Fijne Functietheorie

Wiegerinck, J.

Publication date
2007

Document Version
Final published version

Fijne Functietheorie

Vossiuspers UvA is een imprint van Amsterdam University Press.
Deze uitgave is totstandgekomen onder auspiciën van de Universiteit van Amsterdam.

Omslag: Nauta & Haagen, Oss
Opmaak: JAPES, Amsterdam
Foto omslag: Carmen Freudenthal, Amsterdam

ISBN 978 90 5629 485 4

Fijne Functietheorie

Rede

uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van
hoogleraar in de Analyse
aan de Universiteit van Amsterdam
op vrijdag 2 februari 2007

door

Jan Wiegerinck

Vossiuspers UvA

Mijnheer de Rector Magnificus,
Mijnheer de Decaan,
Geachte toehoorders,

Voor een zuiver wiskundige is het geven van een voordracht voor een zo gevarieerd gezelschap als het hier vandaag aanwezige geen eenvoudige opgave, tenminste als hij de ambitie heeft op zo'n manier over zijn vak te spreken dat de toehoorders de zaal na afloop verlaten met het idee iets te hebben opgestoken.

De oplossing die ik gekozen heb, is om niet alleen over mijn vak te spreken, maar ook over de mensen erachter. Ik zal iets vertellen over de 'Functietheorie van meer complexe veranderlijken', het gebied waarop ik al jaren met veel plezier werkzaam ben, en over een vrij onbekende stroming binnen de 'Functietheorie van één complexe veranderlijke'. Voor mijzelf was het een verrassing dat deze twee nu, honderd jaar na hun ontstaan, in mijn huidige onderzoek samenkomen. Daaromheen zal ik iets zeggen over de zeer verschillende levens van Fritz Hartogs en Émile Borel, de twee protagonisten van deze richtingen. Ik ga het wagen daaruit conclusies te trekken voor mijn vak, het onderwijs, de samenleving en mijzelf.

Hartogs' leven

Welnu, het afgelopen jaar was het eeuwfeest van de 'Functietheorie van meer complexe veranderlijken'. Friedrich Moritz (Fritz) Hartogs zette ons vakgebied in 1906 op de kaart door in de *Mathematische Annalen* zijn *Habilitationsschrift* te publiceren. De indrukwekkende titel ervan was 'Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer veränderlichen fortschreiten'.[1] Daarmee legde hij de grondslag voor tot nu toe honderd jaar onderzoek op mijn vakgebied.

Hartogs[2] werd op 20 mei 1874 geboren te Brussel. Zijn vader was een Duits-Joodse koopman. In Frankfurt am Main bracht hij zijn jeugd door en doorliep het gymnasium. Hij studeerde in Hannover, Berlijn en München, en promoveerde in die laatste plaats in 1903 bij Pringsheim op een proefschrift over functies van twee complexe veranderlijken. Daarvóór, in 1900, was hij al in Hamburg getrouwd met Therese Gerull; het echtpaar kreeg vier kinderen.

Hartogs begon een mooie carrière als wetenschapper. In München werd hij na zijn promotie privaatdocent, vervolgens in 1910 buitengewoon hoogleraar en in 1927 gewoon hoogleraar op persoonlijke titel. Van Hartogs wordt gezegd dat hij een voorzichtige, stille, enigszins angstige natuur had, en 'dat hij de gave zich op te dringen ten enenmale ontbeerde'.[3] Hij wees bijvoorbeeld een aanbod af om hoogleraar te worden aan de universiteit van Frankfurt, met als argument dat hij de financiële positie van deze universiteit te onzeker vond met het oog op de zorg voor zijn gezin. Dit is bijzonder opmerkelijk, omdat dit professoraat zowel uit wetenschappelijk, financieel als sociaal oogpunt heel aantrekkelijk was. De universiteit van Frankfurt was namelijk een nieuw opgezette, liberale privé-universiteit die gefinancierd werd door Joodse bankiers. We kunnen ons bij dit verhaal allemaal wel de wat wereldvreemde wiskundige voor de geest halen, die in het gewone leven even precies en zorgvuldig probeert te zijn als in zijn wiskunde.

Met het aan de macht komen van de nazi's in 1933 nam het leven van Hartogs, zoals dat van zoveel Joodse mensen, een trieste wending. In 1935 dwongen de nazi's alle Joodse ambtenaren met pensioen te gaan. In 1938, na de Kristall Nacht, werd Hartogs voor enige weken in Dachau geïnterneerd. In 1939 werd hij uit de Deutschen Mathematiker Verein gezet.

Hartogs was een voorzichtig mens en niet dom. Al in 1933 had hij zijn huis op naam van zijn niet-Joodse vrouw laten zetten. Zo dacht hij de confiscatie van hun bezit door het naziregime te voorkomen. Joden zonder vaste woon- of verblijfplaats konden namelijk zonder omhaal gedeporteerd worden, en het vinden van andere woonruimte was voor hen bijkans onmogelijk. In 1941 bleek deze constructie niet meer afdoende te zijn. Het echtpaar kwam tot de conclusie dat alleen met echtscheiding, of in ieder geval een verzoek daartoe, inbeslagname van hun huis kon worden voorkomen. In goede harmonie besloten ze dat Therese echtscheiding zou aanvragen en Fritz zich daartegen zou verzetten. Zo rekten ze de zaak een tijdje, maar in januari 1943 werd de scheiding uitgesproken. Het gevolg was dat Hartogs vanaf dat moment illegaal in zijn eigen huis verbleef. Het vinden van andere woonruimte was uitgesloten, dus dreigde voor Hartogs ieder moment deportatie. Zijn omstandigheden verslechterden voortdurend; hij was al geïsoleerd geraakt van zijn wiskundige vrienden en werd steeds depressiever. Aan deze situatie wist hij maar kort het hoofd te bieden: op 18 augustus 1943 pleegde hij zelfmoord door een overdosis slaapmiddelen in te nemen.

Hartogs heeft het allemaal vrij vroeg zien aankomen. Toch heeft hij nooit geprobeerd naar het buitenland te vluchten, waarom is niet duidelijk. De zorg voor zijn gezin kan daarbij een rol hebben gespeeld, maar misschien paste zo'n grote stap ook gewoon niet bij zijn natuur.

Functietheorie rond 1900

Omdat Hartogs' werk grote verschillen laat zien tussen Functietheorie in één en in meer veranderlijken, wil ik eerst iets over Functietheorie in één veranderlijke zeggen. In de Functietheorie bestuderen we de betrekkelijk kleine, maar zeer belangrijke klasse van *analytische functies* en hun aanverwanten. Tot ver in de negentiende eeuw waren deze functies, die complexe getallen als argument hebben, de enige die serieus bestudeerd werden. Vandaar de naam van mijn vakgebied.

Ik zal u echter niet vermoeien met een formele definitie van complexe getallen en analytische functies. Hier is het voldoende te denken aan complexe getallen als punten van een plat vlak waarmee we kunnen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen als met gewone getallen. We spreken wel van het 'complexe vlak', waarbij we de reële getallen op een lijn, de x-as, terugvinden. Functies die de meesten van ons al op de middelbare school zijn tegengekomen, zoals veeltermen, exponentiële functies, logaritmen, sinussen en cosinussen, kregen een zinvolle definitie op de complexe getallen en werden zo voorbeelden van analytische functies. Een functie als de absolute waarde is echter *niet* analytisch.

Functietheorie gaat terug tot Leonhard Euler (1707-1783). Hij was de eerste die succesvol met functies manipuleerde door hun definitiegebied van de reële getallen uit te breiden naar het complexe vlak. Daarmee bereikte hij verbijsterende resultaten van een grote schoonheid, zoals de oplossing van het Bazelse probleem:[4]

$$\varsigma(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

De theorie werd verder ontwikkeld en geformaliseerd door August L. Cauchy (1789-1857), Karl Weierstrass (1815-1897) en Bernhard Riemann (1826-1866). Toen Hartogs in 1906 zijn baanbrekende ontdekkingen deed, had de Functietheorie net een fantastisch hoogtepunt bereikt. Riemann had geformuleerd wat heden ten dage het beroemdste vermoeden in de wiskunde is:

$$\varsigma(z) = \frac{1}{1^z} + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + \cdots$$

'De zeta-functie heeft buiten zijn reële nulpunten slechts nulpunten op de "kritieke lijn" $x = 1/2$.'[5] En, voortbouwend op de geniale inzichten van Euler en Riemann, hadden de Belgische markies Charles Jean Gustave Nicolas Baron de la Vallée Poussin[6] (1866-1962) en de Fransman Jacques Hadamard[7] (1865-1963) in 1896 onsterfelijkheid bereikt:[8] onafhankelijk van elkaar bewezen zij de *priemgetalstelling*.[9]

Euclides wist al dat er oneindig veel priemgetallen zijn. Priemgetallen zijn alleen deelbaar door 1 en zichzelf, dus 2, 3, 5, 7, 11 en 13 zijn priemgetallen. Maar hoeveel zijn er kleiner dan een gegeven getal n? De priemgetalstelling zegt dat dit er ongeveer $n / \log n$ zijn. Er zijn dus ongeveer vier keer 10^{97} priemgetallen kleiner dan 10^{100}.

Vooruitgang in de wiskunde

Honderd jaar na het eerste bewijs van de priemgetalstelling heeft mijn leermeester, Jaap Korevaar, in een populair artikel een 'eenvoudig' bewijs van de priemgetalstelling gegeven.[10] Dit laat zien hoe hard de wiskunde zich blijft ontwikkelen en hoeveel beter we begrijpen wat vroeger als ongelooflijk moeilijk werd gezien. Tegenwoordig kunnen onze bachelorstudenten dit soort wiskunde aan en geven zij er mooie voordrachten over! Sterker nog, slimme scholieren uit het vwo zijn in staat om de oplossing van het Bazelse probleem te doorgronden en inzicht te verwerven in de problematiek rond priemgetalverdeling en de Riemann-zetafunctie. Dit doen zij onder de inspirerende begeleiding van Jan van der Craats en Roland van der Veen in een, door ons instituut georganiseerde, 'webklas'. Webklassen[11] zijn intensieve cursussen via internet voor vwo'ers uit klas vijf en zes, waar jaarlijks tientallen middelbare scholieren aan meedoen.

Hartogs' werk

Waar Euler mee begon – het uitbreiden van het definitiegebied van analytische functies, en wel zo dat de uitgebreide functie nog steeds analytisch is –, heet 'analytische voortzetting'. De klasse van analytische functies is zo groot dat analytische voortzetting betrekkelijk vaak mogelijk is, maar tevens zo klein dat, *als* analytische voortzetting mogelijk is, dit in wezen maar op één manier gaat. Men kan de functie gedefinieerd door $f = 1$, $(x < 0)$ op allerlei manieren voortzetten tot de complexe getallen, maar alleen de voortzetting $f = 1$ voor alle complexe getallen is een analytische voortzetting.

Analytische voortzetting werd rond 1900 al goed begrepen: men wist dat er bij ieder gebied functies te vinden zijn die niet analytisch voortzetbaar zijn buiten dat gebied. U moet maar van mij aannemen dat dit een heel natuurlijk resultaat is.[12] Hartogs' grote ontdekking was nu dat dit voor analytische functies van twee of meer veranderlijken *niet* opgaat. Hij toonde in 1906 aan dat de meeste gebieden in de meerdimensionale complexe ruimte de eigenschap hebben dat *iedere* analytische functie op zo'n gebied voortzetbaar is tot een groter gebied! Deze ontdekking en alle complicaties en verfijningen van het verschijnsel houden de *meer complexe veranderlijken*-gemeenschap tot op de dag van vandaag bezig.

Maar Hartogs deed meer. Hij bewees ook dat functies van meer veranderlijken al analytisch zijn als voldaan is aan een milde conditie: ze moeten analytisch zijn als functie van één veranderlijke, indien we de andere veranderlijken constant houden. Voor iedere tweedejaars wiskundestudent die geleerd heeft dat deze uitspraak niet geldig is wanneer we 'analytisch' vervangen door 'continu' of 'differentieerbaar', is dit een zeer verrassend resultaat. Maar nog verrassender is het bewijs dat Hartogs gaf. Dit liep jaren vooruit op de theorie van plurisubharmonische functies, die pas in 1942 door Lelong werden ingevoerd![13] Op plurisubharmonische functies kom ik nog terug.

Potentiaaltheorie

Dames en Heren! Mogelijk heeft u nu enig idee bij het woord 'Functietheorie', hopelijk heeft u een beeld van de geschiedenis van dit vakgebied en misschien begrijpt u dat het fijn kan zijn om dit vakgebied te beoefenen, maar het *fijne* ervan weet u nog niet, en daar wil ik in het vervolg van mijn oratie op ingaan. Daarvoor moeten we het even over *Potentiaaltheorie* hebben.

Euler, Riemann en hun tijdgenoten beoefenden Functietheorie niet alleen omdat het zo'n mooi vak is. Functietheorie is een belangrijk hulpmiddel voor klassieke potentiaaltheorie en stromingsleer in het vlak. Ook al is onze ervaringswereld driedimensionaal, veel problemen kunnen door een vorm van symmetrie worden teruggebracht tot een tweedimensionaal probleem dat eenvoudig kan worden opgelost met methoden uit de Functietheorie. Vloeistofstroming om objecten en tot op zekere hoogte ook de stroming van gassen kunnen in dimensie twee worden berekend met behulp van de Functietheorie. In het begin van de vorige eeuw rekende Joukowski[14] op die manier aan de opwaartse druk die wordt uitgeoefend op een vliegtuigvleugel door de erlangs stromende lucht. Zo kon hij een in de praktijk bruikbare eerste benadering voor het ideale vleugelprofiel geven.

Bij Potentiaaltheorie gaat het om potentiaalvelden die ontstaan ten gevolge van een ladingsverdeling of massaverdeling. In zo'n veld bevindt een deeltje (geladen of met massa) zich op een energieniveau dat afhankelijk is van de plaats, en ondervindt daardoor een kracht.

Als je het veld kent, kun je de kracht die wordt uitgeoefend uitrekenen, en daarmee in principe ook de baan die het deeltje zal volgen. Ook de werking van de kooi van Faraday of van een bliksemafleider kun je met behulp van de Potentiaaltheorie goed begrijpen. Als natuurkundig model voor de beschrijving van atomen is de klassieke Potentiaaltheorie in het begin van de twintigste eeuw ingehaald door de Kwantummechanica, maar in wiskundig opzicht groeit het vakgebied nog steeds. Het belangrijkst fundamentele wiskundige probleem van de Potentiaaltheorie werd pas in de jaren dertig opgelost door Frostman.[15]

Er zitten leuke wiskundig kanten aan de Potentiaaltheorie, die voor een natuurkundige nauwelijks relevant zijn. Ik noem er twee. Een potentiaalveld – wij noemen dat een 'subharmonische functie' – zal in de praktijk continu van de plaats afhangen, maar in de theorie hoeft een subharmonische functie niet continu te zijn. Daarnaast zullen geleiders in de natuur nooit capaciteit nul hebben (dan zou iedere ladingsverdeling op zo'n geleider een onbegrensde potentiaal voortbrengen, en dat betekent weer dat de geleider heel erg klein is), maar in de Potentiaaltheorie zijn zulke geleiders juist interessant.

Fijne Functietheorie

Wiskundigen noemen een functie f *continu* als het zo is dat $f(x)$ willekeurig dicht bij $f(y)$ komt te liggen als x maar dicht genoeg bij y ligt. Zo is de functie $f(x) = x^2$ continu, terwijl de functie $g(x) = 0$ als $x < 0$, $g(x) = 1$ als $x \geq 0$, niet continu is.

De definitie staat of valt met het begrip 'dichtbij', en daarover is door wiskundigen veel nagedacht. Het staat ons min of meer vrij om 'dichtbij' zo te definiëren als het ons uitkomt. We denken ons de afstand tussen 0 en positieve getallen minstens een half, en de functie g wordt continu! Dat lijkt misschien raar, maar in het dagelijks leven zijn we daar meer aan gewend dan u denkt.

Ik zal hiervan een voorbeeld geven. Inwoners van Amsterdam weten dat de Grimburgwal twee minuten lopen van de Staalstraat is: de Grimburgwal ligt dicht bij de Staalstraat, maar met de auto doe je er tien minuten over! Je kunt zeggen dat de functie 'rijtijd met de auto' niet continu van de plaats afhangt. Maar je kunt ook je afstandsbegrip aanpassen: definieer de afstand tussen A en B als de tijd die je nodig hebt om met de auto van A naar B te gaan. Met dit afstandsbegrip is onze functie wel continu, maar gaat de *topologie*, bij wijze van spreken de kaart van het gebied, er heel anders uitzien.

Een aanpassing van de topologie die meer functies continu maakt, heet een 'verfijning van de topologie'. In de Potentiaaltheorie komt dit als volgt uit de verf. De *fijne topologie* is de topologie die alle subharmonische functies continu maakt. Het is een zeer gecompliceerde topologie, maar dit wordt meer dan goedgemaakt door de voordelen van de nieuw verworven continuïteit.[16] Een typische open verzameling ziet er uit als een stukje vlak waarin mogelijk oneindig veel, steeds kleinere gaatjes geponst zijn. Het resultaat kan een soort gatenkaas zijn met zoveel gaten dat er geen stukje kaas zonder gat meer uit gesneden kan worden. Hoe diep je ook inzoomt, je blijft gaatjes zien.

Fijne Functietheorie is nu Functietheorie in de context van de fijne topologie. Deze vorm van Functietheorie is veel lastiger dan de gewone, want de fijne topologie is zo groot dat alleen de eindige verzamelingen compact zijn; daardoor werken de gebruikelijke redeneringen niet meer. Pas in de jaren zestig en zeventig van de twintigste eeuw ontwikkelde de Deen Bent Fuglede de theorie van 'fijne analytische functies van één veranderlijke',[17] maar een robuuste theorie voor meer veranderlijken is er nog steeds niet.

Émile Borel

Émile Borel (1871-1956) was de eerste die zich realiseerde dat veel resultaten uit de Functietheorie doorgang vinden voor analytisch-achtige functies op fijn-open verzamelingen. Hij promoveerde bij Darboux in 1894 op een proefschrift getiteld 'Sur quelques points de la théorie des fonctions'.[18] In hedendaagse termen geformuleerd: hij toonde aan dat fijne analytische voortzetting een zinvol begrip is. Daarmee weerlegde hij een vermoeden van Poincaré.[19] Hij breidde zijn resultaten verder uit en publiceerde er in 1917 een boekje over: *Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe*.[20]

Borel werd al in zijn eigen tijd beschouwd als een groot wiskundige vanwege zijn werk op het gebied van de Maattheorie, Stochastiek en Functietheorie. Zijn *fonctions monogènes* werden in eerste instantie enthousiast onthaald en gezien als een technisch hoogstandje. In de loop der jaren veranderde het perspectief echter en bekeek men deze *fonctions monogènes* steeds meer als een vrij excentriek uitstapje. Ik moet eerlijk bekennen dat ik tot voor kort dezelfde mening was toegedaan.

Mijn onderzoek

Aan de theorie van functies van meer complexe veranderlijken ging de ontwikkeling van de Fijne Functietheorie geruisloos voorbij. Naar nu blijkt, was dat ten onrechte. Collega's uit Uppsala[21] en Krakow[22] en mijn assistent Said El Marzguioui en ikzelf[23] hebben laten zien dat fijne analyticiteit te voorschijn komt als natuurlijke verklaring voor verschijnselen waarmee we in ons vakgebied geconfronteerd worden. Je ziet in de Functietheorie van meer veranderlijken wel vaker dat een perifeer één-veranderlijke resultaat helpt bij het beantwoorden van een centrale vraag in meer veranderlijken.

Wij bestuderen de Potentiaaltheorie voor meer complexe veranderlijken. De technische term is ‘Pluripotentiaaltheorie’, waarbij het gaat om de theorie van die deelklasse van subharmonische functies die behouden blijven onder complexe coordinatentransformaties. Deze zogenaamde ‘plurisubharmonische functies’ kom je op veel plaatsen in de wiskunde tegen. Meer nog dan in de klassieke theorie zijn verzamelingen van capaciteit nul – wij spreken van ‘pluripolaire verzamelingen’ – de moeite van het bestuderen waard, en dat is nu precies wat ik tegenwoordig in mijn onderzoek doe. Hartogs-achtige voortzettingsstellingen treden ook op voor deze verzamelingen. Natuurlijk hebben pluripolaire verzamelingen er geen boodschap aan dat wij Fijne Functietheorie lastiger vinden dan de gewone. Fijne analytische variëteiten, wat dat ook mogen zijn, blijken evengoed pluripolair te zijn als gewone variëteiten.[24] Wij moeten ons daaraan maar aanpassen, en eigenlijk vinden we dat wel leuk. Fijne Functietheorie vanuit een ‘meer complexe veranderlijken’ standpunt levert ons nog jaren stof tot nadenken!

Borels leven

We keren nu terug naar Borel.[25] Émile Borel werd in 1871 geboren in Frankrijk, in het dorpje Saint Affrique, district Aveyron, in de Midi Pyreneeën, waar zijn vader dominee was. Bij hem in het dorp werd hij een wonderkind genoemd. Op 18-jarige leeftijd deed hij echter in heel Frankrijk van zich spreken door als eerste te eindigen bij zowel het concours van de École Polytechnique als het concours van de École Normale Superieur. Nog voor zijn promotie werd Borel in 1893 docent in Lille, in 1897 docent aan de École Normale Superieur in Parijs en in 1904 hoogleraar aan de Sorbonne, eveneens in Parijs. In 1910 werd hij directeur van de ENS. Vervolgens werd hij in 1921 lid van de Académie Française, organiseerde hij nationale en internationale wetenschappelijke samenwerkingsverbanden, en speelde hij een doorslaggevende rol bij de oprichting van het Institut Henri Poincaré en het Centre National de Recherche Scientifique.

Opmerkelijk is dat Borel, en met hem veel Franse wiskundigen uit het eind van de negentiende en het begin van de twintigste eeuw, politiek zeer betrokken was – dit in tegenstelling tot Hartogs, en eigenlijk ook in tegenstelling tot de meeste wiskundigen van alle tijden. Hoe kwam dat? Borel behoorde tot de Franse school in de Functietheorie waartoe rond 1900, naast de eerdergenoemde Jacques Hadamard, ook Paul Painlevé en Paul Appell behoorden. Hadamard en Painlevé waren studiegenoten, Borel had gestudeerd bij Painlevé en was getrouwd met een dochter van Appell: Margueritte, die onder het pseudoniem Camille Marbo bekendheid als schrijfster verwierf. Painlevé had weer les gehad van Appell en hij had Borel bij de familie Appell geïntroduceerd. De grote maatschappelijke en politieke betrokkenheid van juist deze wiskundigen hangt samen met het toevallige feit dat Hadamard de achteroom was van de vrouw van ene Alfred Dreyfus.

Intermezzo: de Dreyfus-affaire

De Dreyfus-affaire[26] zat nog ingewikkelder in elkaar dan de relaties binnen de Franse wiskundige wereld. Ik zal er iets over vertellen. Alfred Dreyfus was in 1895 de enige Joodse officier die werkzaam was voor de Franse inlichtingendienst. Hij werd in 1895 beschuldigd van spionage voor Duitsland en veroordeeld tot levenslange gevangenschap op Duivelseiland. Ook nadat er overduidelijk bewijs was gevonden dat Dreyfus onschuldig was en dat hij geen eerlijk proces had gekregen, weigerde de Franse legerleiding de zaak te herzien. Integendeel, groeperingen binnen de legerleiding vervalsten documenten en getuigenissen, en stopten deze in geheime dossiers om het vonnis kracht bij te zetten. Het nieuw benoemde hoofd van de inlichtingendienst, kolonel Picquard, die de werkelijke toedracht achterhaalde, werd zelfs veroordeeld voor schending van ambtsgeheim! Picquard nu was een huisvriend van de Appells, nog een toevalligheid.

Er zat een zwaar antisemitisch luchtje aan de zaak. De Franse schrijver Émile Zola schreef naar aanleiding hiervan een beroemd geworden open brief aan de president van de republiek, waarin hij de zaak aan de kaak stelde: *J'accuse*. Deze brief vulde in januari 1898 de voorpagina van het dagblad *L'Aurore*. De affaire verdeelde Frankrijk tot op het bot in een rechts-conservatief anti-Dreyfusblok en een links, progressief-intellectueel pro-Dreyfusblok. En nog steeds zijn de Fransen niet uitgepraat over de affaire.[27] Uiteindelijk, na drie herzieningsprocessen en één keer gratie, werden Dreyfus en Picquard in 1906 volledig in ere hersteld.

Hadamard, die Dreyfus overigens maar één keer had ontmoet, was al in 1897 overtuigd van diens onschuld, maar kon zijn vriend Paul Painlevé er niet van overtuigen.[28] Deze kon zich eenvoudigweg niet voorstellen dat er zulke verdorvenheid heerste binnen het Franse leger. Pas toen hij erop attent werd gemaakt dat ook zijn gesprekken met Hadamard verdraaid in het dossier terechtgekomen waren om achteraf als bewijs voor de schuld van Dreyfus te dienen, realiseerde Painlevé zich dat hij blind was geweest. Daarna was hij helemaal om. Hij sloot zich aan bij de *Ligue des droits d'hommes*, een club die het werk voor de rechten van Dreyfus generaliseerde naar de rechten van Franse burgers, en stortte zich in de politiek. In 1910 werd Painlevé gedeputeerde voor zijn district en in 1917 minister van Oorlog. Dat bleef hij met enige tussenpozen tot 1932. In 1917 en 1925 was hij minister-president.[29]

Borels leven

Borel was een goede vriend van Painlevé geworden en had eenzelfde belangstelling voor politiek en techniek. Vanaf het begin van pro-Dreyfus, behoorde ook hij tot de *Ligue des droits d'hommes*. In de Eerste Wereldoorlog diende Borel als officier bij de artillerie. Painlevé haalde hem echter in 1917 van het front en zette hem aan het hoofd van de *Service des Inventions intéressant la de Défense National* (lett.: de Dienst voor uitvindingen van nut voor de nationale verdediging).

Borel was al vanaf rond 1900 politiek actief. Als gevolg van zijn ervaringen in de oorlog werd hij een politiek activist en een uitgesproken voorstander van Europese en internationale samenwerking. In 1924 werd hij gedeputeerde van l'Aveyron. In 1925 was hij, als radicaal socialist, zelfs even minister van Marine. Van 1927 tot 1947 was Borel burgemeester van zijn geboortedorp Saint-Affrique. Na de Eerste Wereldoorlog was hij een van de drijvende krachten achter de *Association Française pour la Société des nations* en de *Union internationale des associations pour la Société des nations*. Deze organisaties worden beschouwd als voorlopers van de Europese Unie en de Verenigde Naties.

In de zomer van 1955 nam Borel nog deel aan een grote statistiekconferentie in Brazilië. Tijdens de overtocht terug kwam hij ernstig ten val, aan de gevolgen waarvan hij op 3 februari 1956 overleed.

Conclusies

Wanneer ik Hartogs en Borel naast elkaar zet, is mijn eerste gedachte dat de meeste wiskundigen, en misschien wel de meeste wetenschappers, meer op Hartogs lijken dan op Borel, en vervolgens dat Hartogs wel erg in zijn Ivoren Toren zat en er goed aan zou hebben gedaan zijn lot meer in eigen hand te nemen. Nee, dan als Borel in de wereld te staan!

Maar zo eenvoudig ligt dat niet. Het engagement van Borel en zijn Franse tijdgenoten kwam tot stand door enkele *life events* die hem en zijn collega's bijzonder raakten. Het is maar de vraag of dat zonder Dreyfus en de Eerste Wereldoorlog ook gebeurd zou zijn. En zo expliciet als Borel, en meer nog als Painlevé, zijn er niet veel in het publieke domein getreden. Zij hadden bijzondere kwaliteiten! Als Jood in Nazi-Duitsland had Hartogs zeker geen mogelijkheden het lot te beïnvloeden, zoals Borel. Op zijn best zou hij hebben kunnen ontsnappen.

Laten we nu eens om ons heen kijken. Is er nu aanleiding voor wiskundigen om uit hun instituten te komen?

Universiteit van Amsterdam

Om de hoek zien we de Universiteit van Amsterdam met al zijn problemen. Dit is een feestelijke gelegenheid en velen van u zijn maar al te bekend met de problematiek. Daarom is dit niet het moment om uitgebreid in te gaan op de weinig vrolijke details. Twee titels die boekdelen spreken, lichten genoeg van de sluier op. Louise Fresco sprak op 8 januari 2007 de Diesrede uit met als titel *Het einde van de universiteit*. In *Folia* stond een paar weken daarvoor een artikel van de psycholoog Denny Borsboom getiteld 'Kafka aan het Spui'. Het aardige van mijn huidige functie van instituutsdirecteur is nu dat je ziet dat zij, en alle andere klagers, helemaal gelijk hebben en zelfs dat zij zich lang niet van alles wat er misgaat bewust zijn. En, je hoort ook nog eens wat, bijvoorbeeld van Arne Brentjes, hoofd *Audit en control* van onze universiteit: 'Chaos is een managementinstrument.'[30]

Maar ik zie ook dat de mensen in de organisatie over het algemeen werkelijk hun best doen en het beste met de universiteit voorhebben. De organisatorische en administratieve problemen van onze universiteit zijn zeker ernstig, maar over vijf jaar zullen ze opgelost zijn en vast weer vervangen door andere. Ik zal doen wat ik kan om ons instituut en onze faculteit er goed doorheen te helpen.

Gelukkig zijn die problemen maar van secundair belang. Want, eerlijk is eerlijk, waar het werkelijk om draait is onderwijs en onderzoek. Dat is over het algemeen goed aan de UvA – binnen de faculteit waar ik met enig gezag over spreken kan, zelfs erg goed. We staan hoog in de universitaire hitparade. Hetzelfde geldt denk ik ook voor het niveau van onze studenten. Binnen onze opleiding zijn de studenten gemiddeld zeker zo begaafd als die aan buitenlandse topinstellingen; een van de problemen waar we tegen aanlopen bij het verhogen van de studenteninstroom wiskunde, is dat het instapniveau van de masteropleiding *mathematics* bij voortduring te hoog blijkt te zijn voor buitenlandse studenten, ook als zij van goede Amerikaanse *colleges* afkomstig zijn.

Ik kan het toch niet laten een paar algemene aanbevelingen te doen voor het beleid van de UvA. Omdat we vaak vergeleken worden met Amerikaanse topuniversiteiten, baseer ik die op de Amerikaanse situatie.

U zult gemerkt hebben dat ik het alleen over onze wiskundestudenten heb gehad. Aan studenten van andere faculteiten geven wij niet of nauwelijks les. In de VS staat het bestuur van ieder *college* dat een beetje wil meetellen erop dat alle studenten wiskundeonderwijs krijgen en dat het gegeven wordt door het *maths. department*. Mijn Amerikaanse collega's denken hier gemengd over. Dit onderwijs aan studenten met weinig belangstelling voor wiskunde wordt over het algemeen als minder leuk ervaren dan het geven van 'Fijne Functietheorie' aan masterstudenten wiskunde, om maar wat te noemen. Amerikaanse universiteiten doen dit ook niet omdat ze de wiskundigen zo aardig vinden en van werk willen voorzien. Zij hebben het idee dat zij hun studenten moeten vormen, opvoeden zo u wilt. En bij een goede opvoeding hoort wiskunde, gedoceerd door wiskundigen (en Engelse literatuur gedoceerd door Engelse-literatuurwetenschappers, enzovoorts). Het zou goed zijn als het College van Bestuur dit beleid zou overnemen!

Het verbaast mij, en ik vind het onverstandig, dat de UvA het vormen van fondsen niet stimuleert. Dit zou gedaan kunnen worden door inkomsten uit de derde geldstroom of geld van elders vast te zetten. In de nota *Herziening allocatie eerste geldstroommiddelen*[31] staat expliciet: 'De UvA is evenwel geen bank, en hoeft dus geen geld op te potten.' Princeton, Harvard en Yale doen dat juist wel! Leuke dingen als speciale leerstoelen, dure apparatuur en goede faciliteiten kunnen worden betaald uit de rente-inkomsten van het *endowment*, dat miljarden kan bedragen.

Maar belangrijker nog is dat gegarandeerde eigen inkomsten bescherming bieden tegen de willekeur van de overheid.

Een derde aanbeveling is dat de ondersteunende structuren binnen de UvA zich de Amerikaanse mentaliteit jegens het primaire proces tot missie moeten maken. Als eenvoudige postdoc in Princeton hoorde ik daar al van de centrale diensten: ‘Wij zijn er om jullie je werk beter te laten doen.’ Bij ons leeft dat idee misschien wel bij het individu, maar vreemd genoeg niet bij de organisatie (in z’n geheel).

Mijn vierde en laatste aanbeveling is dat, als het CvB besluit dat grootschalige organisatorische en administratieve wijzigingen noodzakelijk zijn – en om de zoveel jaar zijn ze onvermijdelijk –, daar dan de medewerkers bij betrokken worden, niet alleen als gebruikers, maar ook als experts! Durf gebruik te maken van de kwaliteit die de universiteit in huis heeft! De UvA gaat ons ter harte, en personen als Borel en Painlevé laten ons zien dat wetenschappers, en zeker ook wiskundigen, zeer goed in staat zijn een algemeen belang te dienen als het hun ter harte gaat!

Nederland kenniseconomie

Wat verder weg zien we onderwijs in Nederland. De Nederlandse overheid hecht er groot belang aan om van Nederland een kenniseconomie te maken. Maar we lezen in de krant dat eerstejaars studenten niet kunnen spellen en niet kunnen rekenen.[32] Waarom gaat het zo mis? Ik ben bang dat de overheid ideeën over onderwijsvernieuwing, goed of slecht, vooral omarmt om bezuinigingen op onderwijs te voorzien van een ideologisch tintje. Protesten van docenten mogen dan niet baten, die kunnen makkelijk als ‘ouderwets en conservatief’ worden afgedaan. In Nederland is zo het basis- en middelbaar onderwijs in de exacte vakken de afgelopen twintig jaar op een verpletterende manier te pakken genomen.

De laatste onderwijsvernieuwing is het ‘nieuwe leren’, dat probeert in te spelen op de ontwikkeling van computer, internet en grafische rekenmachine. Het gaat om competenties. Harde kennis zou snel verouderen en hoeft daarom niet in het hoofd te worden opgeslagen; er zijn ook geen ‘geleerde’ docenten voor nodig. Dit ‘nieuwe leren’ is volkomen onzin.[33] Computers, internet en grafische rekenmachine breiden onze harde kennis met een zacht wolkje uit.[34] Veel kennis, groot wolkje, geen kennis, geen wolkje. Wat het nieuwe leren propageert, komt neer op het vervangen van harde kennis door zachte wolkjes, en dan houd je aan het eind niets over.

Hier zou je willen dat een Nederlandse Borel zou opstaan. Ik zeg dit met enige schroom, want met de eerste Nederlandse wiskundige die zich in de politiek waagde, liep het slecht af. U weet natuurlijk dat Johan de Witt in 1672 is gelyncht. Maar toch, onze jongens van Jan de Witt[35] komen uit hun instituten en in het geweer! Ik doel op diegenen die vanuit de universiteiten proberen om de kwaliteit van het basis- en middelbaar onderwijs weer op hoog niveau te brengen. Vier hoogleraren die aan het Korteweg-de Vries Instituut verbonden zijn of waren, horen bij deze club: Jan van der Craats, Robbert Dijkgraaf, Klaas Landsman en Lex Schrijver. Als directeur van het Korteweg-de Vries Instituut ben ik daar trots op en ik wil hun werk van harte steunen.

Waarom wiskunde?

Dit is het goede moment om over de zin en het nut van de wiskunde te spreken. Uit wat ik eerder heb verteld, heeft u wellicht kunnen opmaken dat wiskunde een nuttige hulpwetenschap is voor andere disciplines. Dit is volkomen juist. Onze hele moderne maatschappij bestaat bij de gratie van de toepassingen van de wiskunde, en al te vaak is dit onderbelicht. Maar als onderzoeker interesseren de toepassingen mij persoonlijk minder. Het zijn de vragen die de wiskunde zelf stelt en de prachtige antwoorden die mij motiveren en fascineren. De woorden van Hilbert ‘Wir müssen wissen. Wir werden wissen’ zijn mij op het lijf geschreven.[36]

Maar mag dat van uw belastinggeld? Ik geloof van wel, want het is niet alleen zo dat wiskunde een handig hulpmiddel is voor toepassingen. Nee, alleen dankzij ons ingebouwd wiskundig vermogen kunnen wij mensen disciplines en beroepen uitoefenen waarvan wiskunde als hulpwetenschap een belangrijk onderdeel is. En dat worden er steeds meer! Abstractievermogen, ruimtelijk inzicht, analytisch denken, kortom het vermogen tot het bedrijven van wiskunde, is fundamenteel in onze maatschappij. De ontwikkeling van wetenschap en techniek, en daarmee van onze hele samenleving, wordt vooral voortgestuwd door onze wiskundige kant.

Ik trek twee conclusies. Ten eerste: mensen ervaren steeds meer de noodzaak om hun wiskundige kant te ontwikkelen en zij hebben daartoe ook het recht – let wel, ik zeg daarmee niet dat iedereen goed in wiskunde moet worden of het maar moet gaan studeren. Ten tweede: verdere ontwikkeling van de wiskunde is noodzakelijk voor onze vooruitgang. Er is geen keus anders dan wiskunde goed te onderwijzen en verder te ontwikkelen. En dat is nu precies hetgeen ik als onderzoeker, docent en instituutsdirecteur probeer te doen.

Dankwoord

Graag dank ik het College van Bestuur van de Universiteit van Amsterdam voor het vertrouwen dat het in mij stelt. Al mijn vroegere docenten, van wie er velen mijn collega's werden – in het bijzonder mijn afstudeerdocent professor Van der Geer – dank ik voor het vele dat ik van hen geleerd heb en het plezier in mijn werk dat zij mij gaven en geven.

Beste Oscar, Paul en Said, met jullie werken was en is de slagroom op mijn wetenschappelijke taart, en ik heb ook veel van júllie geleerd. Mijn dank!

In de Analyse in Nederland zijn drie grote K's actief: Kaashoek, Koornwinder en Korevaar. Ik dank professor Rien Kaashoek die altijd belangstelling voor mijn werk en welvaren heeft gehad en mij buitengewoon heeft gesteund. Hooggeleerde Koornwinder, beste Tom, in de periode dat je directeur van het Korteweg-de Vries Instituut was, heb je een voorbeeld gegeven waarvan ik alleen maar kan hopen dat ik het een beetje kan navolgen. Je was jaren mijn baas. Het fijnste daarvan was wel dat ik er niets van merkte, behalve als ik je nodig had! Ik dank je oprecht. Hooggeleerde Korevaar, beste Jaap, ik ben je enorm veel verschuldigd. Jouw enthousiasme heeft me naar de Analyse gelokt en bij jou ben ik gepromoveerd. Zonder jouw inzet, kennis en begeleiding had ik het er nooit zo ver in geschopt. Ik ben trots op onze vriendschap en blij dat je mij vandaag hebt horen spreken.

Het is jammer dat mijn vader deze dag niet heeft mogen meemaken. Hij zou apetrots zijn geweest!

Lieve mama, alles begint bij je ouders, en het begin is goed geweest. Ik ben jullie dankbaar voor een fijne, stimulerende opvoeding, je ziet wat ervan komt.

Lieve Jan Joost en Esther, jullie beseffen niet half met hoeveel plezier ik jullie heb zien groeien, en dat gaat nog steeds maar door, ik dank jullie wel!

Lieve Marieke, je bent mijn maatje en mijn lief, je hebt me altijd gesteund en voor dommigheid behoed, ik dank je wel, jij bent het einde.

Ik dank u allen voor uw aandacht.

Ik heb gezegd.

Noten

1. Hartogs, F.M., ‘Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen *einer* veränderlichen fortschreiten’, *Math. Ann.* 62 (1906), 1-88.
2. Zie over Hartogs bijvoorbeeld Bauer, F.L., ‘Friedrich Hartogs, das Schicksal eines jüdischen Matematikers in München’, *Aviso, Zeitschrift für Wissenschaft und Kunst in Bayern* (2004), 34-41, http://www.stmwfk.bayern.de/downloads/aviso/2004_1_aviso_34-41.pdf.
3. Bauer, F.L., loc.cit.
4. Euler leerde dit ‘Bazelse probleem’ kennen door zijn leermeester Johann Bernoulli (1667-1748), die in Bazel hoogleraar wiskunde was. Bernoulli had het probleem waarschijnlijk weer van de Italiaanse wiskundige Pietro Mengoli (1626-1686).
5. Riemann formuleerde het probleem terloops in zijn artikel ‘Ueber die Anzahl Primzahlen unter einer gegebenen Grösse’, *Monatsberichte der Berliner Akademie*, november 1859, 1-10; zie http://www.wolfram.com/products/publicon/samples/riemann/Riemann.pdf. Het vermoeden van Riemann vormt een van de Clay-Milleniumproblemen: de Clay Foundation loofde in 2000 een miljoen dollar uit voor diegenen die zo’n probleem kunnen oplossen. Zie http://www.clay.org.
6. De la Vallée Poussin, C.J.G.N., ‘Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers’, *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, 20,183-256, 1896.
7. Hadamard, J., ‘Sur la distribution des zéros de la fonction ζ(s) et ses conséquences arithmétiques’, *[J] S. M. F. Bull.* 24 (1896), 199-220.
8. Inderdaad, want beiden werden bijna honderd.
9. In het bewijs van de priemgetalstelling wordt alleen gebruikt dat de zeta-functie geen nulpunten heeft op de lijn $x = 1$. Het vermoeden van Riemann impliceert echter een veel preciezere vorm van de priemgetalstelling.
10. Korevaar, J., ‘Een eenvoudig bewijs van de priemgetalstelling’, *Nieuw Arch. wiskd.* (5) 5 (2004), nr. 4, 284-291.
11. Zie http://www.studeren.uva.nl/webklassen/object.cfm/objectid=F42207FF-368D-4485-973976A2C05D40D0.
12. Dit resultaat volgt betrekkelijk eenvoudig uit de bekende stelling van Weierstrass volgens welke er voor iedere rij $\{a_n\}_n$ van complexe getallen zonder verdichtingspunt in een gebied G in het complexe vlak, een analytische functie f op G bestaat die precies de getallen a_n als nulpunten heeft.
13. Zie Lelong, P., ‘Définition des fonctions plurisousharmoniques’, *C.R. Acad. Sci*. 215 (1942), 398-400.
14. Joukowski, N.E., ‘Uber die Konturen der Tragflachen der Drachenflieger’, *Zeitschrift fur Flugtechnik und Motorluftschiffahrt* (1910), 281; en (1912), 81.

15. Frostman, O., *Potentiel d'équilibre et Capacité des Ensembles*, proefschrift, Lund, 1935.
16. Het mooiste voorbeeld is de generalisatie van de stelling van Iversen voor het geval van subharmonische functies. Volgens de gegeneraliseerde stelling laat iedere niet-constante subharmonische functie op de Euclidische ruimte een pad toe naar oneindig waarover de functie naar oneindig gaat. Fuglede bewees de stelling voor algemene subharmonische functies in dimensie groter dan twee, door in de fijne topologie te werken, waar alle subharmonische functies immers continu zijn, en de ideeën uit het continue geval aan te passen. Zie voor een historisch perspectief en verdere referenties: Fuglede, B., 'Fine topology and finely holomorphic functions', *Proceedings of the 18th Scandinavian Congress of Math.* (Aarhus, 1980), 22-38, *Progr. Math.*, 11, Birkhauser, Boston (Mass.) 1981.
17. Fuglede, B., 'Sur les fonctions finement holomorphes', *Ann. Inst. Fourier* (Grenoble), 31 (1981), nr. 4, vii, 57-88.
18. Het proefschrift verscheen als artikel: Borel, E., 'Sur quelques points de la théorie des fonctions', *Ann. de l'Éc. Normale supp.* 12 (1895), 2-55.
19. Poincaré had uitgesproken dat analytische voortzetting over een contour die bestaat uit verdichtingspunten van singulariteiten niet zinvol gedefinieerd kan worden; zie: Poincare, Henri, 'Sur les fonctions à espaces lacunaires', *Amer. J. Math.* 14 (1892), nr. 3, 201-221.
20. Borel, É., *Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe,* rédigées par Gaston Julia, Parijs, Gauthier-Villars, 1917.
21. Edlund, T. & Jöricke, B., 'The pluripolar hull of a graph and fine analytic continuation', *Ark. for Mat.* 44 (2006), 39-60.
22. Edigarian, A., Siciak, J. & Zwonek, W., 'Bounded holomorphic functions with multiple sheeted pluripolar hulls', *Studia Math.* 175 (2006), nr. 3, 233-247.
23. El Marzguioui, S. & Wiegerinck, J.J.O.O., 'The pluri-fine topology is locally connected', *Potential Anal.* 25 (2006), nr. 3, 283-288.
24. Edigarian, A., El Marzguioui & S.; Wiegerinck, J.J.O.O., 'The graph of a finely holomorphic function is pluripolar', *electronische preprint* http://arxiv.org/abs/math/0701136.
25. Zie bijvoorbeeld: Guieu, J.M., 'Émile Borel et la coopération européenne', *Bulletin de l'institut Pierre Renouvin*, 1998. http://ipr.univparis1.fr/spip.php?page= imprimer&id_article=33.
26. Zie bijvoorbeeld: http://fr.wikipedia.org/wiki/Affaire_Dreyfus of http://www.answers.com/topic/dreyfus-affair.
27. Vrij recentelijk nog voerde Jean Doise (1917-2006) argumenten aan dat er überhaupt geen sprake was geweest van spionage, maar dat een contraspionageafdeling van het Franse leger had geprobeerd onjuiste informatie te verspreiden. Dit zou door een andere afdeling ontdekt zijn als 'verraad'. Duidelijk is wel dat Dreyfus er niets mee te

maken had. Zie: Doise, J., *Un secret bien gardé : histoire militaire de l'affaire Dreyfus*, Éditions du Seuil, collection XXème siècle, 1994.

28. Zie: Anizan, A.L., *Paul Painlevé (1863-1933) Un scientifique en politique*, proefschrift, Institut d'Études Politiques de Paris, Centre d'Histoire Politique, Parijs, 2006; zie http://ecoledoctorale.sciences-po.fr/theses/theses_en_ligne/anizan_hist_2006/anizan_hist_2006.pdf.
29. Er waren om precies te zijn drie kabinetten Painlevé: van 13-09-1917 tot 13-11-1917, van 14-04-1925 tot 27-10-1925 en van 29-10-1925 tot 22-11-1925. Zie ook: http://perso.orange.fr/savoir-plaisir/histoire/Republique_3.htm.
30. Arno Brendtjes, '*personal communication*', oktober 2006.
31. Herziening allocatie eerste geldstroommiddelen – bestuurlijk voorstel versie 2.3 – Universiteit van Amsterdam, 1-11-2005.
32. Zie bijvoorbeeld het artikel van Doekle Terpstra, voorzitter van de HBO-raad: 'Het niveau bij veel eerstejaars bachelors is dramatisch', in *de Volkskrant*, 17-1-2007. In dezelfde krant is een scherpzinnige brief van Thomas von der Dunk opgenomen over de onzin van 'het nieuwe leren'. Veel eerder al was er de actie 'Lieve Maria' van Nederlandse studentenorganisaties; zie http://www.lievemaria.nl.
33. Dunk, T. von der, loc.cit.
34. Bijvoorbeeld: Als ik niet had geweten dat Johan de Witt wiskundige was, en de uitdrukking 'jongens van Jan de Witt' niet had gekend, had ik ook niet op internet gevonden dat de uitdrukking 'jongens van Jan de Wit(t)' waarschijnlijk terugslaat op de door De Witt opgerichte voorloper van het Corps Mariniers (en dat het ook een verwijzing zou kunnen zijn naar de troepen van ene Johan de Wert).
35. Johan de Witt: Leider en dienaar van de republiek, Vormer harer machtigste vloten, Verdediger der vrije zee, Verzorger van 's lands gelden, Wiskundige (opschrift op de achterkant van de sokkel van het standbeeld van Johan de Witt op de Plaats in Den Haag).
36. Hilbert sprak deze aansporing uit in zijn beroemde Königsberger rede in 1930. De uitspraak staat ook op zijn grafsteen.