USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Juegos de negociación

Nicandro Puime Bao

Junio, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Juegos de negociación

Nicandro Puime Bao

Junio, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Estadística e Investigación Operativa
Título: Juegos de negociación
Breve descrición do contido
En este trabajo se propone un estudio de los modelos cooperativos y axiomáticos de la negociación, comenzando por el documento seminal de Nash, *The Bargaining Problem.* Se pretende una visión general de algunos de los principales resultados en esta área, así como una introducción a los modelos no cooperativos de negociación, en particular sobre aquellos modelos que conducen a soluciones de negociación que también resultan del enfoque axiomático.

Índice general

Resumen

Muchas situaciones de conflicto social o económico pueden modelizarse especificando los resultados sobre los que las partes implicadas pueden ponerse de acuerdo, y un resultado especial que resume lo que ocurre en caso de que no se llegue a un acuerdo. Este modelo se denomina juego de negociación, y una aplicación que asigna un resultado a cada juego de negociación se llama solución de negociación. En el enfoque cooperativo de la teoría de juegos, las soluciones de negociación se caracterizan matemáticamente por propiedades deseables, que suelen denominarse axiomas. En el enfoque no cooperativo, las soluciones se derivan como equilibrios de modelos estratégicos que describen un procedimiento de negociación subyacente.

En este trabajo se propone un estudio de los modelos cooperativos y axiomáticos de la negociación, comenzando por el documento seminal de Nash, *The Bargaining Problem*. Se pretende una visión general de algunos de los principales resultados en esta área, así como una introducción a los modelos no cooperativos de negociación, en particular sobre aquellos modelos que conducen a soluciones de negociación que también resultan del enfoque axiomático. El foco principal estará en algunas de las principales axiomatizaciones existentes de soluciones para juegos de negociación, y se incluirá la herramienta necesaria de la teoría de la utilidad, así como alguna aplicación tomada de la vida real.

Abstract

Many situations of social or economic conflict can be modelled by specifying the outcomes on which the parties involved can agree, and a special result that summarizes what happens in the event of a no-deal. This model is called a negotiation game, and an application that assigns a result to each negotiation game is called a negotiation solution. In the cooperative approach of game theory, negotiation solutions are mathematically characterized by desirable properties, which are often referred to as axioms. In the non-cooperative

approach, solutions are derived as balances of strategic models that describe an underlying trading procedure.

This paper proposes a study of cooperative and axiomatic models of negotiation, starting with Nash's seminal document, *The Bargaining Problem.* An overview of some of the main outcomes in this area is intended, as well as an introduction to non-cooperative models of negotiation, in particular on those models that lead to negotiation solutions that also result from the axiomatic approach. The main focus will be on some of the main existing axiomatizations of solutions for trading games, and the necessary tool of utility theory will be included, as well as some application taken from real life.

Introducción

Este trabajo tiene como objetivo principal el entendimiento de los juegos de negociación. Estos son unos de los problemas que son objeto de estudio de la teoría matemática llamada teoría de juegos y básicamente tratan de estudiar la cooperación entre indiviuos que buscan su propio beneficio. Tienen aplicaciones de gran importancia tanto en la vida cotidiana como en el ámbito empresarial así que expondremos al lector ejemplos con los que se pueda sentir identificado.

Los contenidos de este trabajo están divididos en 4 capítulos que explicarán los conceptos teóricos principales de la teoría de juegos, de la teoría de la utilidad, los juegos de negociación, sus soluciones más importantes y sus ejemplos y aplicaciones más relevantes.

En el primer capítulo se explica qué es la teoría de juegos, los tipos de juegos que hay, los elementos que los componen, la solución de Nash y un ejemplo de juego en forma estratégica al que llamamos "Juego de la conducción".

El segundo capítulo da las nociones básicas de la teoría de la utilidad, la cual es la base teórica en la que se sustenta la teoría de juegos. Estudiamos las definiciones, resultados y demostraciones más importantes.

El tercer capítulo es la parte principal del trabajo. En este se explica qué es un juego de negociación, se dan sus soluciones más importantes junto a ejemplos donde se pueden aplicar y acabamos echando un vistazo a su enfoque no cooperativo.

El cuarto y último capítulo habla de las aplicaciones de estos juegos de negociación. Primero hablamos de una situación común como puede ser el conflicto entre trabajadores y una empresa y para terminar hacemos un estudio más profundo de unos de los problemas más importantes de los juegos de negociación, que son los problemas de bancarrota.

Capítulo 1

Introducción general de la teoría de juegos

La teoría de juegos es la teoría matemática que se ocupa de los llamados problemas de decisión interactivos. Para esta teoría, un juego es una situación de conflicto en la que hay intereses contrapuestos entre los individuos que participan (jugadores). En esta situación, el resultado del juego es determinado a partir de las decisiones tomadas por todos los jugadores. La teoría de juegos plantea y se fundamenta en que tiene que haber una forma racional de jugar a cualquier juego y que además esta se puede encontrar o calcular.

Los dos elementos más importantes que se deben definir para cualquier modelo de teoría de juegos son los jugadores y las reglas, siendo los **jugadores** los participantes racionales del juego y las **reglas** el conjunto de normas que rigen el juego. También es importante definir los conceptos que enumeraremos a continuación.

- **Acciones**: son las elecciones a las que puede optar el jugador en cada una de las jugadas.
- **Conjunto de información**: puntos de decisión agrupados por la información con la que cuentan los jugadores sobre las decisiones que se han tomado previo a que ellos jueguen.
- **Estrategia**: conjunto de movimientos que un jugador puede seleccionar del conjunto de las posibles acciones que hay en cada situación del juego.
- **Utilidad o pago**: el resultado que obtiene el jugador una vez que todos los jugadores han elegido una estrategia.

Se confunde muchas veces el concepto de estrategia con el de movimiento o acción así que vamos a explicar claramente la diferencia. Con movimiento nos referimos a una elección de un jugador en un determinado momento del juego. Una estrategia en cambio es una secuencia de movimientos que un jugador elige jugar conforme a las distintas situaciones del juego. A diferencia de la acción, la estrategia es mental, es decir, no observable por los demás jugadores, sería más bien un plan. Se pueden distinguir dos tipos de estrategias:

- Estrategias puras: en las que no interviene la probabilidad.
- Estrategias mixtas: en las que interviene la probabilidad.

Los jugadores eligen la estrategia óptima con respecto al pago que obtienen como resultado del juego. Para poder fundamentar el estudio de las estrategias se asume un supuesto básico: en un conflicto los contendientes son racionales e inteligentes. Cualquier jugador sabe que otros jugadores son racionales, y también que cualquier otro jugador asume que cada jugador es racional. Este hecho forma parte del denominado **conocimiento común**. El estudio clásico de los juegos parte de la hipótesis de racionalidad de los jugadores, que implica la búsqueda del máximo beneficio. En nuestro caso, en este TFG, los juegos de negociación los estudiaremos también bajo estas suposiciones.

Ahora indroduciremos el concepto probablemente más importante a la hora de estudiar y entender lo que es una solución o resultado para un juego de negociación. Este concepto es el "Equilibrio de Nash".

Equilibrio de Nash: Se dice que el jugador jugó bien o que su estrategia es óptima si no puede obtener un mejor resultado eligiendo una estrategia diferente. Todos los jugadores quieren jugar lo mejor posible, por tanto, todos los jugadores quieren elegir una buena estrategia. Entonces, si existe una solución para la cual ningún jugador puede mejorar eligiendo una estrategia diferente, todos los jugadores podrían "estar de acuerdo" con esta solución y encontraríamos así un equilibrio. Esta solución puede o no existir, pero de haberla, se le conoce como el equilibrio de Nash.

Ejemplo 1.1. Juego de la conducción (este juego es un *juego en forma estratégica*, los cuales no definiremos formalmente, pero son unos de los más comunes y hablaremos de ellos en el apartado de implementación de los juegos de negociación y básicamente describen problemas en los que interaccionan varios jugadores de forma simultánea e independientes).

Este juego plantea dos opciones que pueden tener durante la conducción dos conductores que están en una carretera de dos carriles. Las opciones son: o conducir por la derecha o conducir por la izquierda, los pagos serían 50 en el caso de que no se produzca un choque y -50 en que caso de que sí.

	Conducción por la izquierda	Conducción por la derecha
Conducción por la izquierda	(50,50)	(-50,-50)
Conducción por la derecha	(-50,-50)	(50,50)

En este caso se ve que hay claramente dos equilibrios de Nash, cuando ambos conducen por la derecha y cuando ambos conducen por la izquierda ya que en las otras opciones los pagos serían -50. Esto es un ejemplo que ayudaría a explicar por qué en casi todo el mundo se conduce por el mismo lado (por la derecha). En lugares como en Inglaterra, que, al ser una isla y no empeorar su pago al no tener que coordinarse con los demás países, se mantuvo la estrategia de conducir por la izquierda.

Ahora vamos a introducir unos de los tipos de juegos que van a ser importantes explicar para los futuros temas a tratar en este trabajo. Son los siguientes.

- **Juegos según el número de jugadores**: Según el número de jugadores se distinguen los juegos bipersonales, si participan 2 jugadores, y los juegos n-personales, cuando participan más de dos jugadores. Los juegos en los que sólo interviene un decisor son objeto de estudio de la Teoría de la Decisión de la cual hablaremos en el siguiente capítulo.

- **Juegos cooperativos (coalicionales)**:

  Un juego se le llama **cooperativo** cuando los jugadores en vez de competir colaboran para lograr un mismo objetivo y entonces ganan o pierden en conjunto. Es decir, es un juego donde grupos de jugadores (coaliciones) pueden tomar comportamientos cooperativos. El juego es una competición entre coaliciones de jugadores en vez de entre jugadores individuales. La teoría de juegos cooperativos se centra entonces en predecir qué coaliciones se formarán, las acciones conjuntas que tomarán los grupos y los resultados colectivos resultantes, así como proponer repartos de costes o beneficios derivados de la cooperación.

Los juegos no cooperativos son más generales. Los jugadores deciden de forma independiente y compitiendo entre ellos. La teoría de juegos no cooperativos se preocupa de predecir las acciones y ganancias de los jugadores individuales y analizar los equilibrios de Nash. Como la teoría de juegos no cooperativos es más general, los juegos cooperativos también pueden analizarse mediante el enfoque de la teoría de juegos no cooperativos siempre que se hagan suposiciones suficientes para abarcar todas las posibles estrategias disponibles para los jugadores dada la posibilidad de aplicación externa de la cooperación.

Explicaremos más adelante estos dos últimos tipos de juegos bajo el contexto de los juegos de negociación.

Capítulo 2

Introducción a la teoría de la utilidad

En este capítulo expondremos una introducción a la teoría de la utilidad siguiendo fundamentalmente la referencia [2].

Para asentar las bases de lo que es la teoría de juegos, es pertinente hacer una introducción a la "teoría de la decisión", la cual estudia los problemas con un solo decisor. Explicaremos también los distintos tipos de funciones de utilidad en los problemas de decisión para completar así el marco teórico antes de adentrarnos en la teoría de juegos.

Definición 2.1. Un **problema de decisión** es un par $(A, \succeq)$, donde A es el conjunto de alternativas y $\succeq\, \subset A \times A$ es una relación binaria sobre A, la cual es *completa* (para cualquier $a, b \in A$ si $a \not\succeq b$ entonces $b \succeq a$) y *transitiva* (para cualesquiera $a, b, c \in A, a \succeq b$ y $b \succeq c$ implica $a \succeq c$), que además recoge las *preferencias débiles* de un decisor sobre A, es decir para todo $a, b \in A$, $a \succeq b$ se interpreta como que "el decisor es indiferente entre a y b o prefiere a sobre b".

Introducimos también otras dos relaciones binarias:

- *Preferencia estricta* ' $\succ$ ' (para cualesquiera $a, b \in A$, $a \succ b$ si y sólo si $b \not\succeq a$).
- *Indiferencia* ' $\sim$ ' (para cualesquiera $a, b \in A$, $a \sim b$ si y sólo si $a \succ b$ y $b \succ a$).

Proposición 2.2. *Sea $(A, \succeq)$ un problema de decisión y sean $a, b, c \in A$. Entonces se cumple:*

1. *$a \succ b$ implica que $b \not\succ a$.*

2. *$\succ$ es transitiva.*

3. *$\sim$ es reflexiva, simétrica y transitiva.*

4. *$a \succ b$ y $b \sim c$ implican que $a \succ c$.*

5. *$a \sim b$ y $b \succ c$ implican que $a \succ c$.*

6. *Se tiene una y sólo una de las tres siguientes relaciones: $a \succ b$, $b \succ a$, $a \sim b$.*

Con esto podemos introducir el concepto de función de utilidad. Una función de utilidad ordinal en un problema de decisión es aquella que asigna un número real a cada alternativa conservando el orden dado por las preferencias de decisión. Se le puede llamar función de pago etc.

Definición 2.3. Sea $(A, \succeq)$ un problema de decisión. Una **función de utilidad** que representa $\succeq$ es una aplicación $u : A \longrightarrow \mathbb{R}$ la cual cumple que, para cualesquiera $a, b \in A$, $a \succeq b$ si y sólo si $u(a) \geq u(b)$.

Ejemplo 2.4. Sea $(A, \succeq)$ un problema de decisión con $A =$ "Ofertas de empleo" $= \{a, b, c\}$, siendo a, b, c los empleos. En este problema, suponemos que la preferencia la dicta el sueldo más alto de los distintos trabajos siendo el sueldo de a mayor que el de b y b que el de c. Como tenemos entonces que $a \succ b$ y $b \succ c$ y por tanto que $a \succ c$ la función de utilidad obvia que tendríamos que usar sería $u : A \longrightarrow \mathbb{R}$ que lleva cada $u(a), u(b), u(c)$ a sus respectivos sueldos.

Proposición 2.5. *Sea $(A, \succeq)$ y A un conjunto numerable, entonces existe una función de utilidad u que representa $\succeq$.*

Ahora vamos a proporcionar una condición necesaria y suficiente para que en un problema de decisión exista una función de utilidad que represente las preferencias del decisor.

Definición 2.6. Sea $(A, \succeq)$ un problema de decisión. $B \subset A$ se dice **denso en orden** en A si, para cada $a_1, a_2 \in A$ con $a_2 \succ a_1$, existe $b \in B$ con $a_2 \succeq b \succeq a_1$.

Definición 2.7. Sea $(A, \succeq)$ un problema de decisión. Sean $a_1, a_2 \in A$ con $a_2 \succ a_1$. (a_1, a_2) se dice **salto** si, para cada $b \in A$, cumple que $b \succeq a_2$ o $a_1 \succeq b$. Sea (a_1, a_2) un salto, entonces a_1 y a_2 son los extremos del salto. A^* es el conjunto de extremos de saltos de A.

Lema 2.8. *Sea $(A, \succeq)$ un problema de decisión. Suponemos que $\succeq$ es antisimétrica, entonces:*

- *Si existe $B \subset A$ numerable y denso en orden en A, entonces A^* es numerable.*

- *Si existe una función de utilidad representando $\succeq$, entonces A^* es numerable.*

Teorema 2.9. *Sea $(A, \succeq)$ un problema de decisión y suponemos que $\succeq$ es antisimétrica. Entonces $\succeq$ puede ser representada por una función de utilidad $\Longleftrightarrow$ existe $B \subset A$ numerable y denso en orden en A.*

Corolario 2.10. *Sea $(A, \succeq)$ un problema de decisión. Entonces $\succeq$ puede ser representada por una función de utilidad $\Longleftrightarrow$ existe $B \subset A$ numerable denso en orden en A.*

Hablaremos ahora de los **problemas de decisión convexos**, los cuales son problemas de decisión $(X, \succeq)$ tales que X es un subconjunto convexo de un espacio vectorial real.

Definición 2.11. Sea $(X, \succeq)$ un problema de decisión convexo. Se llama **función de utilidad lineal** a $\succeq$ siendo esta una aplicación $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ la cual para todo $x, y \in X$ cumple que:

- $x \succeq y$ si y sólo si $u(x) \succeq u(y)$.
- Para todo $t \in [0, 1], u(tx + (1-t)y) = tu(x) + (1-t)u(y)$.

Unas propiedades que pueden cumplir las preferencias del decisor en este tipo de problemas son:

- **Independencia**: esta propiedad consiste en que dadas dos loterías, las preferencias entre ellas no se verían influidas si se incluyera una tercera lotería. Es decir si para todos $x, y, z \in X$ y todo $t \in (0, 1], x \succeq y \Longleftrightarrow tx + (1-t)z \succeq ty + (1-t)z$.
- **Continuidad**: el individuo debe ser capaz de asignar una probabilidad de manera que le sea indiferente elegir una lotería intermedia simple o una lotería compuesta. Es decir si para todos $x, y, z \in X$ tales que $x \succ y \succ z$ $\exists t \in (0, 1)$ tal que $y \sim tx + (1-t)z$.

Ahora enunciaremos dos resultados que nos ayudarán a demostrar que estas dos condiciones son necesarias y suficientes para la existencia de una función de utilidad lineal.

Proposición 2.12. *Sea $(X, \succeq)$ un problema de decisión convexo. Supongamos que $\succeq$ es independiente y que existen $x_1, x_2 \in X$ con $x_2 \succ x_1$. Si $s, t \in [0, 1]$ con $s \succ t \Longrightarrow sx_2 + (1-s)x_1 \succ tx_2 + (1-t)x_1$.*

Corolario 2.13. *Sea $(X, \succeq)$ un problema de decisión convexo y suponemos que $\succeq$ es independiente y continua $\Longrightarrow$ para todos $x, y, z \in X$ / $x \succ y \succ z$ existe una única $t \in (0, 1)$ con $y \sim tx + (1-t)z$.*

Ahora enunciamos y probamos el resultado al que nos referíamos.

Teorema 2.14. *Sea $(X, \succeq)$ un problema de decisión convexo y suponemos $\succeq$ independiente y continua, entonces:*

1. *Existe una función de utilidad lineal u que representa $\succeq$.*

2. *u es única salvo transdormaciones afines positivas.*

Demostración.

- Si $x \sim y$ para todos $x, y \in X$, el resultado es inmediato. Basta tomar $u(x) = a$ para todo $x \in X$ (siendo a un número real).

- En otro caso, como existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $x_2 \succ x_1$. Denotamos $[x_1, x_2] = \{x \in X : x_2 \succeq x \succeq x_1\}$ con la aplicación $u : [x_1, x_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$u(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \sim x_1 \\ 1 & si \quad x \sim x_2 \\ t \in (0,1) \text{ tal que } x \sim tx_2 + (1-t)x_1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sabemos por el corolario anterior que u está bien definida (ya que t es único) y por la proposición anterior sabemos que u es una función de utilidad que representa $\succeq$ sobre $[x_1, x_2]$.

Veamos ahora que u es lineal. Sean $x, y \in [x_1, x_2]$ y $t \in [0, 1]$ y como $\succeq$ es independiente, entonces:
$tx + (1-t)y \sim t(u(x)x_2 + (1-u(x))x_1) + (1-t)(u(y)x_2 + (1-u(y))x_1) = (tu(x) + (1-t)u(y))x_2 + (t(1-u(x)) + (1-t)(1-u(y)))x_1$.

Así tenemos que $u(tx+(1-t)y) = tu(x)+(1-t)u(y)$. Ahora demostraremos la unicidad de u, primero sobre $[x_1, x_2]$ y luego lo extenderemos a todo X. Como es inmediato que cada transformación afín positiva de u es otra función de utilidad lineal de $\succeq$ veamos el recíproco. Sea v una función de utilidad lineal de $\succeq$, entonces hay otra función de utilidad lineal w definida para $x \in [x_1, x_2]$ como:

$$w(x) = \tfrac{v(x)}{v(x_2)-v(x_1)} - \tfrac{v(x_1)}{v(x_2)-v(x_1)}.$$

Se tiene que $w(x_2) = 1$ y $w(x_1) = 0$ y así $w(x) = w(u(x)x_2 + (1-u(x))x_1) = u(x)w(x_2) + (1-u(x))w(x_1) = u(x)$. Por tanto para todo $x \in [x_1, x_2]$, $v(x) = (v(x_2)-v(x_1))u(x)+v(x_1)$.

Ahora vemos cómo extender u a todo X. Para ello, sea $x \in X \setminus [x_1, x_2]$ y tomamos $[y_1, y_2] \subset X$ tal que $x \in [y_1, y_2]$ y $[x_1, x_2] \subset [y_1, y_2]$. Ahora tal y como hizimos antes podemos construir una función de utilidad a la que llamaremos f que representa $\succeq$ sobre $[y_1, y_2]$ tal y como hicimos con $[x_1, x_2]$. Definimos $v(y)$ como

$$v(y) = \frac{f(y) - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)},$$

para cada $y \in [y_1, y_2]$. Tenemos que v es una función de utilidad lineal representando $\succeq$ sobre $[y_1, y_2]$ y por tanto también sobre $[x_1, x_2]$. Notemos además que $v(x_2) = u(x_2) = 1$ y que $v(x_1) = u(x_1) = 0$ así que con el mismo razonamiento que usamos con w tenemos que u y v coinciden sobre el intervalo $[x_1, x_2]$. Veamos que esto se cumple aún escogiendo un intervalo cualquiera. Supongamos sin pérdida de generalidad que $x_1 \succ x$. En ese caso v y w serían funciones de utilidades lineales sobre $[x, x_2]$ y en consecuencia idénticas sobre $[x, x_2]$. Por tanto, definimos $u(x) = v(x)$. Ahora, por último, para comprobar que u es una función de utilidad lineal sobre X, basta tener en cuenta que, para todos $x, y \in X$, u es una función lineal sobre $[x_3, x_4]$ con $x, y \in [x_3, x_4]$ y $[x_1, x_2] \subset [x_3, x_4]$ y la unicidad sobre X se puede comprobar igual que para $[x_1, x_2]$.

$\square$

La teoría de la utilidad, como base de los modelos de la teoría de juegos, permite también desarrollar una teoría de la decisión en situaciones donde haya aleatoriedad. Sea A un conjunto de alternativas. Llamamos $L(A)$ al conjunto de loterías sobre A, es decir:

$$L(A) = \{x \in [0,1]^A : \sum_{a \in A} x(a) = 1\}.$$

Para este ambiente de riesgo se define un nuevo tipo de función de utilidad.

Definición 2.15. Sea $(L(A), \succeq)$ un problema de decisión. Una aplicación $u : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es una **función de utilidad de von Neumann y Morgenstern** que representa $\succeq$ si para todos $x, y \in L(A)$ se tiene que:

$$x \succeq y \Longleftrightarrow \sum_{a \in A} u(a)x(a) \geq \sum_{a \in A} u(a)y(a).$$

Ejemplo 2.16. Supongamos un inversor que tiene que elegir entre dos empresas para comprar sus acciones y tiene estas dos empresas: La empresa a) asegura 1 millón de euros de beneficio y la empresa b) 2 millones de euros de beneficios con probabilidad 1/2 o 0 euros de beneficios con probabilidad de 1/2. Ahora aunque en la segunda situación es verdad que puede ganar el doble de dinero, eso no significa que la utilidad esperada sea el doble. Una persona que sea menos propensa al riesgo tendrá una función de utilidad cóncava como puede ser $u(x) = \sqrt{x}$ (Figura 2.1), para una persona que le sea indiferente sí que se cumplirá que la utilidad será el doble cuando alcance el doble de dinero, $u(x) = x$, (Figura 2.2) y una persona más temeraria preferirá la empresa b) y tendrá una función de utilidad convexa como podría ser $u(x) = x^2$ (Figura 2.3).

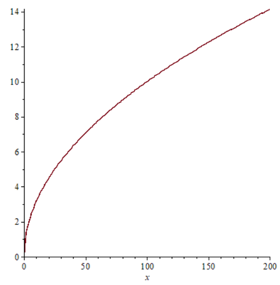

Figura 2.1: Jugador cauto.

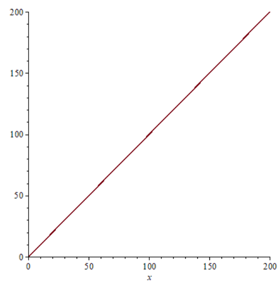

Figura 2.2: Jugador neutro.

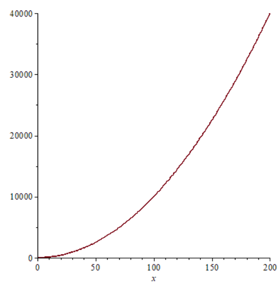

Figura 2.3: Jugador temerario.

Capítulo 3

Juegos de negociación

Entramos a la parte principal del trabajo en cuestión, la cual es la correspondiente a los juegos de negociación. Los juegos de negociación tratan situaciones en las que dos o más partes deben llegar a un acuerdo sobre cómo repartirse un determinado objeto, patrimonio etc. En estos juegos, cada jugador prefiere llegar a un acuerdo que no hacerlo; pero a la vez, prefiere el acuerdo más favorable para él.

Ejemplos de estas situaciones los veremos y solucionaremos más adelante en este trabajo pero hay muchos y que podemos ver en nuestro día a día, como la negociación entre un sindicato y los empresarios de una compañía acerca del incremento salarial; la repartición de los bienes en un divorcio; las condiciones bajo las que se puede firmar la paz entre dos paises; etc.

Nosotros hablaremos solamente de los modelos de negociación simple, en los cuales es obligatoria llegar a la unanimidad para poder cerrar la repartición. Existen también los problemas coalicionales pero no hablaremos de ellos en este TFG. Seguiremos fundamentalmente las referencias [2], [4] y [7].

3.1. Conceptos de solución

3.1.1. Solución de Nash

Estudiaremos primero el modelo cooperativo el cual es además el más estudiado. Explicamos en el Capítulo 1 la diferencia entre juegos cooperativos y no cooperativos y estas diferencias se reflejan también en el modelo de los juegos de negociación. Para este presentamos un modelo de juego de negociación el cual fue introducido por Nash.

Definición 3.1. Un **juego de negociación** con un conjunto finito de jugadores N es un par (S, d) tal que:

1. $S \subset \mathbb{R}^N$ es cerrado, no vacío, conexo y comprehensivo (es comprehensivo si para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^N$ se cumple que si $x \in S$ e $y \leq x$, entonces $y \in S$).

2. $S_d = \{x \in S : x \geq d\}$ es un conjunto compacto.

3. $d \in S$ y existe $x \in S$ tal que $x > d$.

Se puede dar la siguiente interpretación.

- **S** es el **conjunto factible** el cual contiene las utilidades de los jugadores en los diferentes acuerdos posibles.

- **d** es el **punto de desacuerdo** el cual nos da las utilidades de los jugadores en caso de falta de acuerdo.

  Denotamos por B^N la clase de los juegos de negociación con conjunto N de jugadores.

Veamos la interpretación geométrica de la solución de Nash.

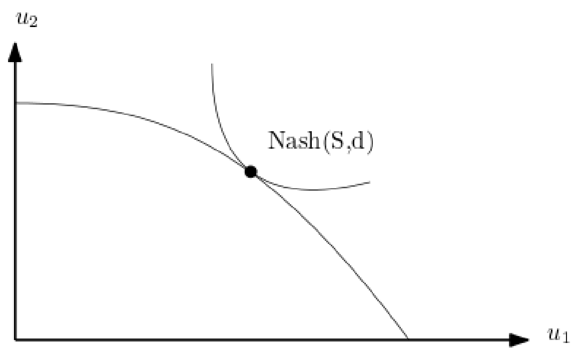

Figura 3.1: Interpretación geométrica de la solución de Nash.

Para explicar cómo son este tipo de juegos vamos a ilustrarlos por medio de un ejemplo que constituye una adaptación propia del llamado "problema de bancarrota" a una situación que hemos tenido muy cercana en España como ha sido el volcán de La Palma en lo que llamaré el "problema de la catástrofe".

Ejemplo 3.2. *Problema de la catástrofe.* Consideramos entonces la isla de La Palma, los destrozos que ha habido a la propiedad privada de sus habitantes y el presupuesto del que dispone el Estado para compensarlo. En esta situación el Estado intenta compensar a la población dándoles lo equivalente a lo que han perdido por el destrozo. Sea N el conjunto de habitantes, $E > 0$ es el capital del Estado, y $a = (a_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}^N$ es el vector de patrimonios individuales reclamados por cada persona de La Palma (para que el problema tenga sentido, es necesario que ocurra que $E < \sum_{i \in N} a_i$). Así esto se puede representar como el juego de negociación (S, d) dado por:

- $S = \{x \in \mathbb{R}^N : x \leq a, \sum_{i \in N} x_i \leq E\}$,
- $d = (d_i)_{i \in N}$, con $d_i = 0$ para todo $i \in N$.

Para estos juegos de negociación cooperativos conocemos múltiples tipos de soluciones que iremos viendo a lo largo de este capítulo. Comenzaremos ya que estamos con el planteamiento axiomático de Nash de los juegos de negociación, con la solución de Nash. Cómo hay varias formas de solucionar el problema, Nash impone una serie de propiedades y demuestra que con esa colección de axiomas se llega a una única solución que sería **la solución de Nash para los juegos de negociación**.

Definición 3.3. Sea $T \subset \mathbb{R}^N$. $P(T) = \{x \in T : \text{no existe } y \in T \text{ con } y \geq x, y \neq x\}$ es la **frontera de Pareto** de T.

Definición 3.4. Sea π una permutación de N. Para cada $x \in \mathbb{R}^N$, definimos $x^\pi \in \mathbb{R}^N$ como $x_i^\pi = x_{\pi(i)}$, para todo $i \in N$. Se dice que un juego de negociación es **simétrico** si para toda permutación π de N:

1. $d^\pi = d$.
2. Para todo $x \in S$, $x^\pi \in S$.

Ahora dados dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^N$ y un conjunto $T \subset \mathbb{R}^N$, definimos:

- $xy = (x_1 y_1, ..., x_n y_n)$.
- $xT = Tx = \{z \in \mathbb{R}^N : z = xy \text{ donde } y \in T\}$.
- $x + T = T + x = \{z \in \mathbb{R}^N : z = x + y \text{ donde } y \in T\}$.
- Para $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha x = (\alpha x_1, ..., \alpha x_n)$ y $\alpha T = T\alpha = \{\alpha x : x \in T\}$.

A continuación, enumeraremos las propiedades necesarias para caracterizar la solución de Nash. Tomando f como la representación de una solución para los juegos de negociación, es decir, una aplicación $f : B^N \longrightarrow R^N$ la cual lleva cada juego (S, d) en un punto de S_d, las propiedades son las siguientes.

- **Eficiencia de Pareto.** Los jugadores no pueden ser capaces de mejorar la solución propuesta de forma colectiva: $\forall (S, d) \in B^N, f(S, d) \in P(S)$.

- **Simetría** Si el juego de negociación (S,d) es simétrico entonces $f_1(S,d) = \cdots = f_n(S,d)$.
- **Covarianza ante transformaciones afines positivas**. Para todo juego de negociación $(S,d) \in B^N$ y todo $a,b \in \mathbb{R}^N$ con $a > 0^N$, se tiene que $f(aS+b, ad+b) = af(S,d)+b$.
- **Independencia de alternativas irrelevantes.** Para todo par de juegos de negociación $(S,d),(T,d) \in B^N$ con $S \subset T$, si $f(T,d) \in S$ entonces $f(S,d) = f(T,d)$.

Esta condición como las otras han suscitado ciertas críticas lo cual ha hecho que se presentaran muchos tipos distintos de solución de los cuales hablaremos más tarde más ampliamente.

Presentamos ahora la definición formal de la solución de Nash, enunciando primero un resultado necesario.

Proposición 3.5. *Sea $(S,d) \in B^N$. Entonces existe un único $z \in S$ que maximiza la función $g(x) = \prod_{i\in N}(x_i - d_i)$ sobre el conjunto S_d.*

Definición 3.6. La **solución de Nash** es la aplicación que asigna a cada $(S,d) \in B^N$ el único punto $NA(S,d) \in S_d$ que maximiza la función $g(x) = \prod_{i\in N}(x_i - d_i)$ sobre el conjunto S_d.

La solución de Nash asigna a cada juego de negociación el punto del conjunto faactible que maximiza el producto de las diferencias entre lo obtenido por cada jugador y su utilidad en el punto de desacuerdo. Puede ser sencillo verlo geométricamente. La solución de Nash asigna a cada juego el punto de intersección de la frontera de Pareto de S_d con la única hipérbola de la familia $\{\prod_{i\in N}(x_i - d_i) = c : c \in \mathbb{R}\}$ que maximiza la función g, como se muestra en la Figura 3.1. Ahora, retomamos el ejemplo del **juego de la catástrofe.**

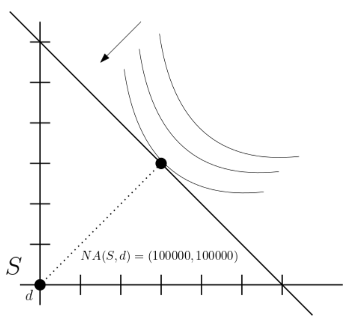

Figura 3.2: Interpretación geométrica de la solución de Nash en el juego de la catástrofe.

Ejemplo 3.7. Recordamos el juego de la catástrofe explicado anteriormente. Tomamos $N = \{1, 2\}$, $E = 200000$ y $a_1 = a_2 = 200000$. Tenemos que (S, d) es el juego asociado con $d = (0, 0)$ y con:

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 200000, x_2 \leq 200000, x_1 + x_2 \leq 200000\}.$$

Para calcular la solución de Nash vamos primero a describir la frontera de Pareto.

$$P(S_d) = \{x = (x_1, x_2) \in S_d : x_2 = 200000 - x_1\}.$$

La solución de Nash sabemos que es $NA(S, d) = max_{x \in S_d}(x_1 - d_1)(x_2 - d_2)$. Para encontrar la solución podemos calcular, el máximo de $\alpha(x_1) = x_1(200000 - x_1)$, y luego ver si $(\alpha_1, 2 - \alpha_1)$ está en S_d. En este ejemplo tenemos que $\alpha_1 = 100000$ así $(\alpha_1, 200000 - \alpha_1) = (100000, 100000) \in S_d$, entonces $NA(S, d) = (100000, 100000)$ (ver Figura 3.2).

De todos modos aunque aquí parezca razonable, tomando otros datos iniciales veremos que hay situaciones cuyas soluciones intuitivamente nos pueden parecer más "injustas" o que al menos parezcan mejorables. Tomando por ejemplo el mismo juego de la catástrofe con los siguientes datos $E = 200000$, $a_1 = 200000$ y $a_2 = 100000$, resulta el juego $(\bar{S}, d)$ con $d = (0, 0)$ y

$$\bar{S} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 200000, x_2 \leq 100000, x_1 + x_2 \leq 200000\}.$$

Como $\bar{S} \subset S$, $(100000, 100000) \in \bar{S}$, $NA(S, d) = (100000, 100000)$ y como la solución de Nash cumple la independencia de alternativas irrelevantes se tiene que $NA(\bar{S}, d) = (100000, 100000)$. Como vemos, con esta propuesta, aunque al segundo jugador se le deba la mitad que al primero, ambos acaban recibiendo lo mismo.

Ahora antes de terminar vamos a enunciar y demostrar el teorema más importante de esta solución de Nash, presentando antes un resultado necesario.

Lema 3.8. *Sea $(S, d) \in B^N$ y denotamos $z = NA(S, d)$. Para cada $x \in \mathbb{R}^N$ sea*

$$h(x) = \sum_{i \in N} \prod_{j \neq i} (z_j - d_j) x_i.$$

Entonces, para todo $x \in S$, $h(x) \leq h(z)$.

Ahora sí pasamos al teorema en cuestión.

Teorema 3.9. *La solución de Nash es la única solución sobre B^N que cumple las propiedades de simetría, eficiencia de Pareto, covarianza ante transformaciones afines positivas e independencia de alternativas irrelevantes para juegos de negociación.*

Demostración. Que la solución de Nash cumple las cuatro propiedades es prácticamente trivial por la definición de la solución de Nash, así que pasaremos a probar la unicidad. Tomemos otra solución para juegos de negociación, f, que también satisfaga las cuatro propiedades y tomando $z = NA(S, d)$ con $(S, d) \in B^N$ tenemos que demostrar que $z = f(S, d)$. Consideramos el conjunto U dado por:

$$U = \{x \in \mathbb{R} : h(x) \leq h(z)\}.$$

Ahora tenemos por el Lema 3.8 anunciado anteriormente que $S \subset U$. Ahora sabiendo que $z > d$ tomemos la tranformación afín positiva A la cual asocia a cada $x \in \mathbb{R}^N$ el vector $(A_i(x))_{i\in N}$ de la forma:

$$A_i(x) = \frac{x_i}{z_i - d_i} - \frac{d_i}{z_i - d_i}.$$

$$\begin{aligned}
\text{Así, } A(U) &= \{x \in \mathbb{R}^N : A^-1(x) \in U\} = \{x \in \mathbb{R}^N : h(A^-1(x)) \leq h(z)\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}^N : h((z_1 - d_1)x_1 + d_1, ..., (z_n - d_n)x_n + d_n) \leq h(z)\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i\in N}\prod_{j\neq i}(z_j - d_j)((z_i - d_i)x_i + d_i) \leq \sum_{i\in N}\prod_{i\neq j}(z_j - d_j)z_i\}.
\end{aligned}$$

Tras unos cálculos obtenemos

$$\begin{aligned}
A(U) &= \{x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i\in N}\prod_{j\in N}(z_j - d_j)x_i \leq \sum_{i\in N}\prod_{j\in N}(z_j - d_j)\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : \textstyle\prod_{j\in N}(z_j - d_j)\displaystyle\sum_{i\in N} x_i \leq \prod_{j\in N}(z_j - d_j)\sum_{i\in N} 1\} = \{x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i\in N} x_i \leq n\}.
\end{aligned}$$

Es obvio que $A(d) = (0, ..., 0)$. Como por hipótesis f cumple simetría y eficiencia de pareto, tenemos que $f(A(U), A(d)) = (1, ..., 1)$. Como f también cumple covarianza ante transdormaciones afines positivas, $f(U, d) = A^{-1}((1, ..., 1)) = z$. Finalmente como $z \in S$, $S \subset U$ y f satisface independencia de alternativas irrelevantes, entonces $f(S, d) = z$

□

Ahora veremos algunas alternativas de soluciones que se han dado a los juegos de negociación en respuesta a ciertas críticas a las cuatro propiedades de la solución de Nash.

3.1.2. Solución de Kalai-Smorodinsky

Primero veremos la solución que apareció para rebatir la propiedad más discutida de la solución Nash, la independencia de alternativas irrelevantes. El problema principal de esta propiedad es que hace que la solución de Nash ignore las aspiraciones máximas de los jugadores. Lo vimos en el Ejemplo 3.7.

Kalai y Smorodinsky proponen en su solución un concepto que tenga en cuenta las aspiraciones máximas de los jugadores, los llamados "puntos de utopía".

Definición 3.10. Sea $(S, d) \in B^N$ un juego de negociación. El **punto de utopía** del juego es $u(S, d) = (u_i(S, d))_{i \in N}$ que está definido para todo $i \in N$, por:

$$u_i(S, d) = max\{a \in \mathbb{R} : \text{existe } x \in S_d \text{ con } x_i = a\}.$$

Definición 3.11. La **solución de Kalai-Smorodinsky** es una aplicación que asigna a cada $(S, d) \in B^N$ el punto

$$KS(S, d) = d + t_o(u(S, d) - d),$$

donde $t_o = max\{t \in \mathbb{R} : d + t(u(S, d) - d) \in S_d\}$.

Podemos ver que lo que hace esta solución es asignar a cada juego de negociación (S, d) el punto de corte de la frontera de Pareto de S_d con la recta que une d con $u(S, d)$. Lo podemos ver representado en la Figura 3.3.

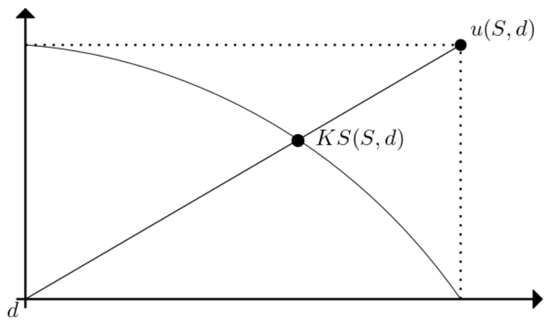

Figura 3.3: Interpretación geométrica de la solución de Kalai-Smorodinsky.

Kalai y Smorodinsky cuestionan la independencia de alternativas irrelevantes pero introducen una nueva propiedad para una solución de juegos de negociación, la "monotonía individual".

La **monotonía individual** establece que para todo par de juegos de negociación (S, d) y $(T, d) \in B^N$ y para $j \in N$, si para todo $i \in N \setminus \{j\}$ se cumple que $S_d \subset T_d$ y $u_i(S, d) = u_i(T, d)$, entonces, $f_j(S, d) \leq f_j(T, d)$.

Es decir que si en un juego de negociación aparecen nuevas alternativas en las cuales los máximos niveles de aspiración de los jugadores distintos de j continúen siendo los mismos, entonces la propuesta de f para j en el juego no debe empeorar.

Se ha probado que no existen soluciones para juegos de negociación que cumplan eficiencia de Pareto, simetría y monotonía individual pero el siguiente resultado que voy a enunciar muestra que la solución de Kalai-Smorodinsky sí se puede caracterizar usando la propiedad de monotonía individual si nos restringimos a la clase de juegos de negociación bipersonales.

Teorema 3.12. *Si N es un conjunto de dos elementos, entonces existe una única aplicación f que asigna a cada $(S,d) \in B^N$ un punto $f(S,d) \in S_d$ y que satisface eficiencia de Pareto, covarianza ante transformaciones afines positivas, simetría y monotonía individual para N. Además, $f(S,d) = KS(S,d)$ para todo $(S,d) \in B^N$.*

Demostración. Es sencillo comprobar que KS cumple las propiedades del enunciado para N. Veamos si cumple la unicidad. Sea $(S,d) \in B^N$ denotando $k = KS(S,d)$. Consideramos la transformación afín positiva L tal que $L(d) = (0,0)$ y $L(u(S,d)) = (1,1)$. Como KS cumple covarianza ante transformaciones afines positivas para N, tenemos $L(k) = KS(L(S), L(d))$ y entonces, por definición de KS, $L_1(k) = L_2(k)$. Sea ahora

$$T = \{x \in \mathbb{R}^2 : \text{existe } y \in \text{conv}\{(0,0),(0,1),(1,0),L(k)\} \text{ con } x \leq y\}.$$

Como f cumple eficiencia de Pareto y simetría para N, $f(T, L(d)) = L(k)$. Por otro lado, como $T \subset L(S)$, $u(T, L(d)) = u(L(S), L(d))$ y f cumple monotonía individual para N, se tiene que $f(T, L(d)) \leq f(L(S), L(d))$. Teniendo en cuenta que $f(T, L(d)) = L(k) = KS(L(S), L(d))$ y que KS cumple eficiencia de Pareto para N, $f(T, L(d)) = L(k) = f(L(S), L(d))$. Aplicando ahora que f cumple covarianza ante transformaciones afines positivas, $f(S,d) = KS(S,d)$.

□

Ahora retomaremos el "Problema de la catástrofe" poniéndonos en unos casos de datos en los que veremos que la solución de Kalai-Smorodinski parece más coherente que la de Nash.

Ejemplo 3.13. Volviendo al juego del ejemplo anterior, es intuitivo que el punto de utopía en $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 200000, x_2 \leq 200000, x_1 + x_2 \leq 200000\}$ es $u(S,d) = (200000, 200000)$, por tanto miraremos la solución de Kalai-Smorodinski de forma gráfica (Figura 3.4).

Ahora veamos la solución para el segundo caso $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 200000, x_2 \leq 100000, x_1 + x_2 \leq 200000\}$ en la cual vemos que obviamente el punto de utopía será $u(S,d) = (200000, 100000)$.

Vemos que en este caso (Figura 3.5) la solución de Kalai-Smorodinsky tiene en cuenta la diferencia de pagos en el punto de utopía de ambos jugadores, razón por la cual el segundo

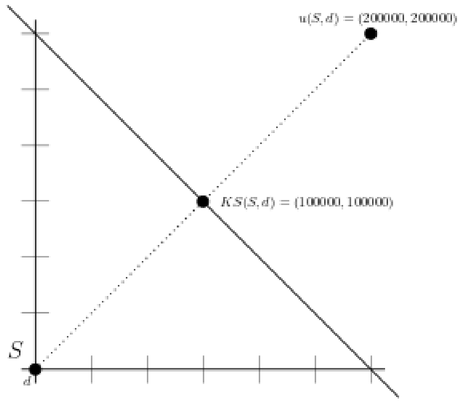

Figura 3.4: Solución geométrica de Kalai-Smorodinsky.

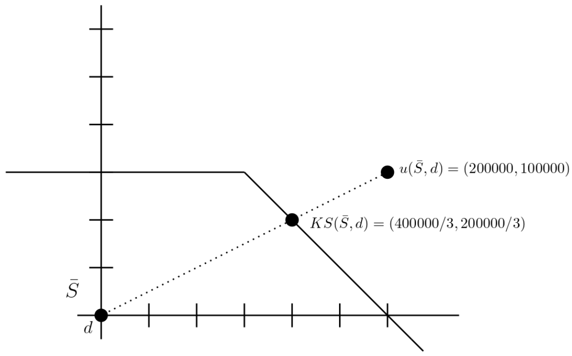

Figura 3.5: Solución geométrica de Kalai-Smorodinsky.

acaba teniendo un pago final menos favorable que el que hubiera obtenido utilizando la solución de Nash.

Como vemos, cambiar o tomar distintos axiomas puede dar soluciones más razonables dependiendo de los datos o el tipo de juego de negociación en el que estemos. Ahora veremos otras soluciones que se proponen al eliminar otros axiomas.

3.1.3. Solución igualitaria

La solución igualitaria asigna a cada juego de negociación el pago máximo con las mismas coordenadas. Esto implica la comparación interpersonal de las utilidades lo cual obviamente hace que no cumpla la covarianza ante transformaciones afines positivas. Geométricamente (ver Figura 3.6) es la intersección de la frontera de S con la recta que sale de d con dirección 1_N (vector de R^N con todas las componentes iguales que 1).

Es decir que: $Eg(S,d) = \{d + \lambda 1_N\}$ con $\lambda = max\{\alpha : d + \alpha 1_N \in S\}$. Esta solución tampoco verifica, en general, la eficiencia de Pareto.

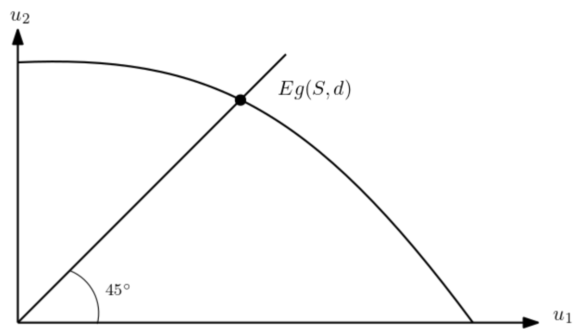

Figura 3.6: Interpretación geométrica de la solución igualitaria.

3.1.4. Solución ponderada

Si ahora suprimimos de los axiomas iniciales de la solución de Nash la simetría, que es el axioma que nos falta por considerar, obtenemos la familia de las soluciones ponderadas de Nash.

El estudio de soluciones no simétricas está motivado por haber en algunos problemas de negociación factores externos que es posible que no estén recogidos en el modelo abstracto, como puede ser la necesidad de considerar a los jugadores como grupos distintos.

Definición 3.14. Sea $w \in \mathbb{R}^N_{++}$. Se denomina **solución ponderada** de peso w de Nash, a la aplicación $N^w : B^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ que a cada juego (S, d) de B^N asigna el punto donde se maximiza la función.

$$x \longrightarrow \Pi_{i=1}^n (x_i - d_i)^{w_i}$$

sobre el conjunto $\{x \in S : x \geq d\}$.

Es importante introducir esta solución ya que veremos que aparece en las aplicaciones prácticas consideradas más adelante.

3.2. Implementación de soluciones

Como hemos visto resulta muy complicado llegar a un acuerdo sobre qué axiomas son los apropiados a imponer cuando hablamos del enfoque cooperativo. Por ello con la intención de complementar el enfoque axiomático aparece la teoría de la implementación. Implementar una solución cooperativa consiste en plantear un juego no cooperativo cuyos pagos en equilibrio se correspondan con la propuesta de la solución a implementar.

3.2.1. Implementación de la solución de Nash

Para esquematizar la implementación de la solución de Nash tomemos (S, d) un juego de negociación bipersonal y consideremos el siguiente juego no cooperativo de demandas:

- Cada jugador i realiza una demanda $x_i \in [d_i, \infty]$ de manera simultánea e independiente.
- Si $x = (x_1, x_2)$ pertenece a S entonces x es aceptado y los jugadores reciben sus demandas. En otro caso, los jugadores reciben sus utilidades en el punto de desacuerdo.

El juego en forma estratégica que describe este problema de demandas viene dado por $G_{NA} = ([d_1, \infty) \times [d_2, \infty), H_1, H_2)$, donde, para cualquier $x = (x_1, x_2) \in [d_1, \infty) \times [d_2, \infty)$ y todo $i \in \{1, 2\}$,

$$H_i(x) = \begin{cases} x_i & si \quad x \in S \\ \\ d_i & si \quad x \notin S. \end{cases}$$

La solución de Nash de (S, d) se corresponde con el pago a un equilibrio de Nash del juego G_{NA} pero existen otros equilibrios en dicho juego. Variando la definición del juego en forma estratégica y la noción de equilibrio se puede llegar a una implementación exacta de la solución de Nash, es decir, tal que dicha solución sea el pago correspondiente al único equilibrio del juego.

3.2.2. Implementación de la solución de Kalai-Smorodinsky

Ahora veremos una implementación como hemos hecho antes pero ahora para la solución de Kalai-Smorodisnky.

Asociaremos un juego de demandas no cooperativo G_{KS} a cada juego de negociación bipersonal (S, d).

- Cada jugador i realiza una demanda cuyo valor esté entre el punto de desacuerdo y su punto de utopía $x_i \in [d_i, u_i(S, d)]$. Los jugadores realizan estas demandas de manera simultánea e independiente.
- Las funciones de pago de los jugadores están dadas por:

$$H(x) = \begin{cases} (x_1, f_2(x_1)) & si \quad \frac{x_1 - d_1}{u_1(S,d) - d_1} < \frac{x_2 - d_2}{u_2(S,d) - d_2} \\ \\ (f_1(x_2), x_2) & si \quad \frac{x_1 - d_1}{u_1(S,d) - d_1} > \frac{x_2 - d_2}{u_2(S,d) - d_2} \\ \\ \frac{(x_1, f_2(x_1))}{2} + \frac{(f_1(x_2), x_2)}{2} & si \quad \frac{x_1 - d_1}{u_1(S,d) - d_1} = \frac{x_2 - d_2}{u_2(S,d) - d_2} \end{cases}$$

donde $f_i(x_j) = max\{x_i \in [d_i, u_i(S,d)] : x \in S\}$, para todo $i, j \in \{1, 2\}, i \neq j$.

Veremos ahora el resultado que demuestra que efectivamente este juego es una implementación para la solución de Kalai-Smorodinsky.

Proposición 3.15. *El juego de demandas G_{KS} tiene un único equilibrio de Nash y además el vector de pago que corresponde a este equilibrio es $KS(S, d)$.*

Demostración. Consideramos el juego de negociación bipersonal (S, d). Para que sea menos engorrosa la notación, para esta demostración vamos a tomar $u = u(S, d)$ y $k = KS(S, d)$. Suponiendo que x es un equilibrio de Nash de G_{KS}, vamos a probar que $x = k$. Sean $i, j \in \{1, 2\}$ tal que $i \neq j$. La cantidad que el jugador i puede demandar y obtener si el jugador j ha elegido x_j es, como mucho,

$$a_i = \frac{x_j - d_j}{u_j - d_j}(u_i - d_i) + d_i$$

con $a_i \in [d_i, u_i]$. Ahora si $a_i < f_i(x_j)$, entonces $x_i > a_i$. Entonces es una contradicción ya que en ese caso el jugador j gana demandando más que x_j y entonces no sería un equilibrio de Nash. Si $a_i > f_i(x_j)$, tampoco sería un equilibrio de Nash, ya que, tanto si $x_i < a_i$, $x_i = a_i$, o $x_i > a_i$, el jugador i ganaría demandando un valor diferente de x_i. Por tanto $a_i = f_i(x_j)$ y $x_i = a_i$, ya que si $x_i < a_i$, el jugador i gana demandando más y si $x_i > a_i$, el jugador j gana demandando más. Por tanto, si x es un equilibrio de Nash de G_{KS},

entonces:

$$\frac{x_1 - d_1}{u_1 - d_1} = \frac{x_2 - d_2}{u_2 - d - 2}, \; x_1 = f_1(x_2), \; \text{y } x_2 = f_2(x_1).$$

Esto implica que $x = k$, con $H(x) = k$. Finalmente, es claro que k es un equilibrio de Nash de G_{KS} y así concluye la demostración.

□

Aún con el resultado que acabamos de demostrar, esta implementación de la solución de Kalai-Smorodinsky a través del juego G_{KS} no es enteramente satisfactoria. En un caso ideal los dos jugadores de G_{KS} tendrían que estar supervisados por el implementador, el cual debería asegurarse de que el reparto final ocurre conforme las reglas del juego. Sin embargo, las reglas de este juego dependen de parámetros que realmente podría no saber el implementador, como por ejemplo los puntos de utopía de los jugadores.

Capítulo 4

Aplicaciones

4.1. Una negociación entre empresarios y trabajadores

Se puede plantear la negociación entre un sindicato y una empresa como un juego bipersonal cooperativo. Una condición interesante para hacer más correcto el ejemplo es pedir que ese sindicato sea la única distribuidora de empleados para la empresa y esta empresa la única donde pueden trabajar los miembros del sindicato. Imaginando esa situación estamos en un monopolio bilateral. Esta aplicación que se expone sigue la referencia [3].

Suponiendo que E es el nivel de empleo y s la tasa de salarios, podemos asumir que una función de utilidad para el sindicato es $u(E, s) = (Es)^{0,5}$. Como vemos, el sindicato tiene en cuenta el número de personas con empleo y la tasa de pago por empleado. Una empresa es obvio que lo que valora son los beneficios y por tanto es lo que medirá su función de utilidad. Suponemos que la función de demanda a la que se enfrenta la empresa es $p = 100 - q$ donde p son los precios y q la producción. Se asume además que la producción es proporcional al empleo $q = E$, así pues la función de beneficio de la empresa será $v(E, s) = E(100 - E) - sE$.

En este juego, la mayor amenaza para la empresa es cancelar la producción, de manera que todos los miembros del sindicato se quedarían sin empleo. De la misma manera, el sindicato puede amenazar con no proporcionar empleados a la empresa, de modo que no habría ni producción aunque tampoco empleo. El punto de desacuerdo sería entonces $d = (0, 0)$. Si queremos resolver el juego de negociación con la solución de Nash, hay que seguir el procedimiento que explicamos en ejemplos anteriores, encontrando primero la curva de óptimos de Pareto. Dicha curva se obtiene maximizando la función:

$$F(E, s) = w.v(E, s) + (1 - w).u(E, s) = w.(100 - E - s).E + (1 - w).(E.s)^{0,5},$$

donde w toma valores entre cero y uno. Para maximizar esta función, tendremos que hacer la derivada de primer orden con respecto a E y a s, quedando las condiciones de primer orden

$$\frac{\partial F}{\partial E} = w.(100 - 2E - s) + 0,5.(1 - w).s.(E.s)^{-0,5} = 0 \text{ y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial s} = -w.E + 0,5.(1 - w).E.(E.s)^{-0,5} = 0.$$

Despejando w en ambas ecuaciones nos queda

$$w = \frac{s}{\sqrt{s.E}(4E + 2s - 200) + s} \text{ y}$$

$$w = \frac{1}{2\sqrt{s.E} + 1}.$$

Ahora con la ayuda del programa *Maxima*[1] igualaremos y resolveremos esas 2 ecuaciones.

```
( %i1) F2:s/((s*E)^0.5*(4*E+2*s-200)+s)-1/(2*(s*E)^0.5+1);
( %i2) solve(F2,E);
( %o2) [E=0,E=50]
```

Sustituyendo, resulta $u(E, s) = (50.s)^{0,5}$ y $v(E, s) = 2500 - 50.s$ de donde $v = 2500 - u^2$ es la ecuación de la curva óptima de Pareto (Figura 4.1), la cual podemos representar gráficamente con *Maxima* también.

```
( %i3) load(draw)$
( %i4) draw2d(implicit(v+u^2=2500,u,-5,60,v,-5,3000));
```

[1] https://maxima.sourceforge.io/es/

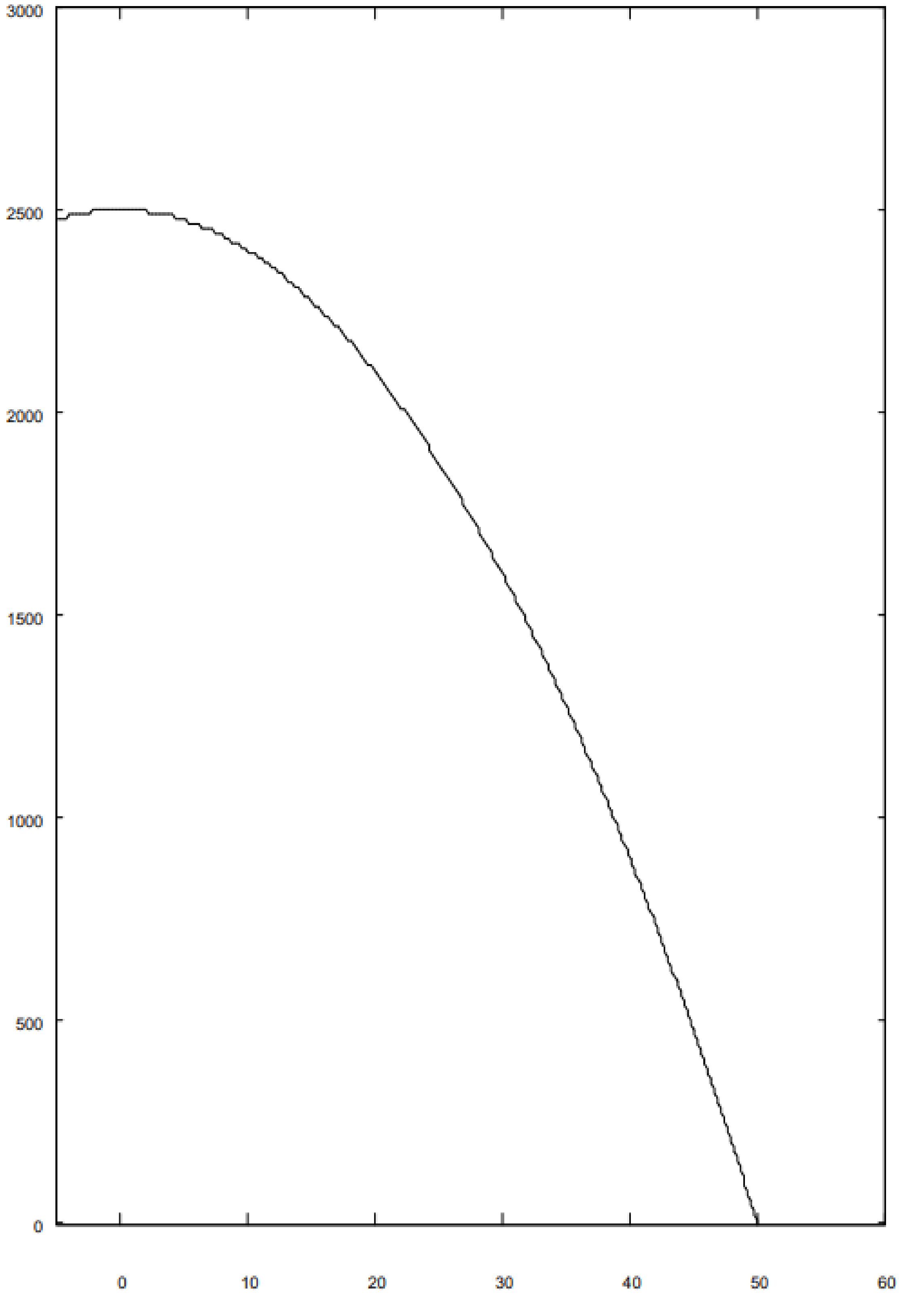

Figura 4.1: Ecuación de la curva óptima de Pareto.

La solución de Nash puede obtenerse ahora fácilmente maximizando la función $u.v$, la cual expresamos en términos de la variable s:

```
( %i5) uv:(50*s)^0.5*(50*50-50*s);
( %i6) ds2:diff(uv,s);
( %i7) solve(ds2,s);
( %o7) [s=16'67]
```

Por lo que el resultado se corresponde con un empleo de $E = 50$ y una tasa salarial de $s = 16,67$.

Alternativamente, la solución de Nash puede obtenerse maximizando $u.v = 2500.u - u^3$ con respecto a u:

```
( %i13) uv:2500*u-u^3;
( %i8) du:diff(uv,u);
( %i9) solve(du,u);
( %o9) 28.86751345948129
( %i10) v:2500- % ^2;
( %o10) 1666.666666666667
```

De donde se concluye que la utilidad para el sindicato y para la empresa es $28,87$ y $1666,67$, respectivamente.

4.2. Problema de demandas (bancarrota)

4.2.1. Introducción

Miraremos ahora de una manera mucho más profunda los problemas de bancarrota, de los cuales hicimos una pequeña introducción con el ejemplo del problema de la catástrofe, pero que han sido objeto de estudio durante mucho tiempo con el fin de encontrar las reglas para asociar a cada problema de bancarrota su división de los pagos. Presentaremos varias de estas reglas que se usan comúnmente en la práctica o se han discutido en el estudio teórico y las aplicaremos a ejemplos pero primero vamos a aportar algo de teoría sobre estas y la relación que guardan con las soluciones de juegos de negociación que hemos presentado anteriormente. La referencia seguida en esta capítulo ha sido [8].

Presentaremos dos problemas que se expusieron en el Talmud y que el interés en entenderlos ha sido una de las razones que promovieron el estudio teórico de las reglas.

Ejemplo 4.1. *Problema de la disputa por la ropa.* Dos personas discuten sobre la propiedad de una prenda de ropa por valor de 200. La primera persona reclama la mitad del valor, o sea 100 y la segunda persona 200. Asumiendo que las dos peticiones son razonables, ¿cómo debería repartirse el valor entre ellos? El Talmud da como resultado la repartición $u = (50, 150)$.

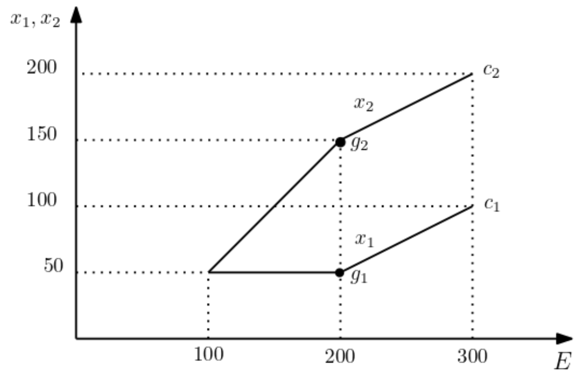

Figura 4.2: Solución gráfica del problema de la disputa por ropa.

La Figura 4.2 indica los repartos propuestos por el Talmud para el problema de la disputa por la ropa (eje vertical) para distintos valores de la prenda (eje horizontal).

Ejemplo 4.2. *Problema de la herencia.* Un hombre tiene tres esposas y en los contratos matrimoniales de las tres está estipulado que heredarán 100, 200 y 300 unidades respectivamente. El hombre muere y el valor de lo que deja llega tan solo a 100. El Talmud recomienda $e = (33{,}33, 33{,}33, 33{,}33)$. Si el valor que deja es de 300 se recomienda $p = (50, 100, 150)$. Si es 200 recomienda $k = (50, 75, 75)$.

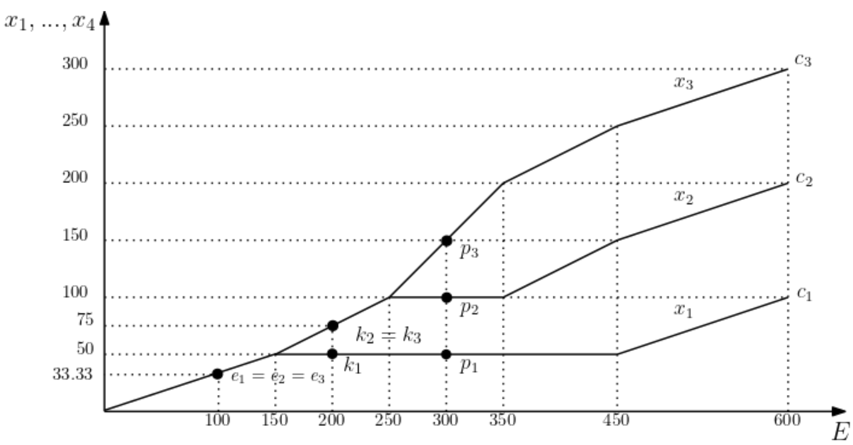

Figura 4.3: Solución gráfica del problema de la herencia

La Figura 4.3 muestra los repartos propuestos por el Talmud para este problema.

En lo que sigue se denotará por c el vector de demandas, por E el estado, por (c, E) un problema de bancarrota y por $\mathscr{C}^N$ la familia de problemas de bancarrota con conjunto N de acreedores.

Para explicar la regla de Talmud a la cual nos referimos, vamos a explicar primero otras normas elementales.

- **Conceder y dividir, CD.** Para $|N| = 2$. Para cada $(c, E) \in \mathscr{C}^N$ y $i \in N$,

$$CD_i(c, E) \equiv max\{E - c_j, 0\} + \frac{E - \sum_{k \in N} max\{E - c_k, 0\}}{2}.$$

En esta regla estamos trabajando en un escenario de división para 2 reclamantes. Esta norma explica los números propuestos por el Talmud para el controvertido problema de la prenda del que hablamos anteriormente. Sean los dos demandantes el agente i y el agente j. Esta norma cuando el agente i reclama c_i, está concediendo esencialmente al agente j la cantidad $E - c_i$ para asegurarse que eso es lo que recibe como mínimo, más tarde lo restante lo reparte de la misma manera entre los dos.

Ejemplo 4.3. Sea $E = 10$ y $c = (7, 8)$, entonces tenemos que $c_1 = 7$ y $c_2 = 8$ con lo que la regla repartiría de la siguiente manera, $CD_1(c, E) \equiv max\{2, 0\} + \frac{10-5}{2} = 9/2$ y $CD_2(c, E) \equiv max\{3, 0\} + \frac{10-5}{2} = 11/2$.

Regla proporcional, P. Para cada $\mathscr{C}^N$, $P(c, E) \equiv \lambda c$, con λ escogido tal que $\sum_{i \in N} \lambda c_i = E$.
Es de las normas más utilizadas en la práctica, es simple y se basa en hacer que las indemnizaciones sean proporcionales a las reclamaciones.

Ejemplo 4.4. Tomando los mismos datos del ejemplo anterior, $E = 10$ y $c = (7, 8)$, entonces $7\lambda + 8\lambda = 10$. Por tanto, despejando, $\lambda = 10/15$ y tenemos $P_1(c, E) = 70/15$ y $P_2(c, E) = 80/15$.

Regla de llegada aleatoria, RA. Para cada $(c, E) \in \mathscr{C}^N$ y cada $i \in N$,

$$RA_i(c, E) \equiv \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \prod^N} min\{c_i, max\{E - \sum_{j \in N, \pi(j) < \pi(i)} c_j, 0\}\},$$

donde Π^N denota el conjunto de permutaciones del conjunto N y si $i \in N$ y $\pi \in \Pi^N$, $\pi(i)$ es la posición del agente i en π. Para interpretar esta regla, imaginemos que los reclamantes llegan de uno en uno y se les da todo lo que reclaman hasta que se acabe el dinero total. El vector de adjudicaciones resultante, entonces, depende del orden en que los reclamantes llegan. Para eliminar la injusticia asociada con una orden en particular, se toma la aritmética promedio sobre todos los órdenes de llegada de los vectores de adjudicaciones calculadas de esta manera. Se ve de manera mucho más claro viendo el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.5. Tomamos de datos como patrimonio $E = 10$ y como vector de demandas $c = (1, 7, 9)$. Ahora en la siguiente tabla pondremos en la primera fila el número correspondiente que representa al jugador y en la primera columna, el orden en el que estos llegaron, quedando así por cada par (orden, jugador) su pago correspondiente en ese orden. En la última fila nos queda cual es la repartición que le quedaría a cada uno usando la regla de llegada aleatoria.

Jugadores	1	2	3
$1, 2, 3$	1	7	2
$1, 3, 2$	1	0	9
$2, 1, 3$	1	7	2
$2, 3, 1$	0	7	3
$3, 1, 2$	1	0	9
$3, 2, 1$	0	1	9
RA	4/6	22/6	34/6

Regla de igualdad ganancias restringida, CEA. Para cada $(c, E) \in \mathscr{C}^N$ e $i \in N$, $CEA_i(c, E) \equiv min\{c_i, \lambda\}$, donde λ es elegido para que se cumpla $\sum_{j\in N} min\{c_j, \lambda\} = E$.
Aquí estamos ante agentes en principio idénticos excepto con que difieren en sus reclamaciones, así que equiparar las adjudicaciones sería ignorar justamente esta diferencia. Si lo hiciéramos podría suceder por ejemplo que un agente reciba más de su reclamación. Así que esta norma lo que propone es asignar cantidades iguales a todos los reclamantes pero con la condición de que ninguno pueda recibir más de lo que reclama. Veremos que esta norma favorece a los que han reclamado menos cantidad.

Ejemplo 4.6. Sea $E = 10$ y $c = (1, 7, 9)$. Veamos los pagos que obtendrán los agentes bajo esta norma. Sea λ tal que $\lambda+\lambda+\lambda = 10$. Entonces $\lambda = 3{,}333$, pero $c_1 = 1 < 3{,}33$ por tanto $CEA_1(c, E) = 1$. Nos queda que $1 + \lambda + \lambda = 10$, por tanto $\lambda = 4{,}5$ y como $c_2 = 7 > 4{,}5$ y $c_3 > 4{,}5$ resulta $CEA_2(c, E) = 4{,}5$ y $CEA_3(c, E) = 4{,}5$.

Regla de pérdidas iguales restringidas, CEL. Para cada $(c, E) \in \mathscr{C}$ y cada $i \in N, CEL_i(c, E) \equiv max\{0, c_i - \lambda\}$, donde λ es elegido para que cumpla $\sum_{i \in N} max\{0, c_i - \lambda\} = E$.
Una alternativa a la regla que acabamos de explicar se obtiene centrándose en las pérdidas en las que incurren los reclamantes es decir lo que no reciben, a diferencia de lo que reciben, y elegir el vector de asignaciones en el que estas pérdidas son iguales sujeto a que nadie reciba una cantidad negativa. Es muy semejante a la norma anterior pero veremos que en este caso saldrá favorecido el jugador que reclame más.

Ejemplo 4.7. Con el mismo $E = 10$ y $c(1, 7, 9)$ del ejemplo anterior, veamos cómo es el pago con esta norma. Encontramos el valor de λ despejando de $1 - \lambda + 7 - \lambda + 9 - \lambda = 10$. Tenemos que $\lambda = 7/3$ pero como $1 - 7/3 < 0$ entonces $CEL_1(c, E) = 0$ así que ahora $7 - \lambda + 9 - \lambda = 10$. Despejamos y nos queda $\lambda = 3$ quedando así $CEL_2(c, E) = 7 - 3 = 4 > 0$ y $CEL_3(c, E) = 9 - 3 = 6 > 0$.

Regla de Piniles, Pin. Para cada $(c, E) \in \mathscr{C}^N$ y para cada $i \in N$, tenemos que $Pin_i(c, E) \equiv CEA_i(c/2, E)$ si $\sum_{j \in N}(c_j/2) \geq E$, y $Pin_i(c, E) \equiv c_i/2 + CEA_i(c/2, E - \sum_{j \in N}(c_j/2))$ en caso contrario.
Esta regla, a la vista del funcionamiento de las normas anteriores, que según si los agentes piden más o menos salen más o menos beneficiados, intenta corregir estos efectos. Así divide la norma en dos casos. Si la suma de las mitades de las reclamaciones es mayor que el patrimonio, se entiende que son reclamaciones altas y se le aplica CEA a las demandas divididas por 2 para que salgan favorecidos los que han reclamado menos. En caso contrario se pone como mínimo de ganancia la mitad de su reclamación y se le suma CEA aplicado a la resta del patrimonio con la suma de las mitades de las reclamaciones premiando así a los que han reclamado más cantidad.

Regla igualitaria restringida, CE. Para cada $(c, E) \in \mathscr{C}^N$ e $i \in N, CE_i(c, E) \equiv min\{c_i/2, \lambda\}$ si $E \leq \sum_{j \in N}(c_j/2)$ y $CE_i(c, E) \equiv max\{c_i/2, min\{c_i, \lambda\}\}$ en caso contrario, donde en cada caso λ es escogido de manera que $\sum_{i \in N} CE_i(c, E) = E$.
Aquí vemos que de manera parecida al anterior separa los casos viendo si las reclamaciones son altas o bajas. La diferencia está en que en esta norma, a diferencia de la de Piniles, cuando la mitad de la demanda es superior al estado, en esta se aplica CEA pero ajustada para que todo demandante obteng al menos la mitad de su demanda.

Regla de Talmud, T. Para cada $(c, E) \in \mathscr{C}^N$ y cada $i \in N$, tenemos que:

1. Si $\sum_{j \in N}(c_j/2) \geq E$, entonces $T_i(c, E) \equiv min\{c_i/2, \lambda\}$, donde λ es elegido para

que cumpla $\sum_{i\in N} min\{c_i/2, \lambda\} = E$.

2. Si $\sum_{i\in N}(c_i/2) \leq E$, entonces $T_i(c, E) \equiv c_i - min\{c_i/2, \lambda\}$, donde λ es elegido para que cumpla $\sum_{i\in N}[c_i - min\{c_i/2, \lambda\}] = E$.

Ahora tenemos todo lo que necesitamos para definir una regla que finalmente genere todos los números que aparecen en el Talmud. Inspirado en las reglas que acabamos de explicar, esta regla distingue también dos casos. En el primero, el estado es escaso en relación a las demandas, y se aplica la regla igualitaria al estado considerando la mitad de las demandas, es decir, ante mucha escasez, nadie recibe más de la mitad de lo que reclama. En el segundo caso, el estado (que es grande en relación a las demandas) se reparte igualando las pérdidas de modo que nadie reciba menos de la demanda dividida por 2. Es decir, si la escasez es menos pronunciado, se garantiza a todos los reclamantes la mitad de su demanda.

Ahora antes de presentar ejemplos ilustrativos, vamos a comentar la relación entre estas normas y las soluciones de juegos de negociación de las que hemos hablado en el capítulo anterior.

Teorema 4.8. *Considérese un problema de bancarrota,* (c, E)*, y el de negociación asociado, denotado por* $(B(c, E), d)$*. Se da la igualdad entre las siguientes reglas de bancarrota y soluciones de negociación:*

1. *La regla* CEA *y la solución de negociación de Nash.*

2. *La regla proporcional y la solución de Nash ponderada con los pesos elegidos iguales a las reclamaciones*

3. *La regla proporcional aplicada al problema con las demandas truncadas por el estado (denotada por* P^t*) y la solución de Kalai-Smorodinsky.*

Es decir,

$$\mathbf{CEA}(\mathbf{c}, \mathbf{E}) = \mathbf{NA}(\mathbf{B}(\mathbf{c}, \mathbf{E}), \mathbf{d}),$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{c}, \mathbf{E}) = \mathbf{NA}^{\mathbf{c}}(\mathbf{B}(\mathbf{c}, \mathbf{E}), \mathbf{d}),$$

$$\mathbf{P}^{\mathbf{t}}(\mathbf{c}, \mathbf{E}) = \mathbf{KS}(\mathbf{B}(\mathbf{c}, \mathbf{E}), \mathbf{d}).$$

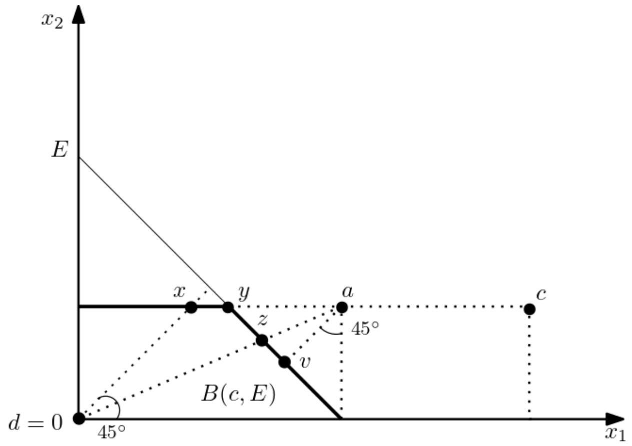

Figura 4.4: Reglas de bancarrota y soluciones de negociación con demandas diferentes.

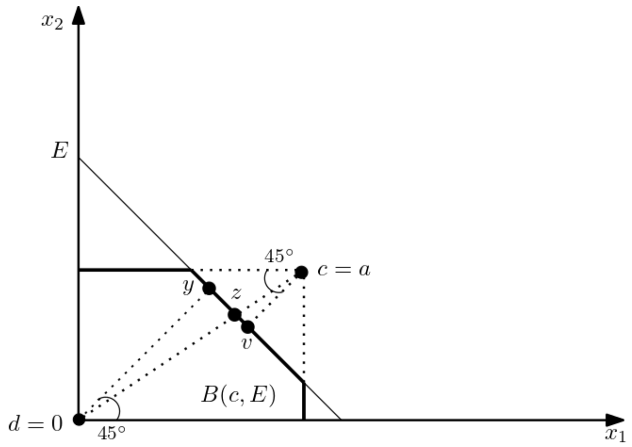

Figura 4.5: Reglas de bancarrota y soluciones de negociación con demandas similares.

Las Figuras 4.4 y 4.5 muestran distintas reglas de bancarrota de un problema (c, E): CEA (y), P^t (z) y CEL aplicada al problema con las demandas truncadas por el estado (v) y, consecuentemente, las soluciones de Nash, Nash ponderada y Kalai-Smorodinsky del juego de negociación asociado, $B(c, E)$, para un estado dado y dos casos de demandas: muy distintas o similares, respectivamente.

4.2.2. Análisis de ejemplos

Pasamos ahora a solucionar unos ejemplos más complejos gracias a programas informáticos con los que contamos actualmente. Concretamente se ha hecho uso de una calculadora de reglas de bancarrota elaborada con el software *delphi*. El objetivo no es realizar un análisis crítico de las reglas, el cual ya se ha hecho en su presentación, sino sólo ilustrarlas a través de ejemplos tomados de la vida real. No obstante, puede ser un trabajo futuro un análisis más pormenorizado de estos resultados. Una idea en esta línea es calcular el Índice de Gini y la curva de Lorenz para cuantificar el distinto grado de equidad de los resultados obtenidos. Los dos conjuntos de datos han sido obtenidos de sendos artículos que pueden ser consultados para obtener más información de los problemas de los que proceden.

Ejemplo 4.9. Primer conjunto de datos.

En primer lugar, consideramos un conjunto de datos tomados de [1] y [6]. Corresponden a la situación que se produjo cuando la empresa estadounidense Pacific Gas and Electric Company se declaró en quiebra. La tabla siguiente contiene las demandas de 20 empresas y el valor de la regla RA a partir del estado disponible.

i	c_i	RA_i	i	c_i	RA_i
1	2207.2500	186.5294	11	40.1472	7.1829
2	1966.0000	186.5294	12	40.1221	7.1785
3	1302.1000	186.5294	13	32.8679	5.8877
4	1228.8000	186.5294	14	29.5235	5.2914
5	938.4610	174.4384	15	28.2106	5.0571
6	310.0000	52.6898	16	24.7183	4.4334
7	57.9284	10.3302	17	23.8495	4.2782
8	49.4526	8.8338	18	22.5765	4.0505
9	48.4006	8.6475	19	21.5061	3.8590
10	45.7064	8.1700	20	19.8002	3.5538

Vamos a resolver con las distintas normas que hemos visto esta primera tabla de datos.

```
DATOS DE ENTRADA:
total a repartir: 1060

Demandas:
 jugador 1: 2207.2500   jugador 11: 40.1472
 jugador 2: 1966        jugador 12: 40.1221
 jugador 3: 1302.1      jugador 13: 32.8679
 jugador 4: 1228.8      jugador 14: 29.5235
 jugador 5: 938.4610    jugador 15: 28.2106
 jugador 6: 310         jugador 16: 24.7183
 jugador 7: 57.9284     jugador 17: 23.8495
```

```
 jugador 8: 49.4526    jugador 18: 22.5765
 jugador 9: 48.4006    jugador 19: 21.5061
 jugador 10: 45.7064   jugador 20: 19.8002

Ajuste Proporcional
Jugador 1: 277,29859962    Jugador 11: 5,043725150656
Jugador 2: 246,9901673389  Jugador 12: 5,04057181739
Jugador 3: 163,5838743093  Jugador 13: 4,129220814384
Jugador 4: 154,3751361272  Jugador 14: 3,709061142132
Jugador 5: 117,8996131389  Jugador 15: 3,544120455103
Jugador 6: 38,94555029251  Jugador 16: 3,105379986436
Jugador 7: 7,277591663111  Jugador 17: 2,996231940971
Jugador 8: 6,212770065791  Jugador 18: 2,836303923157
Jugador 9: 6,080606456411  Jugador 19: 2,701828706922
Jugador 10: 5,742131935127 Jugador 20: 2,487515112586

Talmud
Jugador 1: 136,2658416667  Jugador 11: 20,0736
Jugador 2: 136,2658416667  Jugador 12: 20,06105
Jugador 3: 136,2658416667  Jugador 13: 16,43395
Jugador 4: 136,2658416667  Jugador 14: 14,76175
Jugador 5: 136,2658416667  Jugador 15: 14,1053
Jugador 6: 136,2658416667  Jugador 16: 12,35915
Jugador 7: 28,9642         Jugador 17: 11,92475
Jugador 8: 24,7263         Jugador 18: 11,28825
Jugador 9: 24,2003         Jugador 19: 10,75305
Jugador 10: 22,8532        Jugador 20: 9,9001

CEL
Jugador 1: 650,625  Jugador 11: 0
Jugador 2: 409,375  Jugador 12: 0
Jugador 3: 0        Jugador 13: 0
Jugador 4: 0        Jugador 14: 0
Jugador 5: 0        Jugador 15: 0
Jugador 6: 0        Jugador 16: 0
Jugador 7: 0        Jugador 17: 0
```

```
Jugador 8: 0        Jugador 18: 0
Jugador 9: 0        Jugador 19: 0
Jugador 10: 0       Jugador 20: 0

CEA
Jugador 1: 95,8650166667  Jugador 11: 40,1472
Jugador 2: 95,8650166667  Jugador 12: 40,1221
Jugador 3: 95,8650166667  Jugador 13: 32,8679
Jugador 4: 95,8650166667  Jugador 14: 29,5235
Jugador 5: 95,8650166667  Jugador 15: 28,2106
Jugador 6: 95,8650166667  Jugador 16: 24,7183
Jugador 7: 57,9284        Jugador 17: 23,8495
Jugador 8: 49,4526        Jugador 18: 22,5765
Jugador 9: 48,4006        Jugador 19: 21,5061
Jugador 10: 45,7064       Jugador 20: 19,8002

CE
Jugador 1: 136,2658416667  Jugador 11: 20,0736
Jugador 2: 136,2658416667  Jugador 12: 20,06105
Jugador 3: 136,2658416667  Jugador 13: 16,43395
Jugador 4: 136,2658416667  Jugador 14: 14,76175
Jugador 5: 136,2658416667  Jugador 15: 14,1053
Jugador 6: 136,2658416667  Jugador 16: 12,35915
Jugador 7: 28,9642         Jugador 17: 11,92475
Jugador 8: 24,7263         Jugador 18: 11,28825
Jugador 9: 24,2003         Jugador 19: 10,75305
Jugador 10: 22,8532        Jugador 20: 9,9001

PIN
Jugador 1: 136,2658416667  Jugador 11: 20,0736
Jugador 2: 136,2658416667  Jugador 12: 20,06105
Jugador 3: 136,2658416667  Jugador 13: 16,43395
Jugador 4: 136,2658416667  Jugador 14: 14,76175
Jugador 5: 136,2658416667  Jugador 15: 14,1053
Jugador 6: 136,2658416667  Jugador 16: 12,35915
Jugador 7: 28,9642         Jugador 17: 11,92475
```

```
Jugador 8: 24,7263          Jugador 18: 11,28825
Jugador 9: 24,2003          Jugador 19: 10,75305
Jugador 10: 22,8532         Jugador 20: 9,9001
```

Ejemplo 4.10. Segundo conjunto de datos.

En segundo lugar, tomamos un nuevo conjunto de datos tomados, en este caso, de [5] y [6]. Provienen de una situación conflictiva en la gestión universitaria. Concretamente, se considera la situación de asignación de recursos en una universidad española extraída de [5]. El objetivo de este ejemplo consiste en distribuir el dinero disponible entre las entidades universitarias para financiar la compra de equipos que se utilizarán en la enseñanza. Este problema también se modeliza como un problema de bancarrota. La tabla siguiente contiene las demandas de 27 entidades y el valor de la regla RA a partir del estado disponible.

i	c_i	RA_i
1	15720.66	3052.382
2	25532.200	4943.097
3	32960.440	6368.163
4	13664.610	2654.940
5	8173.760	1590.825
6	3904.170	760.817
7	14869.040	2887.800
8	289753.130	50564.210
9	250962.130	44711.150

i	c_i	RA_i
10	126857.130	23837.810
11	248338.50	44306.360
12	227091.640	40983.460
13	63069.720	12084.870
14	15915.980	3090.118
15	10059.720	1956.776
16	530070.440	79348.800
17	121229.150	22807.450
18	233163.45	41940.310

i	c_i	RA_i
19	248008.450	44255.370
20	169534.830	31455.250
21	240404.840	43075.050
22	250845.440	44693.170
23	70752.960	13518.360
24	140679.050	26346.780
25	227684.440	41077.080
26	234125.140	42091.090
27	264726.580	46813.040

Vamos a resolver con las distintas normas que hemos visto esta segunda tabla de datos.

```
    DATOS DE ENTRADA:
total a repartir: 721214,528

Demandas:
 jugador 1: 15720,66       jugador 15: 10059,72
 jugador 2: 25532,2        jugador 16: 530070,44
 jugador 3: 32960,44       jugador 17: 121229,15
 jugador 4: 13664,61       jugador 18: 233163,45
 jugador 5: 8173,76        jugador 19: 248008,45
 jugador 6: 3904,17        jugador 20: 169534,83
 jugador 7: 14869,04       jugador 21: 240404,84
 jugador 8: 289753,13      jugador 22: 250845,44
 jugador 9: 250962,13      jugador 23: 70752,96
 jugador 10: 126857,13     jugador 24: 140679,05
 jugador 11: 248338,5      jugador 25: 227684,44
 jugador 12: 227091,64     jugador 26: 234125,14
 jugador 13: 63069,72      jugador 27: 264726,58
 jugador 14: 15915,98

Ajuste Proporcional
Jugador 1: 2780,2101601856    Jugador 15: 1779,0688019856
Jugador 2: 4515,3881485822    Jugador 16: 93743,343021352
Jugador 3: 5829,0777977634    Jugador 17: 21439,463390256
Jugador 4: 2416,5962215946    Jugador 18: 41235,125794587
Jugador 5: 1445,5354036611    Jugador 19: 43860,474846596
Jugador 6: 690,45530538106    Jugador 20: 29982,35804803
```

Jugador 7: 2629,6005435017
Jugador 8: 51243,051880238
Jugador 9: 44382,83530385
Jugador 10: 22434,775748473
Jugador 11: 43918,844429257
Jugador 12: 40161,321777916
Jugador 13: 11153,925874872
Jugador 14: 2814,7526443108
Jugador 21: 42515,770885306
Jugador 22: 44362,19859244
Jugador 23: 12512,712459604
Jugador 24: 24879,192358034
Jugador 25: 40266,158889268
Jugador 26: 41405,201370863
Jugador 27: 46817,088302093

Talmud
Jugador 1: 7860,33
Jugador 2: 12766,1
Jugador 3: 16480,22
Jugador 4: 6832,305
Jugador 5: 4086,88
Jugador 6: 1952,085
Jugador 7: 7434,52
Jugador 8: 36493,931125
Jugador 9: 36493,931125
Jugador 10: 36493,931125
Jugador 11: 36493,931125
Jugador 12: 36493,931125
Jugador 13: 31534,86
Jugador 14: 7957,99
Jugador 15: 5029,86
Jugador 16: 36493,931125
Jugador 17: 36493,931125
Jugador 18: 36493,931125
Jugador 19: 36493,931125
Jugador 20: 36493,931125
Jugador 21: 36493,931125
Jugador 22: 36493,931125
Jugador 23: 35376,48
Jugador 24: 36493,931125
Jugador 25: 36493,931125
Jugador 26: 36493,931125
Jugador 27: 36493,931125

CEL
Jugador 1: 0
Jugador 2: 0
Jugador 3: 0
Jugador 4: 0
Jugador 5: 0
Jugador 6: 0
Jugador 7: 0
Jugador 8: 79423,159
Jugador 9: 40632,159
Jugador 15: 0
Jugador 16: 319740,469
Jugador 17: 0
Jugador 18: 22833,479
Jugador 19: 37678,479
Jugador 20: 0
Jugador 21: 30074,869
Jugador 22: 40515,469
Jugador 23: 0

Jugador 10: 0
Jugador 11: 38008,529
Jugador 12: 16761,669
Jugador 13: 0
Jugador 14: 0
Jugador 24: 0
Jugador 25: 17354,469
Jugador 26: 23795,169
Jugador 27: 54396,609

CEA
Jugador 1: 15720,66
Jugador 2: 25532,2
Jugador 3: 32282,8625263158
Jugador 4: 13664,61
Jugador 5: 8173,76
Jugador 6: 3904,17
Jugador 7: 14869,04
Jugador 8: 32282,8625263158
Jugador 9: 32282,8625263158
Jugador 10: 32282,8625263158
Jugador 11: 32282,8625263158
Jugador 12: 32282,8625263158
Jugador 13: 32282,8625263158
Jugador 14: 15915,98
Jugador 15: 10059,72
Jugador 16: 32282,8625263158
Jugador 17: 32282,8625263158
Jugador 18: 32282,8625263158
Jugador 19: 32282,8625263158
Jugador 20: 32282,8625263158
Jugador 21: 32282,8625263158
Jugador 22: 32282,8625263158
Jugador 23: 32282,8625263158
Jugador 24: 32282,8625263158
Jugador 25: 32282,8625263158
Jugador 26: 32282,8625263158
Jugador 27: 32282,8625263158

CE
Jugador 1: 7860,33
Jugador 2: 12766,1
Jugador 3: 16480,22
Jugador 4: 6832,305
Jugador 5: 4086,88
Jugador 6: 1952,085
Jugador 7: 7434,52
Jugador 8: 36493,931125
Jugador 9: 36493,931125
Jugador 10: 36493,931125
Jugador 11: 36493,931125
Jugador 12: 36493,931125
Jugador 13: 31534,86
Jugador 15: 5029,86
Jugador 16: 36493,931125
Jugador 17: 36493,931125
Jugador 18: 36493,931125
Jugador 19: 36493,931125
Jugador 20: 36493,931125
Jugador 21: 36493,931125
Jugador 22: 36493,931125
Jugador 23: 35376,48
Jugador 24: 36493,931125
Jugador 25: 36493,931125
Jugador 26: 36493,931125
Jugador 27: 36493,931125

Jugador 14: 7957,99

PIN

Jugador 1: 7860,33
Jugador 2: 12766,1
Jugador 3: 16480,22
Jugador 4: 6832,305
Jugador 5: 4086,88
Jugador 6: 1952,085
Jugador 7: 7434,52
Jugador 8: 36493,931125
Jugador 9: 36493,931125
Jugador 10: 36493,931125
Jugador 11: 36493,931125
Jugador 12: 36493,931125
Jugador 13: 31534,86
Jugador 14: 7957,99
Jugador 15: 5029,86
Jugador 16: 36493,931125
Jugador 17: 36493,931125
Jugador 18: 36493,931125
Jugador 19: 36493,931125
Jugador 20: 36493,931125
Jugador 21: 36493,931125
Jugador 22: 36493,931125
Jugador 23: 35376,48
Jugador 24: 36493,931125
Jugador 25: 36493,931125
Jugador 26: 36493,931125
Jugador 27: 36493,931125

Bibliografía

[1] Borm P., Carpente L., Casas-Méndez B., Hendrickx R. (2005) *The constrained equal awards rule for bankruptcy problems with a priori unions.* Annals of Operations Research 137(1), 211–227.

[2] Casas Méndez B., Fiestras Janeiro M.G., García Jurado I., González Díaz J. (2012) *Introducción a la teoría de juegos.* USC editora.

[3] Friedman J.W. (1991) *Teoría de juegos con aplicaciones a la economía.* Alianza Universidad.

[4] Peters, H.J.M (1992) *Axiomatic bargaining game theory.* Kluwer Academic Publishers.

[5] Pulido M., Sánchez-Soriano J., Llorca N. (2002). *Game theory techniques for university management: an extended bankruptcy model.* Annals of Operations Research 109(1-4), 129–142.

[6] Saavedra Nieves A., Saavedra Nieves P. (2020) *On systems of quotas from bankruptcy perspective: the sampling estimation of the random arrival rule.* European Journal of Operational Research 285, 655–669.

[7] Sánchez Rodríguez E., Vidal Puga J. (2014) *Juegos coalicionales.* Servizo de Publicazóns, Universidade de Vigo.

[8] Thompson W. (2003) *Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: a survey.* Mathematical Social Sciences 45(3), 249-297.