Traballo Fin de Grao

Levantamentos de tensores dunha variedade ao seu fibrado tanxente

Antón Iglesias López

2021/2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Levantamentos de tensores dunha variedade ao seu fibrado tanxente

Antón Iglesias López

Xullo, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Xeometría e Topoloxía
Título: Levantamentos de tensores dunha variedade ao seu fibrado tanxente
Breve descrición do contido
O principal propósito do TFG é construír, a partir de obxectos tensoriais definidos nunha variedade calquera, obxectos tensoriais do mesmo tipo nos fibrados tanxentes e cotanxentes. · Estudo do fibrado tanxente e cotanxente como variedades diferenciables. · Estudo dos levantamentos de tensores seguindo o libro de K. Yano e S. Ishihara. · Descrición da estrutura tanxente do fibrado tanxente e da estrutura simpléctica do fibrado cotanxente. · Descrición das ecuacións de Hamilton e Euler-Lagrange utilizando os puntos 2 e 3.
Recomendacións
Ter cursado ou estar cursando a materia de Variedades Diferenciables.
Outras observacións

Índice xeral

Resumo

Os obxectivos principais deste traballo son:

Primeiro, describir os levantamentos, verticais e completos, de distintos obxectos tensoriais (funcións, campos de vectores, 1-formas, campos de tensores...) aos fibrados tanxente e cotanxente dunha variedade diferenciable.

En segundo lugar introdúcense, utilizando estes levantamentos, elementos xeométricos canónicos dos mesmos, como son a estrutura tanxente canónica e o campo de vectores de Liouville no fibrado tanxente, ou a estrutura simpléctica canónica e a 1-forma de Liouville no fibrado cotanxente.

Estes elementos xeométricos permítennos, por último, desenvolver as formulacións xeométricas, tanto lagrangiana como hamiltoniana, da Mecánica, obtendo as ecuacións de Euler-Lagrange e de Hamilton.

Resumen

Los objetivos principales de este trabajo son:

Primero, describir los levantamientos, verticales y completos, de distintos objetos tensoriales (funciones, campos de vectores, 1-formas, campos de tensores...) a los fibrados tangente y cotangente de una variedad diferenciable.

En segundo lugar se introducen, utilizando dichos levantamientos, elementos geométricos canónicos de los mismos, como son la estructura tangente canónica y el campo de vectores de Liouville en el fibrado tangente, o la estructura simpléctica canónica y la 1-forma de Liouville en el fibrado cotangente.

Estos elementos geométricos nos permiten, por último, desarrollar las formulaciones geométricas, tanto lagrangiana como hamiltoniana, de la Mecánica, obteniendo las ecuaciones de Euler-Lagrange y de Hamilton.

Abstract

This project principal objectives' are:

Firstly, to describe the vertical and complete lifts of several tensorial objects (functions, vector fields, 1-forms, tensor fields...) to the tangent and cotangent bundles of a diferentiable manifold.

Secondly, using said lifts, some of their canonical geometric elements are introduced, such as the tangent canonical structure and the Liouville vector field on the tangent bundle, or the simplectic canonical structure and the Liouville 1-form on the cotangent bundle.

Finally, this geometric elements allow us to develop Mechanics' geometrical formulations, both lagrangian and hamiltonian, obtaining the Euler-Lagrange and Hamilton equations.

Introdución

A Mecánica Analítica supón un apartado crucial na historia da Física, pois permite dotar dunha base máis rigorosa á Mecánica Newtoniana. As ecuacións de Euler-Lagrange e as ecuacións de Hamilton, sistemas de ecuacións diferenciais ordinarias, son decisivas na Mecánica Clásica. Ao longo deste traballo, empregando ferramentas da Xeometría Diferencial, como son o levantamento de distintos obxectos tensoriais aos fibrados tanxente e cotanxente, chegaremos á descrición matemática destes dous tipos de ecuacións, así como ao Teorema de Noether.

- **No capítulo 1**, nos situamos no fibrado tanxente dunha variedade diferenciable, e definimos os levantamentos, tanto verticais como completos, de funcións, campos de vectores e 1-formas, para, a través destes, poder levantar campos de tensores.

- **No capítulo 2**, centrámonos nas ecuacións diferenciais de segunda orde (SODEs), que entenderemos como unha clase de campos de vectores sobre o fibrado tanxente, e establecemos a súa relación cos levantamentos do capítulo anterior.

- **No capítulo 3**, partindo dunha función lagrangiana, e baseándonos no visto para SODEs e as súas curvas integrais, formulamos a Mecánica lagrangiana, chegando a obter as coñecidas Ecuacións de Euler-Lagrange, que expresamos tamén en termos dos levantamentos de campos vectoriais.

- **No capítulo 4**, definimos as simetrías e constantes do movemento, e utilizando os levantamentos verticais e completos de campos de vectores, probamos o teorema de Noether, que fai corresponder a cada simetría do lagrangiano unha constante de movemento.

- **No capítulo 5**, seguiremos un procedemento análogo ao realizado en capítulos anteriores, de forma máis reducida, para definir os levantamentos ao fibrado cotanxente, obtendo, a través deles, a formulación hamiltoniana da Mecánica, que finaliza coa obtención das Ecuacións de Hamilton.

As referencias bibliográficas do capítulo 1 son [4] e [8], as dos capítulos 2, 3 e 4 son [1], [4] e [6], e as do capítulo 5 son [4], [6] e [8].

Por último, gustaríame agradecer enormemente ao meu titor, Modesto Salgado, cuxa axuda e indicacións fixeron posible a realización deste traballo.

Capítulo 1

Levantamentos de tensores ao fibrado tanxente

O fibrado tanxente dunha variedade diferenciable ten unha estrutura, coñecida co nome de estrutura case tanxente canónica, que xoga un papel importante na descrición lagrangiana da Mecánica Analítica.

1.1. Estrutura diferenciable do fibrado tanxente

Nesta sección lembraremos as principais propiedades do fibrado tanxente dunha variedade diferenciable, que serán de utilidade, en capítulos posteriores, na descrición xeométrica das ecuacións de Euler-Lagrange.

Sexa Q unha variedade diferenciable de dimensión n e sexa TQ o seu fibrado tanxente. Vexamos que a estrutura diferenciable en Q induce unha estrutura diferenciable en TQ.

Sexa (U, φ) unha carta en Q, onde U é un aberto en Q e $\varphi : U \subseteq Q \longrightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo.

Como

$$\begin{array}{rccc} \tau : & TQ & \longrightarrow & Q \\ & v_q & \longmapsto & q \end{array}$$

é a proxección canónica, consideremos o aberto $\tau^{-1}(U) = TU$ en TQ e definimos a carta inducida $(\tau^{-1}(U), \widetilde{\varphi})$, onde $\widetilde{\varphi}$ é o difeomorfismo dado por

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{\varphi} : & TU & \longrightarrow & \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ & v_q & \longmapsto & \big((\varphi \circ \tau)(v_q)\, , \, dq^1(q)(v_q), \dots , dq^n(q)(v_q)\big)\ . \end{array}$$

Entón, temos un sistema de $2n$ coordenadas *canónicas* (q^i, v^i) en $TU \subseteq TQ$ de forma que

$$q^i = \pi_i \circ \widetilde{\varphi} \;, \qquad \forall\, i = 1, \dots, n$$
$$v^i = \pi_{i+n} \circ \widetilde{\varphi} \;, \quad \forall\, i = 1, \dots, n \,,$$

onde π_i son as proxeccións en coordenadas canónicas ,e polo tanto

$$q^i\,(v_q) \;=\; q^i\,(q) \;, \quad v^i\,(v_q) \;=\; dq^i(q)\,(v_q) \;= v_q(q^i), \quad i = 1, \dots, n \,,$$

sendo $v_q \in TQ, \quad v_q = a^i \dfrac{\partial}{\partial q^i}\Big|_q.$

Da mesma forma, podemos considerar o espazo tanxente á variedade TQ en cada punto e o seu espazo dual, sendo

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial q^1}\Big|_{v_q}, \dots, \frac{\partial}{\partial q^n}\Big|_{v_q}, \frac{\partial}{\partial v^1}\Big|_{v_q}, \dots, \frac{\partial}{\partial v^n}\Big|_{v_q} \right\}$$

unha base para $T_{v_q}(TQ)$ e

$$\left\{ dq^1(v_q), \dots, dq^n(v_q), dv^1(v_q), \dots, dv^n(v_q) \right\}$$

unha base para $T^*_{v_q}(TQ)$.

Observemos que

$$\tau_*(v_q)\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_{v_q} \right) = \frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_q, \quad \tau_*(v_q)\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\Big|_{v_q} \right) = 0_q \,,$$

sendo

$$\tau_*(v_q) : T_{v_q}(TQ) \longrightarrow T_q Q$$

a diferencial de τ no punto v_q. Denomínanse vectores *verticais* aos vectores cuxas únicas compoñentes son as derivadas parciais con respecto ás coordenadas v^i e, polo tanto, proxéctanse por τ_* no vector cero.

Unha vez vistas todas as definicións e propiedades anteriores, podemos comezar a definir os distintos *levantamentos verticais* e *completos* (ou *naturais*), para funcións, vectores e 1-formas. Ademais, empregaremos unha combinación dos mesmos para realizar o levantamento de tensores.

1.2. Levantamentos de funcións

Definición 1.1. Defínese o *levantamento vertical*, f^V, dunha función diferenciable $f \in C^\infty(Q)$ como a composición da función coa proxección canónica

$$\begin{array}{rccl} f^V: & TQ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v_q & \longmapsto & f^V(v_q) = \tau^* f(v_q) = f \circ \tau(v_q) = f(q) \quad . \end{array} \tag{1.1}$$

Definición 1.2. Defínese o *levantamento completo*, f^C, dunha función diferenciable $f \in C^\infty(Q)$ como segue

$$\begin{array}{rccl} f^C: & TQ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v_q & \longmapsto & f^C(v_q) = v_q(f) = v^i \dfrac{\partial f}{\partial q^i}\Big|_q \quad . \end{array} \tag{1.2}$$

Como se pode ver claramente, as funcións levantadas, tanto completa como vertical, son aplicacións que levan vectores $v_q \in TQ$ a $\mathbb{R}$, distintas entre si, e definidas unicamente pola función orixinal f.

Así, podemos ver que a forma dos levantamentos da función coordenada canónica, que empregaremos en posteriores demostracións, é

$$(q^i)^V = q^i \circ \tau\,, \quad (q^i)^C = v^j \frac{\partial q^i}{\partial q^j} = v^i\,. \tag{1.3}$$

Propiedade 1.3. *Sexan dúas funcións $f, g \in C^\infty(Q)$, os levantamentos do seu produto son*

$$(fg)^V = f^V g^V\,, \quad (fg)^C = f^C g^V + f^V g^C\,. \tag{1.4}$$

Demostración. Tendo en conta (1.1) e (1.2), respectivamente, tense que, para un vector arbitrario $v_q \in TQ$,

$$(fg)^V(v_q) = (fg) \circ \tau(v_q) = (fg)(q) = f(q)\ g(q) = f^V(v_q)\ g^V(v_q) = [f^V g^V](v_q) \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} (fg)^C(v_q) = v^i \frac{\partial (fg)}{\partial q^i}\Big|_q &= v^i \frac{\partial f}{\partial q^i}\Big|_q\ g(q) + f(q)\ v^i \frac{\partial g}{\partial q^i}\Big|_q \\ &= f^C(v_q)\ g^V(v_q) + f^V(v_q)\ g^C(v_q) = [f^C g^V + f^V g^C](v_q)\,, \end{aligned} \tag{1.6}$$

quedando probadas ambas ecuacións. □

1.3. Levantamentos de campos de vectores

Tomamos un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(Q)$, e definiremos os seus levantamentos a través dos levantamentos respectivos dunha función f arbitraria. Isto, ademais, lévanos á expresión local de ambos levantamentos.

Primeiro, sen embargo, probaremos que se as aplicacións de dous campos vectoriales a ambos levantamentos dunha función coinciden, entón ambos campos son iguais.

Proposición 1.4. *Sexan dous campos de vectores $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathfrak{X}(TQ)$. Tense que, se para toda $f \in C^\infty(Q)$,*

$$\widetilde{X}(f^V) = \widetilde{Y}(f^V)\,, \quad \widetilde{X}(f^C) = \widetilde{Y}(f^C)\,,$$

entón, $\widetilde{X} = \widetilde{Y}$.

Demostración. Basta con probar que se

$$\widetilde{X}(f^V) = 0\,, \quad \widetilde{X}(f^C) = 0\,, \tag{1.7}$$

entón $\widetilde{X} = 0$.

Unha vez demostrado isto, se o aplicamos a $\widetilde{Z} = \widetilde{X} - \widetilde{Y}$, a proposición queda probada.

Podemos escribi-lo campo como $\widetilde{X} = A^i \dfrac{\partial}{\partial q^i} + B^i \dfrac{\partial}{\partial v^i}$, tomar como función q^i e empregando (1.3) e (1.7), obtense

$$\begin{array}{l} 0 = \widetilde{X}((q^i)^V) = \widetilde{X}(q^i) = A^i \\ 0 = \widetilde{X}((q^i)^C) = \widetilde{X}(v^i) = B^i \end{array}\quad , \tag{1.8}$$

e así, $\widetilde{X} = 0$.

□

Definición 1.5. Para un campo vectorial X, definimos o seu *levantamento vertical* a través de

$$X^V(f^V) = 0\,, \quad X^V(f^C) = (X(f))^V\,. \tag{1.9}$$

Proposición 1.6. *A expresión en coordenadas locais de X^V é*

$$\boxed{X^V = X^i \frac{\partial}{\partial v^i}} \tag{1.10}$$

Demostración. Para chegar a dita expresión, comezamos por considerar o campo levantado X^V nas coordenadas canónicas, é dicir,

$$X^V = A^i \frac{\partial}{\partial q^i} + B^i \frac{\partial}{\partial v^i},$$

e tomar como función, tamén, unha coordenada canónica (q^i). Como vimos na proposición anterior, en tal caso tense que

$$X^V((q^i)^V) = A^i\,, \quad X^V((q^i)^C) = B^i.$$

Por outro lado,

$$(X(q^i))^V = (X^i)^V = X^i \circ \tau.$$

Igualando ambas expresións anteriores, é directo que $A^i = 0$ e $B^i = X^i$, obténdose a expresión (1.10).

□

Propiedade 1.7. *Sexan unha función $f \in C^\infty(Q)$ e un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(Q)$, o levantamento vertical do seu produto é*

$$(fX)^V = f^V X^V\,. \tag{1.11}$$

Demostración. Tendo en conta (1.1) e (1.10), respectivamente, tense que

$$(fX)^V = (fX)^i \frac{\partial}{\partial v^i} = f\ X^i \frac{\partial}{\partial v^i} = f^V X^V\,,$$

quedando probada a propiedade. □

Definición 1.8. O *levantamento completo* defínese a través de

$$X^C(f^V) = (X(f))^V\,, \quad X^C(f^C) = (X(f))^C\,. \tag{1.12}$$

Proposición 1.9. *A expresión local de X^C é*

$$\boxed{X^C = X^i \frac{\partial}{\partial q^i} + v^j \frac{\partial X^i}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial v^i}} \tag{1.13}$$

Demostración. Aplicaremos o mesmo procedemento que para o levantamento vertical, é dicir,

$$X^C = C^i \frac{\partial}{\partial q^i} + D^i \frac{\partial}{\partial v^i}\,, \quad f = q^i,$$

e seguindo a mesma dedución, xa temos que $C^i = X^i$. Por outro lado,

$$(X(f))^C = (X^i)^C = v^j \frac{\partial X^i}{\partial q^j},$$

que é exactamente D^i, e así obtense a expresión local.

□

Propiedade 1.10. *Sexan unha función $f \in C^\infty(Q)$ e un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(Q)$, o levantamento completo do seu produto é*

$$(fX)^C = f^C X^V + f^V X^C\,. \tag{1.14}$$

Demostración. Tendo en conta (1.2) e (1.13), respectivamente, tense que

$$\begin{aligned}(fX)^C &= (fX)^i \frac{\partial}{\partial q^i} + v^j \frac{\partial (fX)^i}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial v^i} \\ &= fX^i \frac{\partial}{\partial q^i} + f v^j \frac{\partial X^i}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial v^i} + v^j \frac{\partial f}{\partial q^j} X^i \frac{\partial}{\partial v^i} = f^V X^C + f^C X^V\,,\end{aligned}$$

quedando probada a propiedade. □

Por último, cabe comentar, dado que a empregaremos despois, a definición seguinte.

Definición 1.11. O *campo de vectores de Liouville* $\Delta \in \mathfrak{X}(Q)$, é aquel que cumpre

$$\Delta(f^V) = 0\,, \quad \Delta(f^C) = f^C\,. \tag{1.15}$$

Posto que a aplicación do campo de vectores a ambos levantamentos está definida, tendo en conta a proposición anterior, dito campo é único.

Ademais, do mesmo modo que fixemos para os levantamentos de campos, pódese probar que

Proposición 1.12. *A expresión local de Δ é*

$$\boxed{\Delta = v^i \frac{\partial}{\partial v^i}} \tag{1.16}$$

Demostración. Consideremos o campo de Liouville na forma

$$\Delta = E^i \frac{\partial}{\partial q^i} + F^i \frac{\partial}{\partial v^i},$$

e tomemos $f = q^i$. Así obtense, por (1.15), que

$$\begin{array}{r}0 = \Delta((q^i)^V) = \Delta(q^i) = E^i \\ (q^i)^C = \Delta((q^i)^C) = \Delta(v^i) = F^i\end{array} . \tag{1.17}$$

Posto que $(q^i)^C = v^i$, obtense a expresión buscada.

□

1.4. Levantamentos de 1-formas

Seguindo o mesmo proceso que empregamos para describir os levantamentos de campos, definiremos os levantamentos para un unha 1-forma $\theta \in \Omega^1(Q)$ xeral, a través dos levantamentos de campos. Tamén probaremos que se as aplicacións de dúas 1-formas a ambos levantamentos dun campo coinciden, ambas formas son a mesma.

Proposición 1.13. *Sexan dúas 1-formas $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in \Omega^1(TQ)$. Tense que, se para todo $X \in \mathfrak{X}(Q)$,*

$$\widetilde{\alpha}(X^V) = \widetilde{\beta}(X^V)\,, \quad \widetilde{\alpha}(X^C) = \widetilde{\beta}(X^C)\,,$$

entón, $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\beta}$.

Demostración. Basta con probar que se

$$\widetilde{\alpha}(X^V) = 0\,, \quad \widetilde{\alpha}(X^C) = 0\,, \tag{1.18}$$

entón $\widetilde{\alpha} = 0$.

Unha vez demostrado isto, se o aplicamos a $\widetilde{\theta} = \widetilde{\alpha} - \widetilde{\beta}$, a proposición queda probada.

Podemos escribi-la forma como $\widetilde{\alpha} = A_i dq^i + B_i dv^i$, e tomando o campo $\dfrac{\partial}{\partial q^i}$

$$\begin{array}{l}0 = \widetilde{\alpha}\left(\left(\dfrac{\partial}{\partial q^i}\right)^V\right) = \widetilde{\alpha}\left(\dfrac{\partial}{\partial v^i}\right) = B_i \\ 0 = \widetilde{\alpha}\left(\left(\dfrac{\partial}{\partial q^i}\right)^C\right) = \widetilde{\alpha}\left(\dfrac{\partial}{\partial q^i}\right) = A_i\end{array} , \tag{1.19}$$

e así, $\widetilde{\alpha} = 0$.

□

Definición 1.14. Definimos o *levantamento vertical* de 1-formas a través de

$$\theta^V(X^V) = 0\,, \quad \theta^V(X^C) = (\theta(X))^V\,. \tag{1.20}$$

Proposición 1.15. *A expresión local de* θ^V *é*

$$\boxed{\theta^V = \theta_i dq^i} \tag{1.21}$$

Demostración. Para chegar a dita expresión, comezamos por considerar a forma levantada θ^V nas coordenadas canónicas, é dicir,

$$\theta^V = A_i dq^i + B_i dv^i,$$

e tomar como campo $X \equiv \dfrac{\partial}{\partial q^i}$. Como vimos na proposición anterior, en tal caso tense que

$$\theta^V(X^V) = B_i\,, \quad \theta^V(X^C) = A_i.$$

Por outro lado, $(\theta(X))^V = (\theta_i)^V = \theta_i$. Igualando ambas expresións anteriores, é directo que $A_i = \theta_i$ e $B_i = 0$, obténdose a expresión (1.21). □

Outra forma de entender este levantamento é como a imaxe recíproca (ou "pullback") de θ, i.e., $\theta^V = \tau^*\theta = \theta \circ \tau$.

Propiedade 1.16. *Sexan unha función* $f \in C^\infty(Q)$ *e unha 1-forma* $\theta \in \Omega^1(Q)$*, o levantamento vertical do seu produto é*

$$(f\theta)^V = f^V\theta^V\,. \tag{1.22}$$

Demostración. Tendo en conta (1.1) e (1.21), respectivamente, tense que

$$(f\theta)^V = (f\theta)_i dq^i = f\;\theta_i dq^i = f^V\theta^V\,,$$

quedando probada a propiedade. □

Definición 1.17. Similarmente, o *levantamento completo* defínese a través de

$$\theta^C(X^V) = (\theta(X))^V\,, \quad \theta^C(X^C) = (\theta(X))^C\,. \tag{1.23}$$

Proposición 1.18. *A expresión local de* θ^C *é*

$$\boxed{\theta^C = v^j\frac{\partial\theta_i}{\partial q^j}dq^i + \theta_i dv^i} \tag{1.24}$$

Demostración. Aplicaremos o mesmo procedemento que para o levantamento vertical, é dicir, consideramos

$$\theta^C = C_i dq^i + D_i dv^i\,, \quad X \equiv \frac{\partial}{\partial q^i},$$

e seguindo a mesma deducción, xa temos que $D_i = \theta_i$. Por outro lado,

$$(\theta(X))^C = (\theta_i)^C = v^j \frac{\partial \theta_i}{\partial q^j},$$

que é exactamente C_i, e así obtense a expresión local. □

Propiedade 1.19. *Sexan unha función $f \in C^\infty(Q)$ e unha 1-forma $\theta \in \Omega^1(Q)$, o levantamento completo do seu produto é*

$$(f\theta)^C = f^C \theta^V + f^V \theta^C\,. \tag{1.25}$$

Demostración. Tendo en conta (1.2) e (1.24), respectivamente, tense que

$$\begin{aligned}(f\theta)^C &= v^j \frac{\partial (f\theta)_i}{\partial q^j} dq^i + (f\theta)_i dv^i \\ &= v^j \frac{\partial f}{\partial q^j}\ \theta_i dq^i + f\ v^j \frac{\partial \theta_i}{\partial q^j} dq^i + f\ \theta_i dv^i = f^C \theta^V + f^V \theta^C\end{aligned},$$

quedando probada a propiedade. □

1.5. Levantamentos de campos de tensores de tipo (1,1) e (0,2)

Comezaremos por definir os levantamentos verticais de tensores-(1,1) (empregando a notación $\mathcal{T}_a^b(\_)$ para os conxuntos de campos tensoriais)

Definición 1.20. Están definidos por (1.1), (1.9) e (1.21), que determinan respectivamente os isomorfismos lineais de $\mathcal{T}_0^0(Q)$ en $\mathcal{T}_0^0(TQ)$, $\mathcal{T}_0^1(Q)$ en $\mathcal{T}_0^1(TQ)$ e $\mathcal{T}_1^0(Q)$ en $\mathcal{T}_1^0(TQ)$ con respecto aos coeficientes constantes.

De tal modo, tendo en conta as propiedades (1.4), (1.11) e (1.22), podemos extender os levantamentos verticais ao isomorfismo lineal con coeficienes constantes de álxebras tensoriales de $\mathcal{T}(Q)$ en $\mathcal{T}(TQ)$ con respecto aos coeficientes constantes, polas condicións

$$(P + R)^V = P^V + R^V\,; \quad (P \otimes Q)^V = P^V \otimes Q^V\,, \tag{1.26}$$

sendo P, Q e R elementos arbitrarios de $\mathcal{T}(Q)$.

Proposición 1.21. *A expresión local de F^V é*

$$\boxed{F^V = F_i^j \frac{\partial}{\partial v^j} \otimes dq^i} \tag{1.27}$$

Demostración. Consideramos o tensor F con expresión

$$F = F_i^j \frac{\partial}{\partial q^j} \otimes dq^i \,,$$

e aplicando (1.26), deducimos

$$F^V = (F_i^j \frac{\partial}{\partial q^j} \otimes dq^i)^V = (F_i^j)^V \left(\frac{\partial}{\partial q^j}\right)^V \otimes (dq^i)^V = F_i^j \frac{\partial}{\partial v^j} \otimes dq^i \,,$$

co que queda probado.

□

Proposición 1.22. *Sexa $F \in \mathcal{T}_1^1(Q)$, podemos caracterizar o seu levantamento vertical con*

$$F^V X^V = 0 \,, \quad F^V X^C = (FX)^V \,. \tag{1.28}$$

Demostración. Pódese deducir directamente das expresións (1.10), (1.13) e (1.27). □

Ademais, de (1.26) dedúcese a forma de matriz para o levantamento vertical dun tensor-(1,1) $F \in \mathcal{T}_1^1(Q)$:

$$F^V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F_i^j & 0 \end{pmatrix} .$$

Definición 1.23. Cabe destacar o levantamento vertical do *tensor identidade*, $I = \dfrac{\partial}{\partial q^i} \otimes dq^i \in \mathcal{T}_1^1(Q)$, que se coñece como *estrutura case-tanxente canónica*, $J \in \mathcal{T}_1^1(TQ)$, con forma

$$J = I^V = \frac{\partial}{\partial v^i} \otimes dq^i \,.$$

Tendo en conta as propiedades (1.4), (1.14) e (1.25), podemos extender os levantamentos completos ao isomorfismo lineal de álxebras tensoriales de $\mathcal{T}(Q)$ en $\mathcal{T}(TQ)$ con respecto aos coeficientes constantes, polas condicións

$$(P + R)^C = P^C + R^C \,; \quad (P \otimes Q)^C = P^C \otimes Q^V + P^V \otimes Q^C \,, \tag{1.29}$$

sendo P, Q e R elementos arbitrarios de $\mathcal{T}(Q)$.

Proposición 1.24. *A expresión local de F^C é*

$$\boxed{F^C = (F_i^j)^C \frac{\partial}{\partial v^j} \otimes dq^i + (F_i^j)^V \frac{\partial}{\partial q^j} \otimes dq^i + (F_i^j)^V \frac{\partial}{\partial q^j} \otimes dv^j} \tag{1.30}$$

Demostración. Consideramos o tensor F con expresión

$$F = F_i^j \frac{\partial}{\partial q^j} \otimes dq^i\,,$$

e aplicando (1.29), deducimos

$$\begin{aligned} F^C &= (F_i^j \frac{\partial}{\partial q^j} \otimes dq^i)^C \\ &= (F_i^j)^C \left(\frac{\partial}{\partial q^j}\right)^V \otimes (dq^i)^V + (F_i^j)^V \left(\frac{\partial}{\partial q^j}\right)^C \otimes (dq^i)^V + (F_i^j)^V \left(\frac{\partial}{\partial q^j}\right)^V \otimes (dq^i)^C \\ &= (F_i^j)^C \frac{\partial}{\partial v^j} \otimes dq^i + (F_i^j)^V \frac{\partial}{\partial q^j} \otimes dq^i + (F_i^j)^V \frac{\partial}{\partial v^j} \otimes dv^j\,, \end{aligned} \tag{1.31}$$

co que queda probado.

□

Proposición 1.25. *Sexa $F \in \mathcal{T}_1^1(Q)$, podemos caracterizar o seu levantamento completo con*

$$F^C X^V = (FX)^V\,, \quad F^C X^C = (FX)^C\,. \tag{1.32}$$

Demostración. Pódese deducir directamente das expresións (1.10), (1.13) e (1.30). □

Ademais, de (1.29) dedúcese a forma de matriz para o levantamento completo dun tensor-(1,1) $F \in \mathcal{T}_1^1(Q)$:

$$F^C = \begin{pmatrix} F_i^j & 0 \\ \dfrac{\partial F_i^j}{\partial q^j} & F_i^j \end{pmatrix}.$$

Definición 1.26. O levantamento completo do tensor *identidade*, $I = \dfrac{\partial}{\partial q^i} \otimes dq^i \in \mathcal{T}_1^1(Q)$ é o *tensor identidade do fibrado tanxente*, $\mathcal{I} \equiv I_{TQ} \in \mathcal{T}_1^1(TQ)$, con forma

$$\mathcal{I} = I^C = \frac{\partial}{\partial q^i} \otimes dq^i + \frac{\partial}{\partial v^i} \otimes dv^i\,.$$

Proposición 1.27. *Sexan* $F, G \in \mathcal{T}_1^1(Q)$*. Entón*

$$(FG)^C = F^C G^C$$

Demostración. Tomando un campo vectorial X, e tendo en conta (1.14),

$$(FG)^C X^C = ((FG)X)^C = (F(GX))^C = F^C(GX)^C = F^C(G^C X^C) = (F^C G^C)X^C \,,$$

quedando probado. $\square$

Da última proposición, dedúcese o seguinte corolario.

Corolario 1.28. *Se* $P(t)$ *é un polinomio dunha variable* t*, entón, para calquer campo tensorial* $F \in \mathcal{T}_1^1(Q)$*, cúmprese*

$$P(F^C) = (P(F))^C$$

1.5.1. Métricas no fibrado tanxente

Os levantamentos vertical e completo dun tensor $G \in \mathcal{T}_2^0(Q)$ con compoñentes locais G_{ij} teñen a seguinte forma matricial, respectivamente

$$G^V = \begin{pmatrix} G_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e

$$G^C = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial G_{ij}}{\partial q^j} & G_{ij} \\ G_{ij} & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposición 1.29. *Pódese probar que, sendo* g *unha métrica pseudo-Riemanniana en* Q *(unha variedade n-dimensional), entón* g^C *é unha métrica pseudo-Riemanniana en* TQ *con* n *signos positivos e* n *signos negativos.*

Capítulo 2

SODES

2.1. Curvas integrais

O primeiro que debemos lembrar antes de entrar nos **SODEs**, é o concepto de curva integral dun campo de vectores.

Unha *curva integral* dun campo de vectores X en Q, pasando polo punto $q \in Q$, é unha aplicación $\alpha\colon I \subset \mathbb{R} \to Q$, definida nun entorno abierto I de $0 \in \mathbb{R}$, tal que

$$\alpha(0) = q, \qquad \alpha_*(t)\left(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_t\right) = X(\alpha(t)) \in T_{\alpha(t)}Q,$$

para todo $t \in I$, ou equivalentemente, α verifica

$$X(\alpha(t)) = \dot{\alpha}(t) \quad \text{para todo} \;\; t \in I$$

é dicir, o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} & TQ \\ I \subset \mathbb{R} \arrow[ur, "\dot{\alpha}"] \arrow[r, "\alpha"'] & Q \arrow[u, "X"'] \end{tikzcd}$$

é conmutativo.

Sexa X un campo de vectores en Q e $\alpha(t)$ unha curva integral de X, entón nun entorno coordenado $[(U,\varphi) \equiv (x^i)]$ temos

$$\varphi(\alpha(t)) = (x^1(\alpha(t)), \dots, x^n(\alpha(t))) \equiv (x^1(t), \dots, x^n(t))\,,$$

$$X^i(\alpha(t))\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\alpha(t)} = X(\alpha(t)) = \dot{\alpha}(t) = \alpha_*(t)(\frac{d}{dt}\Big|_t) = \frac{dx^i \circ \alpha}{dt}\Big|_t \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\alpha(t)}\,,$$

ou equivalentemente

$$X^i \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \alpha(t) = \frac{d(\pi_i \circ \varphi \circ \alpha)}{dt}\Big|_t ,$$

denotando $F^i = X^i \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, e coa curva $\alpha(t)$ podemos afirmar que $(x^1(t), \dots, x^n(t))$ é curva integral de X se e só se

$$F^i(x^1(t), \dots, x^n(t)) = \frac{dx^i}{dt}\Big|_t \quad 1 \leq i \leq n ,$$

onde $x^i = \pi_i \circ \varphi \circ \alpha$.

Así, para obter as curvas integrais dun campo de vectores, temos que resolver un sistema de ecuacións diferenciais de primeira orde en $\mathbb{R}^n$.

$$F^i(x^1(t), \dots, x^n(t)) = \frac{dx^i}{dt}\Big|_t \quad 1 \leq i \leq n ,$$
$$F^i = X^i \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Unha clase importante de campos de vectores sobre o fibrado tanxente TQ dunha variedade diferenciable Q, son as ecuacións diferenciables de segunda orde, coñecidos como semisprays ou tamén como **SODE**s (do inglés, second order differential equation).

No desenrolo do formalismo simpléctico lagrangiano aparecen certas ecuacións de segunda orde definidas en TQ.

2.2. Levantamento tanxente de curvas

Dada unha curva $\alpha\colon I \subset \mathbb{R} \to Q$, o *levantamento tanxente*, ou *primeira prolongación*, $\dot{\alpha}$ de α a TQ, é a curva

$$\begin{array}{rccl} \dot{\alpha}: & I \subset \mathbb{R} & \to & TQ \\ & t & \to & \dot{\alpha}(t) = \alpha_*(t)\left(\dfrac{d}{dt}\Big|_t\right) \in T_{\alpha(t)}Q , \end{array}$$

é dicir,

$$\dot{\alpha}(t) = \alpha_*(t)\left(\frac{d}{dt}\Big|_t\right)$$

é o vector tanxente á curva $\alpha(t)$ en cada punto.

En coordenadas locais $\alpha(t) = (q^i \circ \alpha(t)) = (\alpha^i(t))$, polo que a expresión local de $\dot{\alpha}$ é

$$\dot{\alpha}(t) = \left(\alpha^i(t), \frac{d\alpha^i}{dt}(t)\right) .$$

Da definición é obvio que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} & TQ \arrow[d, "\tau_Q"] \\ I \subset \mathbb{R} \arrow[ur, "\dot{\alpha}"] \arrow[r, "\alpha"] & Q \end{tikzcd}$$

é conmutativo.

2.3. SODEs

Un campo de vectores nunha variedade arbitraria Q é unha aplicación

$$\begin{array}{rcccl} X & : & Q & \longrightarrow & TQ \\ & & q & \mapsto & X(q) \in T_qQ \end{array}$$

tal que

$$\tau_Q \circ X = Id_Q \,.$$

sendo $\tau_Q : TQ \to Q$ a proxección canónica, dado que

$$\tau_Q \circ X(q) = \tau_Q\Big(X(q)\Big) = q \,.$$

Sexa Γ un campo de vectores sobre a variedade fibrado tanxente TQ. Entón

$$\tau_{TQ} \circ \Gamma = Id_{TQ} \qquad \begin{tikzcd} & T(TQ) \arrow[d, "\tau_{TQ}"] \\ TQ \arrow[ur, "\Gamma"] \arrow[r, "Id_{TQ}"'] & TQ \end{tikzcd}$$

Diremos que Γ é un SODE se ademais se verifica

$$T\tau_Q \circ \Gamma = Id_{TQ} \,.$$

é dicir, o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} & T(TQ) \arrow[d, "T\tau_Q"] \\ TQ \arrow[ur, "\Gamma"] \arrow[r, "Id_{TQ}"'] & TQ \end{tikzcd}$$

é conmutativo, onde $T\tau_Q$ é a diferencial da proxección canónica.

Expresión local dun SODE*:*

Supoñamos que a expresión local dun SODE Γ é

$$\Gamma(v_q) = A^i(v_q)\frac{\partial}{\partial q^i} + \Gamma^i(v_q)\frac{\partial}{\partial v^i}\,.$$

Como

$$\begin{array}{rccc} \tau_Q: & TQ & \longrightarrow & Q \\ & (q^i, v^i) & \longmapsto & (q^i) \end{array}$$

deducimos que

$$\begin{array}{rccc} T\tau_Q: & T(TQ) & \longrightarrow & TQ \\ & (q^i, v^i, \dot{q}^i, \dot{v}^i) & \longmapsto & (q^i, \dot{q}^i) \end{array}$$

por tanto

$$T\tau_Q\left(\dot{q}^i\,\frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_{v_q} + \dot{v}^i\,\frac{\partial}{\partial v^i}\Big|_{v_q}\right) = \dot{q}^i\,\frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_{v_q}$$

Así

$$\begin{aligned} T\tau_Q \circ \Gamma(v_q) &= T\tau_Q\Big(\Gamma(v_q)\Big) = (\tau_Q)_*(v_q)\Big(A^i(v_q)\frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_{v_q} + \Gamma^i(v_q)\frac{\partial}{\partial v^i}\Big|_{v_q}\Big) \\ &= A^i(v_q)\frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_{v_q} \end{aligned}$$

Por outro lado

$$T\tau_Q\Big(\Gamma(v_q)\Big) = Id_{TQ}(v_q) = v^i(v_q)\frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_q\,,$$

como consecuencia $A^i = v^i$ e a expresión local do SODE queda

$$\Gamma = v^i\frac{\partial}{\partial q^i} + \Gamma^i\frac{\partial}{\partial v^i}\,. \tag{2.1}$$

Proposición 2.1. *As curvas intregrais dun* SODE *son levantamentos tanxentes* $\dot{\alpha}$ *de curvas* α *na variedade* Q*.*

Demostración. Sexa a curva ϕ tal que

$$\begin{array}{rccc} \phi: & I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & TQ \\ & t & \longmapsto & \phi(t) = (a^i(t), b^i(t))\,, \end{array}$$

a curva integral dun SODE Γ. Da expresión local do SODE Γ temos

$$\Gamma(\phi(t)) = v^i(\phi(t))\frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_{\phi(t)} + \Gamma^i(\phi(t))\frac{\partial}{\partial v^i}\Big|_{\phi(t)}$$

e como $\phi(t)$ é unha curva integral de Γ temos que

$$\Gamma(\phi(t)) = \dot{\phi}(t) = \frac{da^i}{dt}\frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_{\phi(t)} + \frac{db^i}{dt}\frac{\partial}{\partial v^i}\Big|_{\phi(t)}$$

Deste modo,

$$b^i(t) = v^i(\phi(t)) = \frac{da^i}{dt}\,, \quad \Gamma^i(\phi(t)) = \frac{db^i}{dt}$$

$$\Gamma(\phi(t)) = \dot{\phi}(t) = \frac{da^i}{dt}\frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_{\phi(t)} + \frac{db^i}{dt}\frac{\partial}{\partial v^i}\Big|_{\phi(t)}$$

Por ende:

$$b^i(t) = v^i(\phi(t)) = \frac{da^i}{dt}\,, \quad \Gamma^i(\phi(t)) = \frac{db^i}{dt}$$

polo que as funcións $(a^i(t))$ son solucións do sistema de ecuacións de segunda orde

$$\Gamma^i\Big(q^j(t), \frac{da^j}{dt}\Big|_t\Big) = \frac{d^2a^i}{dt^2}\Big|_t, \qquad 1 \leq i \leq n$$

Sexa α unha curva en Q definida como $\alpha = \tau_Q \circ \phi$, entón

$$\alpha(t) = \tau_Q(\phi(t)) \equiv (a^i(t))$$

e así temos

$$\dot{\alpha}(t) = \Big(a^i(t), \frac{da^i}{dt}\Big|_t\Big) = \phi(t)$$

□

Resumindo, sexa Γ un SODE, e ϕ unha curva integral de Γ entón ϕ é o levantamento tanxente da curva

$$\alpha = \tau_Q \circ \phi : I \subset \mathbb{R} \to TQ \to Q.$$

Se $\dot{\alpha}(t)$ é unha curva integral do SODE Γ, a curva $\alpha(t)$ denomínase *solución* de Γ.

2.4. Referencias locais e case-velocidades

Consideramos $\{Z_j\}$ unha *referencia local* sobre Q, isto é, unha base local dos campos de vectores sobre Q. Por tanto, podemos escribir calquera campo vectorial $Z \in \mathfrak{X}(Q)$ como $Z = Z^j Z_j$, para unhas funcións locais $Z^j \in C^\infty(Q)$.

Do mesmo modo, podemos escribir calquer vector tanxente $v_q \in T_qQ$ como $v_q = u^j Z_j(q)$. Estas novas coordenadas fibradas u^j, que son as compoñentes de v_q con respecto á base $Z_j(q)$, son as denominadas *case-velocidades*.

Se consideramos a base local canónica $\{\frac{\partial}{\partial q^i}\}$ de campos coordenados sobre Q, entón $Z_j(q) = Z_j^i \frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_q$. Por tanto

$$v_q = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} = u^j Z_j(q) = u^j Z_j^i \frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_q,$$

onde $v^i = u^j Z_j^i$. Así podemos empregar estas novas coordenadas adaptadas $\left(q^j, v^j\right)$ sobre TQ.

Proposición 2.2. *Se $\{Z_j\}$ é unha base local calquera dos campos vectoriais sobre Q, entón $\left\{Z_j^C, Z_j^V\right\}$ é unha base local de campos vectoriais sobre TQ.*

Proposición 2.3. *Unha vez temos definidas as case-velocidades, podemos reescribir a SODE en (2.1) como*

$$\Gamma = u^i Z_i^C + \Gamma^i Z_i^V \tag{2.2}$$

Demostración. Comezamos por ter en conta a expresión $\Gamma = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \Gamma^i \frac{\partial}{\partial v^i}$, así como (1.1) e (1.2). Agora, vexamos que a aplicación da SODE a f^V e f^C chega ao mesmo resultado para ambas expresións de Γ, sendo f unha función arbitraria. Polas proposicións vistas no Capítulo 1, queda visto que entón ambas expresións son a mesma. Comezamos pola aplicación á función verticalmente levantada:

$$\Gamma(f^V) = v^i \frac{\partial f}{\partial q^i} + \Gamma^i \frac{\partial f}{\partial v^i} = v^i \frac{\partial f}{\partial q^i} = f^C$$

$$u^i Z_i^C(f^V) + \Gamma^i Z_i^V(f^V) = u^i (Z_i(f))^V = u^i \left(Z_i^j \frac{\partial f}{\partial q^j}\right)^V = u^i Z_i^j \frac{\partial f}{\partial q^j} = v^j \frac{\partial f}{\partial q^j} = f^C$$

Operando do mesmo modo para unha función completamente levantada temos

$$\Gamma(f^C) = v^i v^j \frac{\partial^2 f}{\partial q^i \partial q^j} + \Gamma^i \frac{\partial f}{\partial q^i}$$

$$\begin{aligned} u^i Z_i^C(f^C) + \Gamma^i Z_i^V(f^C) &= u^i (Z_i(f))^C + \Gamma^i (Z_i(f))^V = u^i \left(Z_i^j \frac{\partial f}{\partial q^j} \right)^C + \Gamma^i \left(Z_i^j \frac{\partial f}{\partial q^j} \right)^V \\ &= u^i Z_i^j v^i \frac{\partial^2 f}{\partial q^j \partial q^i} + \Gamma^i Z_i^j \frac{\partial f}{\partial q^j} = v^j v^i \frac{\partial^2 f}{\partial q^j \partial q^i} + \widetilde{\Gamma}^j \frac{\partial f}{\partial q^j} \end{aligned}$$

Así, queda vista a igualdade de ambas expresións, a falta de cambia-los índices nulos, podendo empregar a partires de agora a expresión da SODE en case-velocidades. □

Capítulo 3

Levantamentos e ecuacións de Euler-Lagrange

3.1. Forma simpléctica en TQ asociada a un lagrangiano

Definición 3.1. Denomínase función lagrangiana a calquera función $L : TQ \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable definida en TQ. Sexa unha tal función L, podemos considerar a 1-forma diferencial $\theta_L \in \Omega^1(TQ)$ definida como segue

$$\theta_L(X^V) = 0\,, \quad \theta_L(X^C) = X^V(L)\,. \tag{3.1}$$

Proposición 3.2. *A expresión local de* θ_L *é*

$$\boxed{\theta_L = \frac{\partial L}{\partial v^i} dq^i} \tag{3.2}$$

Demostración. Consideremos a 1-forma con expresión

$$\theta_L = E^i dq^i + F^i dv^i,$$

e tomemos $X \equiv \dfrac{\partial}{\partial q^i}$. Así obtense que

$$\begin{aligned} 0 = \theta_L(X^V) = \theta_L\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right) = F^i \\ X^V(L) = \theta_L(X^C) = \theta_L\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right) = E^i \end{aligned} \tag{3.3}$$

Posto que $X^V(L) = \dfrac{\partial L}{\partial v^i}$, obtense a expresión buscada. $\square$

A partir de θ_L, defínese a 2-forma diferencial $\omega_L \in \Omega^2(TQ)$ como segue

$$\omega_L \,=\, -\, d\theta_L \,, \tag{3.4}$$

que resulta evidente que é pechada, posto que

$$d\omega_L = d(-\, d\theta_L) = 0 \,.$$

En coordenadas canónicas (q^i, v^i), obtemos que a expresión local de ω_L é

$$\omega_L \,=\, -d\theta_L = dq^i \wedge d\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v^i}\, dq^i \wedge dq^j \,+\, \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i}\, dq^i \wedge dv^j \,. \tag{3.5}$$

Vexamos agora cando ω_L é non dexenerada, e polo tanto, dado que é pechada, unha forma simpléctica.

Definición 3.3. Dise que unha función lagrangiana $L : TQ \longrightarrow \mathbb{R}$ é *regular* se a matriz

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i}\right) \tag{3.6}$$

é non singular, é dicir, o seu determinante é distinto de cero. En caso contrario, dise que o lagrangiano é *singular*.

O carácter xeométrico do concepto de regularidade témolo na seguinte proposición.

Proposición 3.4. *As seguintes afirmacións son equivalentes:*

1. $L : TQ \longrightarrow \mathbb{R}$ *é un lagrangiano regular.*

2. ω_L *é unha forma non dexenerada.*

Demostración. A matriz de ω_L é

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v^i} - \dfrac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v^j} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} \\ -\dfrac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} & 0 \end{pmatrix}$$

e polo tanto, ω_L é non dexenerada se e só se L é regular.

$\square$

3.2. Ecuacións de Euler-Lagrange

Outro concepto importante na formulación xeométrica das ecuacións de Euler-Lagrange é o de enerxía, que introducimos a continuación. Sexa $L : TQ \longrightarrow \mathbb{R}$ un lagrangiano regular, feito que daremos por suposto a partires de aquí.

Definición 3.5. A *función enerxía* E_L defínese da seguinte forma, como

$$E_L = \Delta(L) - L\,,$$

onde Δ é o campo de vectores de Liouville descrito no Capítulo 1.

A continuación describiremos a formulación lagrangiana das ecuacións de Euler-Lagrange. Sexa $L : TQ \longrightarrow \mathbb{R}$ un lagrangiano regular e así ω_L non dexenerada, polo tanto temos o isomorfismo de módulos

$$\begin{array}{rccl} \flat : & \mathfrak{X}(TQ) & \longrightarrow & \Omega^1(TQ) \\ & X & \longmapsto & \flat(X) = \omega_L(X, -) = i_X\omega_L \end{array}$$

que leva campos de vectores en TQ en 1-formas en TQ.

Como a diferencial da función enerxía $dE_L \in \Omega^1(TQ)$, existe un único campo de vectores $X_L \in \mathfrak{X}(TQ)$ tal que $\flat(X_L) = dE_L$, é dicir, é solución da ecuación

$$i_{X_L}\omega_L = \omega_L(X_L, -) = dE_L\,. \tag{3.7}$$

Considerando o sistema de coordenadas canónicas (q^i, v^i) en TQ, pódese escribir X_L da forma

$$X_L = A^i \frac{\partial}{\partial q^i} + B^i \frac{\partial}{\partial v^i}$$

e ω_L como

$$\omega_L \;=\; M_{ij}\, dq^i \wedge dq^j \;+\; N_{ij}\, dq^i \wedge dv^j$$

onde

$$M_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v^i}\,, \quad N_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i}\,,$$

obtemos

$$i_{X_L}\omega_L = \big((M_{ik} - M_{ki})A^i - N_{kj}B^j\big)\; dq^k + (N_{ik}A^i)\, dv^k\,. \tag{3.8}$$

Por outro lado, como a expresión local de E_L vén dada por

$$E_L = v^i\, \frac{\partial L}{\partial v^i} - L \tag{3.9}$$

a súa diferencial é

$$dE_L = \left(v^i \frac{\partial^2 L}{\partial q^k \partial v^i} - \frac{\partial L}{\partial q^k} \right) dq^k + v^i \frac{\partial^2 L}{\partial v^k \partial v^i} dv^k \,. \tag{3.10}$$

Entón, de (3.8) e (3.10) temos que X_L é solución da ecuación (3.7) se e só se as funcións $A^i(q^i, v^i)$ e $B^i(q^i, v^i)$ satisfán o sistema de ecuacións

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v^j} \right) A^i - \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} B^j &= v^j \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v^j} - \frac{\partial L}{\partial q^i} \,, \\ \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} A^i &= \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} v^i \,. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Se o lagrangiano é regular, as ecuacións anteriores son equivalentes ás seguintes ecuacións

$$A^i = v^i \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v^j} v^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} B^j = \frac{\partial L}{\partial q^i} \tag{3.12}$$

Entón, se o lagrangiano é regular, temos que X_L é solución da ecuación (3.7) se e só se as funcións A^i e B^i satisfán o sistema de ecuacións (3.12). Ademais, a condición $A^i = v^i$ dinos que X_L é un SODE.

Supoñamos que o lagrangiano é regular, e consideremos unha curva integral $\phi\colon I \subset \mathbb{R} \longrightarrow TQ$ do campo de vectores X_L cuxa expresión local é $\phi(t) = (\phi^i(t), \phi_i(t))$, é dicir,

$$q^i(\phi(t)) = \phi^i(t) \,, \qquad v^i(\phi(t)) = \phi_i(t) \,.$$

Se avaliamos X_L en $\phi(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} X_L(\phi(t)) &= A^i(\phi(t)) \frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_{\phi(t)} + B^i(\phi(t)) \frac{\partial}{\partial v^i}\Big|_{\phi(t)} \\ &= \phi_i(t) \frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_{\phi(t)} + B^i(\phi(t)) \frac{\partial}{\partial v^i}\Big|_{\phi(t)} \,, \end{aligned} \tag{3.13}$$

xa que $A^i(\phi(t)) = v^i(\phi(t)) = \phi_i(t)$.

Por outro lado, como

$$\dot{\phi}(t) = \frac{d\phi^i}{dt}\Big|_t \frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_{\phi(t)} + \frac{d\phi_i}{dt}\Big|_t \frac{\partial}{\partial v^i}\Big|_{\phi(t)} \,,$$

temos que $\phi(t)$ é unha curva integral de X_L, isto é,

$$X_L(\phi(t)) = \dot{\phi}(t) \,,$$

se e só se

$$\frac{d\phi^i}{dt}\Big|_t = \phi_i(t)\,, \qquad B^i\left(\phi^j(t), \frac{d\phi^j}{dt}\Big|_t\right) = \frac{d^2\phi^i}{dt^2}\,. \tag{3.14}$$

Obsérvese que $\phi(t)$ é o levantamento tanxente da curva

$$\begin{array}{rccl} \alpha: & I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & Q \\ & t & \longmapsto & \alpha(t) = (\tau \circ \phi)(t) = (\phi^i(t)) \end{array}$$

é dicir,

$$\phi(t) = \dot{\alpha}(t) = \left(\phi^i(t), \frac{d\phi^i}{dt}\Big|_t\right)\,,$$

entón, $\phi(t)$ é unha curva integral de X_L se e só se $\alpha(t) = (\tau \circ \phi)(t) = (\phi^i(t))$ é solución da segunda ecuación de (3.14).

Agora, tendo en conta as ecuacións (3.14), avaliamos (3.12) en

$$\phi(t) = \dot{\alpha}(t)$$

e obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q^i}\Big|_{\phi(t)} &= \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v^j}\, v^j(\phi(t)) + \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i}\, B^j(\phi(t)) = \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v^j}\, \phi_j(t) + \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i}\, B^j(\phi(t)) \\ &= \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v^j}\Big|_{\phi(t)} \frac{d\phi^j}{dt}\Big|_t + \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i}\Big|_{\phi(t)} \frac{d^2\phi^i}{dt^2}\Big|_t\,. \end{aligned}$$

Polo tanto, se $\phi(t) = \dot{\alpha}(t)$ é unha curva integral de X_L, entón

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v^j}\Big|_{\dot{\alpha}(t)} \frac{d\phi^j}{dt}\Big|_t + \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i}\Big|_{\dot{\alpha}(t)} \frac{d^2\phi^i}{dt^2}\Big|_t = \frac{\partial L}{\partial q^i}\Big|_{\dot{\alpha}(t)}$$

é dicir, a curva $\alpha(t)$ é solución das *ecuacións de Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt}\Big|_t \left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\Big|_{\dot{\alpha}(t)}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i}\Big|_{\dot{\alpha}(t)} = 0\,, \qquad \forall\, i = 1, \dots, n.$$

Observación 3.6. As solucións das ecuacións de Euler-Lagrange son levantamentos tanxentes de curvas en Q, tendo que X_L é un SODE.

3.3. SODEs Lagrangianos

Xa se definiu, na expresión (3.6) ,a regularidade da función lagrangiana. A partires de aquí, asumiremos sempre que L é regular. En [1] e [5] móstrase que, baixo esa condición, todos os campos vectoriales $\mathbf{\Gamma}$ sobre TQ que satisfán a condición

$$\imath_{\Gamma}\omega_L = dE_L,$$

deben ser SODEs, e diremos que Γ é o SODE lagrangiano correspondente aL

Proposición 3.7. *Sexa Γ o SODE lagrangiano correspondente a L, entón, para cada campo vectorial Z sobre Q,*

$$\Gamma(Z^V(L)) - Z^C(L) = 0,$$

ou, equivalentemente, se para cada estrutura local $\{Z_i\}$ de campos vectoriales sobre Q,

$$\Gamma(Z_i^V(L)) - Z_i^C(L) = 0, \qquad i = 1, \dots n. \tag{3.15}$$

En particular, se tomamos a base estándar $\{\frac{\partial}{\partial q^i}\}$ sobre Q, as ecuacións (3.15) convírtense en

$$\Gamma\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0.$$

A partires disto, é sinxelo ver que, se $\dot{\phi} = (\phi^i, \frac{d\phi^i}{dt})$ é unha curva integral de $\mathbf{\Gamma}$, entón debe satisfacer

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v^i}\frac{d\phi^j}{dt} + \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i}\frac{d^2\phi^j}{dt^2} = \frac{\partial L}{\partial q^i}.$$

*que son as **ecuacións de Euler-Lagrange**.*

Demostración. A partires das expresións (1.10), (1.13), (2.1) e a expresión local das referencias locais, $Z_j(q) = Z_j^i \frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_q$, podemos probar que o anterior se cumpre. Vexámolo:

$$\begin{aligned}
0 &= \Gamma(Z_i^V(L)) - Z_i^C(L) \\
&= \left[v^j \frac{\partial}{\partial q^j}\left(Z^i \frac{\partial L}{\partial v^i}\right) + \Gamma^j \frac{\partial}{\partial v^j}\left(Z^i \frac{\partial L}{\partial v^i}\right)\right] - \left[Z^i \frac{\partial L}{\partial q^i} + v^j \frac{\partial Z^i}{\partial q^j}\frac{\partial L}{\partial v^i}\right] \\
&= \cancel{v^j \frac{\partial Z^i}{\partial q^j}\frac{\partial L}{\partial v^i}} + Z^i v^j \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v^i} + \Gamma^j Z^i \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} - Z^i \frac{\partial L}{\partial q^i} - \cancel{v^j \frac{\partial Z^i}{\partial q^j}\frac{\partial L}{\partial v^i}} \\
&= Z^i \left(v^j \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v^i} + \Gamma^j \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i}\right).
\end{aligned}$$

Posto que Z^i non é cero, temos que se debe cumprir a ecuación

$$v^j \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v^i} + \Gamma^j \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i}.$$

Por último, tendo en conta as igualdades da expresión (3.14), tense que $v^j = \dfrac{d\phi^j}{dt}$ e $\Gamma^j = \dfrac{d^2\phi^j}{dt^2}$. Por ende, queda probado que chegamos ás Ecs. de Euler-Lagrange. $\square$

Capítulo 4

Levantamentos e simetrías das ecuacións de Euler-Lagrange.

Consideramos o lagrangiano $L : TQ \to \mathbb{R}, \quad L(q^i, v^i)$. Unha solución das ecuacións de Euler-Lagrange asociadas ao lagrangiano L é unha curva

$$\begin{array}{rcl} \alpha : I \subset \mathbb{R} & \to & Q \\ t & \mapsto & \alpha(t) = (q^i(t)) \end{array}$$

tal que

$$\frac{d}{dt}\Big|_t \left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\Big|_{\dot{\alpha}(t)} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^i}\Big|_{\dot{\alpha}(t)} \tag{4.1}$$

onde

$$\begin{array}{rcl} \dot{\alpha} : I \subset \mathbb{R} & \to & Q \\ t & \mapsto & \alpha(t) = (q^i(t), \frac{dq^i(t)}{dt}) \,. \end{array}$$

Definición 4.1. Un difeomorfismo $F : TQ \to TQ$ chámase *simetría* das ecuacións de Euler-Lagrange, (4.1), se para cada solución α de (4.1) entón $F \circ \dot{\alpha} = \dot{h}$ onde h é tamén unha solución das ecuacións de Euler-Lagrange. Isto é, F leva solucións en solucións.

Proposición 4.2. *Sexa $f : Q \longrightarrow Q$ un difeomorfismo e $Tf : TQ \longrightarrow TQ$ o levantamento de f a TQ. Se $(Tf)^*L = L$ entón Tf é unha simetría.*

Demostración. Probaremos que se $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow Q$ é unha solución das ecuacións de Euler-Lagrange, entón $h = f \circ \alpha$ é tamén unha solución.

$$\dot{h}(t) = (f \circ \alpha)_*(t)\left(\frac{d}{dt}\Big|_t\right) = f_*(\alpha(t))\left(\alpha_*(t)\left(\frac{d}{dt}\Big|_t\right)\right) = Tf(\dot{\alpha}(t))\,.$$

Posto que $F^*L = L$, en coordenadas locais tense

$$L(q^i, v^i) = L \circ Tf(q^i, v^i) = L\left(q^i \circ f(q), v^k \frac{\partial(q^i \circ f)}{\partial q^k}\right)\,,$$

e por tanto obtemos

$$\frac{\partial L}{\partial q^i}\Big|_{v_q} = \frac{\partial L}{\partial q^j}\Big|_{Tf(v_q)} \frac{\partial(q^j \circ f)}{\partial q^i}\Big|_q + \frac{\partial L}{\partial v^j}\Big|_{Tf(v_q)} v^k \frac{\partial^2(q^j \circ f)}{\partial q^i \partial q^k}\Big|_q \tag{4.2}$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial v^i}\Big|_{v_q} = \frac{\partial L}{\partial v^j}\Big|_{Tf(v_q)} \frac{\partial(q^j \circ f)}{\partial q^i}\Big|_q \quad , \tag{4.3}$$

onde $v_q \in TQ$.

Se α é unha solución das ecuacións de Euler-Lagrange, entón

$$\frac{d}{dt}\Big|_t\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\Big|_{\dot{\alpha}(t)}\right) = \frac{\partial L}{\partial q^i}\Big|_{\dot{\alpha}(t)} \quad , \tag{4.4}$$

sendo $\dot{\alpha} : I \subset \mathbb{R} \to TQ$ o levantamento canónico de α.

Agora, de (4.3) obtemos (para $v_q = \dot{\alpha}(t)$)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_t\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\Big|_{\dot{\alpha}(t)}\right) &= \frac{d}{dt}\Big|_t\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\Big|_{(Tf\circ\dot{\alpha})(t)}\right)\frac{\partial(q^j \circ f)}{\partial q^i}\Big|_{\alpha(t)} + \\ &+ \frac{\partial L}{\partial v^j}\Big|_{(Tf\circ\dot{\alpha})(t)} \frac{\partial^2(q^j \circ f)}{\partial q^i \partial q^k}\Big|_{\alpha(t)} \frac{d(q^k \circ \alpha)}{dt}\Big|_t \quad , \end{aligned} \tag{4.5}$$

e de (4.2) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q^i}\Big|_{\dot{\alpha}(t)} &= \frac{\partial L}{\partial q^j}\Big|_{(Tf\circ\dot{\alpha})(t)} \frac{\partial(q^j \circ f)}{\partial q^i}\Big|_{\alpha(t)} + \\ &+ \frac{\partial L}{\partial v^j}\Big|_{(Tf\circ\dot{\alpha})(t)} \frac{\partial^2(q^j \circ f)}{\partial q^i \partial q^k}\Big|_{\alpha(t)} \frac{d(q^k \circ \alpha)}{dt}\Big|_t \quad . \end{aligned} \tag{4.6}$$

Entón de (4.4), (4.5), (4.6) e como $Tf \circ \dot{\alpha} = \dot{\widehat{f \circ \alpha}}$, tense

$$\frac{d}{dt}\Big|_t\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\Big|_{\dot{\widehat{f\circ\alpha}}(t)}\right) = \frac{\partial L}{\partial q^i}\Big|_{\dot{\widehat{f\circ\alpha}}(t)} \quad , \tag{4.7}$$

o que implica que $f \circ \alpha$ é unha solución das ecuacións de Euler-Lagrange. $\square$

Agora imos expresar a proposición anterior en termos de campos de vectores.

Definición 4.3. Sexa $X \in \mathfrak{X}(Q)$ un campo de vectores en Q con grupo uniparamétrico asociado ϕ_t. O levantamento completo X^C a TQ ten como fluxo $T\phi_t$, o levantamento do fluxo ϕ_t de X.

Sexa ϕ_t o xenerador infinitesimal de X, e supoñamos que $X^C(L) = 0$,co que L é conmutativo. Isto quere dicir que $[T\phi_t]^*L = L$. Entón tense que

Corolario 4.4. *Se $X^C(L) = 0$, entón $T\phi_t$ é unha simetría.*

4.1. Teorema de Noether

Definición 4.5. $P : TQ \to \mathbb{R}$ chámase **constante do movemento ou cantidade conservada** para as ecuacións de Euler-Lagrange se $P(\dot{\alpha}(t))$ é constante para toda solución α das ecuacións de Euler-Lagrange (4.1), isto é

$$\frac{d(P \circ \dot{\alpha})}{dt} = 0 \tag{4.8}$$

4.1.1. Versión xeométrica do Teorema de Noether

Teorema 4.6. *Sexa $\phi_t : Q \to Q$ o grupo uniparamétrico de difeomorfismos de X e supoñamos que $X^C(L) = 0$. isto é, $L(T\phi_t(v_q)) = L(v_q)$ para todo $v_q \in TQ$. Entón a función*

$$X^V(L) : TQ \to \mathbb{R}$$

define unha constante do movemento para as ecuacións de Euler-Lagrange, isto é,

$$\left.\frac{d(X^V(L) \circ \dot{\alpha})}{dt}\right|_t = 0 \quad , \quad t \in I$$

para toda solución $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to Q$ das ecuacións de Euler-Lagrange.

Demostración. Consideramos as expresións locais

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial q^i}\,, \qquad P = X^V(L) = X^i \frac{\partial L}{\partial v^i}\,, \qquad P \circ \dot{\alpha}(t) = X^i(\alpha(t)) \frac{\partial L}{\partial v^i} \circ \dot{\alpha}(t)\,,$$

e entón

$$\begin{aligned}\frac{d(P\circ\dot\alpha)}{dt} &= \Big(\frac{\partial X^i}{\partial q^j}\Big|_{\alpha(t)}\frac{d\alpha^j}{dt}\Big|_t\Big)\frac{\partial L}{\partial v^i}\Big|_{\dot\alpha(t)} + X^i(\alpha(t))\Big\{\frac{\partial^2 L}{\partial q^j\partial v^i}\Big|_{\dot\alpha(t)}\frac{d\alpha^j}{dt}\Big|_t + \frac{\partial^2 L}{\partial v^j\partial v^i}\Big|_{\dot\alpha(t)}\frac{d^2\alpha^j}{(dt)^2}\Big|_t\Big\}\\ &= \Big(\frac{\partial X^i}{\partial q^j}\frac{d\alpha^j}{dt}\Big)\frac{\partial L}{\partial v^i}\Big|_{\dot\alpha(t)} + X^i(\alpha(t))\frac{\partial L}{\partial q^i}\Big|_{\dot\alpha(t)}\end{aligned} \tag{4.9}$$

Por outro lado

$$X^C(L) = X^i\frac{\partial L}{\partial q^i} + \frac{\partial X^i}{\partial q^j}v^j\frac{\partial L}{\partial v^i}\,.$$

Entón

$$X^C(L)\circ\dot\alpha = X^i(c(t))\frac{\partial L}{\partial q^i}\Big|_{\dot\alpha(t)} + \frac{\partial X^i}{\partial q^j}\frac{d\alpha^j}{dt}\frac{\partial L}{\partial v^i}\Big|_{\dot\alpha(t)}\,. \tag{4.10}$$

Concluimos, a partir de (4.9) e (4.10), que

$$\frac{dP\circ\dot\alpha}{dt} = X^C(L)\circ\dot\alpha\,.$$

Por hipótese, $[T\phi_t]^*L = L$, entón $X^C(L) = 0$ e así chegamos a que

$$\frac{dP\circ\dot\alpha}{dt} = 0\,.$$

□

Capítulo 5

Levantamentos ao fibrado cotanxente. Ecuacións de Hamilton

De forma análoga ao realizado nos capítulos anteriores, describiremos o fibrado cotanxente, e os distintos levantamentos que se poden definir a el. Aproveitaremos a súa estrutura para chegar ás coñecidas Ecuacións de Hamilton.

5.1. Estrutura diferenciable do fibrado cotanxente

Sexa Q unha variedade diferenciable de dimensión n e sexa T^*Q o seu fibrado cotanxente. Vexamos que a estrutura diferenciable en Q induce unha estrutura diferenciable en T^*Q.

Sexa (U, ψ) unha carta en Q, onde U é un aberto en Q e $\psi : U \subseteq Q \longrightarrow \psi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo.

Como

$$\begin{array}{rccc} \pi : & T^*Q & \longrightarrow & Q \\ & \alpha_q & \longmapsto & q \end{array} \tag{5.1}$$

é a proxección canónica, consideremos o aberto $\pi^{-1}(U) = T^*U$ en T^*Q e definimos a carta inducida $(\pi^{-1}(U), \widetilde{\psi})$, onde $\widetilde{\psi}$ é o difeomorfismo dado por

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\psi} : & T^*U & \longrightarrow & \psi(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ & \alpha_q & \longmapsto & \big((\psi \circ \pi)(\alpha_q)\,,\, dq^1(q)(\alpha_q), \dots, dq^n(q)(\alpha_q)\big)\ . \end{array}$$

Entón, temos un sistema de $2n$ coordenadas *canónicas* (q^i, p^i) en $T^*U \subseteq T^*Q$ de forma que

$$\begin{aligned} q^i &= \pi_i \circ \widetilde{\psi} \,, \qquad \forall\, i = 1, \dots, n \\ p^i &= \pi_{i+n} \circ \widetilde{\varphi} \,, \quad \forall\, i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

e polo tanto

$$q^i\,(\alpha_q) \;=\; q^i\,(q)\;, \quad p^i\,(\alpha_q) \;= \alpha_q(q^i), \quad i = 1, \dots, n\,,$$

sendo $\alpha_q \in T^*Q$, é dicir, $\alpha_q = p_i(\alpha_q)dq^i(q)$.

Do mesmo modo que para TQ, pódense definir espazos tanxentes e cotanxentes do propio fibrado cotanxente.

Agora, xa podemos definir os distintos levantamentos.

5.2. Levantamentos de funcións, 1-formas e campos

Definición 5.1. Defínese o *levantamento vertical*, f^V, dunha función diferenciable $f \in C^\infty(Q)$ do mesmo modo que se definiu para o levantamento ao fibrado tanxente, como a composición da función coa proxección canónica, é dicir, o "pull-back" ou imaxe recíproca de f.

$$\begin{array}{rccl} f^V : & TQ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v_q & \longmapsto & f^V(v_q) = \pi^* f(v_q) = f \circ \pi(v_q) = f(q) \end{array} . \tag{5.2}$$

Agora, en lugar de traballar con levantamentos completos de funcións, empregaremos a definición natural da función iX.

Definición 5.2. Para cada campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(Q)$, definimos a función iX como

$$\begin{array}{rccl} iX : & T^*Q & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \alpha_q & \longmapsto & iX(\alpha_q) = \alpha_q(X) = X^i(q)\alpha_i \end{array} .$$

A súa expresión local é

$$iX = p_i X^i \tag{5.3}$$

Deste modo, os levantamentos de q^i e $\frac{\partial}{\partial q^i}$, que empregaremos posteriormente son

$$(q^i)^V = q^i \circ \pi\,, \quad i\,\frac{\partial}{\partial q^i} = p_i$$

Propiedade 5.3. *Sexan dúas funcións $f, g \in C^\infty(Q)$, os levantamentos verticais da súa suma e produto son*

$$(f+g)^V = f^V + g^V\,, \quad (fg)^V = f^V g^V\,. \tag{5.4}$$

Demostración. Tendo en conta (5.2) e (5.3), respectivamente, tense que, para un vector arbitrario $\alpha_q \in TQ$,

$$\begin{aligned}(f+g)^V(\alpha_q) &= (f+g)\circ\pi(\alpha_q) = (f+g)(q) \\ &= f(q)+g(q) = f^V(\alpha_q)+g^V(\alpha_q) = [f^V+g^V](\alpha_q)\end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}(fg)^V(\alpha_q) &= (fg)\circ\pi(\alpha_q) = (fg)(q) \\ &= f(q)\; g(q) = f^V(\alpha_q)\; g^V(\alpha_q) = [f^V g^V](\alpha_q)\,,\end{aligned} \tag{5.6}$$

quedando probadas ambas igualdades. □

Agora, pasemos a comentar o levantamento de 1-formas.

Proposición 5.4. *Sexan dous campos $\widetilde{Y}, \widetilde{Z} \in \mathfrak{X}(T^*Q)$. Tense que, se para todo $f \in C^\infty(Q), X \in \mathfrak{X}(Q)$, se verifica*

$$\widetilde{Y}(f^V) = \widetilde{Z}(f^V)\,, \quad \widetilde{Y}(iX) = \widetilde{Z}(iX)\,, \tag{5.7}$$

entón, $\widetilde{Y} = \widetilde{Z}$.

Demostración. Basta con probar que se

$$\widetilde{Y}(f^V) = 0\,, \quad \widetilde{Y}(iX) = 0\,,$$

entón $\widetilde{Y} = 0$.

Unha vez demostrado isto, se o aplicamos a $\widetilde{X} = \widetilde{Y} - \widetilde{Z}$, a proposición queda probada.

Podemos escribi-lo campo como $\widetilde{Y} = A_i \dfrac{\partial}{\partial q^i} + B_i \dfrac{\partial}{\partial p_i}$, e tomando o campo $\dfrac{\partial}{\partial q^i}$ e a función coordenada canónica q^i

$$\begin{aligned}0 &= \widetilde{Y}\left((q^i)^V\right) = \widetilde{Y}\left(q^i\right) = A_i \\ 0 &= \widetilde{Y}\left(i\frac{\partial}{\partial q^i}\right) = \widetilde{Y}\left(p_i\right) = B_i\end{aligned}\quad , \tag{5.8}$$

e así, $\widetilde{Y} = 0$.

□

Definición 5.5. Sexa $\theta \in \Omega^1(Q)$, defínes o seu *levantamento vertical* ao fibrado cotanxente como o campo de vectores caracterizado por

$$\theta^V(f^V) = 0\,, \quad \theta^V(iX) = (\theta(X))^V\,. \tag{5.9}$$

Proposición 5.6. *A expresión local de $\theta^V \in \mathfrak{X}(T^*Q)$ é*

$$\boxed{\theta^V = \theta_i \frac{\partial}{\partial p_i}} \tag{5.10}$$

Demostración. Para chegar a dita expresión, comezamos por considerar a forma levantada θ^V nas coordenadas canónicas, é dicir,

$$\theta^V = A_i \frac{\partial}{\partial q_i} + B_i \frac{\partial}{\partial p_i}\,,$$

tomamos como campo $X \equiv \dfrac{\partial}{\partial q^i}$ e como función q^i. En tal caso tense que

$$\theta^V((q^i)^V) = A_i\,, \quad \theta^V(iX) = \theta^V(p_i) = B_i.$$

Por outro lado, baseándonos en (5.9), $(\theta(iX))^V = (\theta_i)^V = \theta_i$. Igualando ambas expresións anteriores, é directo que $A_i = 0$ e $B_i = \theta_i$, obténdose a expresión (5.10). □

Ademais, a partires de (5.10) dedúcese que $(dq^i)^V = \dfrac{\partial}{\partial p_i}$.

Finalmente, podemos describir o levantamento de campos vectoriais. En concreto, centrarémonos no levantamento completo dos campos.

Definición 5.7. Sexa $X \in \mathfrak{X}(Q)$ un campo vectorial, definimos o *levantamento completo* do mesmo ao fibrado cotanxente a través de

$$X^C(f^V) = (Xf)^V\,, \quad X^C(iZ) = i[X, Z]\,. \tag{5.11}$$

Proposición 5.8. *A expresión local de $X^C \in \mathfrak{X}(T^*Q)$ é*

$$\boxed{X^C = X^i \frac{\partial}{\partial q^i} - p_j \frac{\partial X^i}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial p_i}} \tag{5.12}$$

Demostración. Para chegar a dita expresión, comezamos por considerar a forma levantada X^C nas coordenadas canónicas, é dicir,

$$X^C = C_i \frac{\partial}{\partial q^i} + D_i \frac{\partial}{\partial p_i}\,,$$

tomar como campo $Z \equiv \dfrac{\partial}{\partial q^i}$ e como función q^i. En tal caso tense que

$$X^C((q^i)^V) = C_i\,, \quad X^C(iZ) = X^C(p_i) = D_i.$$

Por outro lado,

$$X^C((q^i)^V) = (X(q^i))^V = X^i$$

e

$$X^C(iZ) = i\left[X, \frac{\partial}{\partial q^i}\right] = i\left(-\frac{\partial X^i}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial q^j}\right) = -p_j\frac{\partial X^i}{\partial q^i}\,.$$

Igualando ambas expresións anteriores, é directo que $C_i = X^i$ e $D_i = -p_j\dfrac{\partial X^i}{\partial q^j}$, obténdose a expresión (5.12). □

Unha vez visto todo o anterior, podemos definir:

Definición 5.9. A *1-forma de Liouville*, $\Theta \in \Omega^1(TQ)$, que é aquela que está caracterizada, para todos os $X \in \mathfrak{X}(Q)$ e $\eta \in \Omega^1(Q)$, por

$$\Theta(X^C) = iX\,, \quad \Theta(\eta^V) = 0\,. \tag{5.13}$$

Proposición 5.10. *Pódese probar que a expresión local de Θ é*

$$\boxed{\Theta = p_i dq^i} \tag{5.14}$$

Demostración. Consideremos a 1-forma de Liouville na forma

$$\Theta = E_i dq^i + F^i dp_i,$$

tomemos $X = \dfrac{\partial}{\partial q^i}$ e $\eta = dq^i$. Así obtense que

$$\begin{aligned} p_i &= \Theta\left(\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)^C\right) = \Theta\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right) = E_i \\ 0 &= \Theta((dq^i)^V) = \Theta\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right) = F^i\,. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Así obtense a expresión buscada. □

Definición 5.11. A partires da forma de Liouville, pódese definir con facilidade a *forma simpléctica* (dado que é pechada e non dexenerada) *canónica de* T^*Q, $\omega \in \Omega^2(T^*Q)$, como a diferencial da 1-forma de Liouville:

$$\omega = -d\Theta = dq^i \wedge dp_i \tag{5.16}$$

Proposición 5.12. *A forma simpléctica canónica está caracterizada por*

$$\begin{aligned}
&a)\ \omega(X^C, Y^C) = -i[X, Y] \\
&b)\ \omega(X^C, \theta^V) = (\theta(X))^V \\
&c)\ \omega(\theta^V, \eta^V) = 0\,.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Demostración. Para a ecuación a),

$$\begin{aligned}
\omega(X^C, Y^C) &= dq^i \wedge dp_i(X^C, Y^C) = dq^i(X^C)dp_i(Y^C) - dq^i(Y^C)dp_i(X^C) \\
&= -X^i p_k \frac{\partial Y^k}{\partial q^i} + Y^i p_k \frac{\partial X^k}{\partial q^i} \\
&= -p_k[X, Y]^k = -i[X, Y]\,.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Para a ecuación b), tomando o campo $X = \frac{\partial}{\partial q^i}$ e a 1-forma $\theta = dq^j$

$$\begin{aligned}
\omega\left(\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)^C, (dq^j)^V\right) &= dq^i \wedge dp_i\left(\frac{\partial}{\partial q^i}, \frac{\partial}{\partial p_j}\right) \\
&= dq^i\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right) dp_i\left(\frac{\partial}{\partial p_j}\right) - \cancel{dq^i\left(\frac{\partial}{\partial p_j}\right)}\, \cancel{dp_i\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)} \\
&= \delta_i^j = (\delta_i^j)^V = \left(dq^j\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)\right)^V \equiv (\theta(X))^V\,.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Para a ecuación c), tomando dúas 1-formas $\theta = dq^i$ e $\eta = dq^j$

$$\begin{aligned}
\omega\left((dq^i)^V, (dq^j)^V\right) &= dq^i \wedge dp_i\left(\frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{\partial}{\partial p_j}\right) \\
&= \cancel{dq^i\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right)} dp_i\left(\frac{\partial}{\partial p_j}\right) - \cancel{dq^i\left(\frac{\partial}{\partial p_j}\right)} dp_i\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right) \\
&= 0\,.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

□

5.3. Ecuacións de Hamilton

A continuación describiremos a formulación hamiltoniana das ecuacións de Euler-Lagrange, tamén coñecidas como *Ecuacións de Hamilton.*

Dado que ω é non dexenerada, temos o isomorfismo de módulos

$$\begin{aligned}
\flat :\quad \mathfrak{X}(T^*Q) &\longrightarrow \Omega^1(T^*Q) \\
X &\longmapsto \flat(X) = i_X\omega
\end{aligned} \tag{5.21}$$

que leva campos de vectores en T^*Q en 1-formas en T^*Q.

Polo tanto, dada unha función $H : T^*Q \to \mathbb{R}$, existe un único campo de vectores $X_H \in \mathfrak{X}(T^*Q)$ tal que

$$\flat(X_H) = i_{X_H}\omega = dH\,. \tag{5.22}$$

Da expresión (5.16), dedúcese que a expresión local de X_H é

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}\,, \tag{5.23}$$

e se $\phi(t)$ é unha curva integral de X_H entón obtéñense as *Ecuacións de Hamilton*:

$$\left.\frac{dq}{dt}\right|_t = \left.\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}\right|_{\phi(t)}, \quad \left.\frac{dp}{dt}\right|_t = -\left.\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}\right|_{\phi(t)}. \tag{5.24}$$

Bibliografía

[1] Abraham, R., and Marsden, J.E. *Foundations of Mechanics*, second edition, revised, enlarged, reset. Benjamin/Cummings, Reading, 1978.

[2] Cannas Da Silva, A., *Lectures on Symplectic Geometry*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 2008.

[3] Curtis, W. D., and Miller, F. R., *Differential manifolds and theoretical physics*, Academic Press, INC, 1985.

[4] De León, M., Rodrigues, P.R. *Methods of differential geometry in analytical mechanics*, North-Holland Mathematics Studies, 158. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1989.

[5] Goldstein, H., *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, 1959.

[6] Libermann, P., and C-M. Marle, *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*, Kluwer Academic, 1987.

[7] Morimoto, A., *Liftings of some types of tensor fields and connections to tangent p^r-velocities*, *Nagoya Qath. J.* **40** 13-31, 1970.

[8] Yano, K., Ishihara, S., *Tangent and cotangent bundles*, Marcel Dekker, Inc., 1973.