FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Series de Fourier diverxentes

Alberto Rodríguez Fernández

2021/2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Series de Fourier diverxentes

Alberto Rodríguez Fernández

Julio, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Análise Matemático
Título: Series de Fourier diverxentes
Breve descrición do contido
Neste traballo farase un repaso á teoría básica das series de Fourier e unha introducción á análise funcional para demostrar, empregando o principio de limitación uniforme, a existencia de funcións continuas con serie de Fourier diverxente.
Recomendacións
Outras observacións

Índice xeral

Resumo

O obxectivo deste traballo, recollido no propio título, é a demostración da existencia de series de Fourier diverxentes. O documento estrutúrase en tres partes diferenciadas. A primeira na que se realiza un achegamento á teoría básica de series de Fourier, incluíndo definicións e resultados sobre converxencia das mesmas, e na que tamén se construirá unha función continua con serie diverxente. O segundo capítulo dedicarase ao desenvolvemento de conceptos e propiedades propias da Análise Funcional que nos permitirán demostrar o Principio de Limitación Uniforme. No terceiro capítulo realizarase unha demostración non constructiva da existencia de ditas series.

Abstract

The objective of this essay, as indicated in the title, is to prove the existence of divergent Fourier series. The document is structured in three differentiated parts. In the first part, the basis of Fourier series theory is introduced, including definitions, results and their convergence, as well as the construction of a continuous function for which the Fourier series diverges. The second chapter is dedicated to the development of concepts and properties of Functional Analysis that will act as proof for the Uniform Boundedness Principle. Last, in the third chapter, a non-constructive proof for the existence of such series is performed.

Introdución

"*Os métodos de Fourier non son só un dos resultados máis fermosos da Análise moderna, senón que pode dicirse ademais que proporcionan un instrumento indispensable no tratamento de case todas as cuestións fundamentais da Física actual, por recónditas que sexan*". Lord Kelvin

O nacemento e a evolución histórica do que hoxe coñecemos como análise de Fourier constitúen un fermoso exemplo de como, co traballo e a investigación de físicos e matemáticos arredor dun problema concreto, xorde unha teoría científica que nos proporciona unha ferramenta moi poderosa para a resolución de problemas complexos. O estudo posterior das limitacións e propiedades deste elemento matemático (a serie de Fourier dunha función) permitiu avanzar considerablemente no campo da análise funcional.

O que hoxe coñecemos como serie de Fourier dunha función nace como resultado do traballo de varios matemáticos na resolución de dous problemas concretos: o problema da corda vibrante e o problema de propagación do calor. O primeiro deles tiña como obxectivo o cálculo da posición de cada punto dunha corda, fixada nos seus extremos, logo de tensala ata adoptar a forma dunha función inicial $f(x)$ e soltala posteriormente. Foi D'Alembert quen modelizou este problema como unha ecuación en derivadas parciais de segundo orde, demostrando ademais que a posición da corda en cada momento t estará completamente determinada pola súa posición inicial. Euler resolveu o problema dun xeito semellante, aínda que discrepaba con D'Alembert en canto ás condicións que debería ter a función inicial $f(x)$. Daniel Bernouilli abordou este problema dun xeito distinto, describindo a solución como superposición de ondas máis sinxelas, concretamente do tipo

$$u_n(x,t) = \operatorname{sen}(nx)\cos(nt),\ \forall n \in \mathbb{N},$$

obtendo así unha función solución que se pode representar como unha suma infinita

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nx)\cos(nt).$$

Esta perspectiva de Bernouilli sobre o problema da corda vibrante foi importantísima no estudo, por parte de Fourier, do problema de propagación da calor. Este problema defínese partindo dunha variña de lonxitude dada, illada lateralmente e cos seus extremos a temperatura constante de $0°$ centígrados. Se a distribución inicial da temperatura na variña vén dada pola función $f(x)$, cal será a temperatura en cada punto x nun instante t?

Seguindo o método empregado por Bernouilli na resolución do problema da corda vibrante, Fourier afirmou que, para calquera condición inicial f, era posible atopar unha solución do tipo

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 t) \operatorname{sen}(nx),$$

obtendo tamén a fórmula que permitía calcular os coeficientes a_n, chamados desde entón coeficientes de Fourier. A partir dos estudos de Fourier, a resolución de moitos problemas de natureza periódica levaban a preguntarse se para unha función dada f, definida en $[-\pi,\pi]$, era posible obter un desenvolvemento do tipo

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \ , \ x \in [-\pi,\pi].$$

As respostas a este interrogante levaron aos matemáticos a formular cuestións sobre esta serie, chamada serie de Fourier da función f. Como calcular os coeficientes a_n e b_n? En que sentido temos a converxencia da serie anterior? Que problemas permite resolver este tipo de desenvolvemento? En que punto ou puntos pode darse a diverxencia desta serie?

Dirichlet foi o primeiro matemático en demostrar a converxencia da serie de Fourier no caso de que a función f tivese un conxunto finito de máximos e mínimos, estando as demostracións posteriores sobre a converxencia da serie baseadas no seu traballo. Nos anos posteriores á publicación do traballo de Dirichlet, a comunidade matemática aceptaba, sen estar demostrado, que a continuidade debería ser condición suficiente para a converxencia da serie de Fourier.

Non obstante, algúns matemáticos como Riemann ou Weiestrass iniciaron o estudo dalgunhas funcións 'raras', continuas en todo punto e non derivables en ningún, que marcou o camiño á procura de contraexemplos que desbotasen a idea da suficiencia desta condición de continuidade. A finais do século XIX, Du Bois-Raymond presentou o primeiro exemplo de función continua con serie de Fourier diverxente nun punto concreto. Tamén chegou a construír un exemplo dunha función continua cuxa serie de Fourier diverxía nun conxunto denso, abrindo o problema de investigación acerca de en cantos puntos pode non ser converxente a serie de Fourier dunha función continua.

Foi no século XX cando o desenvolvemento da Análise Funcional proporcionou as ferramentas axeitadas para abordar o estudo das series de Fourier nun marco teórico abstracto, permitindo o estudo detallado das súas propiedades, da converxencia da mesma e tamén das características dos puntos e conxuntos nos que non se dá dita converxencia. O lector pode encontrar máis información sobre a historia das series de Fourier no seminario de Cañada [3].

Capítulo 1

Series de Fourier

1.1. Definición e converxencia puntual

Ao longo deste traballo considerarase a integral no sentido de Lebesgue. Polo tanto, para definir a serie de Fourier dunha función haberá que considerar o conxunto das funcións Lebesgue integrables, é dicir

$$\mathcal{L}^1(-\pi,\pi) = \{f : (-\pi,\pi) \to \overline{\mathbb{R}} | f \text{ é medible e } \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx < +\infty\},$$

sendo $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$.

Definición 1.1. Sexa $f \in \mathcal{L}^1(-\pi,\pi)$, a súa **serie de Fourier** é a serie funcional

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \ , \ x \in \mathbb{R}.$$

Onde, por definición:

- $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx;$
- $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \ (n = 1, 2, ...);$
- $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nxdx, \ (n = 1, 2, ...).$

Os números a_0, a_n, b_n $(n \in \mathbb{N})$ chámanse **coeficientes de Fourier** da función f.

Tanto estas definicións, como os seguintes resultados do traballo, son válidos, con adaptacións menores, para $\mathcal{L}^1(-L, L)$, con $L > 0$.

Tendo en conta a definición anterior podemos considerar a ***m*-ésima suma parcial de** $Sf(x)$:

$$s_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx),\ x \in \mathbb{R}\ ,\ m \in \mathbb{N}.$$

Polo tanto, para estudar a converxencia de $Sf(x)$ nun punto $x_0 \in \mathbb{R}$ teremos que ver se a sucesión de números reais $\{s_m(x_0)\}_{m=0}^{\infty}$ é converxente. Non obstante, non é doado estudar dita converxencia directamente, polo que precisaremos dunha expresión máis manexable da sucesión:

$$\begin{aligned}
s_m(x_0) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m}(a_n \cos nx_0 + b_n \operatorname{sen} nx_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\
&+ 2\sum_{n=1}^{m}(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx)\cos nx_0 + 2\sum_{n=1}^{m}(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx dx)\operatorname{sen} nx_0 \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{m}(f(x)\cos nx \cos nx_0 dx) \\
&+ \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{m}(f(x)\operatorname{sen} nx \operatorname{sen} nx_0 dx) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[1 + 2\sum_{n=1}^{m}(\cos nx \cos nx_0 + \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} nx_0)\right]dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[1 + 2\sum_{n=1}^{m}(\cos n(x - x_0))\right]dx
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Nesta expresion xa non aparecen os coeficientes de Fourier, pero a súa avaliación presenta as mesmas dificultades. Agora consideremos unha proposición que introduce os chamados **núcleos de Dirichlet**, unhas funcións que serán de vital importancia á hora de estudar as sumas parciais de Fourier e a súa converxencia.

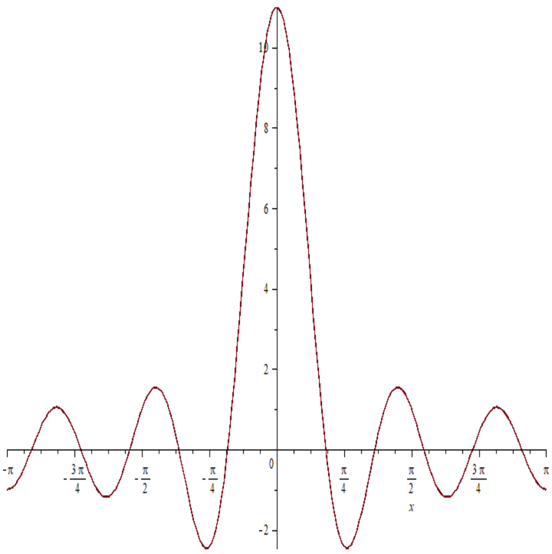
Proposición 1.2. *Para calquera* $x_0 \in \mathbb{R}$ *e* $m \in \mathbb{N}$ *tense*

$$s_m(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) D_m(x - x_0)dx; \tag{1.2}$$

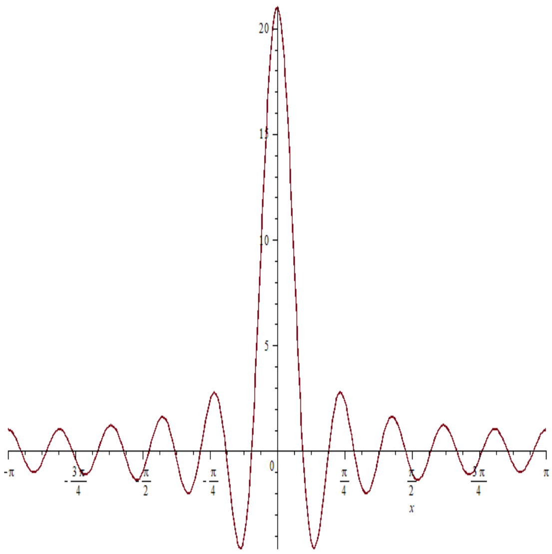
sendo $D_m(x) = \frac{\operatorname{sen}[(m+1/2)x]}{\operatorname{sen}(x/2)}$ *o* ***m*-ésimo núcleo de Dirichlet**.

Demostración. Tendo en conta (1.1) esencialmente temos que probar o que se coñece como **fórmula de Euler-Dirichlet**:

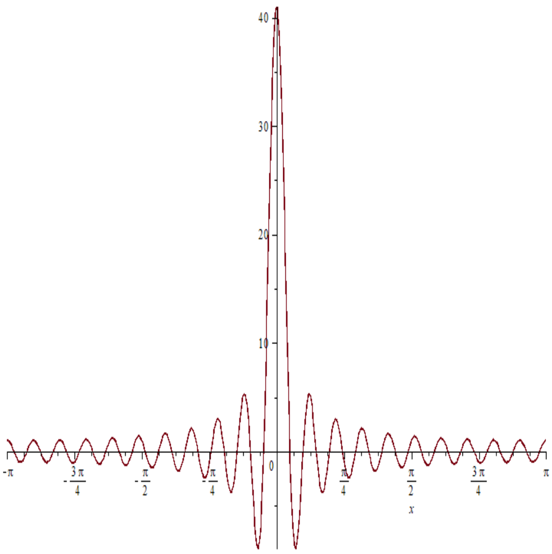
$$1 + 2\sum_{n=1}^{m}\cos nx = \frac{\operatorname{sen}[(m+1/2)x]}{\operatorname{sen}(x/2)}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}. \tag{1.3}$$



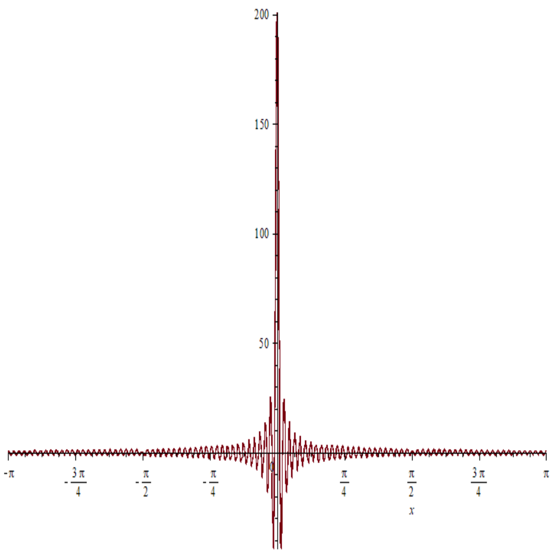
(a) D_5.



(b) D_{10}.



(c) D_{20}.



(d) D_{100}.

Figura 1.1: Representacións de D_m para distintos valores de m.

Denotando $D_m(x) = 1 + 2\sum_{n=1}^{m}(\cos nx)$, o m-ésimo núcleo de Dirichlet, tense:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x/2)\, D_m(x) &= \operatorname{sen}(x/2) + 2\sum_{n=1}^{m}(\cos nx)\operatorname{sen}(x/2) \\
&= \operatorname{sen}(x/2) + \sum_{n=1}^{m}(\operatorname{sen}(nx + x/2) - \operatorname{sen}(nx - x/2)) \\
&= \operatorname{sen}(x/2) + \operatorname{sen}(3x/2) - \operatorname{sen}(x/2) + \operatorname{sen}(5x/2) \\
&- \operatorname{sen}(3x/2) + ... + \operatorname{sen}[(m + 1/2)x] - \operatorname{sen}[(m - 1/2)x] \\
&= \operatorname{sen}[(m + 1/2)x].
\end{aligned} \tag{1.4}$$

É dicir:

$$\operatorname{sen}(x/2)\, D_m(x) = \operatorname{sen}[(m+1/2)x], \forall x \in \mathbb{R} \implies D_m(x) = \frac{\operatorname{sen}[(m+1/2)x]}{\operatorname{sen}(x/2)}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}.$$

Polo tanto xa temos probado (1.3), empregándoa en (1.1) obtemos a proba da proposición:

$$s_m(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)[1 + 2\sum_{n=1}^{m}(\cos n(x - x_0))]dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) D_m(x - x_0)dx \tag{1.5}$$

□

Proposición 1.3. *Para calquera* $x_0 \in \mathbb{R}$ *e* $m \in \mathbb{N}$ *tense:*

$$s_m(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x_0 + t) D_m(t)dt;$$

onde $\bar{f}$ *é a extensión* 2π*-periódica de* f*.*

Demostración. Sexa $f \in \mathcal{L}^1(-\pi, \pi)$ e $\bar{f}$ a súa extensión 2π-periódica, entón $\bar{f}$ é Lebesgue integrable en compactos de $\mathbb{R}$. Pola proposición anterior,

$$s_m(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) D_m(x - x_0)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x) D_m(x - x_0)dx. \tag{1.6}$$

Como $\bar{f}$ é integrable e $D_m(x - x_0)$ é medible e limitada para cada m, o produto é integrable en $(-\pi, \pi)$. Podemos entón aplicar o teorema de cambio de variable da integral de Lebesgue, con $t = x - x_0$ en (1.6)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x_0}^{\pi-x_0} \bar{f}(x_0 + t) D_m(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x_0 + t) D_m(t)dt.$$

Onde a última igualdade é debida á 2π-periodicidade do integrando. □

Proposición 1.4. *Para todo $m \in \mathbb{N}$, o m-ésimo núcleo de Dirichlet, D_m, ten as seguintes propiedades:*

1. D_m *é par.*
2. $\int_{-\pi}^{\pi} D_m(t)dt = 2\pi$
3. $\max_{x\in[-\pi,\pi]} D_m(x) = D_m(0) = 2m+1.$

Demostración. 1. Temos que $D_m(x) = \frac{\operatorname{sen}((m+1/2)x)}{\operatorname{sen}(x/2)}$, é dicir, é cociente de dúas funcións impares e polo tanto é par.

2. Considerando a fórmula de Euler-Dirichlet

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_m(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + 2\sum_{n=1}^{m} \cos nt\right) dt = 2\pi.$$

3. Sexa $D_m(x) = 1 + 2\sum_{n=1}^{m} \cos nx$, entón, para cada $m \in \mathbb{N}$

$$|D_m(x)| = \left|1 + 2\sum_{n=1}^{m} \cos nx\right| \leq 1 + 2\sum_{n=1}^{m} |\cos nx| \leq 1 + 2m = D_m(0),$$

para todo $x \in [-\pi, \pi]$.

□

Antes de demostrar o criterio de converxencia de Dini, necesitaremos un lema que será fundamental en dita proba.

Lema 1.5 (Lema de Riemann-Lebesgue)**.** *Se $f \in \mathcal{L}^1(a,b)$ entón*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen} \lambda x dx = \lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx = 0,$$

sendo (a,b) un intervalo real non necesariamente limitado.

Demostración. En primeiro lugar, demostremos o resultado para unha función escalonada. Sexa

$$s(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j \chi_{I_j},$$

con $c_j \in \mathbb{R}$ e sendo $I_j = [a_j, b_j]$ disxuntos dous a dous para cada $j \in \{1, 2, ..., k\}$ e tal que $\cup_{j=1}^{k} I_j \subset (a,b)$. De este xeito

$$\int_a^b s(x) \operatorname{sen} \lambda x dx = \sum_{j=1}^{k} c_j \int_{a_j}^{b_j} \operatorname{sen} \lambda x dx = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{k} c_j (\cos \lambda a_j - \cos \lambda b_j),$$

e, polo tanto

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b s(x)\operatorname{sen}\lambda x dx = \lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{k} c_j(\cos\lambda a_j - \cos\lambda b_j) = 0,$$

xa que a suma está limitada.
Agora sexa $f \in \mathcal{L}^1(a,b)$. Fixado $\varepsilon > 0$, o teorema 6.18 de [8] garante que existe unha función escalonada s tal que

$$\int_a^b |f(x) - s(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Temos así

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f(x)\operatorname{sen}\lambda x dx - \int_a^b s(x)\operatorname{sen}\lambda x dx\right| &\leq \int_a^b |f(x)\operatorname{sen}\lambda x - s(x)\operatorname{sen}\lambda x|\, dx \\ &= \int_a^b |f(x) - s(x)|\, |\operatorname{sen}\lambda x| dx \\ &\leq \int_a^b |f(x) - s(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

A partir desta desigualdade probaremos sen dificultade o resultado principal

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f(x)\operatorname{sen}\lambda x dx\right| &= \left|\int_a^b f(x)\operatorname{sen}\lambda x dx + \int_a^b s(x)\operatorname{sen}\lambda x dx - \int_a^b s(x)\operatorname{sen}\lambda x dx\right| \\ &\leq \left|\int_a^b f(x)\operatorname{sen}\lambda x dx - \int_a^b s(x)\operatorname{sen}\lambda x dx\right| + \left|\int_a^b s(x)\operatorname{sen}\lambda x dx\right|, \end{aligned} \tag{1.8}$$

empregando o resultado para unha función escalonada e (1.7), dedúcese que, para λ suficientemente grande

$$\left|\int_a^b f(x)\operatorname{sen}\lambda x dx - \int_a^b s(x)\operatorname{sen}\lambda x dx\right| + \left|\int_a^b s(x)\operatorname{sen}\lambda x dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrario, concluímos que

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\operatorname{sen}\lambda x dx = 0.$$

A demostración para funcións coseno é análoga xa que podemos limitalas do mesmo xeito.

□

Finalmente, xa estamos en condicións de probar o **criterio de Dini**, resultado que nos proporciona condicións suficientes para garantir a converxencia puntual da serie de Fourier dunha función.

Teorema 1.6 (Criterio de converxencia de Dini). *Sexa $f \in \mathcal{L}^1(-\pi,\pi)$, $\bar{f}$ a súa extensión 2π-periódica e $x_0 \in \mathbb{R}$. Supoñamos que existen os límites laterais $\bar{f}(x_0^+)$ e $\bar{f}(x_0^-)$, e as funcións*

$$F_-(t) = \frac{\bar{f}(x_0+t) - \bar{f}(x_0^-)}{t}$$

e

$$F_+(t) = \frac{\bar{f}(x_0+t) - \bar{f}(x_0^+)}{t}$$

son integrables en $(-\delta,0)$ e en $(0,\delta)$, respectivamente, para algún $\delta \in (0,\pi)$. Entón $Sf(x_0)$ é converxente e a súa suma é

$$Sf(x_0) = \frac{\bar{f}(x_0^+) + \bar{f}(x_0^-)}{2}.$$

En particular, $Sf(x_0) = \bar{f}(x_0)$ se, ademais do anterior, $\bar{f}$ está definida e é continua en x_0.

Demostración. Queremos ver que

$$\lim_{m\to\infty} \left| s_m(x_0) - \frac{\bar{f}(x_0^-) + \bar{f}(x_0^+)}{2} \right| = 0. \tag{1.9}$$

En primeiro lugar, empreguemos os resultados previos para facer máis doado o cálculo do límite. Pola proposición 1.3 sabemos que:

$$s_m(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x_0+t) D_m(t) dt,$$

onde $D_m(t) = \frac{\operatorname{sen}[(m+1/2)t]}{\operatorname{sen}(t/2)}$.
Entón, o interior do límite (1.9) quedaría:

$$\begin{aligned} s_m(x_0) - \frac{\bar{f}(x_0^-) + \bar{f}(x_0^+)}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x_0+t) D_m(t) dt - \frac{\bar{f}(x_0^-) + \bar{f}(x_0^+)}{2} \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} \bar{f}(x_0+t) D_m(t) dt - \frac{\bar{f}(x_0^-)}{2} &+ \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \bar{f}(x_0+t) D_m(t) dt - \frac{\bar{f}(x_0^+)}{2}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Polas propiedades dos núcleos de Dirichlet tense:

$$\int_{-\pi}^{0} D_m(t) dt = \pi \implies \frac{\bar{f}(x_0^-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} \bar{f}(x_0^-) D_m(t) dt$$

$$\int_{0}^{\pi} D_m(t) dt = \pi \implies \frac{\bar{f}(x_0^+)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \bar{f}(x_0^+) D_m(t) dt$$

Substituíndo en (1.10) temos

$$\begin{aligned} s_m(x_0) - \frac{\bar{f}(x_0^-) + \bar{f}(x_0^+)}{2} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} [\bar{f}(x_0+t) - \bar{f}(x_0^-)] D_m(t)dt \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} [\bar{f}(x_0+t) - \bar{f}(x_0^+)] D_m(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{[\bar{f}(x_0+t) - \bar{f}(x_0^-)]}{\operatorname{sen}(t/2)} \operatorname{sen}((m+1/2)t)dt \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{[\bar{f}(x_0+t) - \bar{f}(x_0^+)]}{\operatorname{sen}(t/2)} \operatorname{sen}((m+1/2)t)dt. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Agora definamos

$$A_m(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{[\bar{f}(x_0+t) - \bar{f}(x_0^-)]}{\operatorname{sen}(t/2)} \operatorname{sen}((m+1/2)t)dt,$$

e

$$B_m(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{[\bar{f}(x_0+t) - \bar{f}(x_0^+)]}{\operatorname{sen}(t/2)} \operatorname{sen}((m+1/2)t)dt.$$

Vexamos que $\text{lím}_{m\to\infty} A_m(x_0) = \text{lím}_{m\to\infty} B_m(x_0) = 0$, co cal xa teriamos a demostración. Consideremos primeiramente

$$A_m(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{[\bar{f}(x_0+t) - \bar{f}(x_0^-)]}{\operatorname{sen}(t/2)} \operatorname{sen}((m+1/2)t)dt,$$

e definimos:

$$G(t) = \frac{[\bar{f}(x_0+t) - \bar{f}(x_0^-)]}{t} \cdot \frac{t}{\operatorname{sen}(t/2)}$$

É dicir, $G(t) = F_-(t)\cdot\varphi(t)$, con $\varphi(t) = \frac{t}{\operatorname{sen}(t/2)}$. $\varphi(t)$ é medible en $(-\pi, 0)$ xa que é cociente de medibles e o denominador non se anula en $(-\pi, 0)$, ademais é uniformemente continua nese intervalo xa que:

1. φ é continua en $(-\pi, 0)$
2. $\text{lím}_{t\to-\pi^+} \varphi(t) = -\pi$
3. $\text{lím}_{t\to 0^-} \varphi(t) = 2$

Polo tanto $\varphi(t) \in \mathcal{L}^\infty(-\pi, 0)$.
Por outro lado, por hipótese, $F_- \in \mathcal{L}^1(-\delta, 0)$, para certo $\delta \in (0, \pi)$. Ademais, en $(-\pi, -\delta)$ a integrabilidade é trivial xa que $1/t \in \mathcal{L}^\infty(-\pi, -\delta)$. Temos polo tanto que

$$F_-(t) = [\bar{f}(x_0+t) - \bar{f}(x_0^-)] \cdot \frac{1}{t} \in \mathcal{L}^1(-\pi, 0).$$

Como $G = F_- \cdot \varphi \in \mathcal{L}^1(-\pi, 0)$, podemos aplicar o lema de Riemann-Lebesgue a $A_m(x_0)$:

$$\lim_{m\to\infty} A_m(x_0) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} G(t) \cdot \operatorname{sen}((m+1/2)t)dt = 0.$$

A demostración para $B_m(x_0)$ é análoga. En conclusión:

$$\lim_{m\to\infty} \left| s_m(x_0) - \frac{\bar{f}(x_0^-) + \bar{f}(x_0^+)}{2} \right| = \lim_{m\to\infty} A_m(x_0) + B_m(x_0) = 0,$$

tal como queriamos demostrar.

□

O seguinte criterio, que deduciremos do de Dini, é especialmente sinxelo e aplicable.

Corolario 1.7 (Criterio dos límites laterais da derivada). *Sexa $f \in \mathcal{L}^1(-\pi, \pi)$ e sexa $\bar{f}$ a extensión 2π-periódica de f. Se para $x_0 \in \mathbb{R}$ fixado existe $r > 0$ tal que $\bar{f}$ é derivable en $(x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}$ e, ademais, existen e son finitos os dous límites laterais $\lim_{x\to x_0^\pm} \bar{f}'(x)$, entón a serie de Fourier de f converxe no punto x_0 e*

$$Sf(x_0) = \frac{\bar{f}(x_0^+) + \bar{f}(x_0^-)}{2}$$

En particular, $Sf(x_0) = \bar{f}(x_0)$ se, ademais do anterior, $\bar{f}$ está definida e é continua en x_0.

Demostración. Para demostrar este corolario vexamos que as hipóteses garanten a existencia dun $\delta \in (0, \pi)$ tal que as funcións F_- e F_+ pertencen a $\mathcal{L}^1(-\delta, 0)$ e $\mathcal{L}^1(0, \delta)$, respectivamente, co cal, empregando o teorema de Dini, garantiriamos a converxencia.
Por hipótese, existe $\lim_{x\to x_0^+} \bar{f}'(x) \in \mathbb{R}$, o cal implica a limitación de f' pola dereita de x_0. Logo a función f é lipschitziana en $(x_0, x_0 + \delta)$ para algún $\delta > 0$ e, polo tanto,

$$\exists \lim_{x\to x_0^+} \bar{f}(x) = \bar{f}(x_0^+).$$

Podemos definir:

$$F_+(t) = \frac{\bar{f}(x_0 + t) - \bar{f}(x_0^+)}{t}, \ t > 0$$

A función F_+ é medible por ser cociente de medibles e o seu denominador non se anula. Vexamos que existe $\delta \in (0, \pi)$ tal que F_+ está acotada en $(0, \delta)$, co cal $F_+ \in \mathcal{L}^\infty(0, \delta) \subset \mathcal{L}^1(0, \delta)$ como queremos demostrar. Tense que existe $\bar{f}'(x_0 + t)$ $\forall t \in (0, \pi)$ e existe

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{(\bar{f}(x_0 + t) - \bar{f}(x_0^+))'}{t'} = \lim_{x\to x_0^+} \bar{f}'(x) \in \mathbb{R}.$$

Pola regla de L'Hôpital, temos:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{(\bar{f}(x_0+t)-\bar{f}(x_0^+))'}{t'} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\bar{f}(x_0+t)-\bar{f}(x_0^+)}{t} = \lim_{t\to 0^+} F_+(t) \in \mathbb{R}.$$

Polo tanto F_+ está acotada en $(0,\delta)$, para algún $\delta \in (0,\pi)$. A demostración de que $F_- \in \mathcal{L}^1(-\delta,0)$ é análoga.
En conclusión, temos que se cumpren as hipóteses do teorema de Dini e polo tanto garantimos a converxencia.

□

A continuación, vemos outro criterio que tamén é consecuencia do de Dini, especialmente útil nos puntos de continuidade de $\bar{f}$.

Corolario 1.8 (Criterio das derivadas laterais)**.** *Sexan $f \in \mathcal{L}^1(-\pi,\pi)$, $\bar{f}$ a súa extensión 2π-periódica e $x_0 \in \mathbb{R}$. Se $\bar{f}$ ten as dúas derivadas laterais en x_0, entón $Sf(x_0)$ é converxente e $Sf(x_0) = \bar{f}(x_0)$.*

Demostración. En primeiro lugar, como existe $\bar{f}'_+(x_0)$, entón $\bar{f}$ é continua pola dereita en x_0 e $\bar{f}(x_0^+) = \bar{f}(x_0)$. Analogamente, $\bar{f}(x_0^-) = \bar{f}(x_0)$.

En segundo lugar, por definición

$$\bar{f}'_+(x_0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\bar{f}(x_0+t)-\bar{f}(x_0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} F_+(t),$$

e, polo tanto, existe $\delta \in (0,\pi)$ tal que F_+ está acotada en $(0,\delta)$. Ademais, F_+ é medible en $(0,+\infty)$, entón

$$F_+ \in \mathcal{L}^\infty(0,\delta) \subset \mathcal{L}^1(0,\delta),$$

xa que estamos considerando intervalos limitados. Do mesmo xeito, próbase que $F_- \in \mathcal{L}^1(-\delta,0)$. En conclusión, $\bar{f}$ cumpre as hipóteses do criterio de Dini, o que garante a converxencia, e, por ser continua en x_0, $Sf(x_0) = \bar{f}(x_0)$. □

Por último nesta sección, temos o coñecido como **Teorema de Fejér** o cal nos asegura que, sendo f unha función continua e periódica, podemos garantir a converxencia uniforme sempre que sexa no sentido de Cesàro. Isto, non obstante, non é suficiente para garantir a converxencia no sentido usual, como veremos explicitamente na seguinte sección.

Teorema 1.9 (Teorema de Fejér)**.** *Se $f \in \mathcal{C}_p[-\pi,\pi]$ entón*

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_m(x) = f(x) \textit{ uniformemente en } [-\pi,\pi],$$

onde

$$\sigma_m(x) = \frac{s_0(x)+s_1(x)+...+s_m(x)}{m+1} \ (m=0,1,2,...).$$

Noutras palabras, a serie de Fourier de f converxe a f uniformemente en $[-\pi, \pi]$ no sentido de Cesàro.

Demostración. Queremos ver que

$$\lim_{m\to\infty} |\sigma_m(x) - f(x)| = 0 \text{ uniformemente en } [-\pi, \pi],$$

é dicir, que $\forall \varepsilon > 0$ existe $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$m \geq m_\varepsilon \implies |\sigma_m(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Temos que, debido a unha proposición que se pode consultar en [8]

$$\sigma_m(x) = \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{m} s_n(x)}{m+1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x+t)K_m(t)dt,$$

onde

$$K_m(t) = \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{m} D_n(t)}{m+1} = \frac{\operatorname{sen}^2[(m+1)t/2]}{(m+1)\operatorname{sen}^2(x/2)}$$

é o m-ésimo núcleo de Fejér. En [8] pode consultarse a proba das seguintes propiedades

1. $\frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} K_m(t)dt = 2\pi$ para todo $m \in \mathbb{N}$;

2. $\lim_{m\to\infty} \displaystyle\int_{\delta<|t|<\pi} K_m(t)dt = 0.$

Logo

$$\begin{aligned} |\sigma_m(x) - f(x)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x+t)K_m(t)dt - f(x)\right| \\ &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x+t)K_m(t)dt - \bar{f}(x)\right| \\ &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x+t)K_m(t)dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x)K_m(t)dt\right| \end{aligned} \tag{1.12}$$

Polo tanto, $\forall m \in \mathbb{N}$ e $\forall x \in [-\pi, \pi]$ tense

$$\begin{aligned} |\sigma_m(x) - f(x)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\bar{f}(x+t) - \bar{f}(x)]K_m(t)dt\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\bar{f}(x+t) - \bar{f}(x)\right| K_m(t)dt. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Por hipótese, $f \in \mathcal{C}_p[-\pi, \pi]$, o cal implica que $\bar{f} \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.
Se $x, t \in [-\pi, \pi]$ entón $x+t \in [-2\pi, 2\pi]$. Por ser $\bar{f}$ continua en $\mathbb{R}$, é uniformemente continua en $[-2\pi, 2\pi]$, así que:

1. $\exists M > 0$ tal que $\left|\bar{f}(u)\right| \leq M \ \forall u \in [-2\pi, 2\pi]$.
2. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in (0, \pi)$ tal que
$$|u - v| < \delta \implies \left|\bar{f}(u) - \bar{f}(v)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fixamos $\varepsilon > 0$, entón para todo $m \in \mathbb{N}$ e todo $x \in [-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned}
|\sigma_m(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\bar{f}(x+t) - \bar{f}(x)\right| K_m(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{|t|<\delta} \left|\bar{f}(x+t) - \bar{f}(x)\right| K_m(t)dt \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_{\delta<|t|<\pi} \left|\bar{f}(x+t) - \bar{f}(x)\right| K_m(t)dt \\
&< \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{|t|<\delta} K_m(t)dt \\
&+ \frac{1}{2\pi} \cdot 2M \int_{\delta<|t|<\pi} K_m(t)dt \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_m(t)dt + \frac{M}{\pi} \int_{\delta<|t|<\pi} K_m(t)dt.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

A segunda das propiedades mencionadas dos núcleos de Fejér implica que existe $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall m \geq m_\varepsilon \implies \int_{\delta<|t|<\pi} K_m(t)dt < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{\pi}{M},$$

asi que se ten para $m \geq m_\varepsilon$ que

$$|\sigma_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ \forall x \in [-\pi, \pi].$$

□

1.2. Función continua con serie de Fourier diverxente

Para ilustrar e recalcar que a continuidade non é suficiente para garantir a converxencia puntual, imos estudar un exemplo debido a Lebesgue dunha función continua con serie de Fourier diverxente en $x = 0$. O tratamento que faremos segue esencialmente o levado a cabo no libro de Stromberg [8].

En primeiro lugar imos probar unha proposición previa.

Proposición 1.10. *Se $f \in \mathcal{L}^1(-\pi, \pi)$ é par e $\{s_m\}_{m=0}^{\infty}$ é a sucesión de sumas parciais da súa serie de Fourier, entón*

$$s_m(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \frac{\operatorname{sen}(mt)}{t} dt + \varepsilon_m, \tag{1.15}$$

onde $\varepsilon \to 0$ cando $m \to \infty$.

Demostración.

$$s_m(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\operatorname{sen}[(m+\frac{1}{2})t]}{\operatorname{sen}(t/2)}dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\frac{\operatorname{sen}[(m+\frac{1}{2})t]}{\operatorname{sen}(t/2)}dt. \tag{1.16}$$

Empregando a fórmula do seno do ángulo suma:

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen}[(m+\frac{1}{2})t]}{\operatorname{sen}(t/2)} &= \frac{\cos(t/2)}{\operatorname{sen}(t/2)}\operatorname{sen}(mt) + \cos(mt)\\ &= \left[\frac{2}{t} + g(t)\right]\operatorname{sen}(mt) + \cos(mt),\end{aligned} \tag{1.17}$$

onde

$$g(t) = \frac{\cos(t/2)}{\operatorname{sen}(t/2)} - \frac{2}{t}$$

é unha función que pode extenderse con continuidade ao intervalo $[0,\pi]$ debido a que $g(0^+) = 0$.
Polo tanto, temos que

$$\varepsilon_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)g(t)\operatorname{sen}(mt)dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(mt)dt,$$

que, aplicando o lema de Riemann-Lebesgue, tende a cero cando $m \to \infty$.

□

A construción da función basearase en sucesións $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, e $a_k = \prod_{j=1}^{k} n_j$ que cumpran as seguintes propiedades:

- $n_k > 1, \ \forall k,$
- $c_k \to 0,$
- $c_k \log n_k \to \infty,$
- $\frac{a_k}{n_{k+1}} \to 0.$

Agora comprobemos que se eliximos $n_k = 2^{k!}$ e $c_k = \frac{1}{k}$ cumpren os requisitos. Os dous primeiros son triviais, o terceiro é doado de comprobar tamén

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\log(2^{k!}) = \lim_{k\to\infty} \frac{k!}{k}\log 2 = \infty.$$

E finalmente, vexamos que tamén se verifica o cuarto

$$0 < \frac{a_k}{n_{k+1}} = \frac{2\cdot 2^{2!}\cdot 2^{3!}\cdot ... \cdot 2^{k!}}{2^{(k+1)!}} = \frac{2\cdot 2^{2!}\cdot 2^{3!}\cdot ... \cdot 2^{k!}}{(2^{k!})^{k+1}} < \frac{1}{2^{k!}},$$

onde o termo da dereita tende a 0 cando $k \to \infty$.
Xa estamos en condicións de construír a función. Definimos $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(x) = c_k \operatorname{sen}(a_k x), \text{ se } \frac{\pi}{a_k} \leq x \leq \frac{\pi}{a_{k-1}} \text{ e } k \in \mathbb{N},$$

$f(0) = 0$ e $f(-x) = f(x) = f(x + 2\pi)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pódese ver un esbozo de f na figura 1.2.

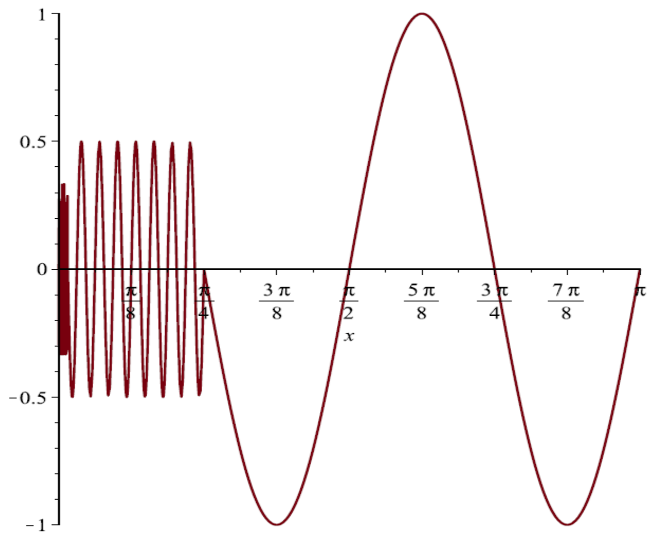


Figura 1.2: A extensión par desta función ten serie de Fourier diverxente en $x_0 = 0$.

Por definición tense que a función é par e 2π-periódica. Nótese que $f(\frac{\pi}{a_k}) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, co cal temos que f é continua en $(0, \pi]$. Ademais, como $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ tende a 0, f é continua pola dereita en $x_0 = 0$. Ao ser par, temos que f é continua en todo o seu dominio $[-\pi, \pi]$. Queremos probar que $\{s_{a_k}(0)\}_{k=1}^{\infty}$ é diverxente, o cal implica que $\{s_m(0)\}_{m=0}^{\infty}$ tamén o é, e, polo tanto, dedúcese a diverxencia da serie de Fourier de f en 0.

Como f cumpre as hipóteses da proposición 1.10 é suficiente demostrar que

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^{\pi} f(t) \frac{\operatorname{sen}(a_k t)}{t} dt = \infty.$$

En primeiro lugar, podemos afirmar que $|\operatorname{sen}(a_k t)| \leq a_k t$ para todo $t \in [0, \pi/a_k]$, así que

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\frac{\pi}{a_k}} f(t)\frac{\operatorname{sen}(a_k t)}{t}dt\right| &\leq \int_0^{\frac{\pi}{a_k}} \left|f(t)\frac{\operatorname{sen}(a_k t)}{t}\right| dt \\ &\leq \int_0^{\frac{\pi}{a_k}} |f(t)|\, \frac{a_k t}{t}dt \\ &\leq a_k \int_0^{\frac{\pi}{a_k}} |c_k \operatorname{sen}(a_k t)|\, dt \\ &\leq a_k c_k \int_0^{\frac{\pi}{a_k}} dt = \pi c_k,\end{aligned} \tag{1.18}$$

do cal concluímos que

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{a_k}} f(t)\frac{\operatorname{sen}(a_k t)}{t}dt = 0. \tag{1.19}$$

En segundo lugar, consideremos o intervalo $[\pi/a_k, \pi/a_{k-1}]$

$$\begin{aligned}2\int_{\pi/a_k}^{\pi/a_{k-1}} f(t)\frac{\operatorname{sen}(a_k t)}{t}dt &= 2c_k \int_{\pi/a_k}^{\pi/a_{k-1}} \frac{\operatorname{sen}^2(a_k t)}{t}dt \\ &= c_k \int_{\pi/a_k}^{\pi/a_{k-1}} \frac{1-\cos(2a_k t)}{t}dt \\ &= c_k \log\left(\frac{a_k}{a_{k-1}}\right) - c_k \int_{\pi/a_k}^{\pi/a_{k-1}} \frac{\cos(2a_k t)}{t}dt \\ &= c_k \log(n_k) - c_k \int_{\pi/a_k}^{\pi/a_{k-1}} \frac{\cos(2a_k t)}{t}dt.\end{aligned} \tag{1.20}$$

Sabemos, pola construción da función, que o primeiro sumando tende a infinito cando $k \to \infty$. Agora imos ver que a segunda integral está limitada.
Integrando por partes tense

$$\begin{aligned}\left|\frac{\operatorname{sen}(2a_k t)}{2a_k t}\right|_{\pi/a_k}^{\pi/a_{k-1}} + \int_{\pi/a_k}^{\pi/a_{k-1}} \frac{\operatorname{sen}(2a_k t)}{2a_k t^2}dt\Bigg| &= \left|\frac{1}{2a_k}\int_{\pi/a_k}^{\pi/a_{k-1}} \frac{\operatorname{sen}(2a_k t)}{t^2}dt\right| \\ &\leq \frac{1}{2a_k}\int_{\pi/a_k}^{\pi/a_{k-1}} \frac{1}{t^2}dt \\ &= \frac{1}{2a_k}\cdot \frac{-1}{t}\Bigg|_{\pi/a_k}^{\pi/a_{k-1}} \\ &= \frac{1}{2a_k \cdot \pi/a_k} - \frac{1}{2a_k \cdot \pi/a_{k-1}} \\ &= \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi n_k} \leq \frac{1}{2\pi}.\end{aligned} \tag{1.21}$$

Polo tanto, concluímos que

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\pi/a_k}^{\pi/a_{k-1}} f(t)\frac{\operatorname{sen}(a_k t)}{t}dt = +\infty. \tag{1.22}$$

Finalmente, vexamos que

$$\int_{\pi/a_{k-1}}^{\pi} f(t)\frac{\operatorname{sen}(a_k t)}{t}dt \tag{1.23}$$

tamén está limitada.
Integrando por partes con $u = \frac{f(t)}{t}$ e $dv = \operatorname{sen}(a_k t)$ temos

$$\begin{aligned}\left.\frac{-f(t)\cos(a_k t)}{a_k t}\right|_{\pi/a_{k-1}}^{\pi} + \frac{1}{a_k}\int_{\pi/a_{k-1}}^{\pi}\cos(a_k t)\left(\frac{f(t)}{t}\right)' dt &= \frac{1}{a_k}\int_{\pi/a_{k-1}}^{\pi}\cos(a_k t)\left(\frac{f(t)}{t}\right)' dt\\ &\leq \frac{1}{a_k}\int_{\pi/a_{k-1}}^{\pi}\left|\left(\frac{f(t)}{t}\right)'\right| dt\end{aligned} \tag{1.24}$$

Agora para todo $t \in (\pi/a_j, \pi/a_{j-1})$ con $j = 1, 2, ..., k-1$ podemos afirmar que

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{f(t)}{t}\right)'\right| &= \left|\frac{c_j a_j t\cos(a_j t) - c_j\operatorname{sen}(a_j t)}{t^2}\right|\\ &\leq \left|\frac{c_j a_j t}{t^2}\right| + \left|\frac{c_j}{t^2}\right| = \frac{c_j a_j}{t} + \frac{c_j}{t^2}\\ &\leq \frac{c_j a_j}{\pi/a_j} + \frac{c_j}{\pi^2/a_j^2} = \frac{c_j a_j^2}{\pi} + \frac{c_j a_j^2}{\pi^2} = \frac{c_j a_j^2}{\pi}\left(1+\frac{1}{\pi}\right).\end{aligned} \tag{1.25}$$

O cal implica que

$$\left|\left(\frac{f(t)}{t}\right)'\right| \leq \frac{c_1 a_{k-1}^2}{\pi}\left(1+\frac{1}{\pi}\right),$$

para todo $t \in (\pi/a_{k-1}, \pi)$ e $t \neq \pi/a_j$ con $j = 1, 2, ..., k-2$, xa que neses puntos non sería derivable. Recuperando (1.24) e considerando esta cota, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_k}\int_{\pi/a_{k-1}}^{\pi}\left|\left(\frac{f(t)}{t}\right)'\right| dt &\leq \frac{1}{a_k}\int_{\pi/a_{k-1}}^{\pi}\frac{c_1 a_{k-1}^2}{\pi}\left(1+\frac{1}{\pi}\right)dt\\ &= \frac{c_1 a_{k-1}^2}{\pi a_k}\left(1+\frac{1}{\pi}\right)\left(\pi - \frac{\pi}{a_{k-1}}\right)\\ &= \frac{c_1 a_{k-1}^2}{a_k}\left(1+\frac{1}{\pi}\right)\left(1 - \frac{1}{a_{k-1}}\right)\\ &\leq \frac{c_1 a_{k-1}^2}{a_k}\left(1+\frac{1}{\pi}\right)\\ &= \frac{c_1 a_{k-1}}{n_k}\left(1+\frac{1}{\pi}\right).\end{aligned} \tag{1.26}$$

Pero sabemos que $\frac{a_{k-1}}{n_k} \to 0$ cando $k \to \infty$ e, polo tanto, podemos concluir que (1.23) está limitada e tende a 0.

Finalmente, considerando estes resultados, concluímos que

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^{\pi} f(x) \frac{\operatorname{sen}(a_k x)}{x} dx = +\infty.$$

Entón podemos afirmar que a serie de Fourier de f diverxe en $x_0 = 0$.

Capítulo 2

Introdución á análise funcional

2.1. Introdución á analise funcional

Neste capítulo imos limitarnos aos espazos vectoriais reais, aínda que as definicións e os resultados sexan certos empregando outro corpo de escalares como, por exemplo, o corpo dos complexos.

Definición 2.1. Un espazo vectorial X dise que é un **espazo vectorial normado** $(X, \|\cdot\|)$ se a cada $x \in X$ hai asociado un número real non negativo $\|x\|$, chamado a norma de x, tal que:

1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x \in X$ e $y \in X$,
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \; \|x\|$ se $x \in X$ e α é un escalar,
3. $\|x\| = 0 \implies x = 0$.

A norma permite definir unha distancia

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

Un **espazo de Banach** é un espazo vectorial normado que é **completo** coa métrica definida pola súa norma.

Definición 2.2. Sexan X, Y espacios vectoriais e $\Lambda : X \longrightarrow Y$ unha aplicación, dise que Λ é un **operador lineal** se para todo $x, y \in X$ e α, β escalares tense

$$\Lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha\Lambda(x) + \beta\Lambda(y).$$

Definición 2.3. Sexan X e Y espazos normados. A **norma** dun operador lineal $\Lambda : X \longrightarrow Y$ defínese como

$$\|\Lambda\| = \sup\{\|\Lambda x\| : x \in X, \|x\| \leq 1\}.$$

Se $\|\Lambda\| < \infty$, dise que Λ é un **operador lineal limitado**. Isto é equivalente a que $\|\Lambda x\| \leq M\|x\|$, sendo M constante. Vexámolo: sexa $x \in X$, $x \neq 0$, normalizámolo para que teña norma 1 e entón temos $x/\|x\|$. Aplicando a definición de norma

$$\left\|\Lambda\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \|\Lambda\| = M \implies \|\Lambda x\| \leq M\|x\|.$$

A demostración da outra parte da equivalencia é inmediata.

Definición 2.4. Un operador Λ dise **continuo** nun punto $x_0 \in X$ se

$$x_n \to x_0 \text{ en X} \implies \Lambda x_n \to \Lambda x_0 \text{ en Y}.$$

Un operador lineal limitado é continuo en cada punto xa que, se $x_n \to x_0$ en X, entón

$$\|\Lambda x_n - \Lambda x_0\| \leq \|\Lambda\| \cdot \|x_n - x_0\| \to 0.$$

Tense tamén o seguinte teorema

Teorema 2.5. *Sexan X e Y espazos normados e sexa $\Lambda : X \longrightarrow Y$ un operador lineal. Se Λ é continuo nun punto $x_0 \in X$ entón tamén é limitado e, polo tanto, continuo en cada punto.*

Demostración. Supoñamos que Λ non é limitado, entón para cada $n > 0$ poderiamos encontrar un $x_n \in X$ tal que

$$\|\Lambda x_n\| > n\|x_n\|.$$

Definamos a seguinte sucesión en X

$$z_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|} + x_0.$$

Evidentemente, $z_n \to x_0$. Como, por hipótese Λ é continuo en x_0, necesariamente $\Lambda z_n \to \Lambda x_0$. Pero

$$\Lambda z_n = \frac{\Lambda x_n}{n\|x_n\|} + \Lambda x_0$$

e, polo tanto,

$$\frac{\Lambda x_n}{n\|x_n\|} \to 0.$$

Pero, pola suposición do inicio,

$$\frac{\Lambda x_n}{n\|x_n\|} > 1,$$

co cal chegamos a unha contradición. □

Denotamos por $B(X,Y)$ ao conxunto dos operadores lineais limitados de X a Y. É doado comprobar que, coa norma establecida, $B(X,Y)$ é un espazo vectorial normado. Temos ademais o seguinte resultado.

Teorema 2.6. *Se Y é un espazo de Banach, $B(X,Y)$ tamén o é.*

Demostración. Sexa Λ_n unha sucesión de Cauchy de operadores lineais en $B(X,Y)$. Entón para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\Lambda_n - \Lambda_m\| < \varepsilon, \text{ para } m, n > N.$$

Para cada $x \neq 0$, e $m, n > N$,

$$\|\Lambda_n x - \Lambda_m x\| < \varepsilon \|x\|. \tag{2.1}$$

Isto implica que $\Lambda_n x$ é unha sucesión de Cauchy en Y. Como Y é un espazo de Banach e polo tanto completo, existe un $y_x \in Y$ tal que $\Lambda_n x \to y_x$ en Y. Definimos agora o operador $\Lambda \in B(X,Y)$ tal que $\Lambda x = y_x$. Se $m \to \infty$ en (2.1)

$$\|\Lambda_n x - \Lambda x\| \leq \varepsilon \|x\|, \ n > N.$$

E, polo tanto, con n >N,

$$\|\Lambda_n x\| \leq \varepsilon \|x\| + \|\Lambda x\| \leq (\varepsilon + \|\Lambda_n\|)\|x\|$$

O cal proba que Λ é limitado e, ademais,

$$\|\Lambda_n - \Lambda\| \leq \varepsilon, \ n > N.$$

Finalmente, temos

$$\|\Lambda_n - \Lambda\| \to 0 \text{ cando } n \to \infty,$$

tal como queriamos demostrar. □

2.2. Principio de Limitación Uniforme

Sexa X un espacio vectorial normado e W un conxunto de vectores en X. Dise que W é *denso en ningunha parte* en X se toda esfera da forma

$$\|x - x_0\| < r, \ \text{con } r > 0,$$

contén un vector que non está na clausura de W. É dicir, $\overline{W}$ non contén esferas. Estes conxuntos tamén se chaman *conxuntos diseminados.*
Un conxunto $W \subset X$ é de *primeira categoría* en X se

$$W = \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k,$$

onde cada W_k é denso en ningunha parte.
En calquera outro caso, W dise de *segunda categoría.*

Teorema 2.7 (Teorema de Baire)**.** *Se X é completo, entón X é de segunda categoría.*

Demostración. Supoñamos que X é de primeira categoría:

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k,$$

onde cada W_k é denso en ningunha parte.
Polo tanto, existe $x_1 \notin \overline{W_1}$. Ao non estar na clausura de W_1, existe $r_1 \in (0, 1)$ tal que

$$\overline{S_1} \cap W_1 = \emptyset,$$

sendo $S_1 = \{x : \|x - x_1\| < r_1\}$.
Esta esfera contén un punto $x_2 \notin \overline{W_2}$, entón existe $r_2 \in (0, \frac{1}{2})$ tal que

$$\overline{S_2} \cap W_2 = \emptyset,$$

con $S_2 = \{x : \|x - x_2\| < r_2\}$ e $S_2 \subset S_1$. Por indución, tense unha sucesión de esferas $S_k \subset S_{k-1}$ da forma $S_k = \{x : \|x - x_k\| < r_k\}$, con $0 < r_k < \frac{1}{k}$, tal que

$$\overline{S_k} \cap W_k = \emptyset.$$

Agora, para $j > k$ temos que $x_j \in S_k$ e

$$\|x_j - x_k\| < r_k < \frac{1}{k}. \tag{2.2}$$

Polo tanto x_k é unha sucesión de Cauchy en X. Como X é completo por hipótese

$$x_k \to x_0 \in X.$$

Se $j \to \infty$ en (2.2)

$$\|x_0 - x_k\| \leq r_k.$$

Entón x_0 está na clausura dos S_k para cada k e polo tanto non está en ningún dos W_k. En conclusión:

$$x_0 \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k,$$

o que contradí que X sexa de primeira categoría. □

Estamos xa en condicións de probar o resultado obxecto de este capítulo, o teorema de Banach-Steinhaus, tamén coñecido como Principio de Limitación Uniforme. Esta denominación describe o seu contido: dedúcese unha estimación uniforme a partir de estimacións puntuais. Este teorema ten interese por si mesmo na análise funcional xa que é fundamental para probar outros resultados máis importantes de dita disciplina; mais no contexto de este traballo empregarase para xustificar de xeito non construtivo a existencia de funcións continuas e periódicas con serie de Fourier diverxente.

Teorema 2.8 (Principio de Limitación Uniforme)**.** *Sexa X un espacio de Banach, Y un espacio vectorial normado e $\{\Lambda_\alpha\}_{\alpha\in A}$ unha colección de operadores lineais limitados de X en Y. Se para todo $x \in X$*

$$\sup_{\alpha\in A} \|\Lambda_\alpha x\| < \infty,$$

entón

$$\sup_{\alpha\in A} \|\Lambda_\alpha\| < \infty,$$

ou, equivalentemente, existe unha constante M tal que

$$\|\Lambda_\alpha x\| \leq M\|x\|, \ \forall x \in X, \ \forall \alpha \in A.$$

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$S_n = \{x \in X : \forall\alpha \in A \ \|\Lambda_\alpha x\| \leq n\}, \tag{2.3}$$

nótese que S_n é pechado. Por hipótese, cada $x \in X$ está nalgún S_n e, polo tanto,

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n.$$

Como X é de segunda categoría (Teorema de Baire), polo menos un dos S_n, chamémoslle S_{n_0}, contén unha esfera. É dicir, existe $x_0 \in X$ e $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset S_{n_0}$. Sexa $x \in X$, $x \neq 0$, e definamos $z = x_0 + \frac{rx}{2\|x\|}$. De este xeito

$$\|z - x_0\| = \frac{r}{2} < r \implies \|\Lambda_\alpha z\| \leq n_0, \forall\alpha \in A.$$

Como $x_0 \in S_{n_0}$, esto implica que

$$\|\Lambda_\alpha x\| = \left\|\Lambda_\alpha\left((z - x_0)\frac{2\|x\|}{r}\right)\right\| \leq \frac{2\|x\|}{r}(\|\Lambda_\alpha z\| + \|\Lambda_\alpha x_0\|) = \frac{4n_0\|x\|}{r}, \tag{2.4}$$

$\forall\alpha \in A, \ x \in X.$

Tal e como queriamos probar. □

Observación 2.9. É habitual empregar o contrarrecíproco deste resultado, é dicir

$$\sup_{\alpha\in A} \|\Lambda_\alpha\| = \infty \implies E = \left\{x \in X : \sup_{\alpha\in A} \|\Lambda_\alpha x\| = \infty\right\} \text{ é non baleiro.}$$

É máis, $E) sería un conxunto denso en X, como proba Rudin en [6].

Capítulo 3

Series de Fourier diverxentes

Neste capítulo utilizarase o teorema de limitación uniforme para demostrar a existencia de funcións continuas e periódicas con serie de Fourier diverxente. Antes de probar este resultado será necesario ver que o espazo das funcións continuas, $\mathcal{C}[-\pi,\pi]$, coa norma do supremo é un espazo de Banach.

Teorema 3.1. *O espazo* $(\mathcal{C}[-\pi,\pi], \|\cdot\|_\infty)$ *é un espazo de Banach, é dicir, un espazo vectorial normado e completo.*

Demostración. En primeiro lugar definimos a norma do supremo

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)|.$$

Vexamos que é unha norma:

1. $\|f+g\|_\infty = \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)+g(x)| \leq \sup_{x\in[-\pi,\pi]}\{|f(x)|+|g(x)|\} \leq \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)| + \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

2. $\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |\lambda f(x)| = \lambda \cdot \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)| = \lambda\|f\|_\infty$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. $\|f\|_\infty = 0 \implies \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)| = 0 \implies f = 0$.

Agora vexamos que $\mathcal{C}[-\pi,\pi]$ é un espazo completo con esa norma, é dicir, que cada sucesión de Cauchy de elementos de $\mathcal{C}[-\pi,\pi]$ é converxente a un elemento del mesmo.
Sexa $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unha sucesión de Cauchy de funcións de $\mathcal{C}[-\pi,\pi]$, fixamos $x_0 \in [-\pi,\pi]$ e temos que

$$|f_m(x_0) - f_n(x_0)| \leq \|f_m - f_n\|_\infty \to 0, \text{ cando } n\to\infty \text{ e } m\to\infty.$$

Como $\mathbb{R}$ é un espazo completo, existe $f(x_0)\in\mathbb{R}$ tal que

$$|f(x_0) - f_n(x_0)| \to 0, \text{ cando } n\to\infty.$$

Sexa $\varepsilon > 0$, eliximos $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq N \implies \|f_m - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2},$$

fixado x, existe $n_x \geq N$ tal que

$$|f(x) - f_{n_x}(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Polo tanto, para $n \geq n_x$ e calquera $x \in [-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &\leq |f(x) - f_{n_x}(x)| + |f_{n_x}(x) - f_n(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \|f_{n_x} - f_n(x)\|_\infty < \frac{3}{4}\varepsilon < \varepsilon. \end{aligned}$$

Como a desigualdade cúmprese para calquera $x \in [-\pi, \pi]$, tense que

$$\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon$$

En conclusión, $f_n \to f$. Se probamos que $f \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$ entón teriamos que $(\mathcal{C}[-\pi, \pi], \|\cdot\|_\infty)$ é un espazo de Banach. Como f é o límite uniforme dunha sucesión de funcións continuas, tamén o será; vexámolo.
Como a sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converxe uniformemente a f en $[-\pi, \pi]$, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, entón

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \ \forall \ x \in [-\pi, \pi].$$

En concreto,

$$|f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \ \forall \ x \in [-\pi, \pi]. \tag{3.1}$$

Por outra banda, como f_N é continua en x_0, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta, x \in [-\pi, \pi] \implies |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.2}$$

En conclusión, para calquera $x \in [-\pi, \pi]$ tal que $|x - x_0| < \delta$ temos que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(x_0) + f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

grazas a (3.1) e (3.2).

É dicir, f é continua en x_0 e, polo tanto, $(\mathcal{C}[-\pi, \pi], \|\cdot\|_\infty)$ é un espazo de Banach . □

O seguinte paso, antes de abordar a demostración obxecto de este capítulo, consistirá en probar que as sumas parciais de Fourier dunha función son operadores lineais limitados.

Proposición 3.2. *A suma de Fourier m-ésima*

$$s_m : (\mathcal{C}[-\pi,\pi], \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathcal{C}[-\pi,\pi], \|\cdot\|_\infty)$$

é un operador lineal limitado entre espazos de Banach.

Demostración. Ver que $s_m(f)$ é un operador lineal limitado redúcese a comprobar que os coeficientes de Fourier son lineais. Imos realizar a proba para os a_n, sendo a dos b_n análoga. Para todo $n = 0, 1, 2, ...$, calquera $f, g \in \mathcal{C}[-\pi,\pi]$ e α, β escalares tense

$$\begin{aligned} a_n(\alpha f + \beta g) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\alpha f + \beta g)(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\alpha f(x) \cos nx + \beta g(x) \cos nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \alpha f(x) \cos nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \beta g(x) \cos nx dx \\ &= \frac{\alpha}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx + \frac{\beta}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos nx dx \\ &= \alpha a_n(f) + \beta a_n(g). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Agora temos que ver que é limitado, seguindo a definición 2.3

$$\|s_m\| = \sup\{\|s_m(f)\|_\infty : f \in \mathcal{C}[-\pi,\pi], \|f\|_\infty \leq 1\}.$$

Vexamos que $\|s_m\| < \infty$. Fixada $f \in \mathcal{C}[-\pi,\pi]$, $\|f\|_\infty \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} \|s_m(f)\|_\infty &= \sup_{x\in[-\pi,\pi]} \left| \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \right| \\ &\leq \sup_{x\in[-\pi,\pi]} \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{m} (|a_n \cos nx| + |b_n \operatorname{sen} nx|) \\ &\leq \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{m} (|a_n| + |b_n|). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Polo tanto, como se podía entrever, o problema volve a reducirse aos coeficientes. Vexamos que $a_n(f)$ está limitado, con $\|f\|_\infty \leq 1$. Pola definición 1.1

$$\begin{aligned} |a_n(f)| &= \left| \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \right| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx \\ &\leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|f(x)\|_\infty\, dx \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2. \end{aligned} \tag{3.5}$$

A proba é análoga para b_n.
Finalmente

$$\|s_m\| = \sup\{\|s_m(f)\|_\infty : f \in \mathcal{C}[-\pi,\pi], \|f\|_\infty \leq 1\} \leq 1 + 4m < \infty \tag{3.6}$$

Concluímos entón que s_m é un operador lineal limitado. □

Proposición 3.3. *O conxunto de funcións continuas e $2\pi-$periódicas, $\mathcal{C}_p[-\pi,\pi]$, é un pechado en $\mathcal{C}[-\pi,\pi]$, e, polo tanto, tamén un espazo de Banach coa norma do supremo.*

Demostración. Sexa $\{f_n\}$ unha sucesión de funcións en $\mathcal{C}_p[-\pi,\pi]$ tal que

$$f_n \to f, \text{ cando } n \to \infty,$$

vexamos que tamén $f \in \mathcal{C}_p[-\pi,\pi]$. Como o límite uniforme de funcións continuas é continuo tense que $f \in \mathcal{C}[-\pi,\pi]$. Ademais, por hipótese, $f_n(-\pi) = f_n(\pi)$ co cal, cando $n \to \infty$,

$$f(-\pi) = f(\pi)$$

e polo tanto $f \in \mathcal{C}_p[-\pi,\pi]$. □

Teorema 3.4. *Existen funcións continuas e 2π-periódicas tales que a sucesión de sumas parciais da súa serie de Fourier diverxe.*

Demostración. Fixada $f(x) \in \mathcal{C}_p[-\pi,\pi]$, se as sumas parciais $s_m(f)$ converxesen cara unha función $g(x) \in \mathcal{C}_p[-\pi,\pi]$, no sentido da norma do supremo entón teriamos que

$$\sup_{m\geq 1} \|s_m(f)\|_\infty \leq \|g\|_\infty + \sup_{m\geq 1} \|s_m(f) - g\|_\infty < \infty$$

e isto para cada función $f(x) \in \mathcal{C}_p[-\pi,\pi]$. Polo tanto, empregando o Principio de Limitación Uniforme, chegariamos á conclusión de que as normas $\|s_m\| = \sup_{\|f\|_\infty=1} \|s_m(f)\|_\infty$ estarían uniformemente limitadas. Imos ver que isto non é certo e, polo tanto, existen funcións para as que as sumas parciais de Fourier non son converxentes no sentido da norma do supremo.

Sexa $\varphi_m(x)$ unha función continua e periódica de norma $\|\varphi_m\|_\infty = 1$ en $[-\pi,\pi]$ e tal que $\varphi_m(x) = signo(D_m(x))$ para todo $x \in \Delta_m$, onde $\Delta_m = \cup_{k=1}^{N_m}[x_{m,k}, y_{m,k}] \subset [-\pi,\pi]$ representa unha unión de intervalos disxuntos dous a dous coa propiedade de que $\sum_{k=0}^{N_m}(y_{m,k} - x_{m,k}) \geq 2\pi - \frac{2\pi}{2m+1}$. Para intuír e esbozar a forma da función $\varphi_m(x)$ lembramos a gráfica do quinto núcleo de Dirichlet (Figura 3.1).

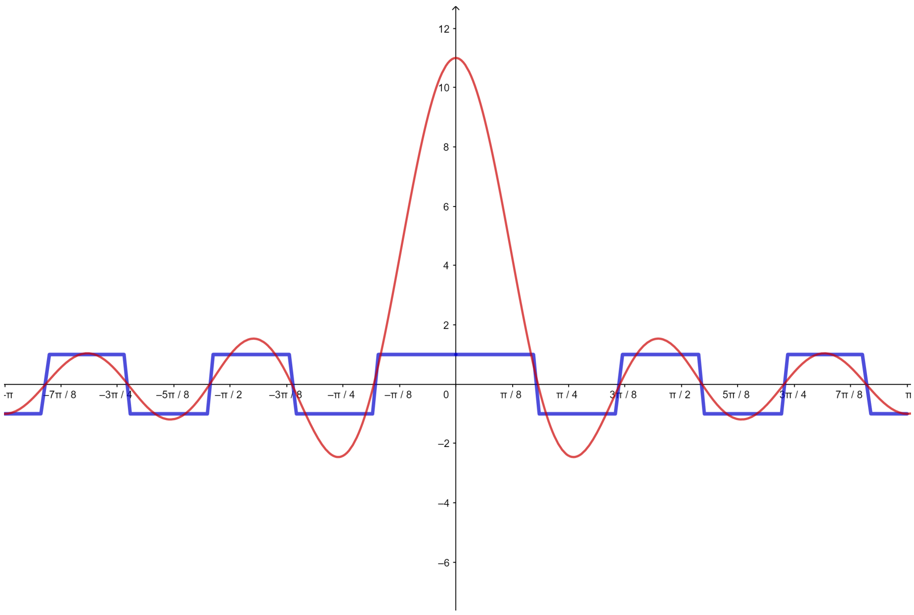


Figura 3.1: Esbozo da gráfica de φ_m, a partir de D_5.

Entón

$$\begin{aligned} \|s_m(\varphi_m)\| \geq \|s_m(\varphi_m)(0)\| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_m(s) D_m(s) ds \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_m} |D_m(s)| ds + \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]\setminus\Delta_m} \varphi_m(s) D_m(s) ds \right| \\ &\geq \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_m(s)| ds \right| - \left| \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]\setminus\Delta_m} \varphi_m(s) D_m(s) ds \right|. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Tendo en conta que $D_m(x) = \frac{\operatorname{sen}[(m+1/2)x]}{\operatorname{sen}(x/2)}$, probouse na proposición 1.4 que

$$\max_{x\in[-\pi,\pi]} |D_m(x)| = D_m(0) = 2m+1$$

e, polo tanto, podemos afirmar que

$$\|s_m(\varphi_m)(0)\| \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_m(s)| ds - \frac{1}{2\pi}(2m+1)\frac{2\pi}{2m+1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_m(s)| ds - 1.$$

Agora imos probar que $\|D_m\|_{L^1(-\pi,\pi)}$ vaise a infinito cando $m \to \infty$, co que concluirá a proba.

$$\begin{aligned}\|D_m\|_{L^1(-\pi,\pi)} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\operatorname{sen}\left((2m+1)x/2\right)}{\operatorname{sen}(x/2)}\right|dx\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\operatorname{sen}((2m+1)s)}{\operatorname{sen}(s)}\right|ds\\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left|\frac{\operatorname{sen}((2m+1)s)}{\operatorname{sen}(s)}\right|ds\\ &\geq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left|\frac{\operatorname{sen}((2m+1)s)}{s}\right|ds\end{aligned} \tag{3.8}$$

Tomando $u = \frac{2m+1}{\pi}s$ temos que

$$\|D_m\|_{L^1(-\pi,\pi)} \geq \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{2m+1}{2}}\left|\frac{\operatorname{sen}(\pi u)}{u}\right|du > \frac{2}{\pi}\int_0^{m}\left|\frac{\operatorname{sen}\pi u}{u}\right|du$$

e, polo tanto,

$$\begin{aligned}\|D_m\|_{L^1(-\pi,\pi)} &\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{m-1}\int_k^{k+1}\left|\frac{\operatorname{sen}\pi u}{u}\right|du\\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{m-1}\int_0^{1}\frac{\operatorname{sen}\pi u}{u+k}du\\ &\geq \frac{2}{\pi}\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\right)\operatorname{sen}\pi u du\\ &= \frac{2}{\pi}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\right)\int_0^1\operatorname{sen}\pi u du \to +\infty,\end{aligned} \tag{3.9}$$

cando $m \to \infty$.

$\square$

Até a formalización da análise funcional en xeral, e do Principio de Limitación Uniforme en particular, o único xeito de demostrar a existencia de funcións continuas e periódicas era construíndo explicitamente dita función, como se fixo no capítulo 1. Agora ben, grazas a este teorema non soamente obtemos unha demostración máis sinxela, senón que ademais permite probar resultados máis fortes. O primeiro, relativo ao espazo das funcións continuas e periódicas con serie de Fourier diverxente, dedúcese directamente da observación 2.9 xunto co feito de que esta última demostración tamén é válida con calquera $x \neq 0$.

A cada número $x \in [-\pi,\pi]$ correspóndelle un conxunto $E_x \subset \mathcal{C}_p[-\pi,\pi]$ que é denso en $\mathcal{C}_p[-\pi,\pi]$, tal que $\sup_{m\in\mathbb{N}}\{s_m(f)\} = \infty$ para toda $f \in E_x$.

Isto mostra a abundancia deste tipo de funcións, a cal contrasta coa idea que tiñan os matemáticos que iniciaron o estudo da análise de Fourier, tendo en conta a dificultade que presenta a construción deste tipo de funcións.
Por outra banda, obtemos un resultado final en relación ao conxunto de puntos nos que pode diverxer a serie de Fourier dunha función continua e periódica, o cal pode consultarse xunto coa súa proba no libro de Stromberg [8].

Teorema 3.5. *Para cada conxunto de medida nula* $E \subset [-\pi, \pi]$ *existe polo menos unha función continua e* 2π*-periódica tal que a súa serie de Fourier diverxe en cada punto* $x \in E$*.*

Bibliografía

[1] J. M. Almira, *Matemáticas para la recuperación de señales: una introducción*, Grupo Editorial Universitario, 2005.

[2] H. Brézis, *Análisis funcional*, Alianza Editorial, 1984.

[3] A. Cañada, *Una perpectiva histórica de las series de Fourier*, Seminario de Historia de la Matemática, Universidad de Granada, publicación de acceso libre en Internet.

[4] Z. González, *El teorema de categoría de Baire en F-espacios*, Trabajo Fin de Grado, Universidad de La Laguna, 2018.

[5] R. López Pouso, *Series de Fourier y ecuaciones en derivadas parciales*, USC Editora, 2019.

[6] W. Rudin, *Análisis real y complejo*, McGraw-Hill, 1987.

[7] M. Schechter, *Principles of Functional Analysis*, American Mathematical Society, 2002.

[8] K. R. Stromberg, *Introduction to classical real analysis*, Wadsworth, 1981.