velo será necesario introducir algunha definición e resultado.

**Definición 3.5.** Unha *transformación cuadrática* do plano, é unha aplicación racional definida por un sistema linear 2-dimensional de cónicas. En concreto, farase uso das chamadas *transformacións cuadráticas elementais ou estándar*. O grupo xerado por estas transformacións coñécese como o *grupo das transformacións de Cremona, Bir*( $\mathbb{P}^2$ ). Unha tal transformación está definida do seguinte xeito:

$$\begin{aligned}\phi: \mathbb{P}^2(x_0 : x_1 : x_2) &\longrightarrow \mathbb{P}^2(y_0 : y_1 : y_2) \\ (x_0 : x_1 : x_2) &\longrightarrow (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1)\end{aligned}$$

Polo tanto  $\phi$  deixa de estar definida onde  $\phi(P) = 0 \notin \mathbb{P}^2$ , é dicir, nos *puntos fundamentais*:  $P_0 = (1 : 0 : 0)$ ,  $P_1 = (0 : 1 : 0)$ ,  $P_2 = (0 : 0 : 1)$ . Tales puntos xeran un triángulo chamado *triángulo referencial*. Habitualmente, denotaranse por  $a$ ,  $b$  e  $c$  os lados do triángulo.

Nas rectas do triángulo referencial tense: para a recta  $x_0 = 0$ , os puntos  $(0 : \lambda : \mu)$  con  $\lambda, \mu \neq 0$ , mediante a transformación cuadrática elemental, son enviados en  $(\lambda\mu : 0 : 0) = (1 : 0 : 0) = P_0$ . Analogamente, a recta  $x_1 = 0$  proxéctase en  $P_1$  e a recta  $x_2$  en  $P_2$ . En resumo, cada recta contráese no vértice oposto.

Fóra do triángulo referencial, é dicir, onde  $x_0x_1x_2 \neq 0$ :

$$(x_0 : x_1 : x_2) \xrightarrow{\phi} (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1) \xrightarrow{\phi} (x_0^2x_1x_2 : x_0x_1^2x_2 : x_0x_1x_2^2)$$

Agora ben,  $x_0x_1x_2 \neq 0$ , en consecuencia  $\frac{1}{x_0x_1x_2} \neq 0$ , logo

$$(x_0^2x_1x_2 : x_0x_1^2x_2 : x_0x_1x_2^2) = \frac{1}{x_0x_1x_2}(x_0^2x_1x_2 : x_0x_1^2x_2 : x_0x_1x_2^2) = (x_0 : x_1 : x_2)$$

Acábase de ver que no aberto  $U = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 : x_0x_1x_2 \neq 0\}$ ,  $\phi$  é inversa de si mesma:  $\phi = \phi^{-1}$ . Este feito permite dar unha interpretación á indeterminación dos puntos fundamentais. Pódese dicir que  $P_0$ ,  $P_1$  e  $P_2$  *explotan* mediante  $\phi$  nas rectas que son os lados opostos do triángulo referencial.

Considérese o punto fundamental  $P_0 = (1 : 0 : 0)$  e sexa  $\mathcal{C}$  unha curva irreducible de grao  $n$ , pasando por  $P_0$ , con recta tanxenta  $ax_1 + bx_2 = 0$ . A ecuación de  $\mathcal{C}$  será da forma:

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_0^{n-1}(ax_1 + bx_2) + x_0^{n-2}\varphi_2(x_1, x_2) + \dots = 0$$

onde  $\varphi_2(x_1, x_2)$  é homoxéneo de grao dous. Aplícase a transformación cuadrática  $x_0 = y_1y_2$ ,  $x_1 = y_0y_2$ ,  $x_2 = y_0y_1$  e así a transformada total de  $\mathcal{C}$  ten ecuación:

$$\begin{aligned}F(y_1y_2, y_0y_2, y_0y_1) &= (y_1y_2)^{n-1}(ay_0y_2 + by_0y_1) + (y_1y_2)^{n-2}\varphi_2(y_0y_2, y_0y_1) + \dots \\ &= y_0(y_1y_2)^{n-1}(ay_2 + by_1) + y_0^2(y_1y_2)^{n-2}\varphi_2(y_2, y_1) + \dots = 0\end{aligned}$$

Esta curva transformada ten unha compoñente que se corresponde coa recta  $y_0 = 0$  e unha compoñente residual que se denomina *transformada propia ou estrita de  $\mathcal{C}$*  e vén dada pola ecuación:

$$\overline{\phi(\mathcal{C} - \{P_0\})} := (y_1y_2)^{n-1}(ay_2 + by_1) + y_0(y_1y_2)^{n-2}\varphi_2(y_2, y_1) + \dots = 0$$

Se agora se considera  $P \in \mathcal{C}^n$ , un punto singular de orde  $s$ , sempre é posible escoller un triángulo referencial de forma que  $P = P_0$  e que as rectas  $\overline{P_0P_1}$  e  $\overline{P_0P_2}$  corten a  $\mathcal{C}$  en puntos distintos e lisos, sen ter en conta a  $P_0$ . Ademais, pedirase tamén que as rectas  $\overline{P_0P_1}$  e  $\overline{P_0P_2}$ , non sexan tanxentes principais ao punto  $P_0$ . Será posible escoller tamén,  $\overline{P_1P_2}$  de forma que a curva de partida,  $\mathcal{C}^n$ , non pase por  $P_1$  nin por  $P_2$ . Deste xeito, a transformada estrita, obtida pola transformación cuadrática definida polas cónicas pasando por  $P_0, P_1$  e  $P_2$ , ten un punto múltiple ordinario en  $P_0$  de multiplicidade  $n$ , puntos múltiples de orde  $n - s$  en  $P_1$  e  $P_2$  e  $s$  puntos simples en  $\overline{P_1P_2}$ . É dicir, tres novos puntos múltiples, mais ordinarios. Mediante este procedemento, obtense o seguinte resultado:

**Teorema 3.6** (Teorema de Noether). *Toda curva irreducible plana,  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$ , de grao  $n$  e con puntos singulares (en xeral non ordinarios) admite un modelo birracional que é a transformada estrita sucesiva de  $\mathcal{C}^n$  por transformacións cuadráticas estándar que posee unicamente puntos singulares ordinarios como singularidades.*

*Proba.* Sexa  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$  unha curva plana de grao  $n$  e  $P \in \mathcal{C}$  un punto singular de orde  $s$ , non necesariamente ordinario. Denótanse por  $\{Q_j\}$ , os restantes puntos singulares con ordes  $q_j$ . Aplícase unha transformación cuadrática estándar de xeito que:

1.  $P = P_0$  é punto fundamental.
2. Escóllense como  $a$  e  $b$  dúas rectas pasando por  $P_0$  tales que ningunha delas é tanxente principal no cono tanxente a  $\mathcal{C}$  en  $P$  e tampouco une  $P$  con calquera outro punto singular  $Q_j$  de  $\mathcal{C}$ . Así,  $a$  e  $b$  cortan á curva nun total de  $n - s$  puntos lisos distintos. Escóllese unha terceira recta  $c$  de xeito que corte a  $\mathcal{C}$  en  $n$  puntos lisos distintos que non están sobre as rectas  $a$  e  $b$ . Ademais  $a \cap c =: P_1$  e  $b \cap c =: P_2$ . En particular,  $P_1$  e  $P_2$  non son puntos da curva.
3. Respecto do triángulo referencial de vértices  $P_0, P_1$  e  $P_2$ ; sendo  $a = \overline{P_0P_1}$ ,  $b = \overline{P_0P_2}$  e  $c = \overline{P_1P_2}$ , considérase a transformación cuadrática definida polas cónicas pasando por  $P_0, P_1$  e  $P_2$ . Sexa  $\mathcal{C}^*$  a transformada estrita por dita transformación cuadrática.

Entón, verifícase o seguinte:

1. Por ser  $P_0$  un punto singular de orde  $s$ ,  $\mathcal{C}$  ten por ecuación

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_0^{n-s} \varphi_s(x_1, x_2) + x_0^{n-s-1} \varphi_{s+1}(x_1, x_2) + \dots = 0$$

logo a súa transformada estrita,  $\mathcal{C}^*$ , será:

$$\mathcal{C}^* = (y_1 y_2)^{n-s} \varphi_s(y_2, y_1) + y_0 (y_1 y_2)^{n-s-1} \varphi_{s+1}(y_2, y_1) + \dots = 0$$

En consecuencia,  $\mathcal{C}^*$  é unha curva de grao  $n' = 2n - s$ .



2. Como os puntos singulares  $Q_j \neq P$  de  $\mathcal{C}$  non se atopan sobre as rectas fundamentais do triángulo referencial, aplícanse isomorficamente en puntos singulares  $Q'_j$  da transformada estrita  $\mathcal{C}^*$  con igual orde de singularidade e, de feito, co mesmo cono tanxente en  $Q_j$  e  $Q'_j$ .
3. Sexa  $\varphi_s(x_1, x_2) = \prod_{i=1}^h (\beta_2^i x_1 - \beta_1^i x_2)^{s_i}$ , onde  $\sum_{i=1}^h s_i = s$ , a ecuación do cono tanxente a  $\mathcal{C}$  en  $P_0$ . A transformada estrita corta ao eixo excepcional  $y_0 = 0$  nos puntos correspondentes a  $\beta_2^i y_2 - \beta_1^i y_1 = 0$  con multiplicidade  $s_i$ . Isto significa que no punto  $(\beta_2^i, \beta_1^i)$ , a recta de ecuación  $y_0 = 0$  corta á transformada estrita con multiplicidade  $s_i$ . Agora ben, en tal punto pode haber para a transformada estrita un punto singular de orde  $s_i$ , e nese caso  $y_0 = 0$  será unha recta pasando de forma transversal polo punto; mais tamén pode ocorrer que o punto singular sexa de orde  $s_i^* < s_i$ , e neste caso a recta  $y_0 = 0$  será tanxente principal pasando por  $P_0$  con multiplicidade  $s_i^* + 1$ . En calquera caso:

$$\sum_{i=1}^h s_i^* \leq \sum_{i=1}^h s_i = s.$$

É dicir, a orde de singularidade de  $P_0$ , repártese en puntos singulares da transformada estrita,  $\{T_1, \dots, T_h\}$  de ordes  $\{s_1^*, \dots, s_h^*\}$ . Algún dos  $T_i$  pode ser ordinario ou non, mesmo liso tendo á recta  $y_0 = 0$  como recta tanxente.

4. En relación comparativa con  $\mathcal{C}$ , a transformada estrita  $\mathcal{C}^*$  posee 3 novos puntos múltiples ordinarios, logo con tanxentes principais distintas nos novos puntos fundamentais  $P'_0, P'_1$  e  $P'_2$  do novo sistema de referencia:  $P'_0$  de orde  $n$ , pois en  $c$  hai  $n$  puntos distintos;  $P'_1$  e  $P'_2$  de ordes  $n - s$  pois as rectas  $a$  e  $b$  conteñen  $n - s$  puntos lisos que se contraen en tales puntos.

De forma explícita, calcúlanse as deficiencias de  $\mathcal{C}$  e de  $\mathcal{C}^*$ :

$$Def(\mathcal{C}) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{1}{2}(s(s-1)) - \frac{1}{2} \sum_j q_j(q_j-1) \quad (3.3)$$

$$\text{No caso de } \mathcal{C}^*, \text{ tense: } \begin{cases} P'_0 \text{ singular de orde } n. \\ P'_1 \text{ e } P'_2 \text{ singulares de orde } n - s. \\ Q'_j \text{ e } \{T_1, \dots, T_h\} \text{ singulares de ordes } q_j \text{ e } \{s_1^*, \dots, s_h^*\} \text{ t.q. } \sum_{i=1}^h s_i^* \leq s. \end{cases}$$

Así:

$$Def(\mathcal{C}^*) = \frac{(n'-1)(n'-2)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{1}{2}(s(s-1)) - 2\frac{(n-s)(n-s-1)}{2} - \frac{1}{2} \sum_j q_j(q_j-1) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^h s_i^*(s_i^*-1)$$

Tendo en conta que  $n' = 2n - s$  e a igualdade (3.3), chégase a que:

$$Def(\mathcal{C}^*) = Def(\mathcal{C}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^h s_i^*(s_i^*-1).$$

É dicir,  $Def(\mathcal{C}^*) \leq Def(\mathcal{C})$ . Máis concretamente,  $Def(\mathcal{C}^*) < Def(\mathcal{C})$ , precisamente se existe  $i \in \{1, \dots, h\}$  tal que  $s_i \geq 2$  e  $Def(\mathcal{C}^*) = Def(\mathcal{C})$  se e só se  $s_i = 1 \forall i \in \{1, \dots, h\}$ .

Deste modo, mediante o proceso descrito de aplicar transformacións cuadráticas e como a deficiencia é non negativa, nun número finito de pasos a descomposición de  $P$  en puntos  $T_1, \dots, T_h$  será tal que  $s_i = 1 \forall i \in \{1, \dots, h\}$ . En conclusión,  $P$  produce puntos lisos na transformada estrita  $\mathcal{C}^*$ , logo  $\mathcal{C}^*$  ten ao sumo puntos singulares ordinarios.  $\square$

**Corolario 3.7.** *Toda curva alxébrica ten un modelo birracional plano unicamente formado por singularidades ordinarias. Supóñase que tal modelo é  $\mathcal{C}$ . Entón  $\mathcal{C}$  estará formado por  $\{P_1, \dots, P_k\}$  singularidades ordinarias de ordes  $\{s_1, \dots, s_k\}$ . Aplicando transformacións cuadráticas nos  $P_i$  obtense unha serie transformadas estritas  $\mathcal{C}_1^*, \dots, \mathcal{C}_k^*$  tales que  $Def(\mathcal{C}_1^*) = \dots = Def(\mathcal{C}_k^*)$ .*

A deficiencia do corolario anterior, é o que se coñece como *xénero aritmético* da curva:

**Definición 3.8** (Xénero aritmético). Sexa  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$  unha curva alxébrica plana de grao  $d$  con singularidades ordinarias  $\{P_1, \dots, P_k\}$  de ordes  $\{s_1, \dots, s_k\}$ . Denomínase xénero aritmético de  $\mathcal{C}$  ao número:

$$p_a(\mathcal{C}) := \frac{1}{2}(d-1)(d-2) - \sum_{i=1}^k \frac{1}{2}s_i(s_i-1)$$

Como en xeral a deficiencia dunha curva é maior igual que a deficiencia do seu modelo birracional resultado da aplicación dunha transformación cuadrática estándar, co corolario anterior, implicitamente estase a dicir que o xénero aritmético coincide coa deficiencia mínima dunha curva (realizar máis transformacións cuadráticas estándar polo método de Noether non baixa máis o valor da deficiencia obtido). Neste caso, a diferenza da deficiencia, o xénero aritmético si que é un invariante birracional. Agora, xa é posible dar resposta á pregunta que se facía ao comezo:

**Teorema 3.9.** *Unha curva plana,  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$  é racional se e só se  $p_a(\mathcal{C}) = 0$ .*

*Observación 3.10.* Todos os resultados sobre transformacións cuadráticas, deficiencia, xénero aritmético e caracterización da racionalidade, feitos aquí con todo tipo de detalle, están implícitos no libro de Semple e Roth [SR49], no Capítulo 2 Sección 3 e Capítulo 3.

## 3.2. Teorema de Riemann-Noether

Unha vez introducido o xénero aritmético, comézase expoñendo unha idea clave para a proba do resultado. Finalmente demostrábase; concluíndo así que ambos xéneros, o aritmético e o topolóxico, coinciden. Denotarase por  $\chi(\mathcal{C})$  a característica de Euler-Poincaré da superficie real asociada á curva alxébrica  $\mathcal{C}$ .

► **Idea:** Se  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$  é unha curva alxébrica plana, tendo unicamente nodos como singularidades, existirá unha boa proxección a  $\mathbb{P}^1$ ,  $\pi_{\mathcal{O}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$ , construída como no Capítulo 2. Se  $d$  é o grao da curva,  $\nu$  o número de nodos e, se para a proxección  $\pi_{\mathcal{O}}$ ,  $\beta$  é o número de puntos de ramificación en  $\mathbb{P}^1$ , entón:

$$(i) \quad \boxed{p_a(\mathcal{C}) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \nu} \quad (ii) \quad \boxed{d(d-1) = \beta + 2\nu} \quad (iii) \quad \boxed{\chi(\mathcal{C}) = 2d - \beta}$$

Considerando o modelo non singular (liso) de  $\mathcal{C}$ , sexa  $\tilde{\mathcal{C}} \subset \mathbb{P}^n$ , e pensando na superficie real compacta e orientable que representa, defínese o xénero topolóxico de  $\mathcal{C}$  como o do seu modelo liso  $\tilde{\mathcal{C}}$  e, coherentemente, a característica de Euler de  $\mathcal{C}$  é  $\chi(\mathcal{C}) = \chi(\tilde{\mathcal{C}}) = 2 - 2g(\tilde{\mathcal{C}})$ . Pois ben, partindo das tres igualdades antes expostas, obtense:

$$\begin{aligned} p_a(\mathcal{C}) &= \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \nu = \frac{\overbrace{d(d-1)}^{\beta+2\nu} - 2d+2-2\nu}{2} \stackrel{(ii)}{=} \frac{\beta+2\nu-2d+2-2\nu}{2} \\ &= \frac{\overbrace{2-(2d-\beta)}^{\chi(\tilde{\mathcal{C}})}}{2} \stackrel{(iii)}{=} \frac{2-\chi(\tilde{\mathcal{C}})}{2} \Leftrightarrow 2 - 2p_a(\mathcal{C}) = \chi(\tilde{\mathcal{C}}) \end{aligned}$$

Agora ben,  $\chi(\mathcal{C}) = \chi(\tilde{\mathcal{C}}) = 2 - 2g(\tilde{\mathcal{C}})$ , logo  $2 - 2p_a(\mathcal{C}) = 2 - 2g(\tilde{\mathcal{C}})$  e, en consecuencia, quedaría probado que:

$$\boxed{p_a(\mathcal{C}) = g(\tilde{\mathcal{C}})}$$

Así, a proba da igualdade dos xéneros, redúcese a probar as tres igualdades (i), (ii) e (iii).

A igualdade (i) é directamente a definición de xénero aritmético, anteriormente introducida. No caso da igualdade (ii) xa foi demostrada no Capítulo 2. En concreto no apartado 4 do *Teorema 2.7*. Chegados a este punto, tan só queda probar a igualdade (iii), para o que se enuncia o seguinte teorema.

**Teorema 3.11.** *Sexa  $\tilde{\mathcal{C}} \subset \mathbb{P}^n$  unha curva lisa que se proxecta ao plano nunha curva,  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$  de forma que  $\mathcal{C}$  tan só ten nodos como singularidades. Se  $\tilde{\mathcal{C}}$  ten grao  $d$ , entón  $\mathcal{C}$  ten tamén grao  $d$ . Proxectase xenericamente  $\mathcal{C}$  a  $\mathbb{P}^1$  (tal e como se describe no Capítulo 2) de xeito que existen  $\beta$  puntos lisos en  $\mathcal{C}$  que son de ramificación para a proxección. En tal caso*

$$\chi(\tilde{\mathcal{C}}) = 2d - \beta$$

*Proba.* Considérase  $\tilde{\mathcal{C}} \subset \mathbb{P}^n \xrightarrow{\pi_1} \mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2 \xrightarrow{\pi_{\mathcal{O}}} \mathbb{P}^1$  e denótanse por  $Q_1, \dots, Q_\nu$  os nodos de  $\mathcal{C}$ .

Como os  $Q_1, \dots, Q_\nu$  son nodos (puntos dobres ordinarios), entón  $\pi_1^{-1}(Q_i) = \{Q_i^1, Q_i^2\}$ . Ademais, existen sendas veciñanzas  $U_i^1 \ni Q_i^1$  e  $U_i^2 \ni Q_i^2$  tales que

$$\pi_1: U_i^1 \rightarrow \pi_1(U_i^1) \quad \text{e} \quad \pi_1: U_i^2 \rightarrow \pi_1(U_i^2)$$

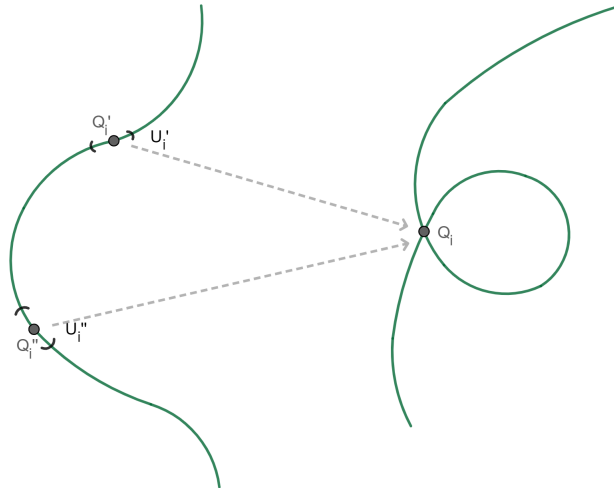


Figura 3.2: Ilustración de como actúa a proxección  $\pi_1$ .

son isomorfismos.

Para calquera outro punto  $P' \neq Q_i$  tense que  $P'$  é liso para  $\mathcal{C}$  e  $\pi_1^{-1}(P') = \{P\}$ . Existe un entorno  $U_P \ni P$  tal que

$$\pi_1: U_P \longrightarrow \pi_1(U_P)$$

é un isomorfismo.

Considérase o revestimento  $\pi_{\mathcal{O}}: \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{P}^1$  e sexan  $\{P'_1, \dots, P'_\beta\}$  os puntos de ramificación para  $\pi_{\mathcal{O}}$ . Por ser lisos, correspóndense biunivocamente con outros  $\{P_1, \dots, P_\beta\}$  puntos de  $\mathcal{C}$  tales que  $\pi_1(P_j) = P'_j$ . Sexan  $\pi_{\mathcal{O}}(P'_j) = t_j \in \mathbb{P}^1$ , como cada  $P'_j$  con  $j = 1, \dots, \beta$  é un punto de ramificación para  $\pi_{\mathcal{O}}$ , tense que  $\overline{\mathcal{O}P'_j}$  é tanxente a  $\mathcal{C}$  en  $P'_j$  e que cortará á curva noutros  $d-2$  puntos distintos. Polo que  $\pi_{\mathcal{O}}^{-1}(t_j) = \{2P'_j, P_j^{(1)}, \dots, P_j^{(d-2)}\}$  e, en consecuencia,  $\#(\pi_{\mathcal{O}}^{-1}(t_j)) = d-1$ . Se  $t \neq t_j$  para  $j = 1, \dots, \beta$ , entón  $\pi_{\mathcal{O}}^{-1}(t)$  serán  $d$  puntos distintos.

Interprétanse a continuación  $\mathbb{P}^1$  e  $\tilde{\mathcal{C}}$  como superficies reais compactas, conexas e orientables. Calcúlase a característica,  $\chi(\tilde{\mathcal{C}})$ , calculando explicitamente unha triangulación en  $\mathbb{P}^1$  e levantándoa a  $\tilde{\mathcal{C}}$  mediante  $\pi := \pi_{\mathcal{O}} \circ \pi_1: \tilde{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ . Neste levantamento interveñen:

1. O grao  $d$  da curva  $\mathcal{C}$ , que coincide co número de imaxes recíprocas distintas dun  $t \in \mathbb{P}^1$  que non é imaxe dun punto liso de ramificación.
2. O grao  $d$  da curva que nos puntos de ramificación de  $\pi$  aumenta cada un destes puntos en dous confundidos.

Aplicarase isto no cálculo de  $\chi(\tilde{\mathcal{C}})$  en función de  $d$  e  $\beta$ . Tómase unha triangulación en  $\mathbb{P}^1$  de forma que os  $t_j = \pi_{\mathcal{O}}(P'_j)$ ,  $j = 1, \dots, \beta$  están entre os vértices da triangulación. Supóñase que en

$\mathbb{P}^1$  se teñen  $s_0$  vértices,  $s_1$  lados e  $s_2$  caras definindo a triangulación  $T$ . Sexa  $V_i$  un vértice na triangulación  $T$ . Este dá lugar a  $\#(\pi^{-1}(V_i))$  vértices na triangulación  $\pi^{-1}(T)$  de  $\mathcal{C}$ :

1. Se  $V_i$  non coincide con algún  $t_j$ ,  $j = 1, \dots, \beta$ , imaxe dun punto de ramificación, entón  $\pi^{-1}(V_i)$  consistirá exactamente en  $d$  vértices distintos.
2. Se  $V_j = t_j$  para algún  $j = 1, \dots, \beta$ , dous dos  $d$  puntos en  $\pi^{-1}(V_j)$  confúndense nun punto, perdéndose así un vértice.

Deste xeito, como na triangulación  $T$  hai un total de  $s_0$  vértices, en  $\pi^{-1}(T)$  existirán un total de  $ds_0 - \beta$  vértices.

Considérese calquera lado na triangulación  $T$ . Denotarase por  $f: \Delta' \rightarrow \mathbb{P}^1$  á parametrización do lado. Excluindo os vértices, tense  $f_0: \Delta'_0 := \text{Int}(\Delta') \rightarrow \mathbb{P}^1$ , que está formado por puntos de non ramificación para  $\pi$ . En consecuencia, cada lado  $f_0$  proporciona un total de  $d$  lados diferentes na triangulación  $\pi^{-1}(T)$ . Como  $\pi: \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbb{P}^1$  é unha aplicación entre variedades proactivas, é propia (conserva pechados e abertos). O feito de que  $\pi$  sexa non ramificado implica que  $f_0$  induce un total de  $d$  lados parametrizados por  $f^i: \Delta'_i \rightarrow \mathbb{P}^1$ . Os lados resultan de estender de forma única  $f_0^i: \text{Int}(\Delta'_i) \rightarrow \mathbb{P}^1$ ,  $i = 1, \dots, d$ . En definitiva, como en  $T$  se ten un total de  $s_1$  lados, na triangulación  $\pi^{-1}(T)$ , hai un total de  $ds_1$  lados distintos. O mesmo argumento é válido coas caras. Así,  $\pi^{-1}(T)$  ten un total de  $ds_2$  caras. Finalmente, calcúlase a característica de Euler-Poincaré como  $V - L + C$  onde  $V$ ,  $L$  e  $C$  son os vértices, os lados e as caras da triangulación, respectivamente.

$$\begin{aligned} \chi(\tilde{\mathcal{C}}) &= (ds_0 - \beta) - ds_1 + ds_2 = d(s_0 - s_1 + s_2) - \beta \\ &= d\chi(\mathbb{P}^1) - \beta = d\chi(\mathbb{S}^2) - \beta = 2d - \beta. \end{aligned}$$

□

*Observación 3.12.* Como  $\mathbb{P}^1$  e  $\mathbb{S}^2$  son homeomorfos, e a característica de Euler-Poincaré é un invariante topolóxico, entón  $\chi(\mathbb{P}^1) = \chi(\mathbb{S}^2)$ . Agora ben, topoloxicamente, unha esfera con  $g$  asas (superficie orientable de xénero  $g$ ), ten característica de Euler-Poincaré  $\chi = 2 - 2g$ . Para a esfera,  $g = 0$ , logo  $\chi(\mathbb{P}^1) = \chi(\mathbb{S}^2) = 2$ .

### 3.3. Xénero xeométrico dunha curva plana

**Definición 3.13.** Sexa  $\mathcal{C}^n \subset \mathbb{P}^2$  unha curva alxébrica plana de grao  $n$ , con puntos singulares  $\{P_1, \dots, P_k\}$ , con ordes de multiplicidade  $s_1, \dots, s_k$ . Dise que unha curva de grao  $m$ ,  $\mathcal{C}^m$ , é *adrunta á curva  $\mathcal{C}^n$* , precisamente se  $\mathcal{C}^m$  pasa por cada punto  $P_i$  con multiplicidade  $s_i - 1$ .

En relación a este concepto tense o seguinte resultado.

**Teorema 3.14** ([BK86]). *Sexa  $C^n \subset \mathbb{P}^2$  unha curva de grao  $n$  con puntos singulares  $\{P_1, \dots, P_k\}$  de ordes de singularidade  $\{s_1, \dots, s_k\}$ . Sexa  $\mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_m)$  o sistema linear de curvas de grao  $m$ . Imponse nunha curva xeral,  $C^m \subset \mathbb{P}^2$ , as condicións de ser adxunta a  $C^n$ . Entón:*

►  $C^m$  pasando por  $P_i$  con multiplicidade  $s_i - 1$  (cando  $m \geq n - 3$ ) para cada  $i = 1, \dots, k$ ; son independentes e o sistema linear de tales curvas ten dimensión  $p_g - 1$ , onde  $p_g$  é o xénero xeométrico dado por

$$p_g = \frac{1}{2}m(m-3) + 1 - \sum_{i=1}^k \frac{1}{2}s_i(s_i-1) = \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - \sum_{i=1}^k \frac{1}{2}s_i(s_i-1).$$

*Observación 3.15.* Cando  $C^n$  é unha curva de grao  $n$  con  $\{P_1, \dots, P_k\}$  puntos singulares ordinarios de multiplicidades  $\{s_1, \dots, s_k\}$ , o xénero aritmético de  $C^n$  vén dado por

$$p_a(C^n) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \sum_{i=1}^k \frac{1}{2}s_i(s_i-1)$$

Agora ben,  $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) = \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 2) = \frac{1}{2}n(n-3) + 1$  e, ademais,  $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) = \frac{(n-1)!}{2!(n-3)!} = \binom{n-3+2}{2}$ . O último número combinatorio resulta ser a dimensión do espazo vectorial de polinomios homoxéneos de grao  $n-3$  e variables  $x_0, x_1$  e  $x_2$ . O xénero aritmético,  $p_a(C^n) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \sum_{i=1}^k \frac{1}{2}s_i(s_i-1)$  vén sendo a dimensión do espazo vectorial dos polinomios adxuntos de grao  $n-3$  a unha curva de grao  $n$  con singularidades  $\{P_1, \dots, P_k\}$  e multiplicidades  $\{s_1, \dots, s_k\}$ .

Noether demostrou o seguinte resultado:

**Teorema 3.16** (de Noether, [MN83]). *Sexan  $\{\phi_1, \dots, \phi_p\}$  polinomios onde  $p = p_a(C^n)$ , sendo  $C^n$  unha curva plana de grao  $n$  con singularidades ordinarias  $\{P_1, \dots, P_k\}$  de multiplicidades  $\{s_1, \dots, s_k\}$ :*

1. *Tales polinomios pódense construír mediante operacións racionais.*
2. *Tales polinomios describen unha base do espazo de 1-formas diferenciábeis holomorfas na superficie de Riemann asociada a  $C^n$ .*

A demostración pode verse en *Brieskorn-Knörrer* [BK86] páxinas 630-634 como o seguinte teorema:

**Teorema 3.17.** *Sexa  $C$  unha curva alxébrica plana irreducible de grao  $n$  con ecuación afín  $f(x, y) = 0$ . Escóllense coordenadas de xeito que  $\frac{\partial f}{\partial y}$  non é idénticamente nula. Sexa  $\tilde{C}$  a superficie de Riemann asociada ao modelo non singular de  $C$ . As 1-formas diferenciábeis non nulas de primeira especie (holomorfas) en  $\tilde{C}$  son da forma*

$$\frac{\phi(x, y)dx}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}$$

sendo  $\phi(x, y) = 0$  a ecuación dunha curva adxunta a  $\mathcal{C}$  de grao  $n - 3$ . Polo tanto, o espazo de 1-formas diferenciáveis de primeira especie en  $\tilde{\mathcal{C}}$  ten dimensión  $p_a(\mathcal{C})$ , o xénero aritmético de Clebsch-Noether.

En definitiva, considerando para unha curva alxébrica plana  $\mathcal{C}^n \subset \mathbb{P}^2$  de grao  $n$  os conceptos de xénero seguintes:

- **Xénero topolóxico**,  $g$ : como o xénero topolóxico da superficie de Riemann asociada que é a superficie real, conexas, compacta e orientable asociada ao modelo non singular de  $\mathcal{C}$ .
- **Xénero aritmético de Clebsch-Noether**,  $p_a(\mathcal{C})$ : como o xénero aritmético dun modelo plano con singularidades ordinarias de  $\mathcal{C}$ . Sexa tal modelo con  $\{P_1, \dots, P_k\}$  puntos singulares ordinarios de multiplicidades  $\{s_1, \dots, s_k\}$ , co cal:

$$p_a(\mathcal{C}) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \sum_{i=1}^k \frac{1}{2}s_i(s_i-1).$$

- **Xénero xeométrico de Riemann**,  $p_g(\mathcal{C})$ : trátase da dimensión do espazo de 1-formas diferenciáveis de primeira especie, asociado á superficie de Riemann  $\tilde{\mathcal{C}}$ .

Téñense os seguintes teoremas que se poden ver no libro de Brieskorn e Knörrer, [BK86] no capítulo 3, sección 9:

**Teorema 3.18** (Fundamental). *Para unha curva alxébrica plana,  $\mathcal{C}^n \subset \mathbb{P}^2$ , de grao  $n$  verificase:*

$$g(\tilde{\mathcal{C}}) = p_a(\mathcal{C}) = p_g(\tilde{\mathcal{C}})$$

*Observación 3.19.* Aínda hai unha caracterización de xénero xeométrico máis interesante que conduce ao chamado *Teorema de Riemann-Roch*. Esta definición de xénero débese a Weierstrass e permite obter o modelo canónico non singular dunha curva alxébrica.

**Teorema 3.20** (Desigualdade de Riemann). *Sexa  $X$  unha curva proactiva non singular sobre  $\mathbb{C}$ . Sexa  $D$  un divisor en  $X$  ( $D = \sum_{i=1}^k n_i P_i : P_i \in X, n_i \in \mathbb{Z}$ ). Existe un enteiro  $p$  tal que, para todo divisor  $D$  en  $X$ ,*

$$\dim(L(D)) \geq \deg(D) + 1 - p.$$

*O menor de tales  $p$  é o xénero da curva que aparece no teorema fundamental e*

$$L(D) = \{f \in K(\mathbb{C})^* \text{ tal que } D + \text{div}(f) \geq 0\} \cup \{0\}$$

*é o chamado espazo de Riemann-Roch asociado ao divisor  $D$ . Téndose que a proactivización :*

$$\mathbb{P}(L(D)) =: |D| = \{D' \sim D, D' \geq 0\}$$

*é o sistema linear e completo de divisores efectivos asociado ao divisor  $D$ .*

A importancia de obter deste xeito a desigualdade de Riemann, leva a Noether e ao seu discípulo Brill a distinguir dúas clases de 0-ciclos ou divisores nunha curva proxectiva non singular. Por unha banda, os que satisfán a igualdade na desigualdade de Riemann. Tales divisores dinse *divisores non especiais*, e aqueles onde certamente se dá a desigualdade. Neste caso os divisores chámanse *especiáis* e o termo corrector para obter a  $\dim(L(D))$  é o chamado *índice de especialidade do divisor  $D$* . Foi identificado inicialmente por Roch. Brill e Noether deron unha interpretación xeométrico-proxectiva deste índice. A *teoría de Brill-Noether de divisores especiais sobre unha curva lisa  $C$*  é un dos campos máis interesantes da xeometría alxébrica, e de feito segue aberto o problema de clasificar os fibrados especiáis sobre unha curva lisa.



# Bibliografía

- [A24] Albanese, G. (1924). *Trasformazione birazionale di una curva algebrica qualunque in un'altra priva di punti multipli*, Rend. R. Acc. Naz. Lincei (V) **33-I**, (13-14).
- [B23] Bertini, E. (1923). *Geometria Proiettiva degli Iperspazi*, Casa Editrice Giuseppe Principato. Messina.
- [BK86] Brieskorn, E. Knörrer. (1986). *Plane Algebraic Curves*, Birkhäuser, Basel.
- [JC31] Coolidge, J. (1931). *A treatise on Algebraic Plane Curves*, Oxford University Press.
- [WF71] Fulton, W. (1971) *Algebraic curves: an introduction to algebraic geometry*, Benjamin.
- [RH77] Hartshorne, R. (1977). *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. **52**. Springer Verlag. New York.
- [K77] Kendig, K. (1977). *Elementary Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. **44**. Springer Verlag. New York.
- [DM76] Mumford, D. (1976). *Algebraic Geometry I. Complex Projective Varieties*, Classics in Mathematics. Springer-Verlag. New York.
- [MN83] Noether, M. (1883). *Zur Grkkundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven.*, Universitext., Verlag der Königlichen Akademie der Wissenschaften, Berlin.
- [MR88] Reid, M. (1988). *Undergraduate Algebraic Geometry*, Cambridge University Press.
- [BR57] Riemann, B. (1857). *Theorie der Abel'schen Functionen*, Journal Für Reine und Angew. Math. Bd. , Nr. **14**, (115-155).
- [SR49] Semple, J.G.; Roth, L. (1949). *Introduction to Algebraic Geometry*, Clarendon Press. Oxford. Edición de 1986.
- [SH88] Shafarevich, I. (1988). *Basic Algebraic Geometry*, Vol.1. Springer-Verlag