Rekenen bij Economie

Kneppers, L.

Publication date
2010

Document Version
Final published version

Link to publication

Citation for published version (APA):
Kneppers, L. (2010). *Rekenen bij Economie*. Landelijk Expertisecentrum Handel en Economie.
http://www.expertisecentrumeconomie.nl/uploads/Katernen/Rekenvaardigheden.doc

REKENEN

REKENEN

BIJ

BIJ

ECONOMIE

ECONOMIE

LENIE KNEPPERS

INHOUDSOPGAVE

Inleiding

In het vak economie moet door leerlingen gerekend worden. We zien in de praktijk dat het problemen geeft als leerlingen de rekenvaardigheden in de economische contexten moeten toepassen.
Daar zijn drie redenen voor aan te geven. Ten eerste verwachten wij dat alle leerlingen de eindtermen van het basisonderwijs hebben behaald en daardoor geen problemen zouden moeten hebben met de vereiste rekenvaardigheden zoals het berekenen van percentages. Dat is echter lang niet altijd zo. In tabel 2, op bladzijde 4, kunnen we bij procenten berekenen zien, dat hoewel het resultaat tussen 1987 en 2004 belangrijk is verbeterd, er toch nog 58% van de leerlingen is die slechts tussen 40 en 60% scoort. En zelfs als we de cijfers van de basisberekeningen bekijken scoort daar ook nog een flink percentage laag tot gemiddeld op de verschillende onderdelen. Het is vanzelfsprekend mogelijk dat deze beperkingen in de eerste jaren van het voortgezet onderwijs weggenomen zijn zodat we daar in - meestal het derde jaar als de economielessen beginnen – geen last meer van hebben, maar zeker is dat niet.
Ten tweede is er sprake van systeemscheiding. Leerlingen herkennen de berekeningen in de wiskundeles niet in de economische opgaven. Dat is een bekend verschijnsel waar we rekening mee moeten houden.
Ten derde spelen de economische opgaven zich af in economische contexten. Leerlingen moeten de opgaven die in economische taal zijn geschreven omzetten naar een rekenkundige formule. Dat is eveneens moeilijk.
Kortom, de leraar economie kan er niet van uitgaan dat leerlingen de economische berekeningen zonder hulp kunnen maken. Hoe deze hulp eruit kan zien wordt in dit hoofdstuk beschreven. We gaan er daarbij vanuit, dat de huidige lichting leerlingen het rekenen heeft geleerd met de realistische methode. Die is de leraar economie meestal nog onbekend. De neiging bestaat de leerlingen te helpen met de methoden, die hij zelf heeft geleerd en gebruikt. Dat kan tot verwarring leiden bij leerlingen. Dit hoofdstuk heeft tot doel de leraar te helpen om leerlingen hulp te bieden bij de meest voorkomende economische berekeningen met middelen uit de realistische methode uit basisonderwijs en voortgezet onderwijs.
Na een inleiding over realistisch rekenen volgen aanpakken voor:

1. het berekenen van percentages:
    a. procenten als verhoudingsgetallen;
    b. procenten, die een relatieve verandering laten zien;
    c. percentages boven de 100%;
    d. procenten en indexcijfers
2. het berekenen van lineaire functies:
    a. het oplossen van vraagstukken met één onbekende
    b. het berekenen van het snijpunt

1. Hoe leren leerlingen rekenen ?

Leerlingen in het basisonderwijs en in de eerste jaren van het voortgezet onderwijs krijgen onderwijs in het rekenen volgens de realistische methode.
Deze methode is in de jaren ‘70 ontwikkeld als reactie op de tot dan toe uitgevoerde traditionele methode. Deze nieuwe didactische rekenmethode heeft in korte tijd de traditionele methode vervangen. In tabel 1 is te zien hoe het marktaandeel van rekenmethoden in de peilingen einde basisonderwijs was (Janssen, van der Schoot, & Hemker, 2005; Janssen, van der Schoot, Hemker, & Verhelst, 1999).

Tabel 1 Marktaandeel van rekenmethoden in de peilingen einde basisonderwijs

PPon eind basisonderwijs	traditioneel	Operatoir rekenen Hybride	realistisch	overig
1987	49%	28%	13%	10%

1992	29%	31%	37%	3%
1997	8%	17%	74%	1%
2004	0%	0%	100%	0%

Vanaf 2004 zijn er alleen nog realistische methoden op de markt. Dat houdt in dat nu – anno 2010 – alle leerlingen die het voortgezet onderwijs betreden, rekenen hebben geleerd met de realistische methode. Dat betekent voor de economieleraar dat hij moet aansluiten bij deze voor leerlingen bekende methode, ook als hij niet overtuigd zou zijn van de effecten van deze methode. Het is voor leerlingen zeer verwarrend als de leraar ineens met de traditionele methoden binnen economie gaat rekenen.

Wat is eigenlijk het verschil tussen de twee methoden?

1.1. Wat is traditioneel rekenen?

Traditioneel rekenen is niet gebaseerd op een onderliggende theorie. Het is een in de praktijk ontstane methode. Onder traditioneel rekenen verstaat men het rekenen waarbij de leraar één standaardmethode – het standaardalgoritme - uitlegt om een bepaald type opgave op te lossen. Daarna laat hij de leerlingen daar uitvoerig mee oefenen. De nadruk ligt dus op het stap-voor-stap aanleren en inoefenen van standaardrecepten. Dat zijn er twaalf: *optellen, aftrekken, vermenigvuldigen* en *delen* van achtereenvolgens natuurlijke getallen, kommagetallen en breuken. Men gaat er hierbij vanuit dat door het oefenen het inzicht vanzelf ontstaat. Contexten komen niet of nauwelijks aan de orde, omdat men ervan uitgaat dat die afleiden van de essentie. Pas als een vlotte beheersing van de standaardmethode bereikt is komt er – achteraf - ruimte voor toepassingen. (KNAW-Commissie, 2009).
In de traditionele methode zou men kenmerken van een leertheorie kunnen herkennen, waarbij uitgegaan wordt van dat kennis het bezit is van het individu (zie katern: Conceptgericht en contextgericht economieonderwijs).

1.2. Wat is realistisch rekenen?

Uitgangspunt bij de realistische methode was het idee van Freudenthal (1973) dat bij het leren van rekenen en wiskunde niet gaat om het verwerven van een verzameling weetjes, maar dat het een menselijke activiteit is. Het is erop gericht de alledaagse situaties beter hanteerbaar te maken en rekenproblemen, die zich in de dagelijkse praktijk voordoen, op te lossen. Economische vraagstukken waarbij rekenen wordt gebruikt om tot een oplossing van een vraagstuk te komen, kunnen hier ook toe gerekend worden. Hier kan de leertheorie worden herkend, waarbij ervan wordt uitgegaan dat kennis besloten ligt in de wereld en/of uitsluitend gevormd wordt door interactie (zie katern: Conceptgericht en contextgericht economieonderwijs).
Treffers (1978) onderscheidt bij het oplossen van alledaagse problemen, waarbij rekenen of wiskunde nodig is, twee componenten: een horizontale component en een verticale component. Met de horizontale component bedoelt hij de fase waarbij een context, een reëel probleem zodanig wordt omgezet dat het rekenkundig kan worden aangepakt (bijvoorbeeld het omzetten van een contextprobleem naar mogelijke algoritmen of heuristiek). Met de verticale component wordt het generaliseren van de oplossing de verkorting, het ontdekken van structuren en patronen of verdergaande formalisering bedoeld, waardoor transfer kan plaatsvinden naar een nieuw probleem.

Een voorbeeld
Koos en Alma willen in hun huis alle plafonds wit verven. In totaal is de oppervlakte 150m^2. Het eerste plafond heeft een oppervlak van 7,5m^2 en daarvoor hebben ze 0,9 liter verf nodig. Neem aan dat ze naar verhouding steeds evenveel verf gebruiken.
Bereken hoeveel verf nodig is om alle plafonds te verven.

De omzetting van deze tekst naar een rekenkundige bewerking – de horizontale component - kan als volgt verlopen:
Leerling: Ik maak een verhoudingstabel van oppervlakte en aantal liters.

oppervlakte in m^2	7,5	15	150
aantal liters	0,9	…	…

De verticale component is de generalisatie van de oplossing:

$$\frac{0,9}{7,5} \times 150 =$$

In het rapport van de KNAW (KNAW-Commissie, 2009) worden vijf karakteristieke grondprincipes van het realistisch rekenen omschreven, die door Treffers (1987) zijn geformuleerd:

1) Zelf kennis construeren: leerlingen worden gestimuleerd, geholpen door een deskundige leraar om uitgaande van een reëel probleem zelf kennis te construeren. Belangrijk is dat leerlingen het probleem herkennen, zich er iets bij kunnen voorstellen.
   a) Niveaus en modellen: modellen - bijvoorbeeld de verhoudingstabel - schema's, en andere structuren, diagrammen etc. vormen de brug om informele eigen aanpakken van leerlingen te ontwikkelen tot meer gestructureerde en abstracte (formele) manieren.
   b) Reflectie op eigen producties: door het stellen van vragen, door te confronteren met alternatieven, worden leerlingen uitgedaagd tot discussie.
   c) Interactie: leerlingen leren hun oplossingen aan elkaar te tonen, te vergelijken te bekritiseren, te verdedigen waardoor zij tot constructie van kennis kunnen komen.
   d) Verstrengeling van leerlijnen: leerlingen worden gestimuleerd dwarsverbanden en samenhang te ontdekken, zodat het een toepasbaar en geïntegreerd geheel van kennis, inzichten en vaardigheden wordt.

Discussie
Sinds 2007 worden de uitgangspunten en kwaliteit van het rekenen door leerlingen ter discussie gesteld. Er is nog niet veel onderzoek beschikbaar ten aanzien van de effectiviteit van zowel traditioneel als het realistisch rekenen. In het KNAW rapport (KNAW-Commissie, 2009 p.13) wordt aangegeven, dat er op een aantal punten wel duidelijkheid bestaat:

- *Binnen een bepaalde rekendidactiek bestaan vaak grotere verschillen in leerling-prestaties dan tussen rekendidactieken. De specifieke uitwerking van de didactiek en de interactie tussen leerling en leraar spelen kennelijk een grotere rol dan de algemene rekendidactische principes.*
- *Meer onderwijstijd en aandacht voor rekenen leidt tot betere resultaten.*
- *Rekenzwakke leerlingen lijken minder gebaat bij een vrije vorm van instructie en hebben meer behoefte aan een sturende rol van de leraar.*

In het economieonderwijs moet de ontwikkeling van het rekenonderwijs worden gevolgd om goed aan te kunnen sluiten bij wat en hoe leerlingen hebben geleerd te rekenen. Op het ogenblik – 2010 – komen er nieuwe uitgaven van de methoden, waarvan een aantal met aanpassingen in de richting van het traditionele rekenen. Maar voor leraren van nu is het belangrijk dat zij zich verdiepen in het realistisch rekenen omdat de huidige schoolbevolking van het voortgezet onderwijs ermee is opgevoed en omdat leraren deze methode uit eigen ervaring niet kennen.
De uiteindelijke bedoeling van het rekenonderwijs is dat leerlingen gestructureerde en abstracte rekenmanieren, algoritmen, ontwikkeld hebben bij basisberekeningen. In het basisonderwijs bereiken niet alle leerlingen echter dat niveau.

Tabel 2. Rekenonderwijs op de basisschool.

Onderwerpen in PPON-2004 einde basisonderwijs	Effectgrootte verschil in peil 2004-1987			Percentage leerlingen dat de standaard 'voldoende' haalt		
	< − 0,19		> + 0,19	< 40%	40-60%	> 60%
GETALLEN EN BEWERKINGEN						
1. getallen en getalrelaties			+ 0,94		42	
2. basisoperaties: + / −			+ 0,24			76
3. basisoperaties: x / :	− 0,20					66
4. hoofdrekenen: + / −			+ 0,53		50	
5. hoofdrekenen: x / :		− 0,11				66
6. schattend rekenen			+ 1,04		42	
7. bewerkingen: + / −	− 0,53			27		
8. bewerkingen: x / :	− 1,16			12		
9. samengestelde bewerkingen	− 0,78			16		
10. rekenen met een zakrekenmachine			+ 0,26	34		
VERHOUDINGEN, BREUKEN EN PROCENTEN						
11. verhoudingen		+ 0,14				66
12. breuken		+ 0,15				60
13. procenten			+ 0,51		58	
14. tabellen en grafieken		+ 0,10			50	
METEN EN MEETKUNDE						
15. meten: lengte		− 0,13		38		
16. meten: oppervlakte		+ 0,05		21		
17. meten: inhoud		− 0,03			42	
18. meten: gewicht			+ 0,33		58	
19. meten: toepassingen	− 0,25				50	
20. meetkunde		− 0,08				62
21. tijd		0,00			50	
22. geld	− 0,31				42	

De effectgroottes betreffen periode 2004-1987 met uitzondering van de effectgroottes voor onderwerpen 2+3 *basisoperaties* en *10 rekenen met een zakrekenmachine* (2004-1992); *14 tabellen en grafieken* (2004-1997); *22 geld* (1997-1987)

Ontwikkelingsfasen
Bij het realistisch rekenen kunnen de volgende ontwikkelingsfasen worden onderscheiden:

1. de contextfase
2. de modelfase
3. de formele fase, vaak gesplitst in semiformele fase en de toepassing.

Van niet alle leerlingen, die in de economieles komen, mag verwacht worden, dat ze in de formele fase zijn gekomen. Vaak moeten zij nog terugvallen op de modelfase. Daarvan moet de economieleraar dus op de hoogte zijn om de leerlingen te kunnen helpen.

2. Welke rekenvaardigheden in het economieonderwijs?

Welke rekenvaardigheden eist het (nieuwe) examenprogramma Economie en het examenprogramma Management en Organisatie?

Economie

1. het berekenen van percentages:
   a. procenten als verhoudingsgetallen;
   b. procenten, die een relatieve verandering laten zien;
   c. percentages boven de 100%;
   d. procenten en indexcijfers
2. het berekenen van lineaire functies
   a. het oplossen van vraagstukken met één onbekende
   b. het berekenen van een snijpunt

Deze rekenvaardigheden zijn aan de orde bij wiskunde tot en met de derde klas van het voortgezet onderwijs, een ander deel komt in hogere klassen aan de orde. .

2.1. Het berekenen van percentages

Percentages hebben hun basis in verhoudingen.
In het basisonderwijs wordt daarmee gestart. In de basisvorming wordt dat herhaald en verder geoefend. De verhoudingstabel wordt daarbij als model gebruikt.

Je kunt op twee manieren **rekenen in een verhoudingstabel**. In de linker tabel hieronder zijn horizontale pijlen handig en in de rechter tabel zijn verticale pijlen handig.

× 3 × 5 : 2

aantal kinderen	32	96	480	240
aantal brillen	6	18	90	45

× 3 × 5 : 2

aantal vliegen	2	5	9	7
aantal poten	12	30	54	42

× 6

Bron: Moderne wiskunde havo/vwo 2007

Een probleem als hieronder kan met behulp van een van de twee verhoudingsmodellen worden opgelost in het geval, dat de leerling nog niet in staat is om dit zonder hulpmiddel te doen. Leerlingen in de modelfase en het begin van de formele fase kunnen steun hebben aan het gebruik van het verhoudingsmodel en het kan inzicht verschaffen in de berekening. Dat moet dan leiden tot de formele fase, waarbij hij/zij het model niet meer nodig heeft.

Leerlingen in de onderbouw behoren tot de fase waarin het gebruik van het model vaak nog nodig is. De leerlingen kennen het model van de basisschool. De leraar economie moet daar dus rekening mee houden en ze eraan herinneren en stimuleren dat ze het gebruiken.

Bij het berekenen van procenten wordt dezelfde verhoudingstabel gebruikt. Er wordt nu steeds naar 100 gerekend: 160 leerlingen van de 200 betekent: 80 van de 100. 80 van (of op) de honderd noemen we 80%.

De tabel kan op de volgende manier gebruikt worden:

Op een spijkerbroek van € 80, wordt in de uitverkoop een korting van € 32 door een winkelier gegeven.
Hoe hoog is het kortingspercentage?

korting	32	4	40
prijs	80	10	100

: 8 x 10 Dus 40%

En ook andersom: de korting op een spijkerbroek van €80 is 40%. Hoeveel euro's is de korting?

korting	40	4	32
prijs	100	10	80

Dus € 32

: 8 x8

Het voordeel van deze verhoudingstabel is dat leerlingen zich altijd moeten afvragen wat 100% is. Hoeveel van wat, hoeveel op de wat? Het 'wat' is dan 100%.

Neem een reep chocola. Vraag aan een leerling hoeveel procent hij van die reep wil. Deze zegt bijvoorbeeld: 25 %. Je breekt een kwart af en vraagt dan aan een volgende leerling, hoeveel procent hij van de overgebleven reep wil. Ook 25% zegt die. Dan vraag je: waar moet ik het stuk afbreken? Tien tegen een dat hij net zo'n groot stuk aanwijst als dat wat zijn medeleerling kreeg!

Een ander voorbeeld, waarbij het duidelijk is dat fouten worden gemaakt in het bepalen van de 100% is:

1	De prijs van een liter benzine bedraagt in Nederland €1,60 en in Spanje € 1,28. Bereken hoeveel procent een liter benzine in Nederland duurder is dan in Spanje.
2	De prijs van een liter benzine bedraagt in Nederland €1,60 en in Spanje € 1,28. Bereken hoeveel procent een liter benzine in Spanje goedkoper is dan in Nederland.

Wanneer leerlingen vraag 1 en 2 met elkaar vergelijken is een veelgehoorde reactie dat de uitkomst van beide vragen hetzelfde moet zijn. Uiteraard is die opmerking niet correct, maar interessant is de vraag waarom leerlingen die reactie geven. Het antwoord is vermoedelijk dat in beide opgaven (1 en 2) de prijzen 32 eurocent verschillen. Leerlingen vergeten te bepalen wat in elke probleem 100% is. Bij gebruik van de verhoudingsbalk moeten ze daarover nadenken. In opgave 1 is de prijs van een liter benzine in Nederland 32 cent duurder dan in Spanje. De vraag is hoeveel % is die liter duurder **dan** in Spanje? **Dan** of **ten opzicht van**, **in vergelijking met**, 32 cent **op** of **van** de prijs in Spanje, zijn woorden die aangeven waar de 100% ligt.

In de eerste opgave:

verschil	32	1	25
prijs	128	4	100

= 25%

: 32 x 25

In de tweede opgave:

verschil	32	1	20
prijs	160	5	100

= 20%

: 32 x 20

Als een leerling wat verder is en de tabel niet meer nodig heeft, kan dat verkort worden – de verticale component – tot de generalisatie:

$\frac{32}{128}$ en $\frac{32}{160}$

De leerling zou ook een andere tabel kunnen gebruiken:

x 1,25

prijs	128	160
percentage	100	125

Stijging van →………..→ = 25%

x 0,8

prijs	160	128
percentage	100	80

Daling van →………..→ = 20%

De leerling heeft door de verhoudingstabel dan begrepen dat in het eerste geval 160 gedeeld moet worden door 128. In het tweede geval 128 door 160. Zonder dat begrip gaat het nogal eens fout.

2.2. Percentages boven het honderd

Veel leerlingen raken in de war bij percentages boven de honderd, vooral als het boven de 250% komt. Voor hen gaan percentages tot honderd. Ook hier kan de verhoudingstabel inzicht geven zoals in het voorbeeld hierboven, waarbij een percentage van 125% berekend is.

Percentage boven de honderd komt bij economie in ieder geval voor bij BTW berekeningen.

Voorbeeld

Een mp3-speler kost € 70 exclusief BTW. Bereken de prijs inclusief 19% BTW. Om de prijs exclusief BTW te berekenen, kan gewerkt worden met factoren Deze verhoudingstabel kan daarvoor gebruikt worden:

Prijs in euro's	70	83,30
percentage	100	119

x 1,19

De prijs inclusief BTW is € 83,30

De factor is een volgende stap (naar abstractie).

Voorbeelden

1. In de schoolkrant staat dat 80% van de leerlingen lid is van een sportvereniging. Rens en Blanche rekenen uit hoeveel van de 570 leerlingen dat is.

Rens: ik maak een verhoudingsmodel

Aantal leerlingen	570	…..	…..
percentage	100	1	80

Blanche

80% betekent $\frac{80}{100}$ = 0,8.

Dus 80% van 570 is dan 0,8 x 570 = ….

2. Hoe duur wordt een artikel van € 14,50 als de prijs 20% hoger wordt?

Een toename van 20% betekent een verandering van 100% naar 120%.
De factor daarbij is: $\frac{120}{100}$ = 1,20.
De nieuwe prijs van het artikel wordt 1,20 x € 14,50 = € 17,40

3. Hoe duur wordt een jas van € 65,- als de prijs 30% lager wordt?
Een korting van 30% betekent een verandering van 100% naar 70%.
De factor daarbij is $\frac{70}{100}$ = 0,7
De nieuwe prijs van de jas wordt 0,7 x € 65,- = € 45,50

Bron: Moderne wiskunde havo/vwo 2A 2007

2.3. Exponentiële groei

De factor wordt ook gebruikt bij exponentiële groei. Een groeiproces is exponentieel als de factor per tijdseenheid steeds hetzelfde is, zowel bij stijging als bij daling.

Voorbeeld

Een spaarder ontvangt vanaf 2003 tot 2007 4% rente per jaar op zijn spaarrekening. Hij zette op 1 januari 2003 500 euro op de rekening. Welk bedrag stond er op 1 januari 2007 op zijn rekening?

Het bedrag vermeerdert met vier procent per jaar. 2003 is 100%. In 2004 is dat plus 4% is 104%. De factor is 104/100 = 1,04.

Jaren per 1 januari	2003	2004	2005	2006	2007
Bedrag in euro's	500	520			

x 1,04 x 1,04 x1,04 x 1,04

Ook bij in tijd terug rekenen wordt de factor gebruikt.

Voorbeeld

Op 1 januari 2010 telt de school 8000 leerlingen. Dit is het gevolg van een stijging van 4% per jaar. Hoeveel leerlingen had de school op 1 januari 2005?

Jaren per 1 januari	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Aantal leerlingen						8000

: 1,04 : 1,04 : 1,04 : 1,04 : 1,04

2.4. Indexcijfers

De factor kan ook behulpzaam zijn bij het berekenen van indexcijfers.

Opgave

Om de ontwikkeling van de melkprijs te volgen, wordt de prijs van een liter melk vergeleken met de prijs in een bepaald jaar, het zgn. basisjaar. Stel dat in 2000 een liter melk € 0,50 kostte, in 2001 de prijs € 0,53 was en in 2002 € 0,52.

Met 2000 als basisjaar, kunnen de indexcijfers van de prijs in 2001 en 2002 als volgt met de factor berekend worden:

$\frac{53}{50}$

jaar	2000	2001	2002	2003
Prijs melk in centen	50	53	52	58
indexcijfer	100	106	104	116

x 1,06

Onbekende = factor x basis .

Dus*: Factor =* $\dfrac{\textit{onbekend}}{\textit{basis}}$ *= 53/50 = 1,06*

Indexcijfer = $\dfrac{\textit{1,06 x 100}}{\textit{basis}}$ *= 106*

En: *Factor =* $\dfrac{\textit{onbekend}}{\textit{basis}}$ *= 52/50 = 1,04 indexcijfer is 1,06 x 100 = 104*

Stel dat het basisjaar gewijzigd wordt. 2001 wordt nu het basisjaar. 106 moet dus 100 worden. 106 is dan de gewijzigde basis.

Index 2000 = $\dfrac{\textit{onbekend}}{\textit{gewijzigde basis}} = \dfrac{100}{106}$ *= 0.94*   *0,94 x 100 = 94*

Index 2001 *=* $\dfrac{\textit{onbekend}}{\textit{gewijzigde basis}} = \dfrac{106}{106}$ *= 1*   *1 x 100* ***= 100***

Index 2002 = $\dfrac{\textit{onbekend}}{\textit{gewijzigde basis}} = \dfrac{104}{106}$ *= 0,98*   *0,98 x 100 = 98*

Index 2003 = $\dfrac{\textit{onbekend}}{\textit{gewijzigde basis}} = \dfrac{116}{106}$ *= 1,09*   *1,09 x 100 = 109*

2.5. Nominale en reële stijging/daling inkomen.

Op dezelfde manier als hierboven – gewijzigde basis – kan een reële inkomensstijging of daling worden berekend:

Iemand verdient in 2000 € 25.000,- . In 2010 neemt dit inkomen toe met 6%. De prijzen – de kosten van levensonderhoud - in 2010 zijn ten opzichte van 2000 gestegen met 4%.
Wat is de reële inkomensstijging/daling in 2010?

inkomen	2000	2010
Indexcijfer inkomen	100	106
Indexcijfer levensonderhoud	100	104

Als we nu gaan berekenen hoeveel het reële inkomen is in 2010 kunnen we het indexcijfer levensonderhoud zien als een gewijzigde basis. We bekijken de verandering van het inkomen in 2010 immers t.o.v. de verandering van de prijzen in 2010. Dan geldt:

Reëel inkomen 2010 = $\dfrac{\text{onbekend} \cdot \text{inkomen}\cdot}{\text{gewijzigde basis (levensonderhoud)}}$ = 106/104= 1,019

Indexcijfer is 1,019 x 100 = 101,9

Het reële inkomen is in 2010 t.o.v. 2000 gestegen met 101,9% – 100% = 1,9%

Als de leerling deze berekeningswijze kan beredeneren, begrijpt hij wat hij doet. Hij kan dan ook uitleggen dat de koopkracht slechts weinig is gestegen - in dit geval - vergeleken met de inkomensstijging.

2.6. Elasticiteiten

Economen berekenen de elasticiteit van een goed. Dat geeft aan in welke mate de vraag van een goed mee rekt met een verandering van een prijs. Als je de elasticiteit van een goed weet, kun je bijvoorbeeld berekenen hoeveel de gevraagde hoeveelheid afneemt als de prijs verhoogd wordt (en andersom). Is in dit geval de elasticiteit van een goed -2 en de prijsverhoging 10% dan weet een handelaar dat de gevraagde hoeveelheid afneemt met 20%.
De elasticiteit wordt berekend door het percentage verandering van de hoeveelheid te berekenen **ten opzichte** van het percentage verandering van de prijs.

Stap 1: Berekenen van de procentuele verandering van prijs en hoeveelheid.
Stap 2: Percentage hoeveelheidverandering berekenen **ten opzichte van** percentage prijsverandering (relatieve verandering), in een verhoudingsgetal (dus noet in een nieuw percentage)

In formule:
Elasticiteit van een goed is $\dfrac{\text{percentage verandering hoeveelheid}}{\text{percentage verandering prijs}}$ (ten opzichte van =gedeeld door)

In het voorbeeld ziet de formule er dus zo uit:

De elasticiteit van een goed is $\dfrac{\text{percentage verandering hoeveelheid}}{\text{percentage verandering prijs}}$

Elasticiteit	-2	Percentage verandering hoeveelheid	- 20
		Percentage verandering prijs	+10

Dat leerlingen veel problemen hebben met elasticiteiten zou wel eens kunnen komen omdat zij de formule uit hun hoofd leren en deze zodoende niet doorzien.

2.7. Lineaire functies

In het examenprogramma is aangegeven, dat zowel havo – als vwo leerlingen aanbod – en vraagcurven moeten kunnen tekenen en marktevenwicht prijs, hoeveelheid en omzet berekenen. Hierbij hebben zij wiskundige kennis nodig betreffende lineaire functies.

De volgende opgave zou dus aan de orde kunnen komen:

Gegeven is een markt waarbij vraag en aanbod kunnen worden beschreven met het volgende model:

Q(a) = 5p - 20
Q(v) = -4p +80
Q(a) = Q(v)
Q in duizenden stuks
P in euro's

Vraag: bereken de omzet in de evenwichtssituatie.

Een leerling moet - zo blijkt uit bovenstaand vraagstuk - vele stappen zetten om uit te komen bij het goede antwoord i.c. de omzet in de evenwichtssituatie. Hiervoor is naast de economische kennis ook rekenvaardigheid nodig. Juist het omzetten van de (economische) context naar een rekenmethode is hier lastig voor leerlingen.

De volgende stappen kan de leerling maken:

Stap 1: Wat wordt gevraagd?
Gevraagd wordt de omzet in de evenwichtssituatie.

Stap 2: Wat weet ik daarvan?
Ik weet dat de omzet = afzet x prijs. De afzet is de hoeveelheid verkochte producten. Het gaat hier om een collectieve vraag, want daarbij kan een evenwichtssituatie tot stand komen; een situatie waarbij de gevraagde hoeveelheid gelijk is aan de aangeboden hoeveelheid. Eris dan een evenwichtsprijs en een evenwichtshoeveelheid

Stap 3: Welke gegevens heb ik?
De hoeveelheid en prijs zijn niet gegeven. Ik zie wel de aanbodformule en vraagformule. Er staat ook dat Qa = Qv.

Stap 4: Hoe kan ik de prijs en hoeveelheid vinden met de gegevens uit de opgave?
Ik kan de evenwichtsprijs en hoeveelheid vinden in het punt in de grafiek waar vraag – en aanbodlijn elkaar snijden. Ik kan het snijpunt berekenen door vraag- en aanbod formule aan elkaar gelijk te stellen.

Stap 4: Hoe ga ik dat berekenen?

5p -20 = -4p + 80

Leerlingen moeten weten wat het startgetal in deze formules is (-20 en +80) en wat het hellingsgetal (5 en -4). Ook al zou niet aangegeven zijn wat de vraag- en wat de aanbodlijn is, moet de leerling aan de -4 zien dat het hier om de vraaglijn (dalende lijn) gaat en aan de 5 (stijgende lijn) om de aanbodlijn.

Als leerlingen problemen hebben met deze berekening kunnen ze worden herinnerd aan de hulpmethoden: bordjesmethode en/of de balansmethode. Beide methoden komen uit de realistische wiskunde.

AANPAK

Hoe los je een vergelijking op waarin de variabele aan beide kanten van het gelijkteken staat?

1 Zorg ervoor dat de variabele nog maar aan één kant van het gelijkteken staat. Haal dus aan beide kanten van het gelijkteken hetzelfde eraf of tel hetzelfde erbij op.

2 Je houdt dan een vergelijking over met de variabele aan één kant van het gelijkteken. Deze vergelijking kun je op twee manieren oplossen.
 – Doe aan beide kanten van het gelijkteken hetzelfde.
 – Gebruik bordjes.

3 Controleer je oplossing.

Voorbeeld

❶ $6 + p = -2p + 8$
$+2p \quad +2p$

❷ $6 + 3p = 8$
$-6 \quad -6$
$3p = 2$
$p = \frac{2}{3}$

Of met een bordje:
$6 + 3p = 8$
2
$3p = 2$
$p = \frac{2}{3}$

❸ Invullen in $6 + p$ geeft $6 + \frac{2}{3} = 6\frac{2}{3}$ en invullen in $-2p + 8$ geeft $-2 \times \frac{2}{3} + 8 = 6\frac{2}{3}$.
Klopt.

A. 5p -20 = -4p + 80

+4p +4p

B. 9p -20 = 80

+20 +20

C. 9p = 100

p = 11,11

Met bordje
9p-20 = 80
100 bordje
9p = 100

D. Invullen in Qa = 5p-20 geeft 5.11,11 -20 = 35,55 (dus S(11,11;35,55)

E. Controleren in Qv = -4p + 80 geeft -4.11,11 + 80 = 35,55 klopt!

Voorbeeld

Los de vergelijking $5a + 9 = 3a + 17$ op.

Oplossing

Denk aan de balans. Aan de linkerkant liggen 5 zakjes met *a* knikkers en nog 9 losse knikkers.
Aan de rechterkant liggen 3 zakjes met *a* knikkers en nog 17 losse knikkers.

$5a + 9 = 3a + 17$
$-3a \quad -3a$ (Aan beide kanten 3 zakjes met knikkers weggehaald.)

$2a + 9 = 17$
$-9 \quad -9$ (Aan beide kanten 9 losse knikkers weggehaald.)
$2a = 8$
$a = 4$

Stap 5: Welke conclusie kan ik nu uit de berekening trekken?
De conclusie luidt: de evenwichtsprijs = € 11,11 en de evenwichtshoeveelheid = 35,55 x 1000 = 355.500 stuks.

Stap 6: Heb ik genoeg gegevens om de omzet te kunnen berekenen?
Ja, ik heb de prijs per product en de afzet: prijs x afzet is omzet.

Stap 7: Berekening: 355.500 x €11,11 = € 3.949.605, -.

3. Praktijkprobleem: de procentuele verandering

3.1. Inleiding

Een notoire, maar belangrijke rekenvaardigheid in het economieonderwijs betreft het berekenen van een procentuele verandering. Meer een algemene dan een economische rekenvaardigheid, maar niettemin een vaardigheid waarmee op menig eindexamen economie punten verdiend kunnen worden. De moeilijkheidsgraad van de opgaven waarbij een procentuele verandering berekend moet worden, verschilt echter nogal. Bij wijze van test heeft de auteur daarom 8 opgaven voorgelegd aan twee derde klassen: een 3 havoklas bestaande uit 22 leerlingen en een 3 vwo-klas bestaande uit 27 leerlingen. In schema 9a zijn de toetsvragen opgenomen. Het doel van die test was na te gaan welke fouten leerlingen maken bij het berekenen van procentuele veranderingen

Schema 8.1	
nr	**Opgave**
1	De prijs van een spijkerbroek bedroeg vorig jaar 80 euro. Dit jaar bleek diezelfde broek 99 euro te kosten. Bereken de procentuele verandering van de prijs.
2	Een heel volkoren kost in de supermarkt normaal gesproken € 1,90. Deze week is een volkorenbrood in de aanbieding en kost € 1,49. Bereken de prijsverlaging in procenten
3	De prijs van een liter benzine bedraagt in Nederland €1,60 en in Spanje € 1,28. Bereken hoeveel procent een liter benzine in Nederland duurder is dan in Spanje.
4	De prijs van een liter benzine bedraagt in Nederland €1,60 en in Spanje € 1,28. Bereken hoeveel procent een liter benzine in Spanje goedkoper is dan in Nederland.
5	De fietsenfabrikant exporteerde in 2007 12.000 fietsen naar Duitsland. Dat was 25% meer dan in 2006. Hoeveel fietsen exporteerde de fabrikant in 2006.
6	Een fiets van deze fietsenfabrikant kost in de winkel € 654,50. De BTW van de fiets zit in de prijs inbegrepen. Exclusief BTW zou deze fiets € 550 kosten. Bereken het BTW-tarief.
7	Een fiets van deze fietsenfabrikant kost in de winkel € 654,50. De BTW van de fiets zit in de prijs inbegrepen en bedraagt 19%. Berekenen de prijs van de fiets exclusief BTW.
8	Toen Hans de Groot 20 was, verdiende hij € 800 netto per maand. Inmiddels is hij 40 en verdient een goed betaalde boterham bij een bedrijf. Zijn huidige netto maandinkomen bedraagt € 1900. Met hoeveel procent is zijn inkomen gestegen ?

In schema 9b zijn de resultaten van de toets opgenomen. Bij een correcte berekening – het antwoord hoefde niet per se goed te zijn - scoorde de leerling 1 punt. Stel dat in de havo 3 klas 11 leerlingen een punt scoorden en elf leerlingen derhalve geen punt scoorden, dan levert dat een score op van 50%: 11/22 x 100% = 50%. De percentages in schema 9b zijn via deze berekeningswijze tot stand gekomen.

Schema 8.2								
	Opgave 1	**Opgave 2**	**Opgave 3**	**Opgave 4**	**Opgave 5**	**Opgave 6**	**Opgave 7**	**Opgave 8**
Havo	67%	52%	57%	29%	5%	38%	14%	24%
Vwo	81%	96%	58%	46%	54%	73%	81%	54%
Gemiddelde van Havo en Vwo *	74%	74%	57%	37%	29%	56%	48%	39%

HV-ratio **	0,83	0,54	0,98	0,69	0.09	0,52	0,17	0,44

* Het gaat om een ongewogen gemiddelde.
** De havo-score is gedeeld door de VWO-score.

Uit de tabel vallen enkele conclusies te trekken:

- Havo-leerlingen scoren op alle vragen slechter..
- De opgaven 4 t/m 8 wordt door de havo-leerlingen lastig gevonden. Datzelfde geldt in minder mate voor de opgaven 2 en 3. Alleen opgave 1 is voldoende gemaakt
- Opgave 4 wordt door de vwo-leerlingen lastig gevonden. Datzelfde geldt in mindere mate voor de opgaven 3, 5 en 8. De opgaven 1, 2, 6 en 7 werden voldoende gemaakt.

Het berekenen van procentuele veranderingen vergt naast begrip ook rekenvaardigheid, die zeker bij de havoleerlingen en - zo moeten we aannemen – eveneens bij mbo-leerlingen (Bergkamp, 2007) aandacht verdient. Vwo-leerlingen hebben er afgaande op dit beperkte empirische onderzoek minder moeite mee, maar het woord foutloos kan ook bij hun bepaald niet gebruikt worden. In het vervolg van deze paragraaf wordt nagegaan welke fouten veel gemaakt worden en waarop docenten bij het voorbereiden en geven van hun lessen vooral moeten letten.

3.2. De berekeningen

De berekeningen die gemaakt moeten worden om procentuele veranderingen vast te stellen, zijn dikwijls bij het schoolvak wiskunde al aan de orde geweest. De leerlingen krijgen in de wiskundeles berekeningen aangereikt die ze meenemen naar het economielokaal. Dikwijls herkennen deze leerlingen de rekenproblemen niet in de economieopgaven en zijn zij niet in staat de rekenvaardigheid - bij wiskunde geleerd - toe te passen op economische rekenopdrachten. Er treedt geen transfer van kennis op: kennis verworven bij het ene schoolvak (wiskunde) kan worden toegepast (op rekenproblemen) bij een ander schoolvak (economie).
Bij de opgaven wordt eerst beschreven welke fouten leerlingen maken. Vervolgens wordt de aan te bieden hulp beschreven.

Opgave 1

De prijs van een spijkerbroek bedroeg vorig jaar 80 euro. Dit jaar bleek diezelfde broek 99 euro te kosten. Bereken de procentuele verandering van de prijs.

De berekening door de leerlingen is meestal als volgt: 99/80 = 1,2375
De meeste leerlingen kijken naar de decimalen en concluderen dat de toename 23,75% moet zijn. Zij rekenen met behulp van een zogenaamde groeifactor en komen aldus op het goede antwoord uit.
Het *eerste mogelijkheid* – en dat kwam wel enkele malen voor – is dat een leerling denkt dat hij klaar is wanneer hij op 1,2375 is uitgekomen. Hij verzuimt de slotstap te zetten, namelijk dat de uitkomst 23,75% is. Kortom: het rekenen met de groeifactor is niet geheel vrij van risico's, maar gaat overigens meestal goed.
Het *tweede mogelijkheid* is dat de leerling eerst 1% (€ 0,80) berekent en zich vervolgens afvraagt hoeveel keer die 80 cent in de prijsverhoging van 19 euro past (19/0,80 = 23,75%). De fout die bij deze aanpak verschillende malen voorkwam was, dat leerlingen niet 19 deelden door 0,8 (19/0,8), maar vermenigvuldigden met 0,8. Deze aanpak leverde veel foute antwoorden op.
Een *derde mogelijkheid* is dat de leerling schat hoeveel procent het ongeveer is: 19 van 80 is iets minder dan 1/4 en de leerling schat de verandering op 23%. Dat blijkt te weinig te zijn, want 1,23 x 80 = € 98,40 en geen 99. De leerling neemt nu 24% en dat blijkt te veel te zijn. De leerling concludeert echter wel dat de uitkomst dichter bij 1,24 dan bij 1,23 moet liggen en zo komt hij uiteindelijk uit bij 23,75%. Wat hier gebeurt, is *schattend rekenen*. Er waren maar twee leerlingen die een dergelijke strategie toepasten in hun berekening. Deze leerlingen begrijpen wel wat ze aan het doen zijn. Dit vraagstuk is, omdat de getallen rond zijn, met schattend rekenen goed op te lossen. Zinvol is het echter altijd als leerlingen tevoren schatten waar het percentage ergens

moet liggen. Zij ontdekken dan dat zij een fout bij de berekening maken, zoals in de twee bovenstaande mogelijkheden.
Tenslotte – de vierde mogelijkheid is dat sommige leerlingen werken met kruistabellen. Om aan een correcte uitkomst te komen, dienen leerlingen allereerst de beschikbare informatie te ordenen in tabelvorm. Het aanmaken van een tabel is een model uit de realistische rekendidactiek. Ze krijgen ook hierbij beter zicht op het rekenprobleem dat opgelost moet worden.

	Oorspronkelijke situatie	Nieuwe situatie
Prijs	€ 80	€ 99
Procenten	100%	?

De waarde achter het vraagteken wordt dan gevonden door kruislings te vermenigvuldigen:
€ 80 x ? = € 90 x 100
80 x ? = 9900
9900 / 80 = 123,75

Een veel gemaakte fout is hierbij dat vergeten wordt de volgende stap nog te nemen: stijging is 123,75%– 100% = 23,75%

Hulp, die verleend kan worden aan leerlingen die fouten maken.
De leerlingen die bovenstaande fouten maken weten eigenlijk niet wat ze aan het doen zijn. Mogelijk kan het maken van een verhoudingstabel hen helpen. Het kan de leerlingen meer inzicht geven.
De tabel ziet er dan als volgt uit:

$\frac{99}{80}$

prijs	80	99
percentage	100	123,75

Stijging van →………..→ = 23,75%

Opgave 2

Een heel volkoren kost in de supermarkt normaal gesproken € 1,90. Deze week is een volkorenbrood in de aanbieding en kost € 1,49. Bereken de prijsverlaging in procenten

De leerlingen moeten nu een procentuele *daling* uitrekenen. De berekening kan volgens deze in de vorige opgave gebruikte systematiek dan luiden: 149/190 = 0,7842. Wanneer de leerling alleen zou kijken naar de decimalen, komt hij tot de conclusie dat de procentuele verandering 78,42% is. In het onderzoek kwamen enkele havoleerlingen tot deze conclusie.

Hulp
Met hulp van dezelfde tabel als in opgave 1 kan de leerling deze fout vermijden.

$\frac{149}{190}$

prijs	190	149
percentage	100	78,42

Daling van →………..→ = 21,58%

De kruistabel is in feite een verkorting van deze tabel. Hij is minder inzichtelijk, komt ook niet voor in alle wiskunde methoden, maar het kan zijn dat leerlingen gewend zijn ermee te werken en ermee uit de voeten blijken te kunnen.

Opgave 3

De prijs van een liter benzine bedraagt in Nederland €1,60 en in Spanje € 1,28. Bereken hoeveel procent een liter benzine in Nederland duurder is dan in Spanje.

Opgave 4

De prijs van een liter benzine bedraagt in Nederland €1,60 en in Spanje € 1,28. Bereken hoeveel procent een liter benzine in Spanje goedkoper is dan in Nederland.

In opgave 3 wordt de Nederlandse prijs gerelateerd aan de Spaanse prijs. De Spaanse prijs is nu de basiswaarde en dus 100%. De Nederlandse prijs moet immers worden vergeleken met de Spaanse prijs.
Wanneer leerlingen vraag 3 en 4 met elkaar vergelijken is een veelgehoorde reactie dat de uitkomst van beide vragen hetzelfde moet zijn. Uiteraard is die opmerking niet correct, maar interessant is de vraag waarom leerlingen die reactie geven. Het antwoord is vermoedelijk dat in beide opgaven (3 en 4) de prijzen 32 eurocent verschillen. Vergeten of niet begrepen wordt dat in het ene geval het gaat om 32 eurocent van 128 eurocent en in het andere geval om 32 eurocent van 160 eurocent. Dat het verschil tussen de twee prijzen in opgave 3 en 4 gelijk is, wordt gesignaleerd, maar niet dat het verschil in opgave 3 aan een andere basiswaarde (oude waarde) moet worden gerelateerd dan in opgave 4. Docenten moeten daarom alert zijn op dit type fout.

Hulp

De verhoudingstabel kan ook hier behulpzaam zijn. Hierbij een herhaling van de tabellen op pagina 7.

$\frac{160}{128} = 1,25$

prijs	128	160
percentage	100	125

x 1,25

Stijging van →………..→ = 25%

$\frac{128}{160} = 0,8$

prijs	160	128
percentage	100	80

x 0,8

Daling van →………..→ = 20%

Opgave 5

De fietsenfabrikant exporteerde in 2007 12.000 fietsen naar Duitsland. Dat was 25% meer dan in 2006. Hoeveel fietsen exporteerde de fabrikant in 2006.

Op dit soort opgaven scoren de havoleerlingen opvallend slecht. De fout die hier dikwijls wordt aangetroffen is, dat de leerlingen de waarde die ze aantreffen – 12000 fietsen in 2007 – op 100% stellen. Ook hier kunnen de woordjes **meer dan** helpen. Meer dan duidt op de situatie in 2006. Die is 100%, maar dat aantal kennen we niet.

Hulp
Een verhoudingstabel kan ook weer helpen leerlingen bewust te laten bepalen waar de 100% ligt.

	2007		2006
aantallen	12000		
percentage			100

Gegeven is dat in 2007 25% **meer** geëxporteerd is, dus 125%. De tabel kan verder ingevuld:

	2007	2006
aantallen	12000	9600
percentage	125	100

Bij het oplossen van dit vraagstuk zien we dat de leerling een bepaald oplospad (een heuristiek) moet vinden.
Dat zou voor deze vraag er als volgt uit kunnen zien:

1. Wat wordt er precies gevraagd? (aantal geëxporteerde fietsen in **2006**).
2. welke gegevens kan ik in de vraag vinden? (In 2007 25% **meer dan** in 2006)
3. wat weet ik ervan? (2006 is 100%; 2007 is 125%)
4. is het handig als ik een tabel teken om de berekening te maken?
5. hoe kan ik het antwoord controleren? (125 % van 9600 = 12000).

Leerlingen worden dus geholpen als ze getraind worden een oplospad te bedenken.

Opgave 6

Een fiets van deze fietsenfabrikant kost in de winkel € 654,50. De BTW van de fiets zit in de prijs inbegrepen. Exclusief BTW zou deze fiets € 550 kosten. Bereken het BTW-tarief.

Ook dit is een opgave waarbij het gaat om een percentage boven het 100. We pakken het probleem aan met hetzelfde oplospad als bij opgave 5.

1. Wat wordt precies gevraagd?
   Het BTW tarief moet berekend worden.
2. Welke gegevens kan ik in de vraag vinden?
   Fiets kost zonder BTW €550 en met BTW 654,50.
3. Wat weet ik ervan?
   Ik weet dat de BTW bovenop de prijs van de groothandel komt.De Fiets zonder BTW is dus 100%.
4. Is het handig om een tabel te tekenen om de berekening te maken?

prijs	550	654,50
percentage	100	119

Verschil →………→ 19%

5. Hoe kan ik dit controleren?
   119% van 550 = 654,50

Opgave 7

Een fiets van deze fietsenfabrikant kost in de winkel € 654,50. De BTW van de fiets zit in de prijs inbegrepen en bedraagt 19%. Bereken de prijs van de fiets exclusief BTW.

Deze vraag kunnen leerlingen niet beantwoorden als zij niet weten dat de BTW op de kostprijs van 100% komt. Weten zij dat wel, dan kan dit vraagstuk op dezelfde manier opgelost als vraag 5 en 6. € 654,50 is 119%.

Opgave 8

Toen Hans de Groot 20 was, verdiende hij € 800 netto per maand. Inmiddels is hij 40 en verdient een goed betaalde boterham bij een bedrijf. Zijn huidige netto maandinkomen bedraagt € 1900. Met hoeveel procent is zijn inkomen gestegen ?

Tientallen leerlingen volgden bij de proef de volgende strategie: (1900/800) x 100% = 237,5%.

Hulp
Als leerlingen gewend zijn een stijging of daling met de tabel te berekenen, maken ze de fout niet en krijgen ze op den duur waarschijnlijk voldoende inzicht dat ze deze fout ook bij de verticale component, de generalisatie (1900/800) x 100%. Om te bepalen wat 100% is moet de leerling de vraag: met hoeveel is zijn inkomen gestegen **ten opzichte van** zijn inkomen op de leeftijd van 20 jaar.

	Inkomen 20 jaar	Inkomen 40 jaar
prijs	800	1900
percentage	100	237,5

Stijging →………..→ 137,5%

4. Gehanteerde rekenmethoden in de economieles

Met de realistische rekenmethoden stappen de leerlingen het economielokaal binnen en daar wordt hen aangeleerd dat een procentuele verandering bepaald kan worden met behulp van het volgende algoritme:

$$\frac{\text{Nieuw} - \text{Oud}}{\text{Oud}} \times 100\% = \text{procentuele verandering}$$

Leerlingen raken daardoor vaak geheel in de war. Ze volgen het gevraagde zonder inzicht op en maken daardoor vaak veel fouten. Ze delen bijvoorbeeld als regel het grootste getal door het kleinste.

Aan de strategieën, geleerd bij wiskunde, wordt dikwijls niet of nauwelijks gerefereerd. Het is dus beslist noodzakelijk dat de leraar economie kennis neemt van deze rekendidactiek om de leerlingen de mogelijkheid te geven deze in te zetten ten behoeve van economiesommen en om ze daarbij te kunnen helpen. Mogelijk is ook dat ze daarbij samenwerken met de docent wiskunde.

Het feit dat leerlingen met verschillende oplossingsstrategieën werken, heeft consequenties voor de didactiek van de docent. Leerlingen moeten worden gestimuleerd om strategieën te ontwikkelen op basis van de strategieën die hem in de reken- en wiskunde lessen zijn aangereikt.. Docenten dienen zich hiervan rekenschap te geven, bijvoorbeeld uit te dragen dat er meerdere strategieën denkbaar zijn om een vraagstuk op te lossen en soms deze strategieën te demonstreren.

5. Het signaleren van rekenfouten

Bij het schoolvak economie gaat het er niet alleen om een antwoord te kunnen genereren, maar ook om een gevonden uitkomst te kunnen duiden. Wanneer een leerling tot beide zaken in staat is, heeft een leerling kennis en inzicht verworven en is een leerdoel bereikt. De docent heeft geen reden te interveniëren in het leerproces. De ervaring leert echter dat leerlingen lang niet altijd in staat zijn een bepaalde berekening te maken en/of de gevonden uitkomst te kunnen duiden. Belangrijke vraag is dan: hoe kan een docent problemen met betrekking tot economisch rekenen signaleren? De algemeen didactische literatuur geeft hierop enkele antwoorden.

Om te beginnen is het belangrijk dat een docent het leren van leerlingen zichtbaar moet maken (Ebbens, 2005; p.47 en 48). Dat kan hij doen door leerlingen berekeningen (met woorden en cijfers) op papier te laten zetten, zodat hij kan zien of de rekenopgaven worden gemaakt en worden begrepen en de leerling ook kan terugkijken hoe het gedaan is. Dat lijkt evident, maar in een het hedendaagse onderwijs hebben veel leerlingen de neiging te rekenen met hun rekenmachine en alleen uitkomsten in hun schrift te noteren. Er zijn zelfs werkboeken waar alleen het antwoord ingevuld moet worden. Ook bij toetsen zou deze eis aan leerlingen moeten worden gesteld.

Een voorbeeld.

Edwin heeft niet veel zin om vijf jaar te sparen voor een auto Hij overweegt een lening af te sluiten van € 23.500. De bank vraagt jaarlijks 8% rente over het leenbedrag en €470 aflossing aan het einde van elke maand. De rente die Edwin moet betalen is gebaseerd op het gemiddelde leenbedrag dat gedurende een jaar openstaat. Hoeveel rente moet Edwin aan het eind van het eerste jaar betalen?

Bron: Praktische economie

Het antwoord zou er zo uit kunnen zien. De leraar is daardoor in staat de denkweg van de leerling te volgen en te zien waar denkfouten worden gemaakt.

Maand	Geleend bedrag	Aflossing eind maand
januari	23500	470
februari	23030	470
maart	22560	470
april	22090	470
mei	21620	470
juni	21150	470
juli	20680	470
augustus	20210	470
september	19740	470
oktober	19270	470
november	18800	470
december	18330	
Totaal	€ 250980	

Gemiddeld leenbedrag is € 250.980 / 12 maanden = € 20.915

Rente 8 % per jaar = 0,08 x 20915 = €1673,20

Stel dat deze vraag op de toets gemaakt moet worden. De leraar kan de tabel dan al aangeven op de volgende manier:

tekst	berekening	uitkomst

De leerling moet dan zelf de teksten per kolom uitschrijven, teksten die hij nodig heeft om het probleem op te lossen en daarmee de tabel invullen.

Veel leerlingen hebben de neiging met de som ‘in hun hoofd’ bezig te zijn en de berekening niet aan het papier toe te vertrouwen. Door de genoemde handelwijze van vele leerlingen zijn de denkstappen voor de docent niet meer zichtbaar. En als er een fout wordt gemaakt, kan hij niet zien in welk deel van de berekening een fout wordt gemaakt. Voorts kan hij niet weten wat de aard van die fout is. Een diagnose van gemaakte fouten kan aldus niet worden gemaakt met als gevolg dat een docent zijn lesvoorbereiding en zijn les niet (goed) kan toespitsen op de werkelijke rekenproblemen.
Een bijkomend voordeel van het zichtbaar maken van het leren is dat het gemaakte werk desgewenst kan worden ingenomen, zodat er buiten de les om een inhoudsanalyse gemaakt kan worden van het werk van de leerlingen. Dan blijkt doorgaans snel genoeg welke rekenonderdelen wel en niet worden beheerst. Veel docenten komen er pas tijdens het nakijken van een toets achter dat de rekenstof onvoldoende wordt beheerst en dat is te laat.
Tijdens zelfwerkzaamheid in de klas is het voor de docent zaak oren en ogen de kost te geven. Via onderonsjes tussen leerlingen, vragen van leerlingen, observaties van wat leerlingen opschrijven, kunnen docenten belangrijke informatie verschaffen over gemaakte fouten. De docent die achter zijn lessenaar blijft zitten gedurende lessen waarin zelfwerkzaamheid verwacht wordt, is niet in staat rekenproblemen te signaleren.
Een andere belangrijke manier om te evalueren of er rekenproblemen zijn en wat de aard van die problemen is, is leerlingen - bijvoorbeeld via hard-op-denken-protocollen – laten vertellen hoe de opgave gemaakt moet worden. Leerlingen moeten dan toelichten hoe zij aan een uitkomst komen of zijn gekomen. De leerlingen moeten dan hun heuristiek en/of algoritme onder woorden brengen. Rekenproblemen worden dan zowel voor docent als de klas hoorbaar. Ook dit is een methode om te diagnosticeren waar rekenproblemen liggen.

Signaleren waar het met het rekenen fout gaat kan ook geschieden door steunlessen te geven aan individuele leerlingen. De leerlingen dan verwoorden individueel wat er gevraagd wordt en hoe ze het vraagstuk of probleem gaan aanpakken. Het leerklimaat is in een dergelijke setting veilig, waardoor leerlingen vrijer gaan spreken, met als gevolg dat rekenfouten, denkfouten, misconcepties en dergelijke gemakkelijk gesignaleerd kunnen worden. Bij zijn lesvoorbereiding kan de docent vervolgens inspelen op (reken-)problemen die hij gedurende die steunlessen heeft gesignaleerd. Steunlessen worden meestal gegeven aan de relatief zwakke leerlingen. Als er al fouten gemaakt worden bij het maken van berekeningen, is het vooral bij hen.
Tenslotte mag de diagnostische toets niet onvermeld blijven. Via diagnostische toetsen kunnen zowel docenten als leerlingen onderzoeken of rekenvaardigheden in voldoende mate aanwezig

zijn. Docenten kunnen met behulp van diagnostische toetsen vaststellen in welke mate de diverse rekenvaardigheden worden beheerst en welke fouten worden gemaakt. Bij hun lesvoorbereiding kunnen zij hier hun voordeel mee doen. Leerlingen kunnen eveneens vaststellen of ze de rekenvaardigheden al in voldoende mate beheersen. Is dat niet het geval, dan kunnen ze extra oefeningen maken en/of hulp inroepen bij rekenvaardigheden waarmee ze kennelijk moeite hebben.

Natuurlijk zal het af en toe voorkomen, dat een docent er pas bij het afnemen van een toets achter komt, waar de rekenproblemen liggen. Dat dit rijkelijk laat is, zal duidelijk zijn. Indien de docent het toch zo ver heeft laten komen, kan hij wederom aan de hand van een inhoudsanalyse (van de gemaakte berekeningen) zien, welke fouten veel voorkomend zijn. Van die analyse kan hij gebruik maken wanneer hij in de toekomst onderwijs moet geven over de getoetste materie. Zoals gezegd is het beter om op andere manieren te achterhalen wat de aard en omvang van rekenproblemen zijn.

Literatuur

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.
Janssen, J., van der Schoot, F., & Hemker, B. (2005). *Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 4* (Vol. PPon-reeks nummer 32). Arnhem: Cito.
Janssen, J., van der Schoot, F., Hemker, B., & Verhelst, N. (1999). *Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 3*. Arnhem: Cito.
KNAW-Commissie. (2009). *Rekenonderwijs op de basisschool. Analyses en sleutels tot verbetering*. Amsterdam: Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen.
Treffers, A. (1978). *Wiskobas doelgericht (diss.).* IOWO, Utrecht.
Treffers, A. (1987). *Three dimensions: a Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction. The Wiscobas Project*. Dordrecht: Kluwer.