

# Ejercicios Resueltos de Sistemas de Transporte Continuo

(Bombas y Cintas Transportadoras)



**Pedro Martínez Pagán**  
**Víctor Yepes Piqueras**  
**Marcos A. Martínez Segura**

# EJERCICIOS RESUELTOS DE SISTEMAS DE TRANSPORTE CONTINUO

BOMBAS Y CINTAS TRANSPORTADORAS

**Pedro Martínez Pagán**

Dr. Ingeniero de Minas  
Universidad Politécnica de Cartagena (UPCT)

**Víctor Yepes Piqueras**

Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos  
Universidad Politécnica de Valencia (UPV)

**Marcos Antonio Martínez Segura**

Dr. Ingeniero de Minas  
Universidad Politécnica de Cartagena (UPCT)

© 2023, Pedro Martínez Pagán, Víctor Yepes Piqueras, Marcos

Antonio Martínez Segura

© 2023, imágenes: Pedro Martyínez Pagán

© 2023, Universidad Politécnica de Cartagena Ediciones UPCT

Plaza del Hospital, 1

30202 Cartagena

986325908

ediciones@upct.es

Primera edición, 2023

I.S.B.N.: 978-84-17853-62-4

Imagen de la cubierta: Dúmpster minero descargando directamente sobre una giratoria primaria (con licencia de shutterstock).



Esta obra está bajo una licencia de Reconocimiento-No comercial-SinObra-Dervada (by-nc-nd): no se permite el uso comercial de la obra original ni la generación de obras derivadas.

[http://es.creativecommons.org/blog/wp-content/uploads/2013/04/by-nc-nd.eu\\_petit.png](http://es.creativecommons.org/blog/wp-content/uploads/2013/04/by-nc-nd.eu_petit.png)

## PRÓLOGO

Este libro lo componen unos 40 problemas tipo totalmente resueltos abordando la resolución de sistemas hidráulicos de bombeo para el transporte de aguas y pulpas, y transporte de material sólido a granel por medio de cintas transportadoras; unidades imprescindibles encargadas de favorecer y mantener el flujo continuo entre unidades de procesos en la industria minera y civil. Por ello, estos equipos se encuentran instalados de una manera muy extendida en la industria: plantas de tratamiento de recursos minerales, petroquímicas, canteras para la fabricación de áridos, cementeras, obras civiles, etc. En definitiva, estos ejercicios resueltos pretenden ayudar a dimensionar y seleccionar adecuadamente estas unidades siguiendo criterios internacionalmente establecidos. Por lo que lo convierten en un libro de consulta idóneo para aquellos profesionales o especialistas relacionados con los procesos de minerales, las plantas de áridos, la construcción, la obra civil, etc.

Además, los problemas tipo que aquí se abordan son similares a los tratados durante las clases de resolución de problemas y casos prácticos que se imparten en la asignatura de Ingeniería Minera del Grado en Recursos Minerales y Energía (GIRME) de la Universidad Politécnica de Cartagena (España). De esta forma, el libro es apropiado para todos aquellos estudiantes de grado o cursos de máster relacionados con la industria mineral, de los áridos o de la obra civil; donde se presenta la necesidad de resolver problemas sobre bombeo de pulpas, elevación de agua, transporte de materias primas, etc.

Al final del texto se facilitan algunos libros y enlaces que los autores sugieren para completar o adquirir conocimientos que serían recomendables para la resolución de algunos de los problemas que aquí se presentan, así como las plantillas y ábacos utilizados en la resolución de los problemas. Los autores quieren agradecer las útiles sugerencias y aportaciones recibidas durante la elaboración de este trabajo por todos aquellos especialistas en esta materia, especialmente a D. Juan Luis Bouso Aragonés, presidente de Eral Chile, S.A.

También aquí, como en otros libros anteriores, esperamos y deseamos que su consulta sea útil y que el lector sepa disculpar posibles erratas que hayan podido producirse.

Cartagena, 11 de enero de 2023

Los Autores

# ÍNDICE

## EJERCICIOS SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO

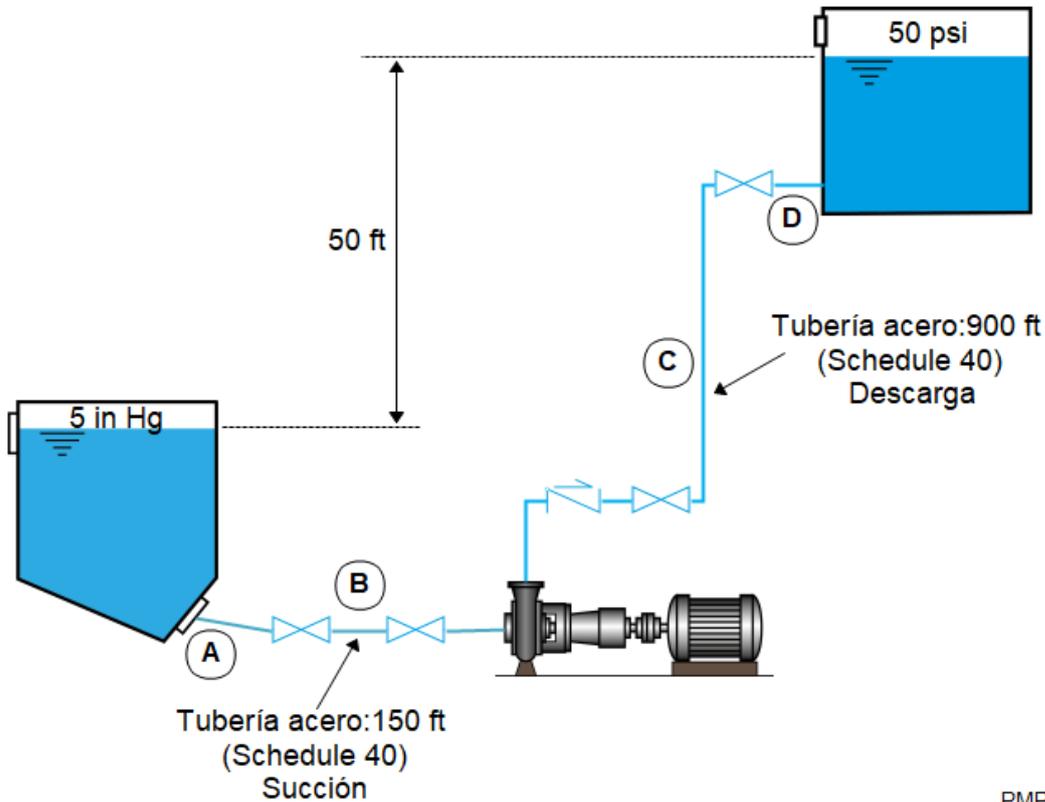
EJERCICIO 1 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO .....	1
EJERCICIO 2 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO .....	8
EJERCICIO 3 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO .....	19
EJERCICIO 4 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO .....	29
EJERCICIO 5 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO .....	38
EJERCICIO 6 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO .....	49
EJERCICIO 7 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO .....	59
EJERCICIO 8 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO .....	68
EJERCICIO 9 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO .....	77
EJERCICIO 10 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO .....	84
EJERCICIO 11 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO .....	95
EJERCICIO 12 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO .....	102
EJERCICIO 13 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO .....	108
EJERCICIO 14 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO .....	115
EJERCICIO 15 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO .....	122
EJERCICIO 16 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO .....	128
EJERCICIO 17 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO .....	134
EJERCICIO 18 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO .....	144
EJERCICIO 19 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO .....	153
EJERCICIO 20 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO .....	165
EJERCICIO 21 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO .....	176
EJERCICIO 22 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO .....	177
EJERCICIO 23 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO .....	178
EJERCICIO 24 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO .....	181
EJERCICIO 25 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO .....	184
EJERCICIO 26 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO .....	190
EJERCICIO 27 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO .....	197

## EJERCICIOS SOBRE CINTAS TRANSPORTADORAS

EJERCICIO 28 SOBRE CINTAS TRANSPORTADORAS .....	204
EJERCICIO 29 SOBRE CINTAS TRANSPORTADORAS .....	210
EJERCICIO 30 SOBRE CINTAS TRANSPORTADORAS .....	217
EJERCICIO 31 SOBRE CINTAS TRANSPORTADORAS .....	224
EJERCICIO 32 SOBRE CINTAS TRANSPORTADORAS .....	232
EJERCICIO 33 SOBRE CINTAS TRANSPORTADORAS .....	236
EJERCICIO 34 SOBRE CINTAS TRANSPORTADORAS .....	241
EJERCICIO 35 SOBRE CINTAS TRANSPORTADORAS .....	247
EJERCICIO 36 SOBRE CINTAS TRANSPORTADORAS .....	251
EJERCICIO 37 SOBRE CINTAS TRANSPORTADORAS .....	256
EJERCICIO 38 SOBRE CINTAS TRANSPORTADORAS .....	262
EJERCICIO 39 SOBRE CINTAS TRANSPORTADORAS .....	266
EJERCICIO 40 SOBRE CINTAS TRANSPORTADORAS .....	270
LIBROS Y ENLACES SUGERIDOS:.....	272
ANEXO. ABACOS, GRÁFICAS Y PLANTILLAS: .....	275

### EJERCICIO 1 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO

1. Para el sistema hidráulico de bombeo que se facilita se pide: su dimensionado, cálculo de la carga total dinámica (DTH) y selección de la bomba centrífuga más adecuada.



#### Datos:

- Capacidad = 700 gpm
- Fluido = Agua a 60°F (SG = 1.0)
- Tipo de tuberías = Schedule 40 de acero (todos los accesorios y válvulas estarán unidos por bridas).
- Presión atmosférica = 14.7 psi = 29.9 in. Hg = 1 Atm
- Para la selección de la bomba considerar dos velocidades del rodete = 1800/3600 rpm.

#### Solución:

1. Cálculo del apropiado rango de diseño de velocidades tanto para la tubería de succión como para la de descarga y sus diámetros.

Para obtener el rango adecuado de velocidades se parte del criterio que el rango de velocidades recomendado para la tubería de succión se encuentra entre 4 y 6 ft/s, y para la tubería de descarga entre 7 y 10 ft/s.

Según datos del problema, el caudal (Q) debe ser de 700 gpm. Además, conociendo que para calcular el diámetro (D) correspondiente a una tubería se puede establecer la siguiente expresión:

$$Q = V \times \pi \times \frac{D^2}{4} \quad (1.1)$$

Que despejando el diámetro queda de la siguiente forma:

$$D = \sqrt{\frac{4 \times Q}{\pi \times V}} \quad (1.2)$$

Por lo tanto:

- Tubería de succión:

Adoptando como velocidad ( $V_1$ ) de partida de 5 ft/s, entonces:

$$D_1 = \sqrt{\frac{1.56 \text{ ft}^3/\text{s} \times 4}{\pi \times 5 \text{ ft/s}}} = 0.63 \text{ ft} = 7.56 \text{ in} \quad (1.3)$$

- Tubería de descarga:

Adoptando como velocidad ( $V_2$ ) de partida de 8 ft/s, entonces:

$$D_2 = \sqrt{\frac{1.56 \text{ ft}^3/\text{s} \times 4}{\pi \times 8 \text{ ft/s}}} = 0.49 \text{ ft} = 5.98 \text{ in} \quad (1.4)$$

Una vez que se han estimado los diámetros probables para la tubería de succión ( $D_1$ ) y para la tubería de descarga ( $D_2$ ) se va a las tablas de los diámetros que el fabricante proporciona se ve que los diámetros obtenidos no son comerciales (EngineeringToolBox, 2001; Hidraulic\_Institute, 1990; Volk, 2013) por lo que se elige los inmediatamente próximos:  $D_1 = 8 \text{ in}$ ,  $D_2 = 6 \text{ in}$ .

Se hace una comprobación de que para esos diámetros comerciales todavía se sigue cumpliendo los rangos recomendables de velocidad:  $V_1 = 4.49 \text{ ft/s}$  ( $D_1$ ) y  $V_2 = 7.77 \text{ ft/s}$  ( $D_2$ ). Luego se cumplen.

De las tablas comerciales para la tubería de acero SCH 40 se obtienen datos que se necesitarán más adelante:

- Tubería de succión de diámetro 8 in:

$$V_1 = 4.49 \text{ ft/s}$$

$$V_1^2/2g = 0.313 \text{ ft}$$

$$h_{f1} = 0.80 \text{ ft/100ft}$$

- Tubería de descarga de diámetro 6 in:

$$V_2 = 7.77 \text{ ft/s}$$

$$V_2^2/2g = 0.939 \text{ ft}$$

$$h_{f2} = 3.13 \text{ ft/100ft}$$

2. Cálculo de la Altura o Carga Estática (Static Head), Hs.

Observando al esquema de la instalación se deduce que  $H_s = 50 \text{ ft}$ .

3. Cálculo de las pérdidas por fricción en la tubería de succión y en sus accesorios. ( $H_{f1}$ )

- Pérdidas de carga debidas a la longitud de la tubería de succión:

Sabiendo que hay instalados 150 ft de tubería, entonces:

$$\frac{150 \text{ ft}}{100 \text{ ft}} \times 0.80 \text{ ft} = 1.2 \text{ ft} \quad (1.5)$$

- Pérdidas de carga a la salida del depósito (punto A):

Se estima un coeficiente de resistencia  $K = 0.5$ , por ello:

$$K \times \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = 0.5 \times 0.313 \text{ ft} = 0.157 \text{ ft} \quad (1.6)$$

- Pérdidas de carga debidas a los accesorios (punto B):

Estos accesorios consisten en 2 válvulas de compuerta (Gate Valve) que para un diámetro de tubería de 8 in según tablas de factores de fricción (Hidraulic\_Institute, 1990; Volk, 2013) se obtiene un coeficiente de resistencia de  $K = 0.07$ , por ello:

$$2 \times K \times \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = 2 \times 0.07 \times 0.313 \text{ ft} = 0.04 \text{ ft} \quad (1.7)$$

El valor total de las pérdidas por fricción para la tubería de succión será:

$$H_{f1} = 1.2 \text{ ft} + 0.157 \text{ ft} + 0.04 \text{ ft} = 1.4 \text{ ft} \quad (1.8)$$

4. Cálculo de las pérdidas por fricción en la tubería de descarga y en sus accesorios. ( $H_{f2}$ )

- Pérdidas de carga debidas a la longitud de la tubería de descarga:

Sabiendo que hay instalados 900 ft de tubería, entonces:

$$\frac{900 \text{ ft}}{100 \text{ ft}} \times 3.13 \text{ ft} = 28.17 \text{ ft} \quad (1.9)$$

- Pérdidas de carga a la entrada del depósito (punto D):

Se estima un coeficiente de resistencia  $K = 1.0$ , por ello:

$$K \times \frac{V_2^2}{2 \cdot g} = 1.0 \times 0.939 \text{ ft} = 0.939 \text{ ft} \quad (1.10)$$

- Pérdidas de carga debidas a los accesorios de la descarga:

Estos accesorios consisten en 2 válvulas de compuerta (Gate Valve) y 1 válvula de retención (Check Valve) que para un diámetro de tubería de 6 in según tablas de factores de fricción (Hidraulic\_Institute, 1990; Volk, 2013) se obtienen unos coeficientes de resistencia de  $K_{\text{compuerta}} = 0.09$  y  $K_{\text{retención}} = 2$ , por ello:

$$2 \times K \times \frac{V_2^2}{2 \cdot g} = 2 \times 0.09 \times 0.939 \text{ ft} = 0.169 \text{ ft} \quad (1.11)$$

$$1 \times K \times \frac{V_2^2}{2 \cdot g} = 1 \times 2.0 \times 0.939 \text{ ft} = 1.878 \text{ ft} \quad (1.12)$$

El valor total de las pérdidas por fricción para la tubería de descarga será:

$$H_{f2} = 28.17 \text{ ft} + 0.939 \text{ ft} + 0.169 \text{ ft} + 1.878 \text{ ft} = 31.2 \text{ ft} \quad (1.13)$$

5. Cálculo de las alturas debidas a las presiones interiores de los depósitos ( $H_p$ )

- Depósito de succión:

Este depósito se encuentra en vacío a una presión de 5 in Hg (la presión en vacío se expresa como columna de mercurio), para pasar a unidades en pies (ft) se establece la siguiente conversión:

$$\text{Vac. (feet)} = \frac{\text{Vac. (in Hg)} \times 1.133}{SG} \quad (1.14)$$

$$H_{p1} = \text{Vac. (feet)} = \frac{5 \times 1.133}{1.0} = 5.665 \text{ ft}$$

- Depósito de descarga:

Este depósito se encuentra a una presión de 50 psi, para pasar a unidades en pies (ft) se establece la siguiente conversión:

$$H_{p2} = \text{feet} = \text{psi} \times \frac{2.31}{SG} = 50 \times \frac{2.31}{1.0} = 115.5 \text{ ft} \quad (1.15)$$

Luego la altura total debida a las presiones en los depósitos será:

$$H_p = H_{p1} + H_{p2} = 5.665 + 115.5 = 121.17 \text{ ft} \quad (1.16)$$

6. Cálculo de las alturas debidas a las velocidades en las tuberías ( $H_v$ )

- Tubería de succión:

La velocidad del flujo a través de ella es de 4.49 ft/s, luego:

$$H_{v1} = \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = 0.313 \text{ ft} \quad (1.17)$$

- Tubería de descarga:

La velocidad del flujo a través de ella es de 7.77 ft/s, luego:

$$H_{v2} = \frac{V_2^2}{2 \cdot g} = 0.939 \text{ ft} \quad (1.18)$$

Luego la altura total debida a las velocidades del flujo en las tuberías será:

$$H_v = H_{v1} + H_{v2} = 0.313 + 0.939 = 1.252 \text{ ft} \quad (1.19)$$

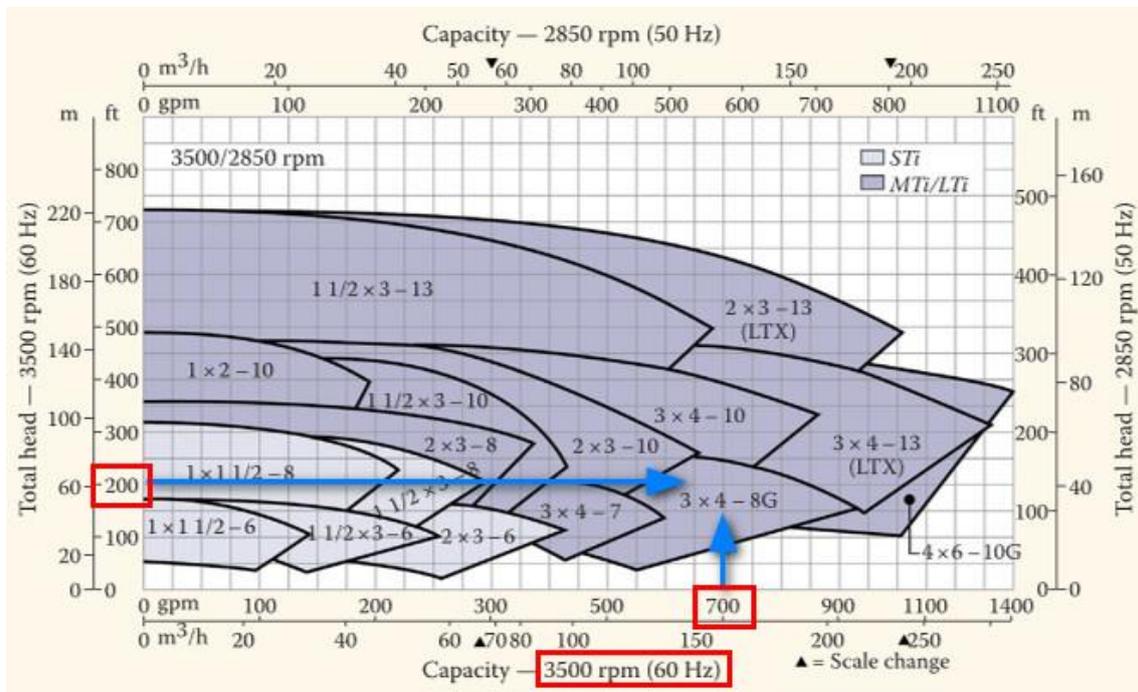
7. Cálculo de la altura dinámica total (DTH)

El valor de DTH será la suma de todas las alturas calculadas anteriormente, es decir:

$$DTH = H_s + H_{f1} + H_{f2} + H_p + H_v = 50 + 1.4 + 31.2 + 121.17 + 1.25 = 205.02 \text{ ft} \quad (1.20)$$

8. Selección de la bomba centrífuga adecuada

Para ellos nos apoyaremos en las siguientes curvas Q-H proporcionadas por fabricantes de bombas que, para 1800 rpm y 2850 rpm, y trabajando a 60Hz (EEUU), se pueden elegir:

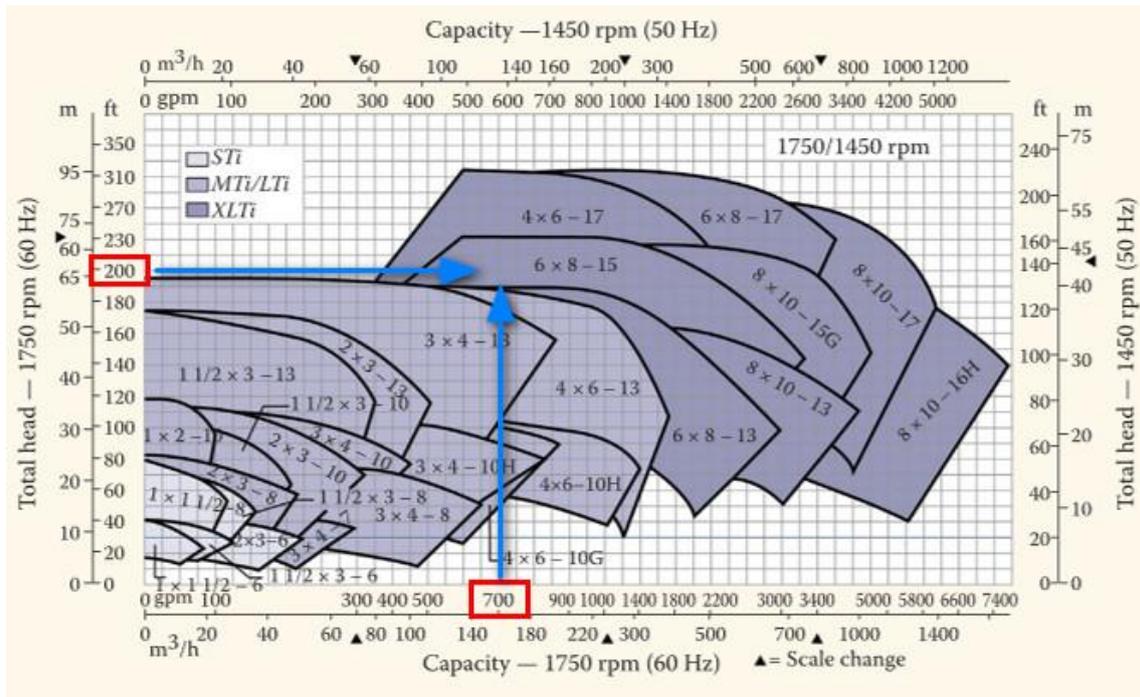


Bomba 3x4-8G a 3500 rpm

Bomba 6x8-15 a 1750 rpm

Donde la notación de este fabricante (convención establecida en EEUU) establece que el primer número representa el diámetro de salida de descarga de la bomba (inches), el segundo se refiere al diámetro de entrada por la succión de la bomba (inches) y el último al diámetro del rodete (*impeller*), también en pulgadas (inches).

EJERCICIOS RESUELTOS DE SISTEMAS DE TRANSPORTE CONTINUO. BOMBAS Y CINTAS TRANSPORTADORAS



Referencias:

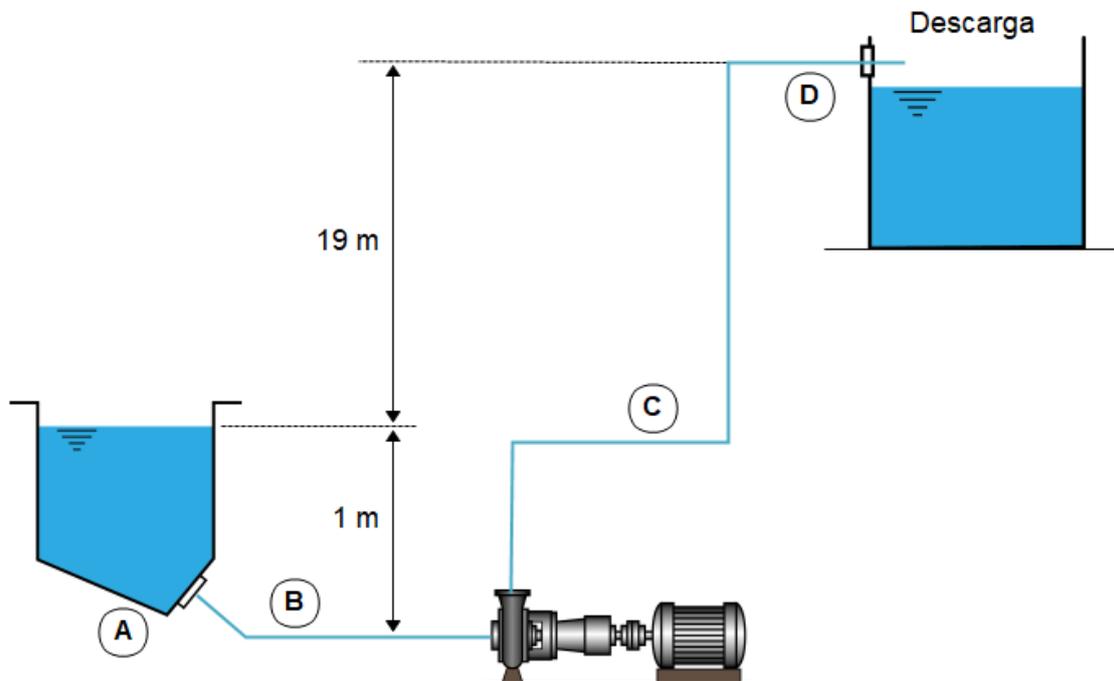
EngineeringToolBox. (2001). *Steel Pipes Schedule 40 - Pressure Loss*.  
[https://www.engineeringtoolbox.com/pressure-loss-steel-pipes-d\\_307.html](https://www.engineeringtoolbox.com/pressure-loss-steel-pipes-d_307.html)

Hidraulic\_Institute. (1990). *Engineering Data Book* (2nd ed.).

Volk, M. (2013). *Pump Characteristics and Applications* (C. Press, Ed. 3rd ed.).  
<https://doi.org/https://doi.org/10.1201/b15559>

EJERCICIO 2 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO

2. Se dispone el siguiente sistema de bombeo de pulpas que bombea una pulpa compuesta por arena silícea con densidad específica de  $2.65 \text{ t/m}^3$  ( $\rho_s$ ) y agua. Los sólidos tienen una granulometría característica media de  $K_{50}$  de 211 micras, la concentración de sólidos en peso,  $C_w$ , es del 30%. El tonelaje de sólidos es de 65 t/h. La longitud de la tubería es de 100 metros lineales con 4 codos o curvas de radio amplio ( $R=3D$ ). La tubería de descarga alimenta un depósito que se encuentra a 20 metros (eje de la tubería de descarga). Considerar un diámetro,  $D$ , de tubería de 150 mm. Se pide calcular la tubería idónea para bombear la pulpa silícea, la altura dinámica total (TDH), y la selección de la bomba idónea para dicha instalación. Emplea el ábaco de Warman para la obtención del coeficiente de fricción de Darcy,  $f$ .



PMP2022

Solución:

1. Cálculo del caudal a bombear,  $Q$ , concentración de sólidos en volumen,  $C_v$ , y peso específico de la pulpa,  $\rho_p$ .

Para el cálculo de la concentración de sólidos en volumen hacemos uso de la siguiente expresión:

$$C_v = \frac{\frac{C_w}{100} \times \rho_l}{\rho_s - \frac{C_w}{100} \times (\rho_s - \rho_l)} \times 100 \quad (2.1)$$

Por lo que, sustituyendo:

$$C_V = \frac{0.30 \times 1.0}{2.65 - 0.30 \times (2.65 - 1.0)} \times 100 = 13.92\% \quad (2.2)$$

Para el cálculo de la densidad de la pulpa empleamos la siguiente expresión:

$$\frac{C_V}{100} = \frac{(\rho_p - \rho_l)}{(\rho_s - \rho_l)} \quad (2.3)$$

Por lo que, sustituyendo:

$$\rho_p = \frac{13.92}{100} \times (2.65 - 1.0) + 1.0 = 1.23 \text{ t/m}^3 \quad (2.4)$$

Para el cálculo del caudal de pulpa se establece que:

$$\left. \begin{array}{l} 65 \text{ t}_{\text{solidos}}/\text{h} \rightarrow 30\% (C_w) \\ y \rightarrow 100\% \end{array} \right| y = 216.67 \text{ t}_{\text{pulpa}}/\text{h} \quad (2.5)$$

Sabiendo que la densidad de la pulpa es  $1.23 \text{ t/m}^3$ , entonces:

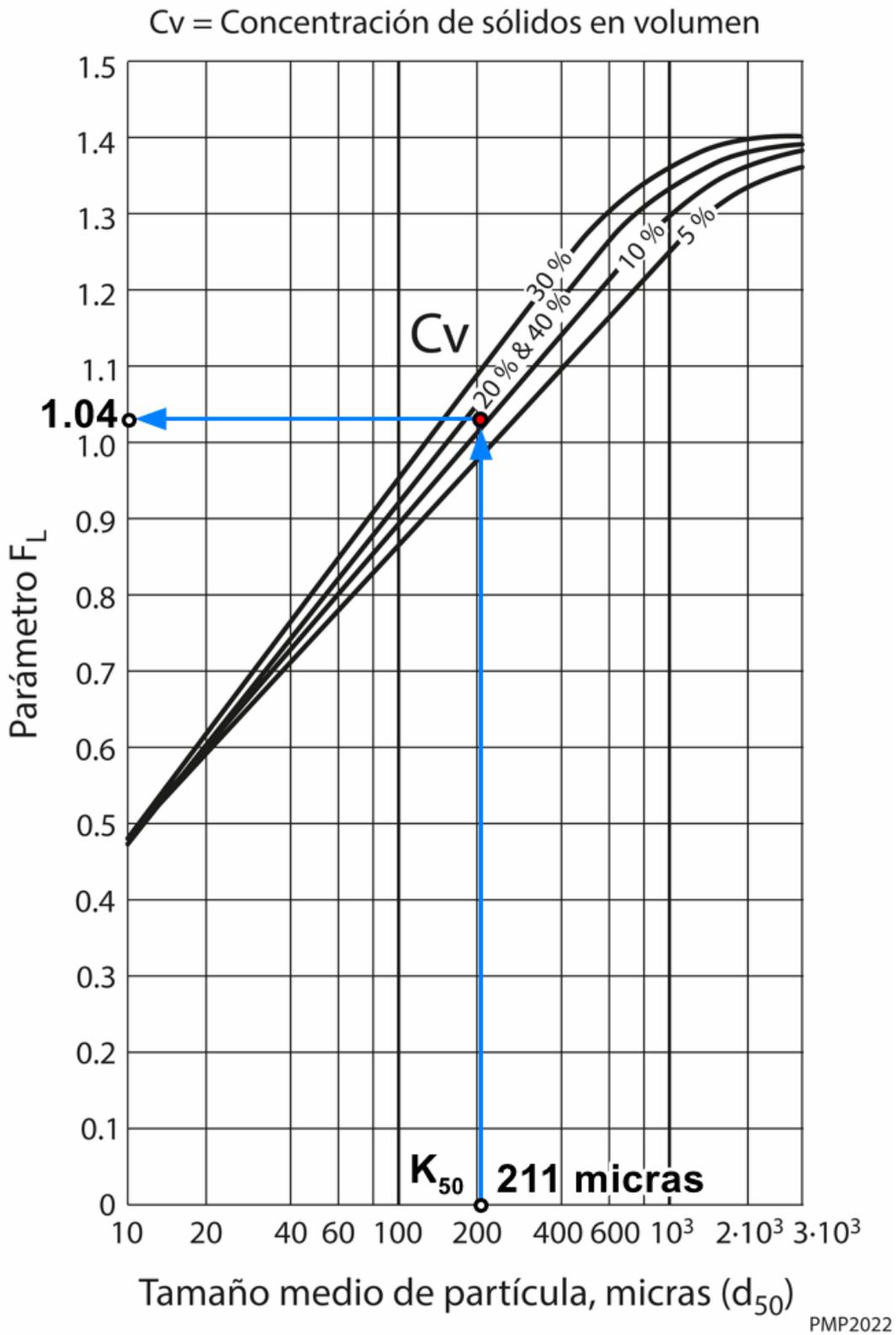
$$Q_{\text{pulpa}} = \frac{216.67 \text{ t/h}}{1.23 \text{ t/m}^3} = 176.21 \text{ m}^3/\text{h} \quad (2.6)$$

## 2. Cálculo del diámetro óptimo de la tubería, la velocidad límite y la velocidad real de transporte.

Para estos cálculos vamos a utilizar la expresión de la velocidad límite según Durand (ANEFA, 2020):

$$V_l = F_l \times \sqrt{2 \times g \times D \times \frac{\rho_s - \rho_l}{\rho_l}} \quad (2.7)$$

Para la determinación del factor  $F_l$  se entra en el siguiente gráfico (ANEFA, 2020; Bouso, 1993; Warman, 2000) del que se obtiene un valor aproximado de 1.04. Con este valor se puede entrar en la anterior expresión de Durand y calcular la velocidad límite.



La velocidad límite valdrá:

$$V_l = 1.04 \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.150 \times \frac{2.65 - 1.0}{1.0}} = 2.29 \text{ m/s} \quad (2.8)$$

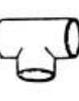
Ahora se comprueba que la velocidad real de transporte es superior que la velocidad límite:

$$V = \frac{Q}{\left(\frac{\pi \times D^2}{4}\right)} = \frac{176.21 \text{ m}^3/\text{h}}{\left(\frac{\pi \times 0.150^2}{4}\right)} = 2.77 \text{ m/s} \quad (2.9)$$

Por lo tanto, el diámetro seleccionado es adecuado ya que la velocidad a la que llevará la pulpa es superior en un 20% a la velocidad límite calculada.

### 3. Cálculo de las pérdidas de carga en la conducción.

Lo primero es calcular la longitud equivalente de los accesorios y singularidades que en este ejemplo se trata de 4 curvas de gran diámetro ( $R=3D$ ), y que entrando en la tabla adjunta para un diámetro interno de 150 mm se obtiene una longitud equivalente de 3.35 m.

	 Radius More Than 3 x N.B.	 Radius is 2 x N.B.			 Minimum Radius 10 x N.B.				
INTERNAL DIAMETER or N.B. m m	90° Long Radius Bend	90° Short Radius Bend	Elbow	Tee	Rubber Hose	Diaphragm Valve Full Open	Full Bore Valve Round Way	Plug-Lub Valve Rect. Way	*"Tech-Taylor" Valve Ball Type
	EQUIV. LENGTH IN m OF STRAIGHT PIPE GIVING EQUIVALENT RESISTANCE TO FLOW								
25	0.52	0.70	0.82	1.77	0.30	2.56	—	0.37	—
32	0.73	0.91	1.13	2.38	0.40	3.29	—	0.49	—
40	0.85	1.10	1.31	2.74	0.49	3.44	1.19	0.58	—
50	1.07	1.40	1.68	3.35	0.55	3.66	1.43	0.73	—
65	1.28	1.65	1.98	4.27	0.70	4.60	1.52	0.85	—
80	1.55	2.07	2.47	5.18	0.85	4.88	1.92	1.04	0.20
90	1.83	2.44	2.90	5.79	1.01	—	—	1.22	—
100	2.13	2.77	3.35	6.71	1.16	7.62	2.19	1.40	0.23
115	2.41	3.05	3.66	7.32	1.28	—	—	1.58	—
125	2.71	3.66	4.27	8.23	1.43	13.11	3.05	1.77	0.30
150	3.35	4.27	4.88	10.06	1.55	18.29	3.11	2.13	0.37
200	4.27	5.49	6.40	13.11	2.41	19.81	7.92	2.74	0.82
250	5.18	6.71	7.92	17.07	2.99	21.34	10.67	3.47	0.61
300	6.10	7.92	9.75	20.12	3.35	28.96	15.85	4.08	0.76
350	7.01	9.45	10.97	23.16	4.27	28.96	—	4.88	0.91
400	8.23	10.67	12.80	26.52	4.88	—	—	5.49	1.04
450	9.14	12.19	14.02	30.48	5.49	—	—	6.22	1.16
500	10.36	13.11	15.85	33.53	6.10	—	—	7.32	1.25

La longitud equivalente de la tubería considerando las singularidades será:

$$L = 100 \text{ m} + 4 \times 3.35 \text{ m} = 113.40 \text{ m} \quad (2.10)$$

4. Cálculo de la viscosidad dinámica ( $\mu_p$ ) y la viscosidad cinemática

La viscosidad dinámica o absoluta para la pulpa, según la siguiente expresión, vale:

$$\mu_p = \mu_{agua} \times (1 + 2.5 \times C_v + 10.05 \times C_v^2 + 0.000273 \times e^{16.6 \times C_v}) \quad (2.11)$$

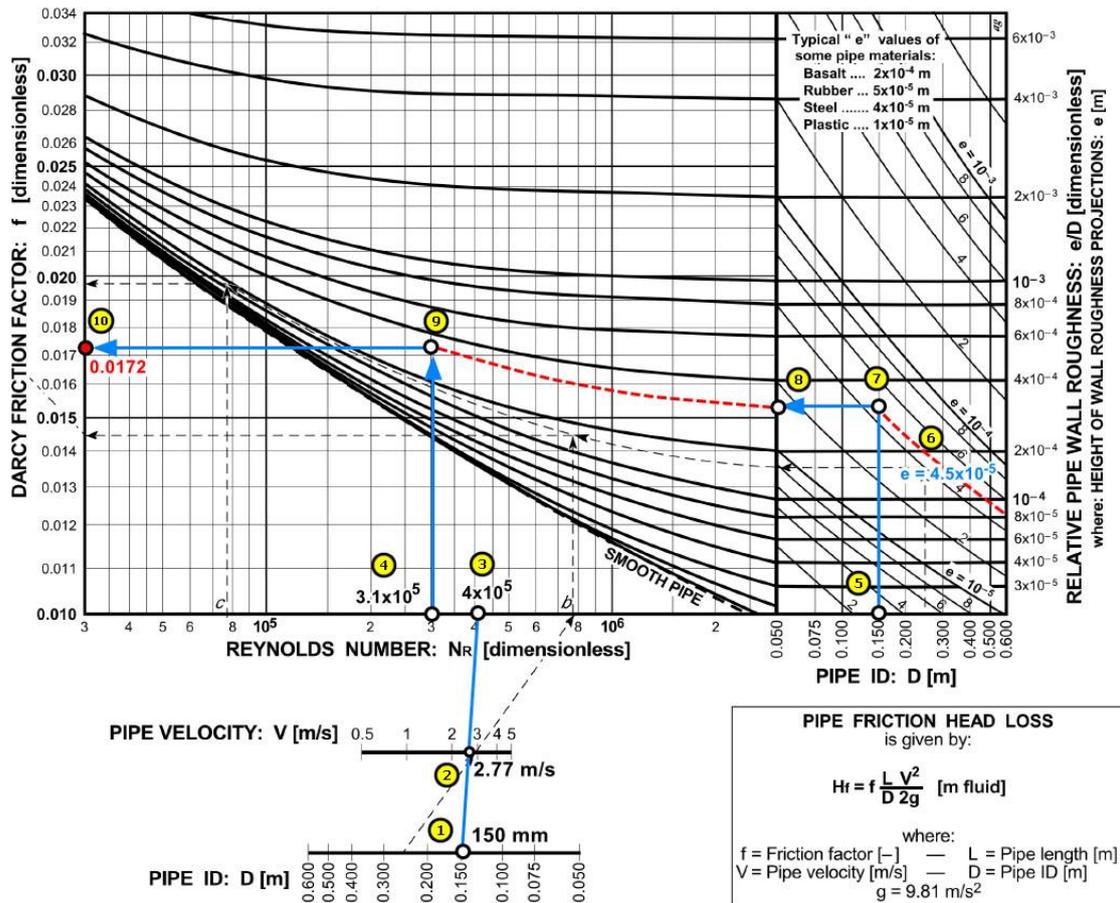
$$\mu_p = 0.001 \times (1 + 2.5 \times 0.1392 + 10.05 \times 0.1392^2 + 0.000273 \times e^{16.6 \times 0.1392}) = 0.0016 \text{ N}\times\text{s}/\text{m}^2 \quad (2.12)$$

La viscosidad cinemática valdrá:

$$\mu_{cinematica} = \frac{\mu_p}{\rho_p} = \frac{0.0016 \text{ N}\times\text{s}/\text{m}^2}{1230 \text{ kg}/\text{m}^3} = 1.30 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} = 1.30 \text{ cSt} \quad (2.13)$$

5. Obtención del factor de fricción de Darcy,  $f$ .

Ahora se empleará el ábaco de Warman (Warman, 2000), que, para una tubería de acero comercial, con una rugosidad de 0.045 mm ( $e = 0.000045 \text{ m}$ ) y un diámetro de tubería de 150 mm, nos da una rugosidad relativa de 0.0003. Al número de Reynolds obtenido ( $4 \times 10^5$ ) se le debe dividir por la viscosidad cinemática anteriormente calculada (1.30 cSt), dando  $3.1 \times 10^5$ , que es el que valor con el que hay que entrar ahora. El resto de los pasos se facilitan en la figura adjunta y que llevan a la obtención de un factor de fricción de Darcy,  $f$ , de 0.0172 (ver diagrama adjunto).



Con el valor de  $f = 0.0172$  se entra en la expresión de Darcy (ANEFA, 2020) y se calculan las pérdidas de carga debido a la fricción en la tubería y accesorios:

$$H_f = f \times \frac{L}{D} \times \frac{V^2}{2 \times g} \quad (2.14)$$

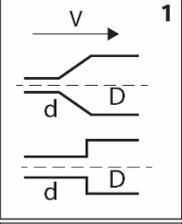
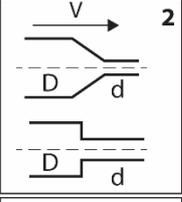
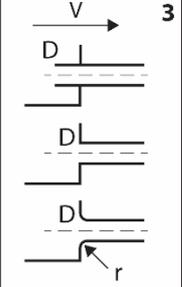
Sustituyendo las variables por sus valores se obtiene:

$$H_f = 0.0172 \times \frac{113.40}{0.150} \times \frac{2.77^2}{2 \times 9.81} = 5.09 \text{ m.c.l.} \quad (2.15)$$

6. Pérdidas de carga a la salida del depósito,  $H_i$  (punto A).

Considerando una conexión con arista viva ("flush connection"), según la siguiente tabla, se toma un valore de  $K_i = 0.5$ .

Pérdidas de carga expresadas como proporción de la velocidad, V:  $H_i = K_i \times \frac{V^2}{2 \times g} (m)$

GRUPO	SINGULARIDAD	Coefficiente $K_i$																														
 <p><b>1</b></p>	<p><b>AMPLIACIONES</b></p> <table border="1"> <tr> <td>d/D</td> <td>0.9</td> <td>0.8</td> <td>0.7</td> <td>0.6</td> <td>0.5</td> <td>0.4</td> <td>0.3</td> <td>0.2</td> <td>0.1</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.03</td> <td>0.09</td> <td>0.17</td> <td>0.28</td> <td>0.38</td> <td>0.48</td> <td>0.56</td> <td>0.62</td> <td>0.66</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.04</td> <td>0.13</td> <td>0.26</td> <td>0.41</td> <td>0.56</td> <td>0.71</td> <td>0.83</td> <td>0.92</td> <td>0.98</td> </tr> </table>	d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1		0.03	0.09	0.17	0.28	0.38	0.48	0.56	0.62	0.66		0.04	0.13	0.26	0.41	0.56	0.71	0.83	0.92	0.98	$K_i = 2.6 \times \sin \frac{\theta}{2} \times \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)^2$ $K_i = \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)^2$
d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1																							
	0.03	0.09	0.17	0.28	0.38	0.48	0.56	0.62	0.66																							
	0.04	0.13	0.26	0.41	0.56	0.71	0.83	0.92	0.98																							
 <p><b>2</b></p>	<p><b>REDUCCIONES</b></p> <table border="1"> <tr> <td>d/D</td> <td>0.9</td> <td>0.8</td> <td>0.7</td> <td>0.6</td> <td>0.5</td> <td>0.4</td> <td>0.3</td> <td>0.2</td> <td>0.1</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.04</td> <td>0.07</td> <td>0.11</td> <td>0.13</td> <td>0.16</td> <td>0.17</td> <td>0.19</td> <td>0.20</td> <td>0.20</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.10</td> <td>0.18</td> <td>0.26</td> <td>0.32</td> <td>0.38</td> <td>0.42</td> <td>0.46</td> <td>0.48</td> <td>0.50</td> </tr> </table>	d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1		0.04	0.07	0.11	0.13	0.16	0.17	0.19	0.20	0.20		0.10	0.18	0.26	0.32	0.38	0.42	0.46	0.48	0.50	$K_i = 0.8 - \sin \frac{\theta}{2} \times \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)$ $K_i = 0.5 - \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)$
d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1																							
	0.04	0.07	0.11	0.13	0.16	0.17	0.19	0.20	0.20																							
	0.10	0.18	0.26	0.32	0.38	0.42	0.46	0.48	0.50																							
 <p><b>3</b></p>	<p><b>ENTRADAS DESDE DEPÓSITOS A TUBERÍAS</b></p> <p><b>Conexión con tubo interior</b></p> <p><b>Conexión con arista viva</b></p> <p><b>Conexión redondeada</b></p> <table border="1"> <tr> <td>r/D</td> <td>0.02</td> <td>0.04</td> <td>0.06</td> <td>0.10</td> <td>0.15</td> </tr> <tr> <td><math>K_i</math></td> <td>0.28</td> <td>0.24</td> <td>0.15</td> <td>0.09</td> <td>0.04</td> </tr> </table>	r/D	0.02	0.04	0.06	0.10	0.15	$K_i$	0.28	0.24	0.15	0.09	0.04	$K_i = 0.78$ $K_i = 0.50$ $K_i = 0.05$																		
r/D	0.02	0.04	0.06	0.10	0.15																											
$K_i$	0.28	0.24	0.15	0.09	0.04																											

Por lo que la pérdida de carga debido a la conexión al depósito (punto A) será:

$$H_i = K_i \times \frac{\rho_p \times V^2}{\rho_{agua} \times 2 \times g} = 0.5 \times \frac{1.23 \times 2.77^2}{1 \times 2 \times 9.81} = 0.24 \text{ m.c.l.} \quad (2.16)$$

### 7. Pérdidas de carga a la descarga, $H_d$ (punto D).

Al ser una descarga a presión atmosférica, sólo se tiene en cuenta la pérdida de carga debido a la velocidad de descarga en dicho punto, y cuya expresión general es:

$$H_d = \frac{V^2}{2 \times g} = \frac{2.77^2}{2 \times 9.81} = 0.39 \text{ m.c.l.} \quad (2.17)$$

La pérdida de carga total ( $H_t$ ), será:

$$H_t = H_f + H_i + H_d = 5.09 + 0.24 + 0.39 = 5.72 \text{ m.c.l.} \quad (2.18)$$

8. Cálculo de la altura dinámica o manométrica total, o TDH (“Total Dynamic Head”).

El valor de TDH para este sistema hidráulico viene dado por:

$$TDH = (20 \text{ m} - 1 \text{ m}) + H_f = 19 + 5.72 = 24.72 \text{ m.c.l.} \quad (2.19)$$

Para seleccionar la bomba adecuada, debido a que los fabricantes proporcionan la información en base al empleo de agua como principal fluido, debemos corregir los 24.72 metros de columna de pulpa (m.c.l.) a metros de columna de agua (m.c.a.) (ANEFA, 2020; Volk, 2013; Warman, 2000). Para ello se emplea la gráfica siguiente entrando con los datos proporcionado por el enunciado del problema, como es la densidad de las partículas sólidas ( $2.65 \text{ g/cm}^3$ ), el tamaño medio de partícula ( $K_{50} = 211 \text{ micras}$ ) y la concentración de sólidos en peso ( $C_w = 30\%$ ).

Con estos datos, entrando en dicha gráfica se obtiene un HR (o ER) igual 0.89, lo que se puede expresar como:

$$HR = \frac{TDH_{pulpa}}{TDH_{agua}} \quad (2.20)$$

Para nuestro caso, la altura manométrica total expresada en columna de agua valdrá:

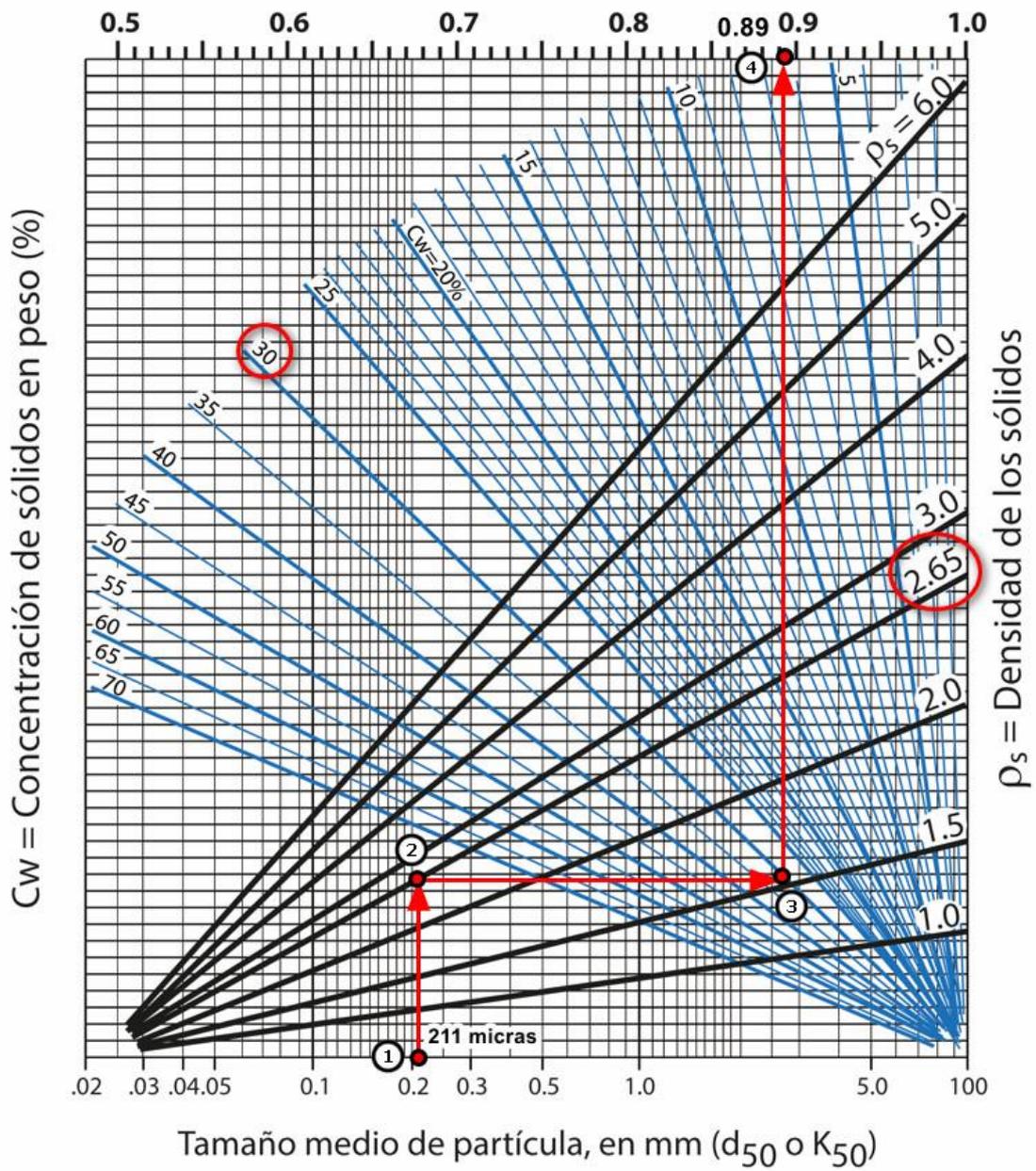
$$TDH_{agua} = \frac{TDH_{pulpa}}{HR} = \frac{24.72 \text{ m.c.l.}}{0.89} = 27.78 \text{ m.c.a.} \quad (2.21)$$

9. Selección de la bomba centrífuga.

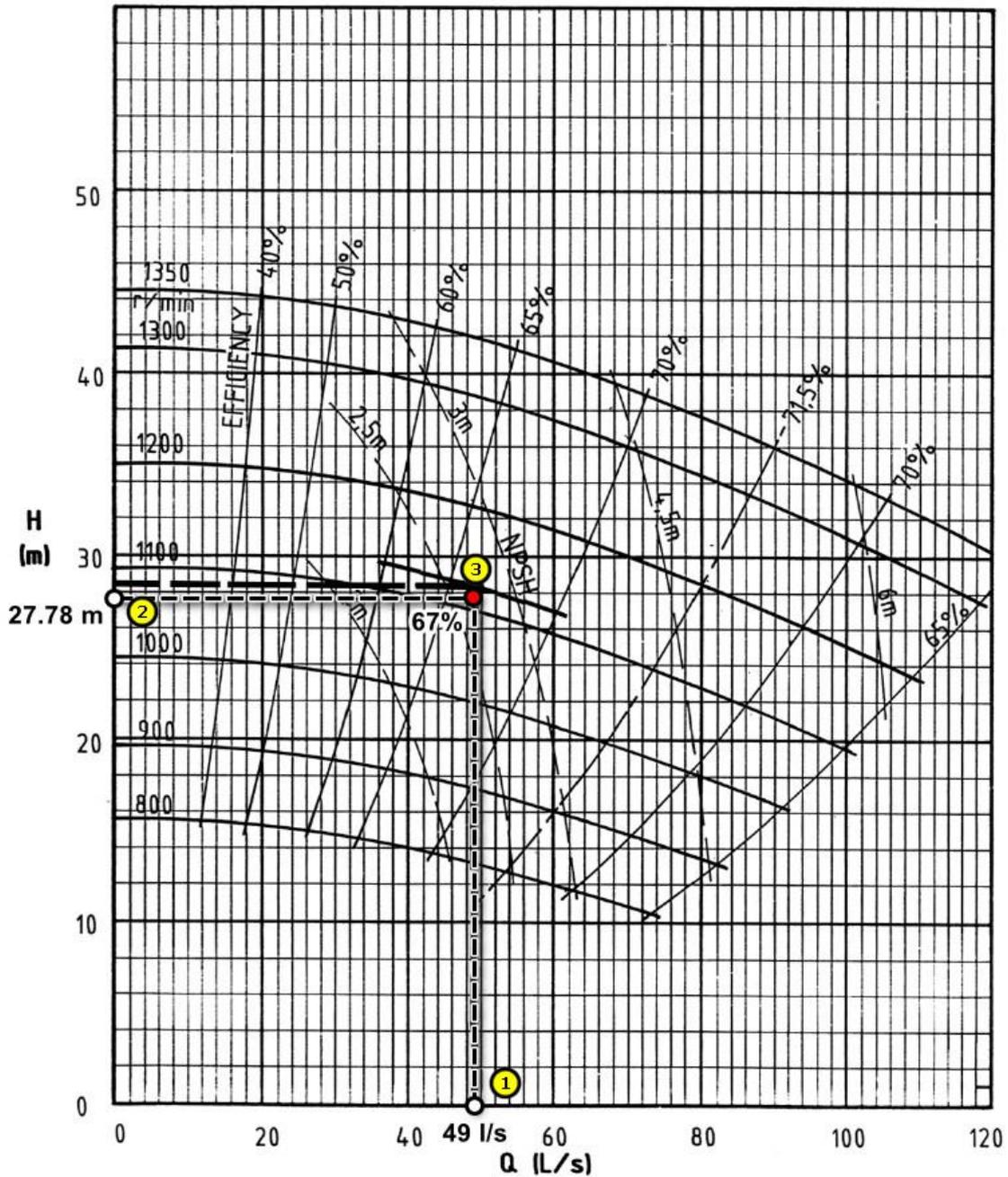
Con el valor calculado de  $TDH_{agua}$  de 27.78 m.c.a. y con el caudal calculado anteriormente de  $Q = 176.21 \text{ m}^3/\text{h}$  (o aprox. 49 l/s), se puede entrar en las curvas características Q-H de los fabricantes de bombas y seleccionar la bomba adecuada a nuestra instalación de bombeo de pulpas.

Por ejemplo, para la curva característica Q-H que se facilita (Warman, 2000), la bomba sería una bomba trabajando a un rendimiento del 67%, a 1100 rpm y con un NPSHr de 2.7 m.c.a.

$$HR = \frac{TDH_{pulpa}}{TDH_{agua}} \quad ER = \frac{Eficiencia_{pulpa}}{Eficiencia_{agua}}$$



PMP2022



10. Cálculo de la potencia de la bomba.

Con el valor calculado de  $TDH_{agua}$  de 27.78 m.c.a., el caudal calculado de  $Q = 176.21 \text{ m}^3/\text{h}$ , el rendimiento obtenido del 67%, la densidad de la pulpa de  $1.23 \text{ t/m}^3$  podemos calcular la potencia en kW que necesitará la bomba a través de la siguiente expresión:

$$N_{kW} = \frac{Q \times TDH_{agua} \times \rho_{pulpa}}{\frac{\eta}{100} \times 360} = \frac{176.21 \times 27.78 \times 1.23}{0.67 \times 360} = 26.96 \text{ kW} \quad (2.22)$$

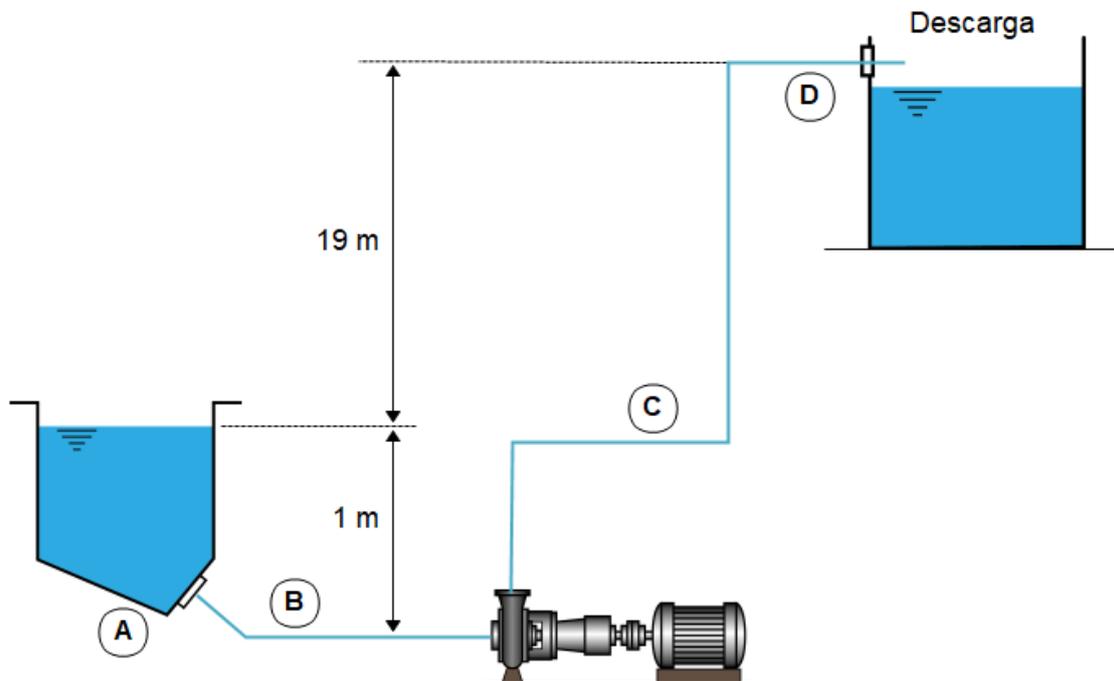
Se recomienda incrementar esta cantidad en un 25% debido a pérdidas en la transmisión y pérdidas en el rendimiento por causas de desgastes en las partes hidráulicas a medio plazo. Por lo que la potencia a instalar serían 31.20 kW.

#### Referencias:

- ANEFA. (2020). *Manual de Áridos para el Siglo XXI* (ANEFA, Ed.).
- Bouso, J. L. (1993). *Manual de bombeo de pulpas* (Fueyo, Ed.). ERAL, Equipos y Procesos S.A.
- EngineeringToolBox. (2001). *Steel Pipes Schedule 40 - Pressure Loss*.  
[https://www.engineeringtoolbox.com/pressure-loss-steel-pipes-d\\_307.html](https://www.engineeringtoolbox.com/pressure-loss-steel-pipes-d_307.html)
- Hdraulic\_Institute. (1990). *Engineering Data Book* (2nd ed.).
- Volk, M. (2013). *Pump Characteristics and Applications* (C. Press, Ed. 3rd ed.).  
<https://doi.org/https://doi.org/10.1201/b15559>
- Warman, L. (2000). *Warman Slurry Pumping Handbook*. Warman Slurry Pumping Handbook.

EJERCICIO 3 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO

3. Se dispone el siguiente sistema de bombeo de pulpas que bombea una pulpa compuesta por arena silícea con densidad específica de  $2.65 \text{ t/m}^3$  ( $\rho_s$ ) y agua. Los sólidos tienen una granulometría característica media de  $K_{50}$  de 211 micras, la concentración de sólidos en peso,  $C_w$ , es del 30%. El tonelaje de sólidos es de 65 t/h. La longitud de la tubería es de 100 metros lineales con 4 codos o curvas de radio amplio ( $R=3D$ ). La tubería de descarga alimenta un depósito que se encuentra a 20 metros (eje de la tubería de descarga). Considerar un diámetro,  $D$ , de tubería de 150 mm. Se pide calcular la tubería idónea para bombear la pulpa silícea, la altura dinámica total (TDH), y la selección de la bomba idónea para dicha instalación. Emplea el diagrama de Moody para la obtención del coeficiente de fricción de Darcy,  $f$ .



PMP2022

Solución:

1. Cálculo del caudal a bombear,  $Q$ , concentración de sólidos en volumen,  $C_v$ , y peso específico de la pulpa,  $\rho_p$ .

Para el cálculo de la concentración de sólidos en volumen hacemos uso de la siguiente expresión:

$$C_v = \frac{\frac{C_w}{100} \times \rho_l}{\rho_s - \frac{C_w}{100} \times (\rho_s - \rho_l)} \times 100 \quad (3.1)$$

Por lo que, sustituyendo:

$$C_v = \frac{0.30 \times 1.0}{2.65 - 0.30 \times (2.65 - 1.0)} \times 100 = 13.92\% \quad (3.2)$$

Para el cálculo de la densidad de la pulpa empleamos la siguiente expresión:

$$\frac{C_v}{100} = \frac{(\rho_p - \rho_l)}{(\rho_s - \rho_l)} \quad (3.3)$$

Por lo que, sustituyendo:

$$\rho_p = \frac{13.92}{100} \times (2.65 - 1.0) + 1.0 = 1.23 \text{ t/m}^3 \quad (3.4)$$

Para el cálculo del caudal de pulpa se establece que:

$$\left. \begin{array}{l} 65 \text{ t}_{\text{solidos}}/\text{h} \rightarrow 30\% (C_w) \\ y \rightarrow 100\% \end{array} \right| y = 216.67 \text{ t}_{\text{pulpa}}/\text{h} \quad (3.5)$$

Sabiendo que la densidad de la pulpa es  $1.23 \text{ t/m}^3$ , entonces:

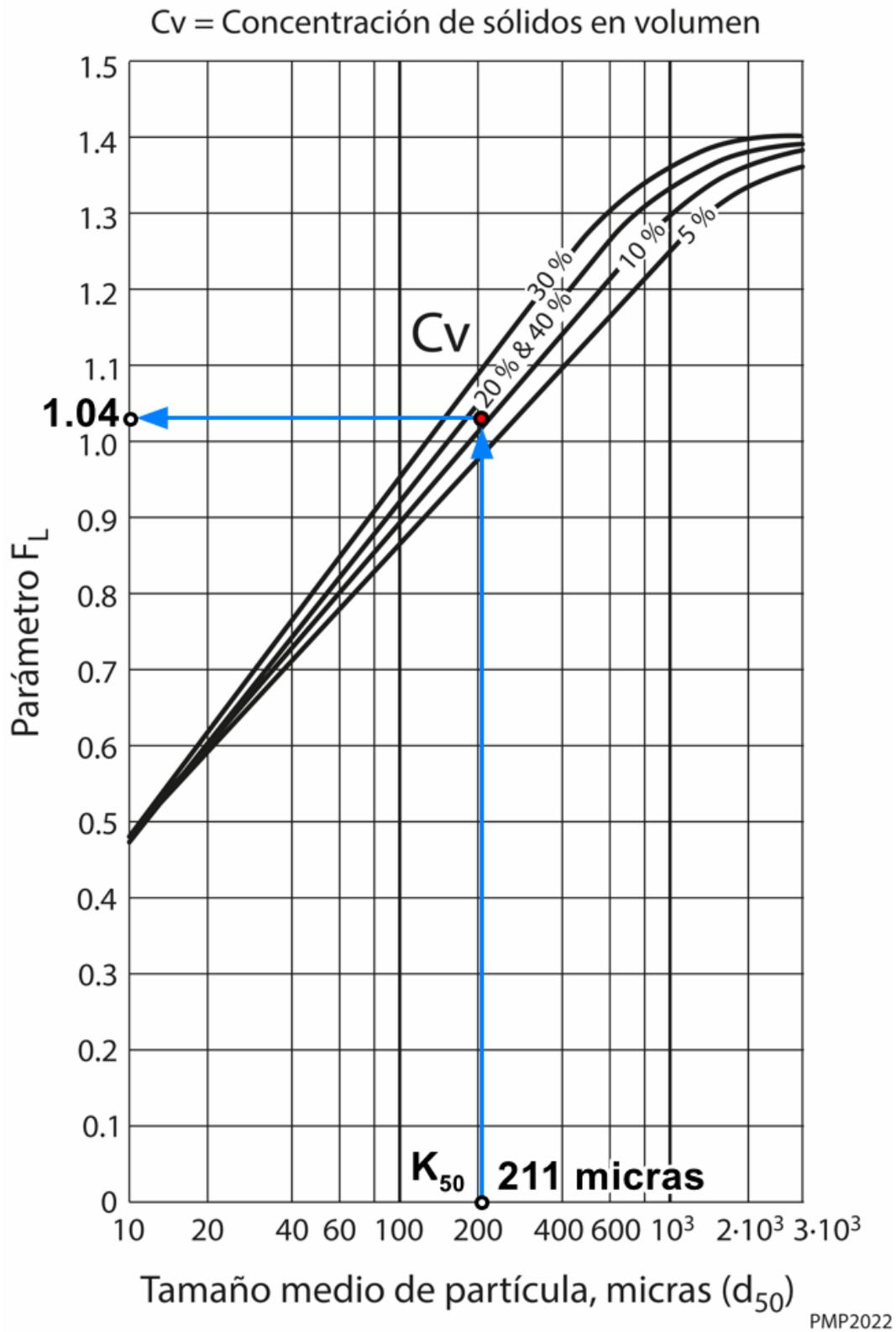
$$Q_{\text{pulpa}} = \frac{216.67 \text{ t/h}}{1.23 \text{ t/m}^3} = 176.21 \text{ m}^3/\text{h} \quad (3.6)$$

2. Cálculo del diámetro óptimo de la tubería, la velocidad límite y la velocidad real de transporte.

Para estos cálculos vamos a utilizar la expresión de la velocidad límite según Durand (ANEFA, 2020):

$$V_l = F_l \times \sqrt{2 \times g \times D \times \frac{\rho_s - \rho_l}{\rho_l}} \quad (3.7)$$

Para la determinación del factor  $F_l$  se entra en el siguiente gráfico (ANEFA, 2020; Bouso, 1993; Warman, 2000) del que se obtiene un valor aproximado de 1.04. Con este valor se puede entrar en la anterior expresión de Durand y calcular la velocidad límite.



La velocidad límite valdrá:

$$V_l = 1.04 \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.150 \times \frac{2.65 - 1.0}{1.0}} = 2.29 \text{ m/s} \quad (3.8)$$

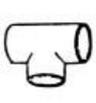
Ahora se comprueba que la velocidad real de transporte es superior que la velocidad límite:

$$V = \frac{Q}{\left(\frac{\pi \times D^2}{4}\right)} = \frac{176.21 \text{ m}^3/\text{h}}{\left(\frac{\pi \times 0.150^2}{4}\right)} = 2.77 \text{ m/s} \quad (3.9)$$

Por lo tanto, el diámetro seleccionado es adecuado ya que la velocidad a la que llevará la pulpa es superior en un 20% a la velocidad límite calculada.

### 3. Cálculo de las pérdidas de carga en la conducción.

Lo primero es calcular la longitud equivalente de los accesorios y singularidades que en este ejemplo se trata de 4 curvas de gran diámetro (R=3D), y que entrando en la tabla adjunta se obtiene una longitud equivalente de 3.35 m.

	 Radius More Than 3 x N.B.	 Radius is 2 x N.B.			 Minimum Radius 10 x N.B.				
INTERNAL DIAMETER or N.B. mm	90° Long Radius Bend	90° Short Radius Bend	Elbow	Tee	Rubber Hose	Diaphragm Valve Full Open	Full Bore Valve Round Way	Plug-Lub Valve Rect. Way	*"Tech-Taylor" Valve Ball Type
	EQUIV. LENGTH IN m OF STRAIGHT PIPE GIVING EQUIVALENT RESISTANCE TO FLOW								
25	0.52	0.70	0.82	1.77	0.30	2.56	—	0.37	—
32	0.73	0.91	1.13	2.38	0.40	3.29	—	0.49	—
40	0.85	1.10	1.31	2.74	0.49	3.44	1.19	0.58	—
50	1.07	1.40	1.68	3.35	0.55	3.66	1.43	0.73	—
65	1.28	1.65	1.98	4.27	0.70	4.60	1.52	0.85	—
80	1.55	2.07	2.47	5.18	0.85	4.88	1.92	1.04	0.20
90	1.83	2.44	2.90	5.79	1.01	—	—	1.22	—
100	2.13	2.77	3.35	6.71	1.16	7.62	2.19	1.40	0.23
115	2.41	3.05	3.66	7.32	1.28	—	—	1.58	—
125	2.71	3.66	4.27	8.23	1.43	13.11	3.05	1.77	0.30
150	3.35	4.27	4.88	10.06	1.55	18.29	3.11	2.13	0.37
200	4.27	5.49	6.40	13.11	2.41	19.81	7.92	2.74	0.82
250	5.18	6.71	7.92	17.07	2.99	21.34	10.67	3.47	0.61
300	6.10	7.92	9.75	20.12	3.35	28.96	15.85	4.08	0.76
350	7.01	9.45	10.97	23.16	4.27	28.96	—	4.88	0.91
400	8.23	10.67	12.80	26.52	4.88	—	—	5.49	1.04
450	9.14	12.19	14.02	30.48	5.49	—	—	6.22	1.16
500	10.36	13.11	15.85	33.53	6.10	—	—	7.32	1.25

La longitud equivalente de la tubería considerando las singularidades será:

$$L = 100 \text{ m} + 4 \times 3.35 \text{ m} = 113.40 \text{ m} \quad (3.10)$$

4. Cálculo de la viscosidad dinámica ( $\mu_p$ )

La viscosidad dinámica o absoluta para la pulpa, según la siguiente expresión, vale:

$$\mu_p = \mu_{agua} \times (1 + 2.5 \times C_v + 10.05 \times C_v^2 + 0.000273 \times e^{16.6 \times C_v}) \quad (3.11)$$

$$\mu_p = 0.001 \times (1 + 2.5 \times 0.1392 + 10.05 \times 0.1392^2 + 0.000273 \times e^{16.6 \times 0.1392}) = 0.0016 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2 \quad (3.12)$$

5. Obtención del Número de Reynolds (Re)

El número de Reynolds se obtiene con la siguiente expresión:

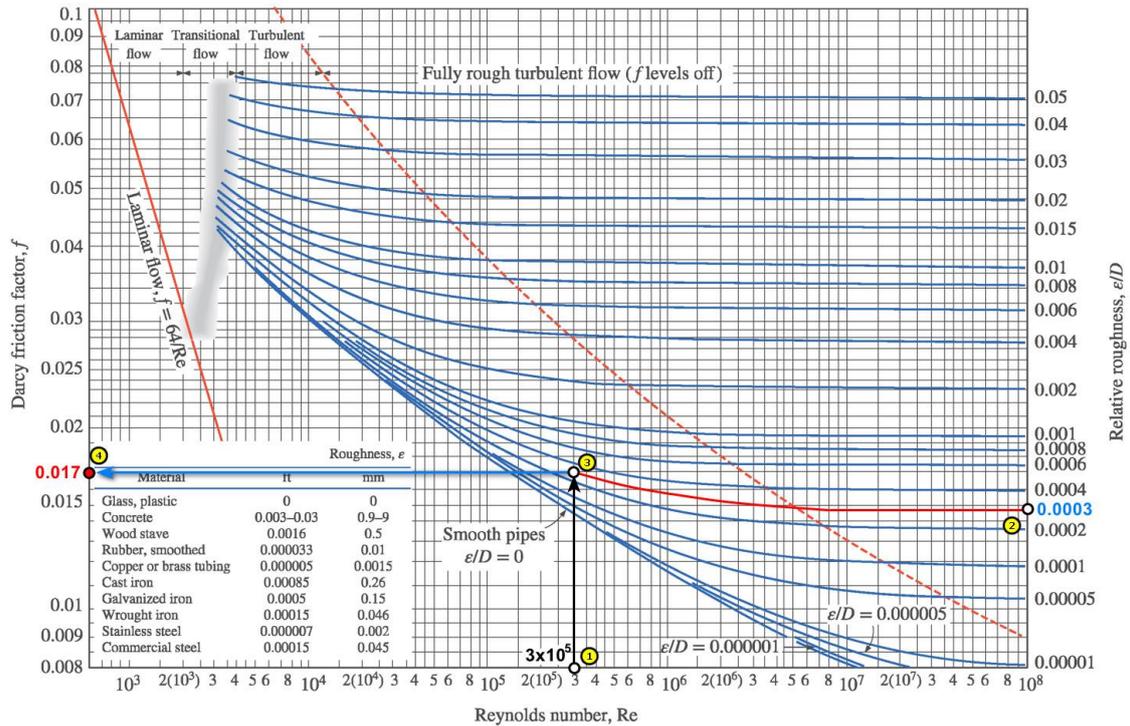
$$R_e = \frac{\rho_p \times V \times D}{\mu_p} = \frac{1230 \times 2.77 \times 0.150}{0.0016} \approx 3 \times 10^5 \quad (3.13)$$

6. Obtención del factor de fricción de Darcy,  $f$ .

Para ello emplearemos el diagrama de Moody, donde para una tubería de acero comercial con una rugosidad de 0.045 mm y un diámetro de tubería de 150 mm, nos da una rugosidad relativa de 0.0003. Entrando ahora con este valor y con el número de Reynolds, anteriormente calculado, se obtiene un factor de fricción,  $f$ , de 0.017 (ver diagrama adjunto).

Con el factor de fricción de Darcy, podemos calcular las pérdidas de carga debidas a la fricción en la longitud equivalente de tubería (113.40 metros):

$$H_f = f \times \frac{L}{D} \times \frac{V^2}{2 \times g} = 0.017 \times \frac{113.40}{0.150} \times \frac{2.77^2}{2 \times 9.81} = 5.03 \text{ m.c.l.} \quad (3.14)$$



7. Pérdidas de carga a la salida del depósito,  $H_i$  (punto A).

Considerando una conexión normal con arista viva (“flush connection”), según la siguiente tabla, se toma un valor de  $K_i = 0.5$ .

Pérdidas de carga expresadas como proporción de la velocidad,  $V$ :  $H_i = K_i \times \frac{V^2}{2 \times g}$  (m)

GRUPO	SINGULARIDAD	Coefficiente $K_i$																														
<p><b>1</b></p>	<p><b>AMPLIACIONES</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>d/D</th> <th>0.9</th> <th>0.8</th> <th>0.7</th> <th>0.6</th> <th>0.5</th> <th>0.4</th> <th>0.3</th> <th>0.2</th> <th>0.1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td></td> <td>0.03</td> <td>0.09</td> <td>0.17</td> <td>0.28</td> <td>0.38</td> <td>0.48</td> <td>0.56</td> <td>0.62</td> <td>0.66</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.04</td> <td>0.13</td> <td>0.26</td> <td>0.41</td> <td>0.56</td> <td>0.71</td> <td>0.83</td> <td>0.92</td> <td>0.98</td> </tr> </tbody> </table>	d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1		0.03	0.09	0.17	0.28	0.38	0.48	0.56	0.62	0.66		0.04	0.13	0.26	0.41	0.56	0.71	0.83	0.92	0.98	$K_i = 2.6 \times \sin \frac{\theta}{2} \times \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)^2$ $K_i = \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)^2$
d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1																							
	0.03	0.09	0.17	0.28	0.38	0.48	0.56	0.62	0.66																							
	0.04	0.13	0.26	0.41	0.56	0.71	0.83	0.92	0.98																							
<p><b>2</b></p>	<p><b>REDUCCIONES</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>d/D</th> <th>0.9</th> <th>0.8</th> <th>0.7</th> <th>0.6</th> <th>0.5</th> <th>0.4</th> <th>0.3</th> <th>0.2</th> <th>0.1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td></td> <td>0.04</td> <td>0.07</td> <td>0.11</td> <td>0.13</td> <td>0.16</td> <td>0.17</td> <td>0.19</td> <td>0.20</td> <td>0.20</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.10</td> <td>0.18</td> <td>0.26</td> <td>0.32</td> <td>0.38</td> <td>0.42</td> <td>0.46</td> <td>0.48</td> <td>0.50</td> </tr> </tbody> </table>	d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1		0.04	0.07	0.11	0.13	0.16	0.17	0.19	0.20	0.20		0.10	0.18	0.26	0.32	0.38	0.42	0.46	0.48	0.50	$K_i = 0.8 - \sin \frac{\theta}{2} \times \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)$ $K_i = 0.5 - \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)$
d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1																							
	0.04	0.07	0.11	0.13	0.16	0.17	0.19	0.20	0.20																							
	0.10	0.18	0.26	0.32	0.38	0.42	0.46	0.48	0.50																							
<p><b>3</b></p>	<p><b>ENTRADAS DESDE DEPÓSITOS A TUBERÍAS</b></p> <p><b>Conexión con tubo interior</b></p> <p><b>Conexión con arista viva</b></p> <p><b>Conexión redondeada</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>r/D</th> <th>0.02</th> <th>0.04</th> <th>0.06</th> <th>0.10</th> <th>0.15</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>K_i</math></td> <td>0.28</td> <td>0.24</td> <td>0.15</td> <td>0.09</td> <td>0.04</td> </tr> </tbody> </table>	r/D	0.02	0.04	0.06	0.10	0.15	$K_i$	0.28	0.24	0.15	0.09	0.04	$K_i = 0.78$ $K_i = 0.50$ $K_i = 0.05$																		
r/D	0.02	0.04	0.06	0.10	0.15																											
$K_i$	0.28	0.24	0.15	0.09	0.04																											

Por lo que la pérdida de carga debido a la conexión al depósito (punto A) será:

$$H_i = K_i \times \frac{\rho_p \times V^2}{\rho_{agua} \times 2 \times g} = 0.5 \times \frac{1.23 \times 2.77^2}{1 \times 2 \times 9.81} = 0.24 \text{ m.c.l.} \quad (3.15)$$

8. Pérdidas de carga a la descarga,  $H_d$  (punto D).

Al ser una descarga a presión atmosférica, sólo se tiene en cuenta la pérdida de carga debido a la velocidad de descarga en dicho punto, y cuya expresión general es:

$$H_d = \frac{V^2}{2 \times g} = \frac{2.77^2}{2 \times 9.81} = 0.39 \text{ m.c.l.} \quad (3.16)$$

La pérdida de carga total ( $H_t$ ), será:

$$H_t = H_f + H_i + H_d = 5.03 + 0.24 + 0.39 = 5.66 \text{ m.c.l.} \quad (3.17)$$

9. Cálculo de la altura dinámica o manométrica total, o TDH (“*Total Dynamic Head*”).

El valor de TDH para este sistema hidráulico viene dado por:

$$TDH = (20 \text{ m} - 1 \text{ m}) + H_t = 19 + 5.66 = 24.66 \text{ m.c.l.} \quad (3.18)$$

Para seleccionar la bomba adecuada, debido a que los fabricantes proporcionan la información en base al empleo de agua como principal fluido, debemos corregir los 24.66 metros de columna de pulpa (m.c.l.) a metros de columna de agua (m.c.a.) (ANEFA, 2020; Volk, 2013; Warman, 2000). Para ello se emplea la gráfica siguiente entrando con los datos proporcionado por el enunciado del problema, como es la densidad de las partículas sólidas ( $2.65 \text{ g/cm}^3$ ), el tamaño medio de partícula ( $K_{50} = 211 \text{ micras}$ ) y la concentración de sólidos en peso ( $C_w = 30\%$ ).

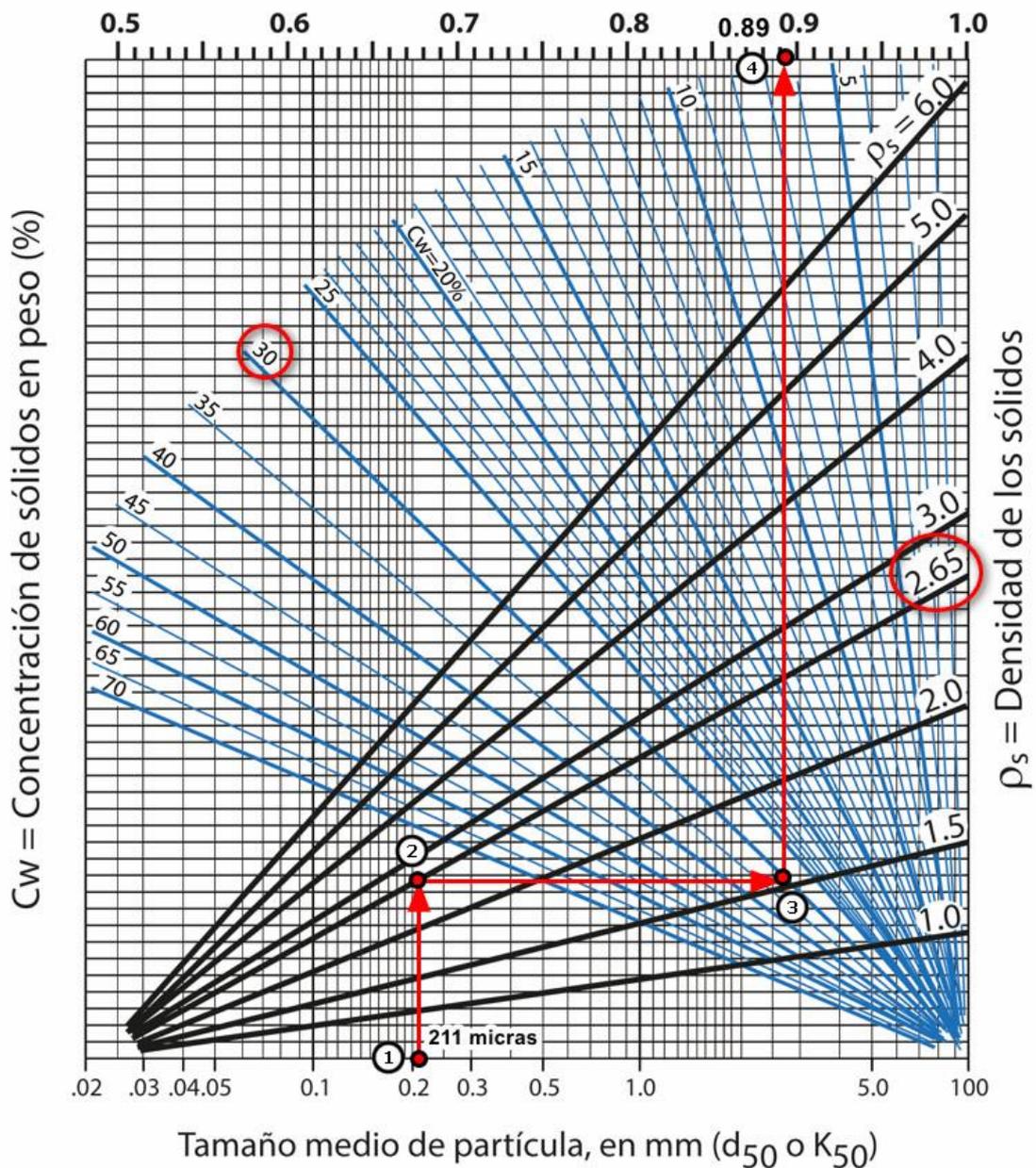
Con estos datos, entrando en dicha gráfica se obtiene un HR (o ER) igual 0.89, lo que se puede expresar como:

$$HR = \frac{TDH_{pulpa}}{TDH_{agua}} \quad (3.19)$$

Para nuestro caso, la altura manométrica total expresada en columna de agua valdrá:

$$TDH_{agua} = \frac{TDH_{pulpa}}{HR} = \frac{24.66 \text{ m.c.l.}}{0.89} = 27.71 \text{ m.c.a.} \quad (3.20)$$

$$HR = \frac{TDH_{pulpa}}{TDH_{agua}} \quad ER = \frac{\text{Eficiencia}_{pulpa}}{\text{Eficiencia}_{agua}}$$



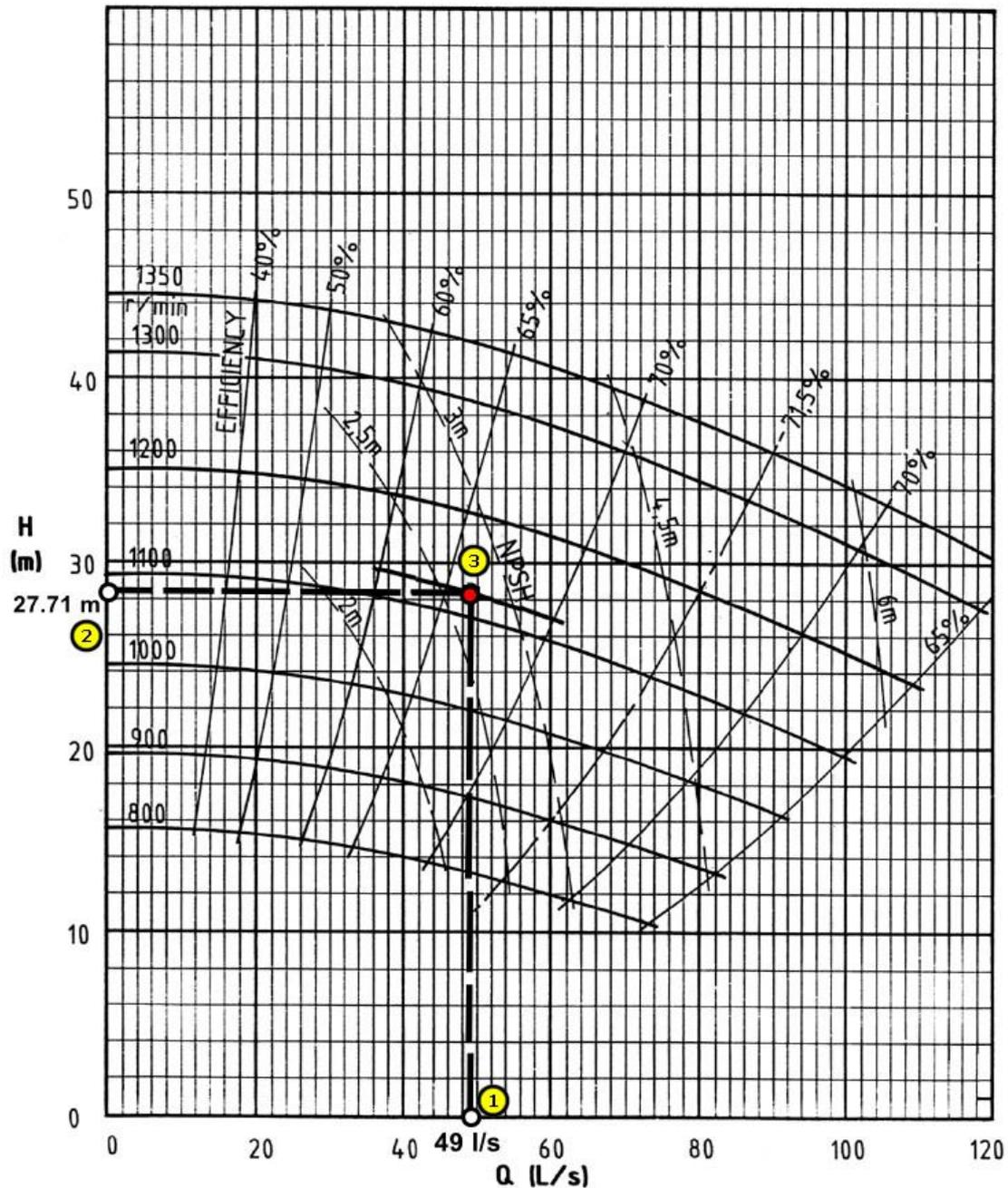
PMP2022

### 10. Selección de la bomba centrífuga.

Con el valor calculado de  $TDH_{agua}$  de 27.71 m.c.a. y con el caudal calculado anteriormente de  $Q = 176.21 \text{ m}^3/\text{h}$  (o aprox. 49 l/s), se puede entrar en las

curvas características Q-H de los fabricantes de bombas y seleccionar la bomba adecuada a nuestra instalación de bombeo de pulpas.

Por ejemplo, para la curva característica Q-H que se facilita (Warman, 2000), la bomba sería una bomba trabajando a un rendimiento del 66.5%, a 1110 rpm y con un NPSHr de 2.7 m.c.a.



### 11. Cálculo de la potencia de la bomba.

Con el valor calculado de  $TDH_{\text{agua}}$  de 27.71 m.c.a., el caudal calculado de  $Q = 176.21 \text{ m}^3/\text{h}$ , el rendimiento obtenido del 66.5%, la densidad de la pulpa de

1.23 t/m<sup>3</sup> podemos calcular la potencia en kW que necesitará la bomba a través de la siguiente expresión:

$$N_{kW} = \frac{Q \times TDH_{agua} \times \rho_{pulpa}}{\frac{\eta}{100} \times 360} = \frac{176.21 \times 27.71 \times 1.23}{0.665 \times 360} = 25.10 \text{ kW} \quad (3.21)$$

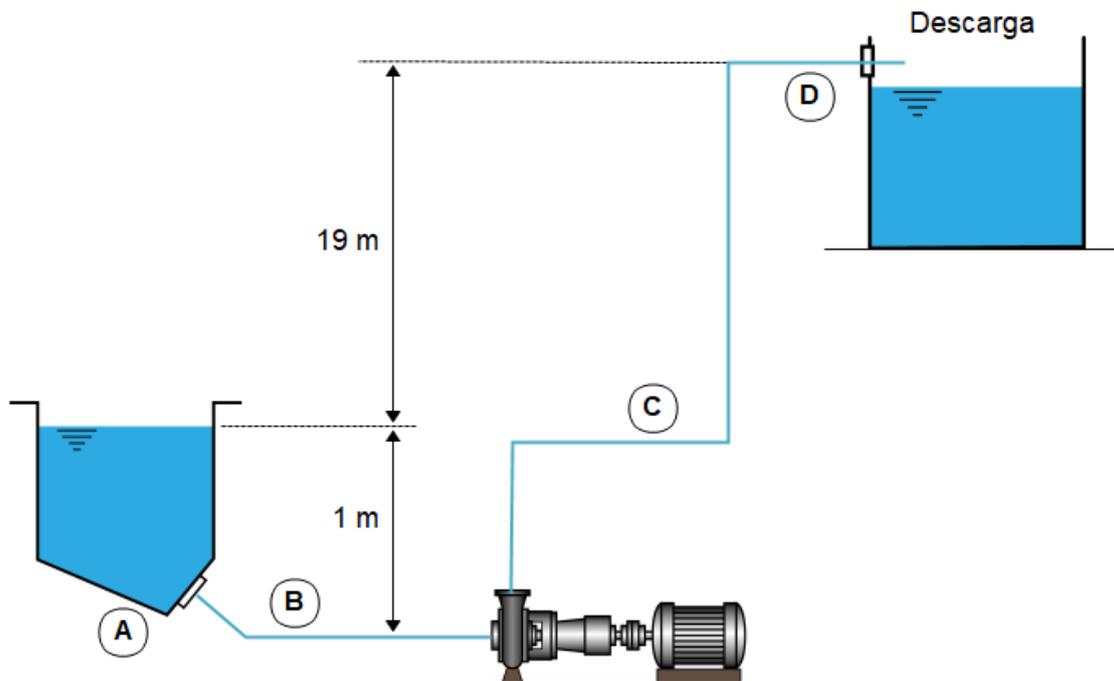
Se recomienda incrementar esta cantidad en un 25% debido a pérdidas en la transmisión y pérdidas en el rendimiento por causas de desgastes en las partes hidráulicas a medio plazo. Por lo que la potencia a instalar serían 31.37 kW.

#### Referencias:

- ANEFA. (2020). *Manual de Áridos para el Siglo XXI* (ANEFA, Ed.).
- Bouso, J. L. (1993). *Manual de bombeo de pulpas* (Fueyo, Ed.). ERAL, Equipos y Procesos S.A.
- Volk, M. (2013). *Pump Characteristics and Applications* (C. Press, Ed. 3rd ed.).  
<https://doi.org/https://doi.org/10.1201/b15559>
- Warman, L. (2000). *Warman Slurry Pumping Handbook*. Warman Slurry Pumping Handbook.

EJERCICIO 4 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO

4. Se dispone el siguiente sistema de bombeo de pulpas que bombea una pulpa compuesta por arena silícea con densidad específica de  $2.65 \text{ t/m}^3$  ( $\rho_s$ ) y agua. Los sólidos tienen una granulometría característica media de  $K_{50}$  de 211 micras, la concentración de sólidos en peso,  $C_w$ , es del 30%. El tonelaje de sólidos es de 65 t/h. La longitud de la tubería es de 100 metros lineales con 4 codos o curvas de radio amplio ( $R=3D$ ). La tubería de descarga alimenta un depósito que se encuentra a 20 metros (eje de la tubería de descarga). Considerar un diámetro,  $D$ , de tubería de 150 mm. Se pide calcular la tubería idónea para bombear la pulpa silícea, la altura dinámica total (TDH), y la selección de la bomba idónea para dicha instalación. Utilizar la fórmula de Williams y Hazen, considerando  $C = 150$ .



PMP2022

Solución:

1. Cálculo del caudal a bombear,  $Q$ , concentración de sólidos en volumen,  $C_v$ , y peso específico de la pulpa,  $\rho_p$ .

Para el cálculo de la concentración de sólidos en volumen hacemos uso de la siguiente expresión:

$$C_v = \frac{\frac{C_w}{100} \times \rho_l}{\rho_s - \frac{C_w}{100} \times (\rho_s - \rho_l)} \times 100 \quad (4.1)$$

Por lo que, sustituyendo:

$$C_v = \frac{0.30 \times 1.0}{2.65 - 0.30 \times (2.65 - 1.0)} \times 100 = 13.92\% \quad (4.2)$$

Para el cálculo de la densidad de la pulpa empleamos la siguiente expresión:

$$\frac{C_v}{100} = \frac{(\rho_p - \rho_l)}{(\rho_s - \rho_l)} \quad (4.3)$$

Por lo que, sustituyendo:

$$\rho_p = \frac{13.92}{100} \times (2.65 - 1.0) + 1.0 = 1.23 \text{ t/m}^3 \quad (4.4)$$

Para el cálculo del caudal de pulpa se establece que:

$$\left. \begin{array}{l} 65 \text{ t}_{\text{solidos}}/\text{h} \rightarrow 30\% (C_w) \\ y \rightarrow 100\% \end{array} \right| y = 216.67 \text{ t}_{\text{pulpa}}/\text{h} \quad (4.5)$$

Sabiendo que la densidad de la pulpa es  $1.23 \text{ t/m}^3$ , entonces:

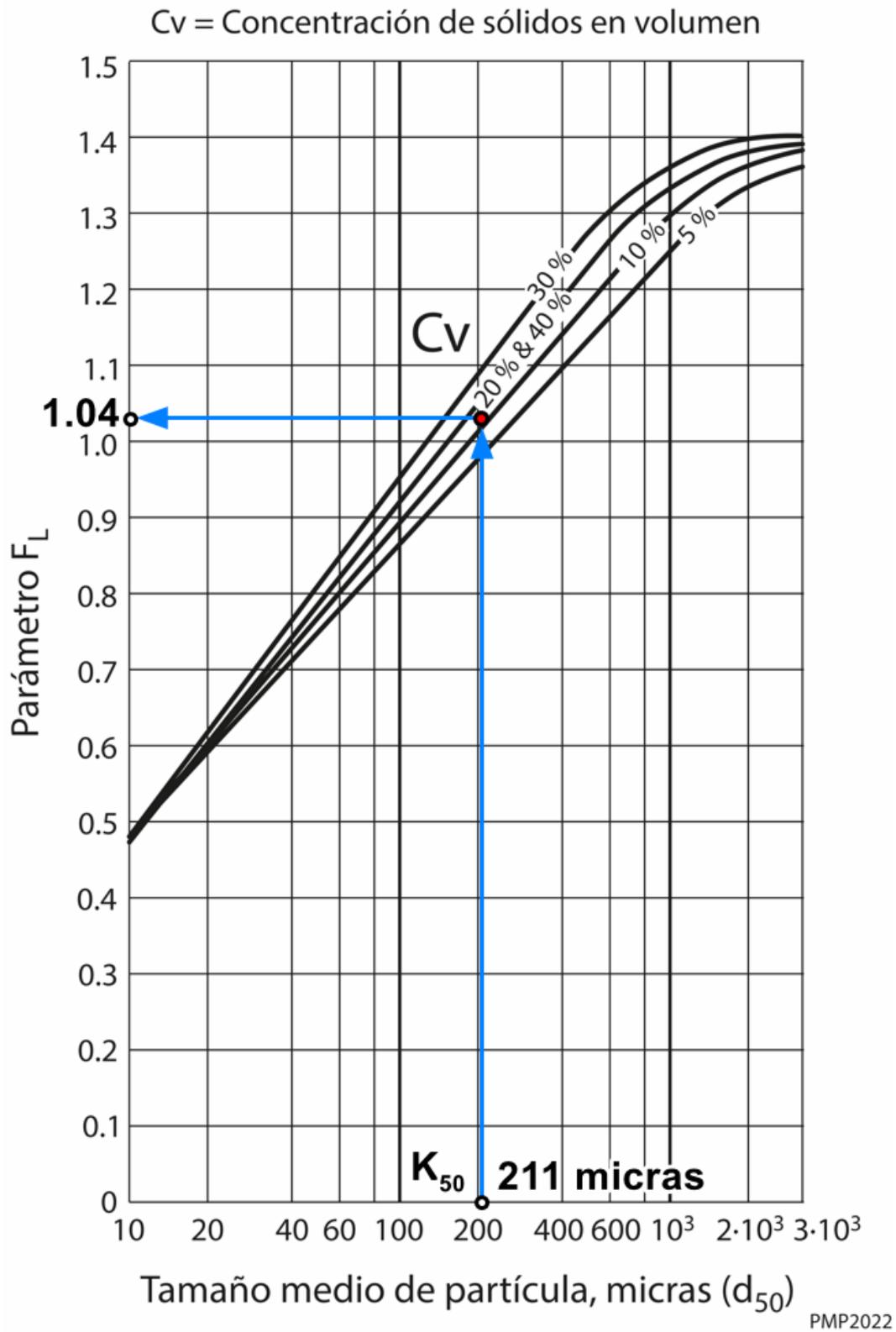
$$Q_{\text{pulpa}} = \frac{216.67 \text{ t/h}}{1.23 \text{ t/m}^3} = 176.21 \text{ m}^3/\text{h} \quad (4.6)$$

2. Cálculo del diámetro óptimo de la tubería, la velocidad límite y la velocidad real de transporte.

Para estos cálculos vamos a utilizar la expresión de la velocidad límite según Durand (ANEFA, 2020):

$$V_l = F_l \times \sqrt{2 \times g \times D \times \frac{\rho_s - \rho_l}{\rho_l}} \quad (4.7)$$

Para la determinación del factor  $F_l$  se entra en el siguiente gráfico (ANEFA, 2020; Bouso, 1993; Warman, 2000) del que se obtiene un valor aproximado de 1.04. Con este valor se puede entrar en la anterior expresión de Durand y calcular la velocidad límite.



La velocidad límite valdrá:

$$V_l = 1.04 \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.150 \times \frac{2.65 - 1.0}{1.0}} = 2.29 \text{ m/s} \quad (4.8)$$

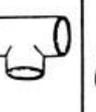
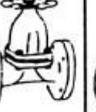
Ahora se comprueba que la velocidad real de transporte es superior que la velocidad límite:

$$V = \frac{Q}{\left(\frac{\pi \times D^2}{4}\right)} = \frac{176.21 \text{ m}^3/\text{h}}{\left(\frac{\pi \times 0.150^2}{4}\right)} = 2.77 \text{ m/s} \quad (4.9)$$

Por lo tanto, el diámetro seleccionado es adecuado ya que la velocidad a la que llevará la pulpa es superior en un 20% a la velocidad límite calculada.

### 3. Cálculo de las pérdidas de carga en la conducción.

Lo primero es calcular la longitud equivalente de los accesorios y singularidades que en este ejemplo se trata de 4 curvas de gran diámetro (R=3D), y que entrando en la tabla adjunta se obtiene una longitud equivalente de 3.35 m.

INTERNAL DIAMETER or N.B. mm									
	Radius More Than 3 x N.B.	Radius is 2 x N.B.			Minimum Radius 10 x N.B.				
EQUIV. LENGTH IN m OF STRAIGHT PIPE GIVING EQUIVALENT RESISTANCE TO FLOW									
25	0.52	0.70	0.82	1.77	0.30	2.56	—	0.37	—
32	0.73	0.91	1.13	2.38	0.40	3.29	—	0.49	—
40	0.85	1.10	1.31	2.74	0.49	3.44	1.19	0.58	—
50	1.07	1.40	1.68	3.35	0.55	3.66	1.43	0.73	—
65	1.28	1.65	1.98	4.27	0.70	4.60	1.52	0.85	—
80	1.55	2.07	2.47	5.18	0.85	4.88	1.92	1.04	0.20
90	1.83	2.44	2.90	5.79	1.01	—	—	1.22	—
100	2.13	2.77	3.35	6.71	1.16	7.62	2.19	1.40	0.23
115	2.41	3.05	3.66	7.32	1.28	—	—	1.58	—
125	2.71	3.66	4.27	8.23	1.43	13.11	3.05	1.77	0.30
150	3.35	4.27	4.88	10.06	1.55	18.29	3.11	2.13	0.37
200	4.27	5.49	6.40	13.11	2.41	19.81	7.92	2.74	0.82
250	5.18	6.71	7.92	17.07	2.99	21.34	10.67	3.47	0.61
300	6.10	7.92	9.75	20.12	3.35	28.96	15.85	4.08	0.76
350	7.01	9.45	10.97	23.16	4.27	28.96	—	4.88	0.91
400	8.23	10.67	12.80	26.52	4.88	—	—	5.49	1.04
450	9.14	12.19	14.02	30.48	5.49	—	—	6.22	1.16
500	10.36	13.11	15.85	33.53	6.10	—	—	7.32	1.25

La longitud equivalente de la tubería considerando las singularidades será:

$$L = 100 \text{ m} + 4 \times 3.35 \text{ m} = 113.40 \text{ m} \quad (4.10)$$

4. Cálculo de las pérdidas por fricción a través de Williams y Hazen.

El valor de estas pérdidas se obtiene aplicando la siguiente fórmula de Williams y Hazen:

$$H_f = \frac{5.6028}{10^8} \times \left(\frac{100}{C}\right)^{1.85} \times \frac{Q^{1.85}}{D^{4.8655}} \quad (\text{m}/100\text{m}) \quad (4.11)$$

$$H_f = \frac{5.6028}{10^8} \times \left(\frac{100}{150}\right)^{1.85} \times \frac{176.21^{1.85}}{0.150^{4.8655}} = 3.86 \quad (\text{m}/100\text{m}) \quad (4.12)$$

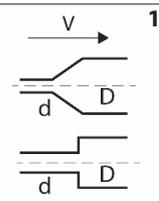
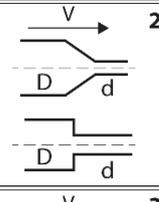
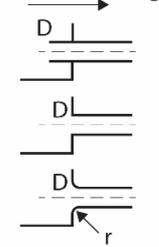
Con el valor de  $H_f = 3.86 \text{ m}/100\text{m}$  de tubería y sabiendo que entre codos y tubería total se dispone de 113.40 metros de tubería equivalente, entonces se tendrá:

$$H_f = \frac{113.40}{100} \times 3.86 = 4.38 \text{ m.c.l.} \quad (4.13)$$

5. Pérdidas de carga a la salida del depósito,  $H_i$  (punto A).

Considerando una conexión normal con arista viva (“flush connection”), según la siguiente tabla, se toma un valore de  $K_i = 0.5$ .

Pérdidas de carga expresadas como proporción de la velocidad,  $V$ :  $H_i = K_i \times \frac{V^2}{2 \times g} \quad (m)$

GRUPO	SINGULARIDAD	Coefficiente $K_i$																														
 <p>1</p>	<p><b>AMPLIACIONES</b></p> <table border="1"> <tr> <td>d/D</td> <td>0.9</td> <td>0.8</td> <td>0.7</td> <td>0.6</td> <td>0.5</td> <td>0.4</td> <td>0.3</td> <td>0.2</td> <td>0.1</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.03</td> <td>0.09</td> <td>0.17</td> <td>0.28</td> <td>0.38</td> <td>0.48</td> <td>0.56</td> <td>0.62</td> <td>0.66</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.04</td> <td>0.13</td> <td>0.26</td> <td>0.41</td> <td>0.56</td> <td>0.71</td> <td>0.83</td> <td>0.92</td> <td>0.98</td> </tr> </table>	d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1		0.03	0.09	0.17	0.28	0.38	0.48	0.56	0.62	0.66		0.04	0.13	0.26	0.41	0.56	0.71	0.83	0.92	0.98	$K_i = 2.6 \times \sin \frac{\theta}{2} \times \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)^2$ $K_i = \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)^2$
d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1																							
	0.03	0.09	0.17	0.28	0.38	0.48	0.56	0.62	0.66																							
	0.04	0.13	0.26	0.41	0.56	0.71	0.83	0.92	0.98																							
 <p>2</p>	<p><b>REDUCCIONES</b></p> <table border="1"> <tr> <td>d/D</td> <td>0.9</td> <td>0.8</td> <td>0.7</td> <td>0.6</td> <td>0.5</td> <td>0.4</td> <td>0.3</td> <td>0.2</td> <td>0.1</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.04</td> <td>0.07</td> <td>0.11</td> <td>0.13</td> <td>0.16</td> <td>0.17</td> <td>0.19</td> <td>0.20</td> <td>0.20</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.10</td> <td>0.18</td> <td>0.26</td> <td>0.32</td> <td>0.38</td> <td>0.42</td> <td>0.46</td> <td>0.48</td> <td>0.50</td> </tr> </table>	d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1		0.04	0.07	0.11	0.13	0.16	0.17	0.19	0.20	0.20		0.10	0.18	0.26	0.32	0.38	0.42	0.46	0.48	0.50	$K_i = 0.8 - \sin \frac{\theta}{2} \times \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)$ $K_i = 0.5 - \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)$
d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1																							
	0.04	0.07	0.11	0.13	0.16	0.17	0.19	0.20	0.20																							
	0.10	0.18	0.26	0.32	0.38	0.42	0.46	0.48	0.50																							
 <p>3</p>	<p><b>ENTRADAS DESDE DEPÓSITOS A TUBERÍAS</b></p> <p><b>Conexión con tubo interior</b></p> <p><b>Conexión con arista viva</b></p> <p><b>Conexión redondeada</b></p> <table border="1"> <tr> <td>r/D</td> <td>0.02</td> <td>0.04</td> <td>0.06</td> <td>0.10</td> <td>0.15</td> </tr> <tr> <td><math>K_i</math></td> <td>0.28</td> <td>0.24</td> <td>0.15</td> <td>0.09</td> <td>0.04</td> </tr> </table>	r/D	0.02	0.04	0.06	0.10	0.15	$K_i$	0.28	0.24	0.15	0.09	0.04	$K_i = 0.78$ $K_i = 0.50$ $K_i = 0.05$																		
r/D	0.02	0.04	0.06	0.10	0.15																											
$K_i$	0.28	0.24	0.15	0.09	0.04																											

Por lo que la pérdida de carga debido a la conexión al depósito (punto A) será:

$$H_i = K_i \times \frac{\rho_p \times V^2}{\rho_{agua} \times 2 \times g} = 0.5 \times \frac{1.23 \times 2.77^2}{1 \times 2 \times 9.81} = 0.24 \text{ m.c.l.} \quad (4.14)$$

6. Pérdidas de carga a la descarga,  $H_d$  (punto D).

Al ser una descarga a presión atmosférica, sólo se tiene en cuenta la pérdida de carga debido a la velocidad de descarga en dicho punto, y cuya expresión general es:

$$H_d = \frac{V^2}{2 \times g} = \frac{2.77^2}{2 \times 9.81} = 0.39 \text{ m.c.l.} \quad (4.15)$$

La pérdida de carga total ( $H_t$ ), será:

$$H_t = H_f + H_i + H_d = 4.38 + 0.24 + 0.39 = 5.17 \text{ m.c.l.} \quad (4.16)$$

7. Cálculo de la altura dinámica o manométrica total, o TDH (“*Total Dynamic Head*”).

El valor de TDH para este sistema hidráulico viene dado por:

$$TDH = (20 \text{ m} - 1 \text{ m}) + H_t = 19 + 5.17 = 24.17 \text{ m.c.l.} \quad (4.17)$$

Para seleccionar la bomba adecuada, debido a que los fabricantes proporcionan la información en base al empleo de agua como principal fluido, debemos corregir los 24.17 metros de columna de pulpa (m.c.l.) a metros de columna de agua (m.c.a.) (ANEFA, 2020; Volk, 2013; Warman, 2000). Para ello se emplea la gráfica siguiente entrando con los datos proporcionado por el enunciado del problema, como es la densidad de las partículas sólidas ( $2.65 \text{ g/cm}^3$ ), el tamaño medio de partícula ( $K_{50} = 211 \text{ micras}$ ) y la concentración de sólidos en peso ( $C_w = 30\%$ ).

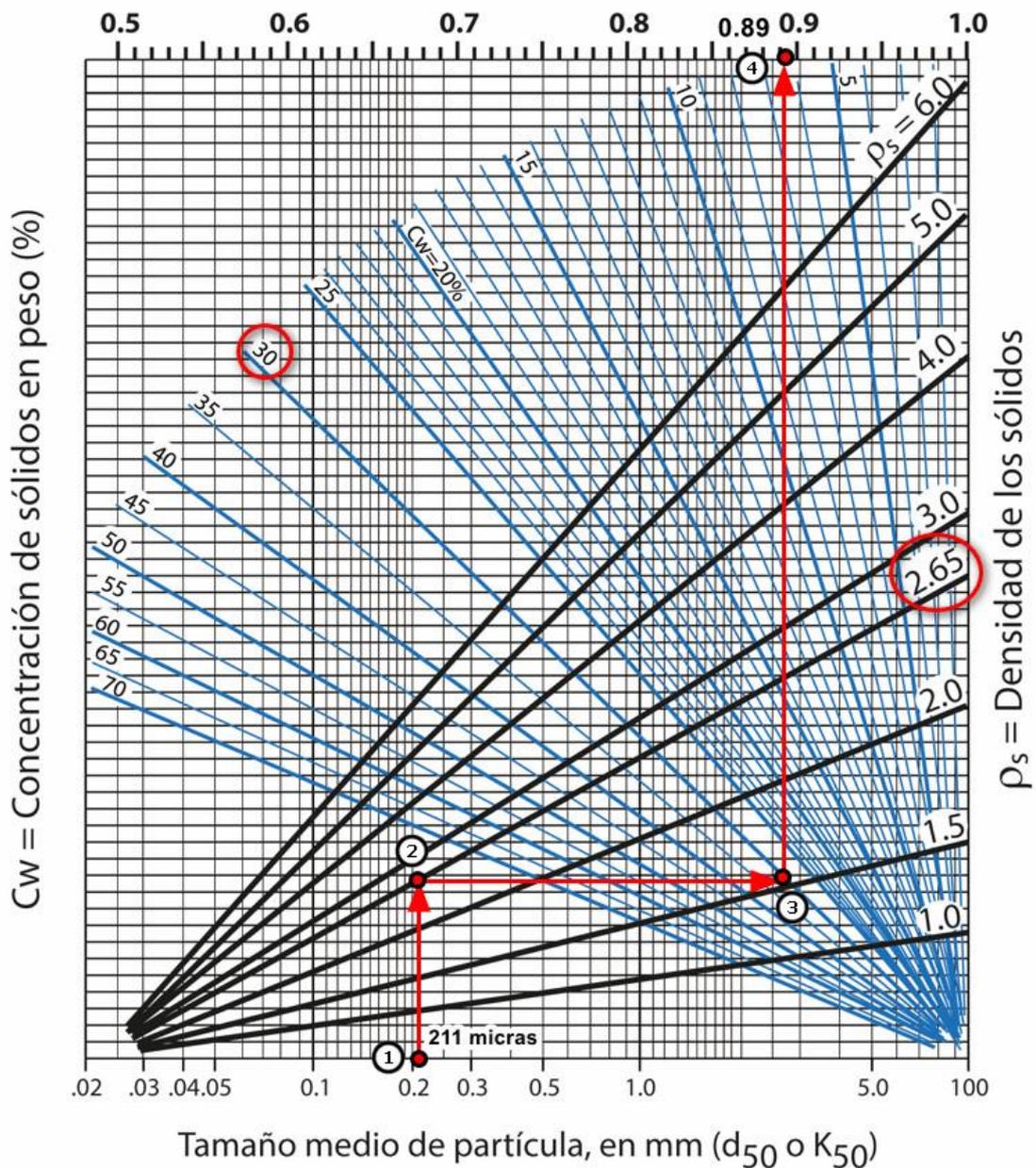
Con estos datos, entrando en dicha gráfica se obtiene un HR (o ER) igual 0.89, lo que se puede expresar como:

$$HR = \frac{TDH_{pulpa}}{TDH_{agua}} \quad (4.18)$$

Para nuestro caso, la altura manométrica total expresada en columna de agua valdrá:

$$TDH_{agua} = \frac{TDH_{pulpa}}{HR} = \frac{24.17 \text{ m.c.l.}}{0.89} = 27.16 \text{ m.c.a.} \quad (4.19)$$

$$HR = \frac{TDH_{pulpa}}{TDH_{agua}} \quad ER = \frac{\text{Eficiencia}_{pulpa}}{\text{Eficiencia}_{agua}}$$



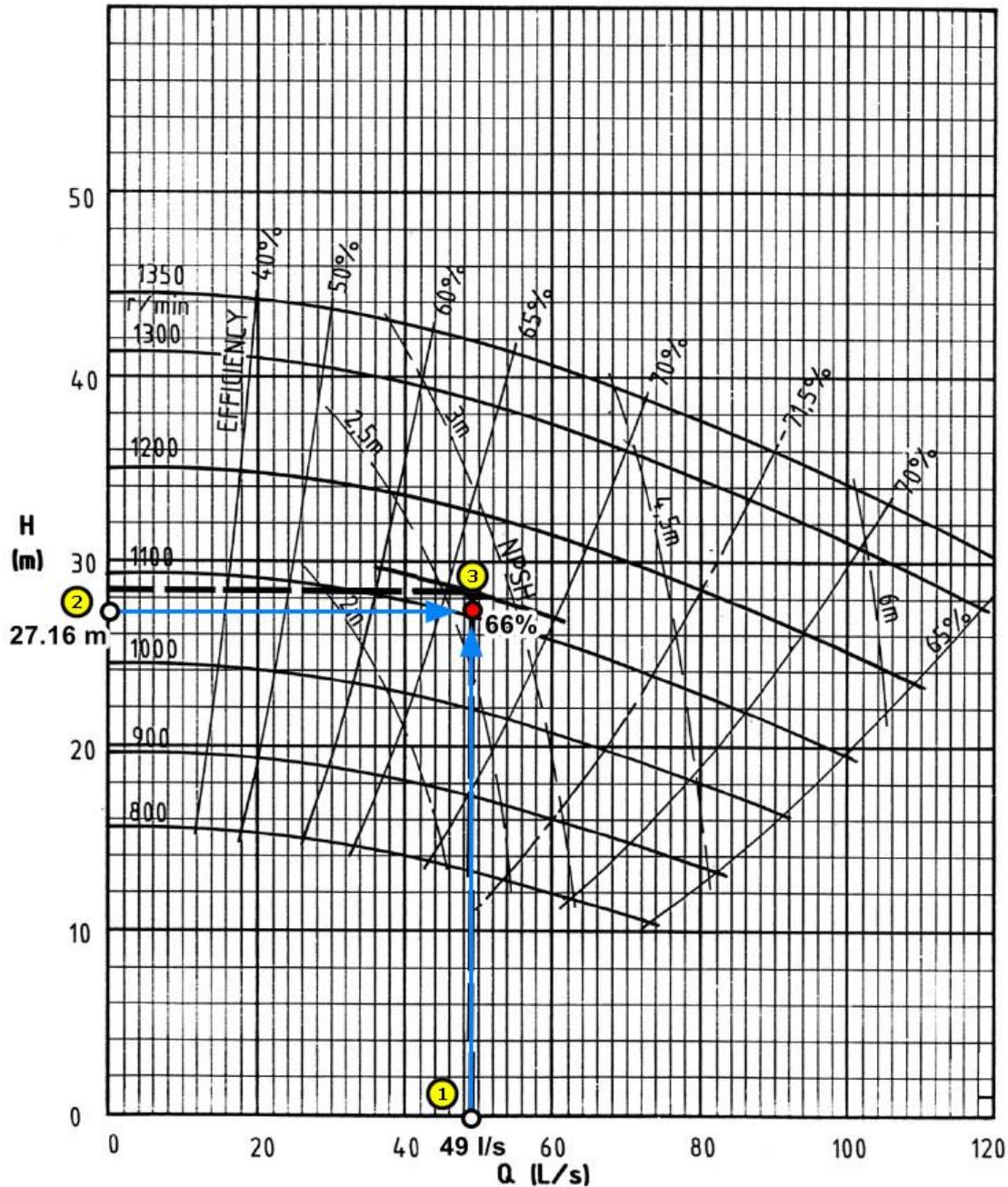
PMP2022

8. Selección de la bomba centrífuga.

Con el valor calculado de  $TDH_{agua}$  de 27.16 m.c.a. y con el caudal calculado anteriormente de  $Q = 176.21 \text{ m}^3/\text{h}$  (o aprox. 49 l/s), se puede entrar en las

curvas características Q-H de los fabricantes de bombas y seleccionar la bomba adecuada a nuestra instalación de bombeo de pulpas.

Por ejemplo, para la curva característica Q-H que se facilita (Warman, 2000), la bomba sería una bomba trabajando a un rendimiento del 66%, a 1100 rpm y con un NPSHr de 2.6 m.c.a.



9. Cálculo de la potencia de la bomba.

Con el valor calculado de  $TDH_{\text{agua}}$  de 27.16 m.c.a., el caudal calculado de  $Q = 176.21 \text{ m}^3/\text{h}$ , el rendimiento obtenido del 66%, la densidad de la pulpa de 1.23

t/m<sup>3</sup> podemos calcular la potencia en kW que necesitará la bomba a través de la siguiente expresión:

$$N_{kW} = \frac{Q \times TDH_{agua} \times \rho_{pulpa}}{\frac{\eta}{100} \times 360} = \frac{176.21 \times 27.16 \times 1.23}{0.66 \times 360} = 24.78 \text{ kW} \quad (4.20)$$

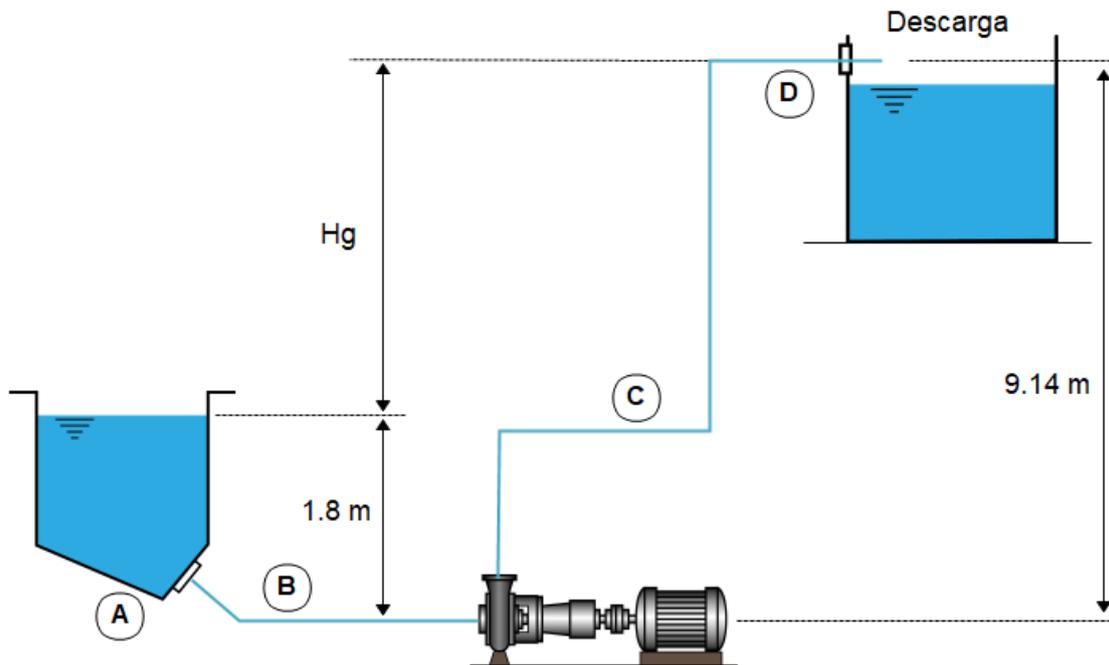
Se recomienda incrementar esta cantidad en un 25% debido a pérdidas en la transmisión y pérdidas en el rendimiento por causas de desgastes en las partes hidráulicas a medio plazo. Por lo que la potencia a instalar serían 30.97 kW.

#### Referencias:

- ANEFA. (2020). *Manual de Áridos para el Siglo XXI* (ANEFA, Ed.).
- Bouso, J. L. (1993). *Manual de bombeo de pulpas* (Fueyo, Ed.). ERAL, Equipos y Procesos S.A.
- Volk, M. (2013). *Pump Characteristics and Applications* (C. Press, Ed. 3rd ed.).  
<https://doi.org/https://doi.org/10.1201/b15559>
- Warman, L. (2000). *Warman Slurry Pumping Handbook*. Warman Slurry Pumping Handbook.

EJERCICIO 5 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO

5. Se dispone el siguiente sistema de bombeo de pulpas que bombea una pulpa compuesta por arena sílice con densidad específica de  $2.7 \text{ t/m}^3$  ( $\rho_s$ ) y agua. Los sólidos tienen una granulometría característica media de  $K_{50}$  de 250 micras, la concentración de sólidos en peso,  $C_w$ , es del 40%. El tonelaje de sólidos es de 75 t/h. La longitud de la tubería es de 100 metros lineales con 3 codos o curvas de radio amplio ( $R=3D$ ). La tubería de descarga alimenta un depósito que se encuentra a 9.14 metros (eje de la tubería de descarga). Considerar un diámetro,  $D$ , de tubería de 100 mm. Se pide calcular la tubería idónea para bombear la pulpa sílice, la altura dinámica total (TDH), y la selección de la bomba idónea para dicha instalación. Emplea el ábaco de Warman para la obtención del coeficiente de fricción de Darcy,  $f$ .



PMP2022

Solución:

1. Cálculo del caudal a bombear,  $Q$ , concentración de sólidos en volumen,  $C_v$ , y peso específico de la pulpa,  $\rho_p$ .

Para el cálculo de la concentración de sólidos en volumen hacemos uso de la siguiente expresión:

$$C_v = \frac{\frac{C_w}{100} \times \rho_l}{\rho_s - \frac{C_w}{100} \times (\rho_s - \rho_l)} \times 100 \quad (5.1)$$

Por lo que, sustituyendo:

$$C_v = \frac{0.40 \times 1.0}{2.7 - 0.40 \times (2.7 - 1.0)} \times 100 = 19.80\% \quad (5.2)$$

Para el cálculo de la densidad de la pulpa empleamos la siguiente expresión:

$$\frac{C_v}{100} = \frac{(\rho_p - \rho_l)}{(\rho_s - \rho_l)} \quad (5.3)$$

Por lo que, sustituyendo:

$$\rho_p = \frac{19.80}{100} \times (2.7 - 1.0) + 1.0 = 1.34 \text{ t/m}^3 \quad (5.4)$$

Para el cálculo del caudal de pulpa se establece que:

$$\left. \begin{array}{l} 75 \text{ t}_{\text{sólidos}}/\text{h} \rightarrow 40\% (C_w) \\ y \rightarrow 100\% \end{array} \right| y = 187.5 \text{ t}_{\text{pulpa}}/\text{h} \quad (5.5)$$

Sabiendo que la densidad de la pulpa es  $1.34 \text{ t/m}^3$ , entonces:

$$Q_{\text{pulpa}} = \frac{187.5 \text{ t/h}}{1.34 \text{ t/m}^3} = 139.93 \text{ m}^3/\text{h} \quad (5.6)$$

También se puede emplear la siguiente expresión para el cálculo del caudal de pulpa,  $Q_{\text{pulpa}}$  ( $\text{m}^3/\text{h}$ ) (Metso:Outotec, 2020):

$$Q_{\text{pulpa}} = tph_{\text{sólidos}} \times \left( \frac{1}{\rho_s} + \left( \frac{100}{C_w \%} - 1 \right) \right) \quad (5.7)$$

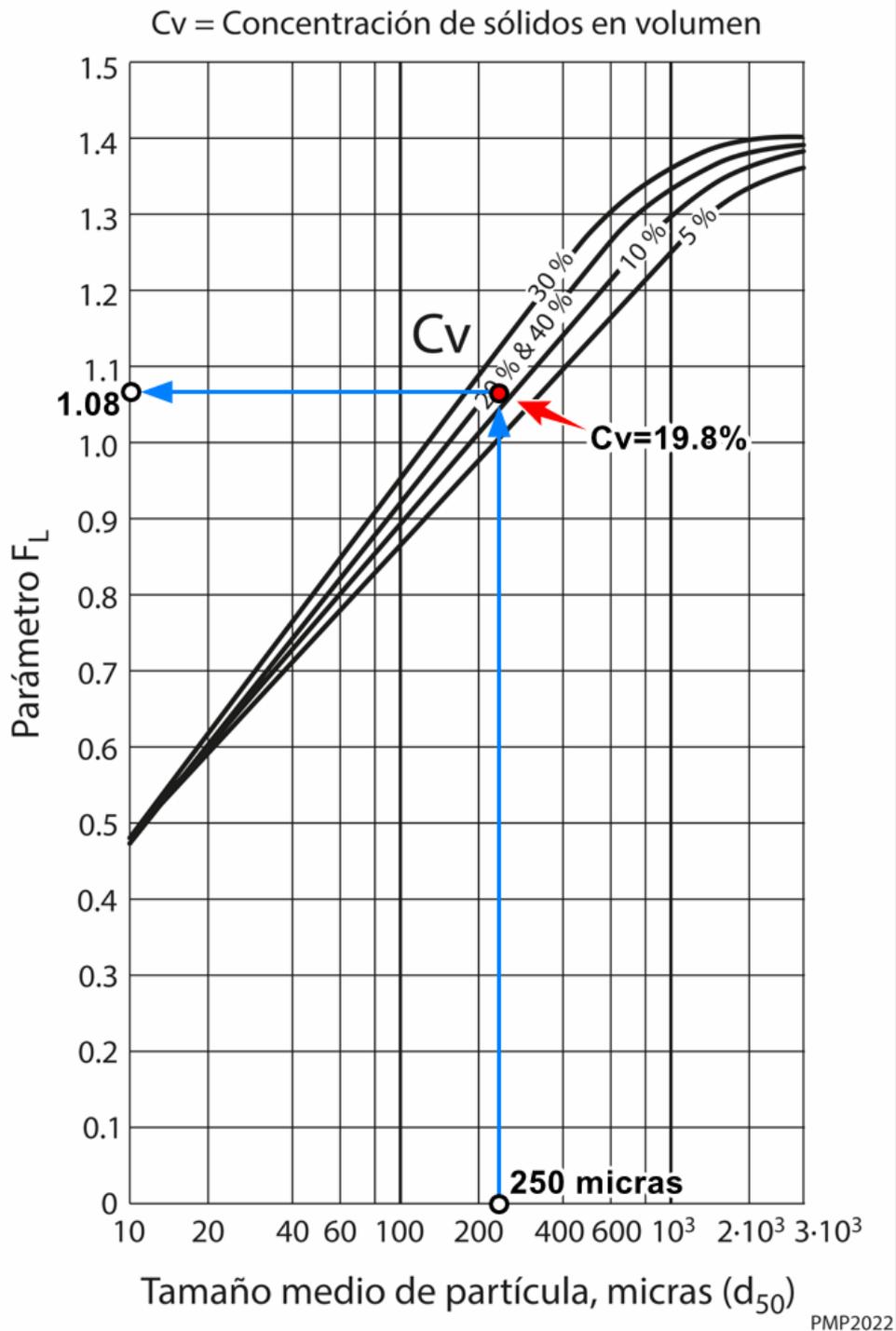
$$Q_{\text{pulpa}} = 75 \times \left( \frac{1}{2.7} + \left( \frac{100}{40} - 1 \right) \right) = 140.28 \text{ m}^3/\text{h}$$

## 2. Cálculo del diámetro óptimo de la tubería, la velocidad límite y la velocidad real de transporte.

Para estos cálculos vamos a utilizar la expresión de la velocidad límite según Durand (ANEFA, 2020):

$$V_l = F_l \times \sqrt{2 \times g \times D \times \frac{\rho_s - \rho_l}{\rho_l}} \quad (5.8)$$

Para la determinación del factor  $F_l$  se entra en el siguiente gráfico (ANEFA, 2020; Bouso, 1993; Warman, 2000) del que se obtiene un valor aproximado de 1.08. Con este valor se puede entrar en la anterior expresión de Durand y calcular la velocidad límite.



La velocidad límite valdrá:

$$V_l = 1.08 \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.100 \times \frac{2.7 - 1.0}{1.0}} = 1.97 \text{ m/s} \quad (5.9)$$

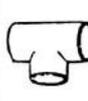
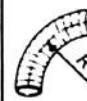
Ahora se comprueba que la velocidad real de transporte es superior que la velocidad límite:

$$V = \frac{Q}{\left(\frac{\pi \times D^2}{4}\right)} = \frac{139.93 \text{ m}^3/\text{h}}{\left(\frac{\pi \times 0.100^2}{4}\right)} = 4.95 \text{ m/s} \quad (5.10)$$

Por lo tanto, el diámetro seleccionado es adecuado ya que la velocidad a la que llevará la pulpa es superior a la velocidad límite calculada.

### 3. Cálculo de las pérdidas de carga en la conducción.

Lo primero es calcular la longitud equivalente de los accesorios y singularidades que en este ejemplo se trata de 3 curvas de gran diámetro (R=3D), y que entrando en la tabla adjunta se obtiene una longitud equivalente de 2.13 m.

									
INTERNAL DIAMETER or N.B.	Radius More Than 3 x N.B.	Radius is 2 x N.B.			Minimum Radius 10 x N.B.				
m m	EQUIV. LENGTH IN m OF STRAIGHT PIPE GIVING EQUIVALENT RESISTANCE TO FLOW								
25	0.52	0.70	0.82	1.77	0.30	2.56	—	0.37	—
32	0.73	0.91	1.13	2.38	0.40	3.29	—	0.49	—
40	0.85	1.10	1.31	2.74	0.49	3.44	1.19	0.58	—
50	1.07	1.40	1.68	3.35	0.55	3.66	1.43	0.73	—
65	1.28	1.65	1.98	4.27	0.70	4.60	1.52	0.85	—
80	1.55	2.07	2.47	5.18	0.85	4.88	1.92	1.04	0.20
90	1.83	2.44	2.90	5.79	1.01	—	—	1.22	—
100	2.13	2.77	3.35	6.71	1.16	7.62	2.19	1.40	0.23
115	2.41	3.05	3.66	7.32	1.28	—	—	1.58	—
125	2.71	3.66	4.27	8.23	1.43	13.11	3.05	1.77	0.30
150	3.35	4.27	4.88	10.06	1.55	18.29	3.11	2.13	0.37
200	4.27	5.49	6.40	13.11	2.41	19.81	7.92	2.74	0.82
250	5.18	6.71	7.92	17.07	2.99	21.34	10.67	3.47	0.61
300	6.10	7.92	9.75	20.12	3.35	28.96	15.85	4.08	0.76
350	7.01	9.45	10.97	23.16	4.27	28.96	—	4.88	0.91
400	8.23	10.67	12.80	26.52	4.88	—	—	5.49	1.04
450	9.14	12.19	14.02	30.48	5.49	—	—	6.22	1.16
500	10.36	13.11	15.85	33.53	6.10	—	—	7.32	1.25

La longitud equivalente de la tubería considerando las singularidades será:

$$L = 100 \text{ m} + 3 \times 2.13 \text{ m} = 106.39 \text{ m} \quad (5.11)$$

4. Cálculo de la viscosidad dinámica ( $\mu_p$ ) y la viscosidad cinemática

La viscosidad dinámica o absoluta para la pulpa, según la siguiente expresión, vale:

$$\mu_p = \mu_{agua} \times \left( 1 + 2.5 \times C_v + 10.05 \times C_v^2 + 0.000273 \times e^{16.6 \times C_v} \right) \quad (5.12)$$

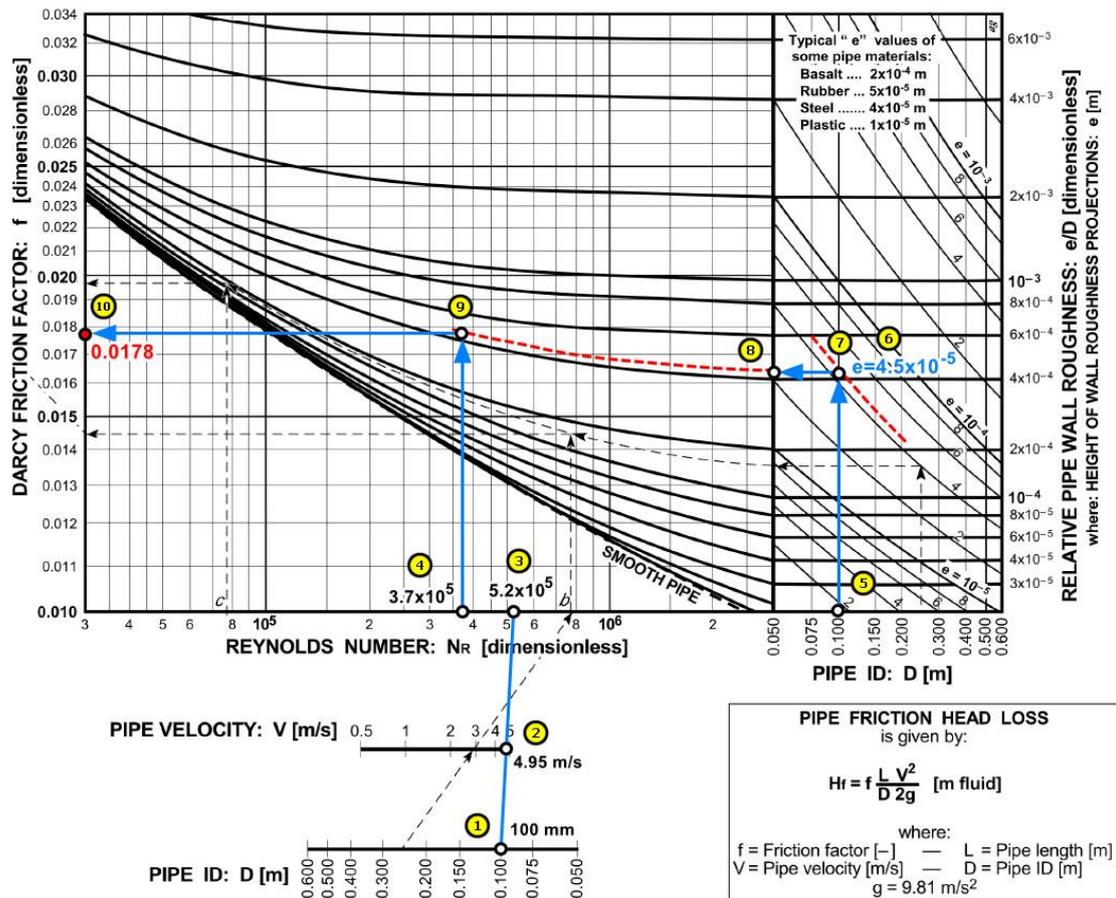
$$\mu_p = 0.001 \times \left( 1 + 2.5 \times 0.198 + 10.05 \times 0.198^2 + 0.000273 \times e^{16.6 \times 0.198} \right) = 0.0019 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2 \quad (5.13)$$

La viscosidad cinemática valdrá:

$$\mu_{cinematica} = \frac{\mu_p}{\rho_p} = \frac{0.0019 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2}{1340 \text{ kg}/\text{m}^3} = 1.42 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} = 1.42 \text{ cSt} \quad (5.14)$$

5. Obtención del factor de fricción de Darcy,  $f$ .

Ahora se empleará el ábaco de Warman (Warman, 2000), que, para una tubería de acero comercial, con una rugosidad de 0.045 mm ( $e = 0.000045 \text{ m}$ ) y un diámetro de tubería de 100 mm, nos da una rugosidad relativa de 0.00045. Al número de Reynolds obtenido ( $5.2 \times 10^5$ ) se le debe dividir por la viscosidad cinemática anteriormente calculada (1.42 cSt), dando  $3.7 \times 10^5$ , que es el que hay que entrar ahora. El resto de los pasos se facilitan en la figura adjunta y que llevan a la obtención de un factor de fricción de Darcy,  $f$ , de 0.0178 (ver diagrama adjunto).



Con el valor de  $f = 0.0178$  se entra en la expresión de Darcy (ANEFA, 2020) y se calculan las pérdidas de carga debido a la fricción en la tubería y accesorios:

$$H_f = f \times \frac{L}{D} \times \frac{V^2}{2 \times g} \quad (5.15)$$

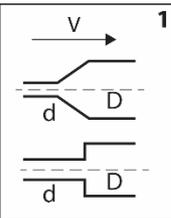
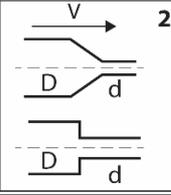
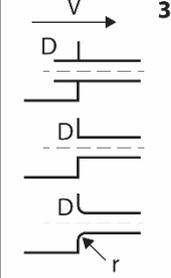
Sustituyendo las variables por sus valores se obtiene:

$$H_f = 0.0178 \times \frac{106.39}{0.100} \times \frac{4.95^2}{2 \times 9.81} = 23.65 \text{ m.c.l.} \quad (5.16)$$

6. Pérdidas de carga a la salida del depósito,  $H_i$  (punto A).

Considerando una conexión normal con arista viva (“flush connection”), según la siguiente tabla, se toma un valor de  $K_i = 0.5$ .

Pérdidas de carga expresadas como proporción de la velocidad,  $V$ :  $H_i = K_i \times \frac{V^2}{2 \times g} (m)$

GRUPO	SINGULARIDAD	Coefficiente $K_i$																														
 <p>1</p>	<p><b>AMPLIACIONES</b></p> <table border="1"> <tr> <td>d/D</td> <td>0.9</td> <td>0.8</td> <td>0.7</td> <td>0.6</td> <td>0.5</td> <td>0.4</td> <td>0.3</td> <td>0.2</td> <td>0.1</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.03</td> <td>0.09</td> <td>0.17</td> <td>0.28</td> <td>0.38</td> <td>0.48</td> <td>0.56</td> <td>0.62</td> <td>0.66</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.04</td> <td>0.13</td> <td>0.26</td> <td>0.41</td> <td>0.56</td> <td>0.71</td> <td>0.83</td> <td>0.92</td> <td>0.98</td> </tr> </table>	d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1		0.03	0.09	0.17	0.28	0.38	0.48	0.56	0.62	0.66		0.04	0.13	0.26	0.41	0.56	0.71	0.83	0.92	0.98	$K_i = 2.6 \times \sin \frac{\theta}{2} \times \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)^2$ $K_i = \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)^2$
d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1																							
	0.03	0.09	0.17	0.28	0.38	0.48	0.56	0.62	0.66																							
	0.04	0.13	0.26	0.41	0.56	0.71	0.83	0.92	0.98																							
 <p>2</p>	<p><b>REDUCCIONES</b></p> <table border="1"> <tr> <td>d/D</td> <td>0.9</td> <td>0.8</td> <td>0.7</td> <td>0.6</td> <td>0.5</td> <td>0.4</td> <td>0.3</td> <td>0.2</td> <td>0.1</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.04</td> <td>0.07</td> <td>0.11</td> <td>0.13</td> <td>0.16</td> <td>0.17</td> <td>0.19</td> <td>0.20</td> <td>0.20</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.10</td> <td>0.18</td> <td>0.26</td> <td>0.32</td> <td>0.38</td> <td>0.42</td> <td>0.46</td> <td>0.48</td> <td>0.50</td> </tr> </table>	d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1		0.04	0.07	0.11	0.13	0.16	0.17	0.19	0.20	0.20		0.10	0.18	0.26	0.32	0.38	0.42	0.46	0.48	0.50	$K_i = 0.8 - \sin \frac{\theta}{2} \times \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)$ $K_i = 0.5 - \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)$
d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1																							
	0.04	0.07	0.11	0.13	0.16	0.17	0.19	0.20	0.20																							
	0.10	0.18	0.26	0.32	0.38	0.42	0.46	0.48	0.50																							
 <p>3</p>	<p><b>ENTRADAS DESDE DEPÓSITOS A TUBERÍAS</b></p> <p><b>Conexión con tubo interior</b></p> <p><b>Conexión con arista viva</b></p> <p><b>Conexión redondeada</b></p> <table border="1"> <tr> <td>r/D</td> <td>0.02</td> <td>0.04</td> <td>0.06</td> <td>0.10</td> <td>0.15</td> </tr> <tr> <td><math>K_j</math></td> <td>0.28</td> <td>0.24</td> <td>0.15</td> <td>0.09</td> <td>0.04</td> </tr> </table>	r/D	0.02	0.04	0.06	0.10	0.15	$K_j$	0.28	0.24	0.15	0.09	0.04	$K_i = 0.78$ $K_i = 0.50$ $K_i = 0.05$																		
r/D	0.02	0.04	0.06	0.10	0.15																											
$K_j$	0.28	0.24	0.15	0.09	0.04																											

Por lo que la pérdida de carga debido a la conexión al depósito (punto A) será:

$$H_i = K_i \times \frac{\rho_p \times V^2}{2 \times g} = 0.5 \times \frac{1.34 \times 4.95^2}{2 \times 9.81} = 0.84 \text{ m.c.l.} \quad (5.17)$$

7. Pérdidas de carga a la descarga,  $H_d$  (punto D).

Al ser una descarga a presión atmosférica, sólo se tiene en cuenta la pérdida de carga debido a la velocidad de descarga en dicho punto, y cuya expresión general es:

$$H_d = \frac{V^2}{2 \times g} = \frac{4.95^2}{2 \times 9.81} = 1.25 \text{ m.c.l.} \quad (5.18)$$

La pérdida de carga total ( $H_t$ ), será:

$$H_t = H_f + H_i + H_d = 23.65 + 0.84 + 1.25 = 25.74 \text{ m.c.l.} \quad (5.19)$$

8. Cálculo de la altura dinámica o manométrica total, o TDH (“Total Dynamic Head”).

El valor de TDH para este sistema hidráulico viene dado por:

$$TDH = (9.14 \text{ m} - 1.8 \text{ m}) + H_f = 7.34 + 25.74 = 33.08 \text{ m.c.l.} \quad (5.20)$$

Para seleccionar la bomba adecuada, debido a que los fabricantes proporcionan la información en base al empleo de agua como principal fluido, debemos corregir los 33.08 metros de columna de pulpa (m.c.l.) a metros de columna de agua (m.c.a.) (ANEFA, 2020; Volk, 2013; Warman, 2000). Para ello se emplea la gráfica siguiente entrando con los datos proporcionado por el enunciado del problema, como es la densidad de las partículas sólidas ( $2.7 \text{ g/cm}^3$ ), el tamaño medio de partícula ( $K_{50} = 250$  micras) y la concentración de sólidos en peso ( $C_w = 40\%$ ).

Con estos datos, entrando en dicha gráfica se obtiene un HR (o ER) igual 0.84, lo que se puede expresar como:

$$HR = \frac{TDH_{pulpa}}{TDH_{agua}} \quad (5.21)$$

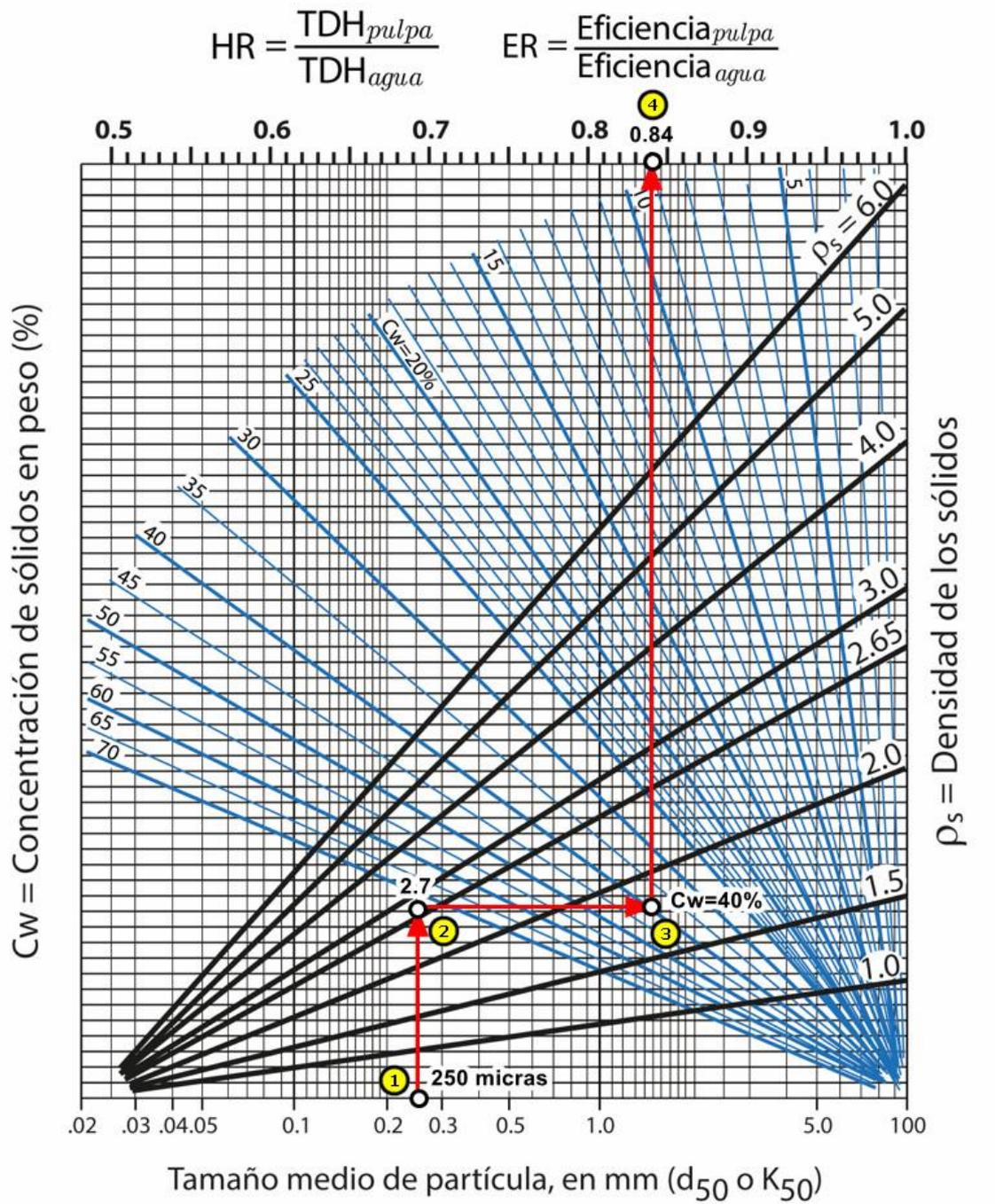
Para nuestro caso, la altura manométrica total expresada en columna de agua valdrá:

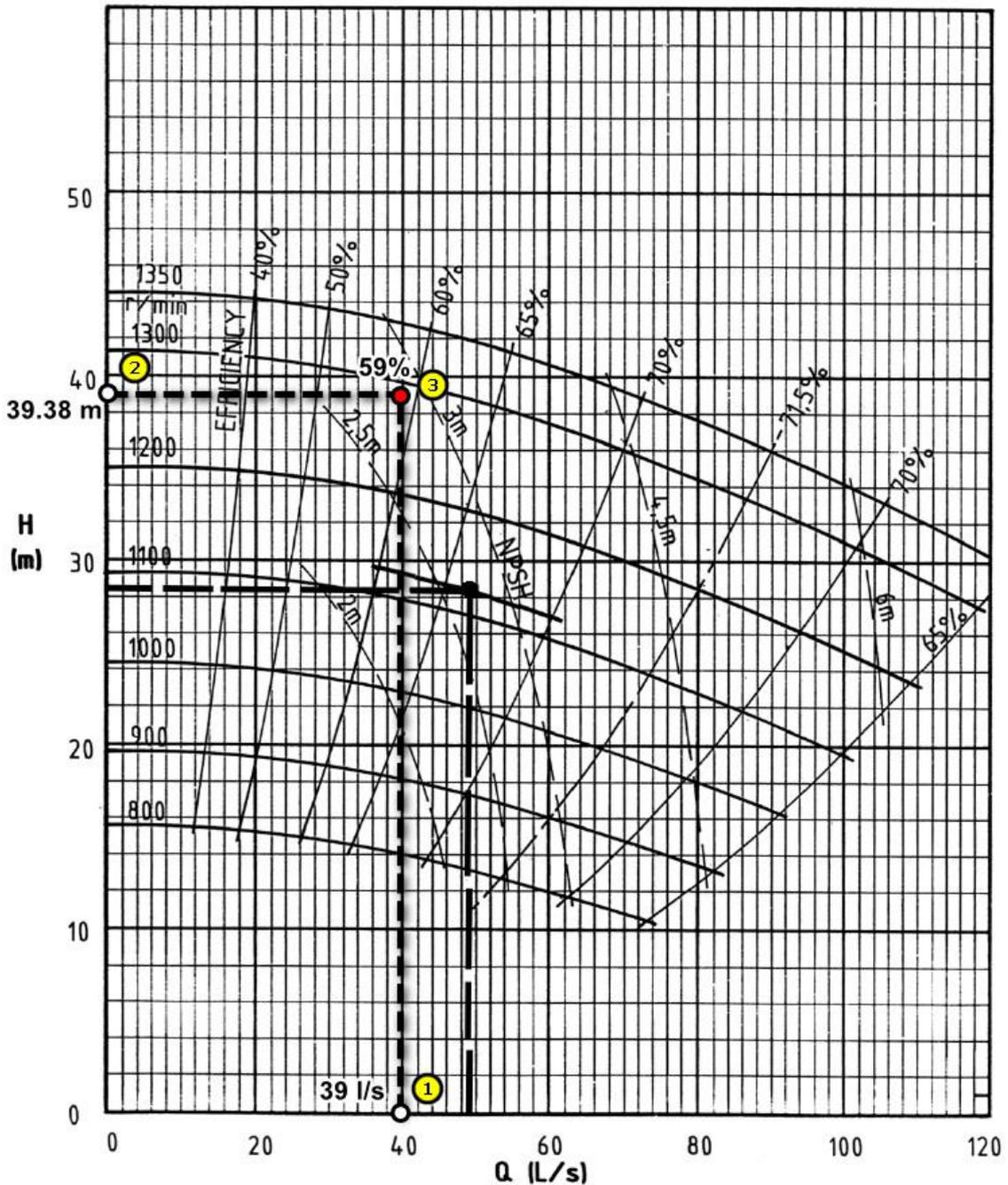
$$TDH_{agua} = \frac{TDH_{pulpa}}{HR} = \frac{33.08 \text{ m.c.l.}}{0.84} = 39.38 \text{ m.c.a.} \quad (5.22)$$

### 9. Selección de la bomba centrífuga.

Con el valor calculado de  $TDH_{agua}$  de 39.38 m.c.a. y con el caudal calculado anteriormente de  $Q = 139.93 \text{ m}^3/\text{h}$  (o aprox. 39 l/s), se puede entrar en las curvas características Q-H de los fabricantes de bombas y seleccionar la bomba adecuada a nuestra instalación de bombeo de pulpas.

Por ejemplo, para la curva característica Q-H que se facilita (Warman, 2000), la bomba sería una bomba trabajando a un rendimiento del 59%, a 1290 rpm y con un NPSHr de 2.8 m.c.a.





10. Cálculo de la potencia de la bomba.

Con el valor calculado de  $TDH_{agua}$  de 39.38 m.c.a., el caudal calculado de  $Q = 139.93 \text{ m}^3/\text{h}$ , suponiendo un rendimiento obtenido del 59%, la densidad de la pulpa de  $1.34 \text{ t/m}^3$  podemos calcular la potencia en kW que necesitará la bomba a través de la siguiente expresión:

$$N_{kw} = \frac{Q \times TDH_{agua} \times \rho_{pulpa}}{\frac{\eta}{100} \times 360} = \frac{139.93 \times 39.38 \times 1.34}{0.59 \times 360} = 34.77 \text{ kW} \quad (5.23)$$

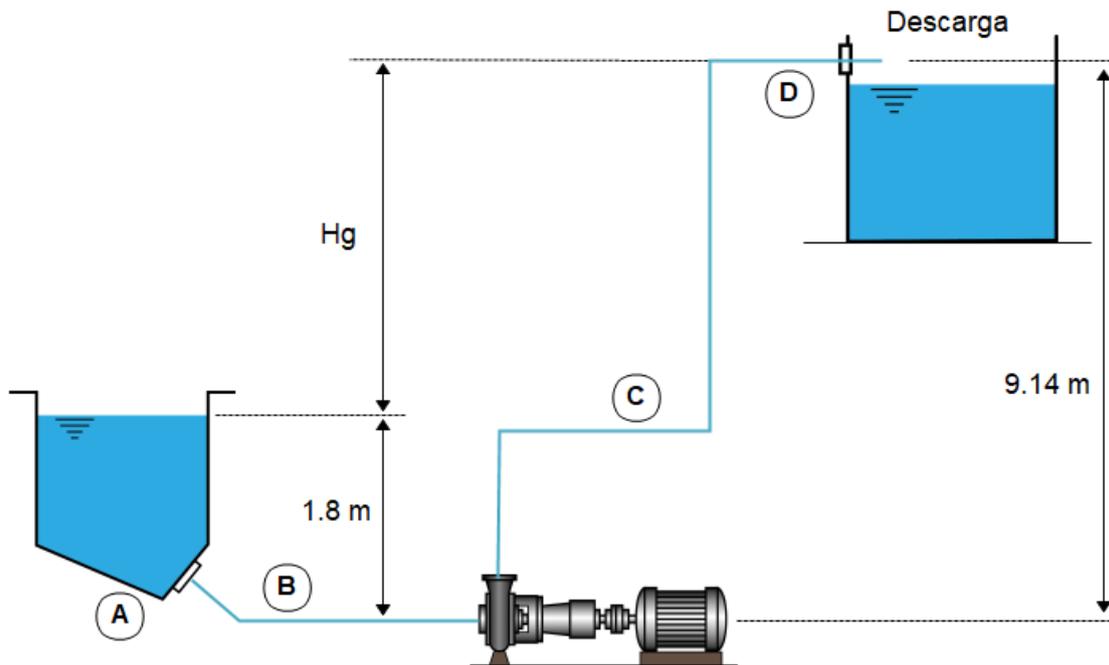
Se recomienda incrementar esta cantidad en un 25% debido a pérdidas en la transmisión y pérdidas en el rendimiento por causas de desgastes en las partes hidráulicas a medio plazo. Por lo que la potencia a instalar serían 43.46 kW.

#### Referencias:

- ANEFA. (2020). *Manual de Áridos para el Siglo XXI* (ANEFA, Ed.).
- Bouso, J. L. (1993). *Manual de bombeo de pulpas* (Fueyo, Ed.). ERAL, Equipos y Procesos S.A.
- Metso:Outotec. (2020). *Guidelines in slurry pumping. Slurry Pump Handbook* (8th ed.). Metso Minerals (Sala) AB. [www.metso.com/pumps](http://www.metso.com/pumps)
- Volk, M. (2013). *Pump Characteristics and Applications* (C. Press, Ed. 3rd ed.). <https://doi.org/https://doi.org/10.1201/b15559>
- Warman, L. (2000). *Warman Slurry Pumping Handbook*. Warman Slurry Pumping Handbook.

EJERCICIO 6 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO

6. Se dispone el siguiente sistema de bombeo de pulpas que bombea una pulpa compuesta por arena sílice con densidad específica de  $2.7 \text{ t/m}^3$  ( $\rho_s$ ) y agua. Los sólidos tienen una granulometría característica media de  $K_{50}$  de 250 micras, la concentración de sólidos en peso,  $C_w$ , es del 40%. El tonelaje de sólidos es de 75 t/h. La longitud de la tubería es de 100 metros lineales con 3 codos o curvas de radio amplio ( $R=3D$ ). La tubería de descarga alimenta un depósito que se encuentra a 9.14 metros (eje de la tubería de descarga). Considerar un diámetro,  $D$ , de tubería de 100 mm. Se pide calcular la tubería idónea para bombear la pulpa sílice, la altura dinámica total (TDH), y la selección de la bomba idónea para dicha instalación. Emplea el diagrama de Moody para la obtención del coeficiente de fricción de Darcy,  $f$ .



PMP2022

Solución:

1. Cálculo del caudal a bombear,  $Q$ , concentración de sólidos en volumen,  $C_v$ , y peso específico de la pulpa,  $\rho_p$ .

Para el cálculo de la concentración de sólidos en volumen hacemos uso de la siguiente expresión:

$$C_v = \frac{\frac{C_w}{100} \times \rho_l}{\rho_s - \frac{C_w}{100} \times (\rho_s - \rho_l)} \times 100 \quad (6.1)$$

Por lo que, sustituyendo:

$$C_V = \frac{0.40 \times 1.0}{2.7 - 0.40 \times (2.7 - 1.0)} \times 100 = 19.80\% \quad (6.2)$$

Para el cálculo de la densidad de la pulpa empleamos la siguiente expresión:

$$\frac{C_V}{100} = \frac{(\rho_p - \rho_l)}{(\rho_s - \rho_l)} \quad (6.3)$$

Por lo que, sustituyendo:

$$\rho_p = \frac{19.80}{100} \times (2.7 - 1.0) + 1.0 = 1.34 \text{ t/m}^3 \quad (6.4)$$

Para el cálculo del caudal de pulpa se establece que:

$$\left. \begin{array}{l} 75 \text{ t}_{\text{sólidos}}/\text{h} \rightarrow 40\% (C_w) \\ y \rightarrow 100\% \end{array} \right| y = 187.5 \text{ t}_{\text{pulpa}}/\text{h} \quad (6.5)$$

Sabiendo que la densidad de la pulpa es  $1.34 \text{ t/m}^3$ , entonces:

$$Q_{\text{pulpa}} = \frac{187.5 \text{ t/h}}{1.34 \text{ t/m}^3} = 139.93 \text{ m}^3/\text{h} \quad (6.6)$$

También se puede emplear la siguiente expresión para el cálculo del caudal de pulpa,  $Q_{\text{pulpa}}$  ( $\text{m}^3/\text{h}$ ) (Metso:Outotec, 2020):

$$Q_{\text{pulpa}} = \text{tph}_{\text{sólidos}} \times \left( \frac{1}{\rho_s} + \left( \frac{100}{C_w \%} - 1 \right) \right) \quad (6.7)$$

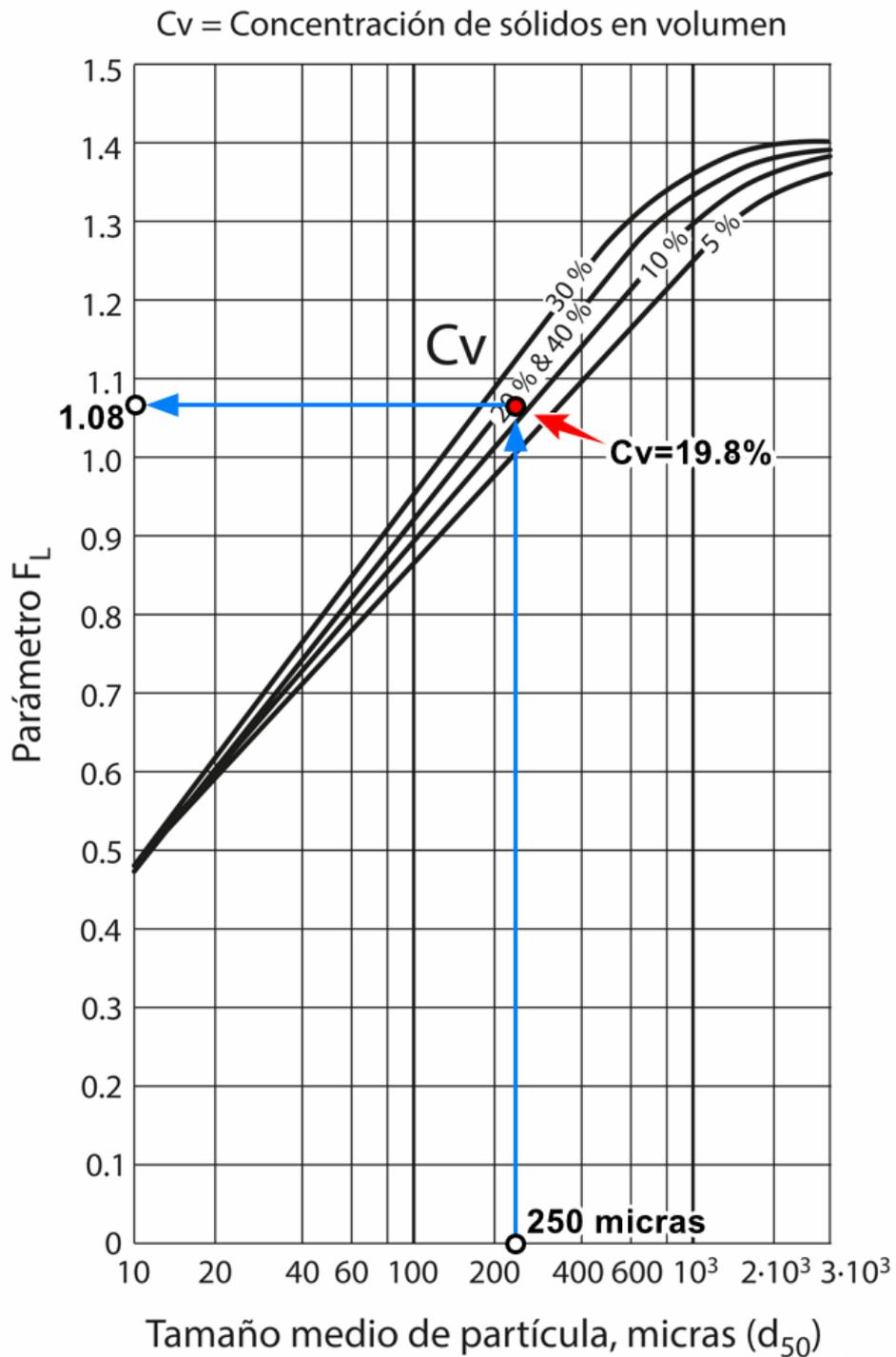
$$Q_{\text{pulpa}} = 75 \times \left( \frac{1}{2.7} + \left( \frac{100}{40} - 1 \right) \right) = 140.28 \text{ m}^3/\text{h}$$

## 2. Cálculo del diámetro óptimo de la tubería, la velocidad límite y la velocidad real de transporte.

Para estos cálculos vamos a utilizar la expresión de la velocidad límite según Durand (ANEFA, 2020):

$$V_l = F_l \times \sqrt{2 \times g \times D \times \frac{\rho_s - \rho_l}{\rho_l}} \quad (6.8)$$

Para la determinación del factor  $F_l$  se entra en el siguiente gráfico (ANEFA, 2020; Bouso, 1993; Warman, 2000) del que se obtiene un valor aproximado de 1.08. Con este valor se puede entrar en la anterior expresión de Durand y calcular la velocidad límite.



La velocidad límite valdrá:

$$V_l = 1.08 \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.100 \times \frac{2.7 - 1.0}{1.0}} = 1.97 \text{ m/s} \quad (6.9)$$

Ahora se comprueba que la velocidad real de transporte es superior que la velocidad límite:

$$V = \frac{Q}{\left(\frac{\pi \times D^2}{4}\right)} = \frac{139.93 \text{ m}^3/\text{h}}{\left(\frac{\pi \times 0.100^2}{4}\right)} = 4.95 \text{ m/s} \quad (6.10)$$

Por lo tanto, el diámetro seleccionado es adecuado ya que la velocidad a la que llevará la pulpa es superior a la velocidad límite calculada.

### 3. Cálculo de las pérdidas de carga en la conducción.

Lo primero es calcular la longitud equivalente de los accesorios y singularidades que en este ejemplo se trata de 3 curvas de gran diámetro (R=3D), y que entrando en la tabla adjunta se obtiene una longitud equivalente de 2.13 m.

	 Radius More Than 3 x N.B.	 Radius is 2 x N.B.			 Minimum Radius 10 x N.B.				
INTERNAL DIAMETER or N.B. m m	90° Long Radius Bend	90° Short Radius Bend	Elbow	Tee	Rubber Hose	Diaphragm Valve Full Open	Full Bore Valve Round Way	Plug-Lub Valve Rect. Way	* "Tech-Taylor" Valve Ball Type
EQUIV. LENGTH IN m OF STRAIGHT PIPE GIVING EQUIVALENT RESISTANCE TO FLOW									
25	0.52	0.70	0.82	1.77	0.30	2.56	—	0.37	—
32	0.73	0.91	1.13	2.38	0.40	3.29	—	0.49	—
40	0.85	1.10	1.31	2.74	0.49	3.44	1.19	0.58	—
50	1.07	1.40	1.68	3.35	0.55	3.66	1.43	0.73	—
65	1.28	1.65	1.98	4.27	0.70	4.60	1.52	0.85	—
80	1.55	2.07	2.47	5.18	0.85	4.88	1.92	1.04	0.20
90	1.83	2.44	2.90	5.79	1.01	—	—	1.22	—
100	2.13	2.77	3.35	6.71	1.16	7.62	2.19	1.40	0.23
115	2.41	3.05	3.66	7.32	1.28	—	—	1.58	—
125	2.71	3.66	4.27	8.23	1.43	13.11	3.05	1.77	0.30
150	3.35	4.27	4.88	10.06	1.55	18.29	3.11	2.13	0.37
200	4.27	5.49	6.40	13.11	2.41	19.81	7.92	2.74	0.82
250	5.18	6.71	7.92	17.07	2.99	21.34	10.67	3.47	0.61
300	6.10	7.92	9.75	20.12	3.35	28.96	15.85	4.08	0.76
350	7.01	9.45	10.97	23.16	4.27	28.96	—	4.88	0.91
400	8.23	10.67	12.80	26.52	4.88	—	—	5.49	1.04
450	9.14	12.19	14.02	30.48	5.49	—	—	6.22	1.16
500	10.36	13.11	15.85	33.53	6.10	—	—	7.32	1.25

La longitud equivalente de la tubería considerando las singularidades será:

$$L = 100 \text{ m} + 3 \times 2.13 \text{ m} = 106.39 \text{ m} \quad (6.11)$$

4. Cálculo de la viscosidad dinámica ( $\mu_p$ )

La viscosidad dinámica o absoluta para la pulpa, según la siguiente expresión, vale:

$$\mu_p = \mu_{agua} \times \left( 1 + 2.5 \times C_v + 10.05 \times C_v^2 + 0.000273 \times e^{16.6 \times C_v} \right) \quad (6.12)$$

$$\mu_p = 0.001 \times \left( 1 + 2.5 \times 0.198 + 10.05 \times 0.198^2 + 0.000273 \times e^{16.6 \times 0.198} \right) = 0.0019 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2 \quad (6.13)$$

5. Obtención del Número de Reynolds ( $Re$ )

El número de Reynolds se obtiene con la siguiente expresión:

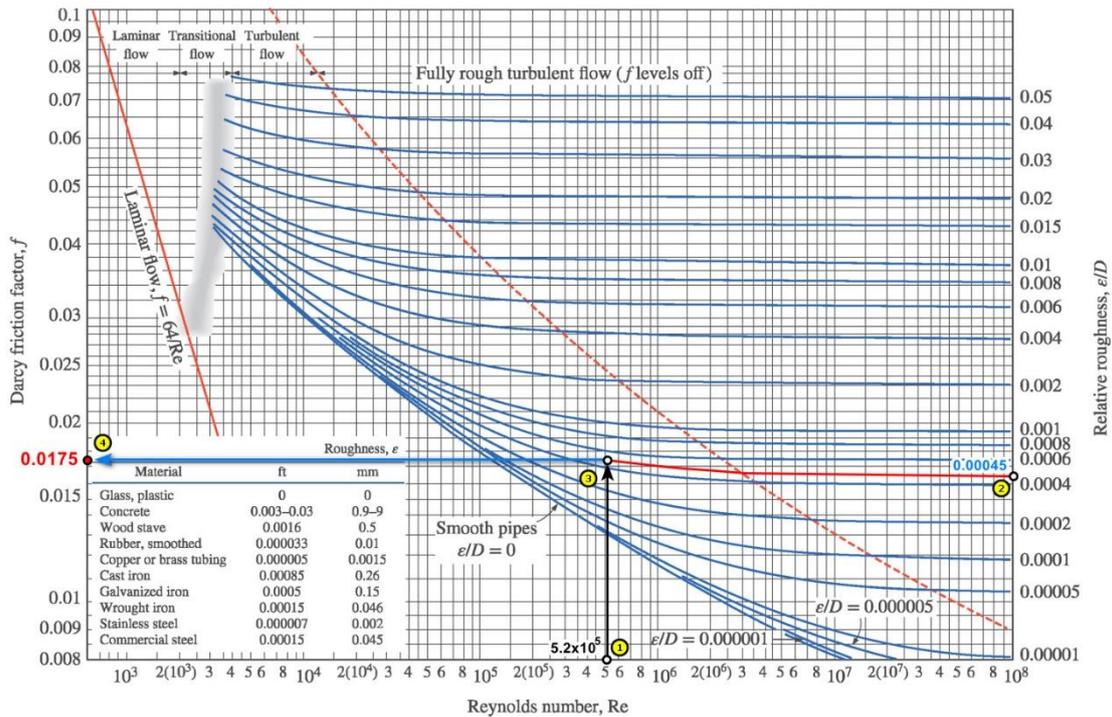
$$Re = \frac{\rho_p \times V \times D}{\mu_p} = \frac{1340 \times 4.95 \times 0.150}{0.0019} \approx 5.2 \times 10^5 \quad (6.14)$$

6. Obtención del factor de fricción de Darcy,  $f$ .

Para ello emplearemos el diagrama de Moody, donde para una tubería de acero comercial con una rugosidad de 0.045 mm y un diámetro de tubería de 100 mm, nos da una rugosidad relativa de 0.00045. Entrando ahora con este valor y con el número de Reynolds, anteriormente calculado, se obtiene un factor de fricción,  $f$ , de 0.0175 (ver diagrama adjunto).

Con el factor de fricción de Darcy, podemos calcular las pérdidas de carga debidas a la fricción en la longitud equivalente de tubería (106.39 metros):

$$H_f = f \times \frac{L}{D} \times \frac{V^2}{2 \times g} = 0.0175 \times \frac{106.39}{0.100} \times \frac{4.95^2}{2 \times 9.81} = 23.25 \text{ m.c.l.} \quad (6.15)$$



7. Pérdidas de carga a la salida del depósito,  $H_i$  (punto A).

Considerando una conexión normal con arista viva (“flush connection”), según la siguiente tabla, se toma un valore de  $K_i = 0.5$ .

Pérdidas de carga expresadas como proporción de la velocidad,  $V$ :  $H_i = K_i \times \frac{V^2}{2 \times g}$  (m)

GRUPO	SINGULARIDAD	Coefficiente $K_i$																														
<p>1</p>	<p><b>AMPLIACIONES</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>d/D</th> <th>0.9</th> <th>0.8</th> <th>0.7</th> <th>0.6</th> <th>0.5</th> <th>0.4</th> <th>0.3</th> <th>0.2</th> <th>0.1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td></td> <td>0.03</td> <td>0.09</td> <td>0.17</td> <td>0.28</td> <td>0.38</td> <td>0.48</td> <td>0.56</td> <td>0.62</td> <td>0.66</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.04</td> <td>0.13</td> <td>0.26</td> <td>0.41</td> <td>0.56</td> <td>0.71</td> <td>0.83</td> <td>0.92</td> <td>0.98</td> </tr> </tbody> </table>	d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1		0.03	0.09	0.17	0.28	0.38	0.48	0.56	0.62	0.66		0.04	0.13	0.26	0.41	0.56	0.71	0.83	0.92	0.98	$K_i = 2.6 \times \sin \frac{\theta}{2} \times \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)^2$ $K_i = \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)^2$
d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1																							
	0.03	0.09	0.17	0.28	0.38	0.48	0.56	0.62	0.66																							
	0.04	0.13	0.26	0.41	0.56	0.71	0.83	0.92	0.98																							
<p>2</p>	<p><b>REDUCCIONES</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>d/D</th> <th>0.9</th> <th>0.8</th> <th>0.7</th> <th>0.6</th> <th>0.5</th> <th>0.4</th> <th>0.3</th> <th>0.2</th> <th>0.1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td></td> <td>0.04</td> <td>0.07</td> <td>0.11</td> <td>0.13</td> <td>0.16</td> <td>0.17</td> <td>0.19</td> <td>0.20</td> <td>0.20</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.10</td> <td>0.18</td> <td>0.26</td> <td>0.32</td> <td>0.38</td> <td>0.42</td> <td>0.46</td> <td>0.48</td> <td>0.50</td> </tr> </tbody> </table>	d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1		0.04	0.07	0.11	0.13	0.16	0.17	0.19	0.20	0.20		0.10	0.18	0.26	0.32	0.38	0.42	0.46	0.48	0.50	$K_i = 0.8 - \sin \frac{\theta}{2} \times \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)$ $K_i = 0.5 - \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)$
d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1																							
	0.04	0.07	0.11	0.13	0.16	0.17	0.19	0.20	0.20																							
	0.10	0.18	0.26	0.32	0.38	0.42	0.46	0.48	0.50																							
<p>3</p>	<p><b>ENTRADAS DESDE DEPÓSITOS A TUBERÍAS</b></p> <p><b>Conexión con tubo interior</b></p> <p><b>Conexión con arista viva</b></p> <p><b>Conexión redondeada</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>r/D</th> <th>0.02</th> <th>0.04</th> <th>0.06</th> <th>0.10</th> <th>0.15</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>K_i</math></td> <td>0.28</td> <td>0.24</td> <td>0.15</td> <td>0.09</td> <td>0.04</td> </tr> </tbody> </table>	r/D	0.02	0.04	0.06	0.10	0.15	$K_i$	0.28	0.24	0.15	0.09	0.04	$K_i = 0.78$ $K_i = 0.50$ $K_i = 0.05$																		
r/D	0.02	0.04	0.06	0.10	0.15																											
$K_i$	0.28	0.24	0.15	0.09	0.04																											

Por lo que la pérdida de carga debido a la conexión al depósito (punto A) será:

$$H_i = K_i \times \frac{\rho_p \times V^2}{2 \times g} = 0.5 \times \frac{1.34 \times 4.95^2}{2 \times 9.81} = 0.84 \text{ m.c.l.} \quad (6.16)$$

8. Pérdidas de carga a la descarga,  $H_d$  (punto D).

Al ser una descarga a presión atmosférica, sólo se tiene en cuenta la pérdida de carga debido a la velocidad de descarga en dicho punto, y cuya expresión general es:

$$H_d = \frac{V^2}{2 \times g} = \frac{4.95^2}{2 \times 9.81} = 1.25 \text{ m.c.l.} \quad (6.17)$$

La pérdida de carga total ( $H_t$ ), será:

$$H_t = H_f + H_i + H_d = 23.25 + 0.84 + 1.25 = 25.34 \text{ m.c.l.} \quad (6.18)$$

9. Cálculo de la altura dinámica o manométrica total, o TDH (“*Total Dynamic Head*”).

El valor de TDH para este sistema hidráulico viene dado por:

$$TDH = (9.14 \text{ m} - 1.8 \text{ m}) + H_t = 7.34 + 25.34 = 32.68 \text{ m.c.l.} \quad (6.19)$$

Para seleccionar la bomba adecuada, debido a que los fabricantes proporcionan la información en base al empleo de agua como principal fluido, debemos corregir los 32.68 metros de columna de pulpa (m.c.l.) a metros de columna de agua (m.c.a.) (ANEFA, 2020; Volk, 2013; Warman, 2000). Para ello se emplea la gráfica siguiente entrando con los datos proporcionado por el enunciado del problema, como es la densidad de las partículas sólidas ( $2.7 \text{ g/cm}^3$ ), el tamaño medio de partícula ( $K_{50} = 250 \text{ micras}$ ) y la concentración de sólidos en peso ( $C_w = 40\%$ ).

Con estos datos, entrando en dicha gráfica se obtiene un HR (o ER) igual 0.84, lo que se puede expresar como:

$$HR = \frac{TDH_{pulpa}}{TDH_{agua}} \quad (6.20)$$

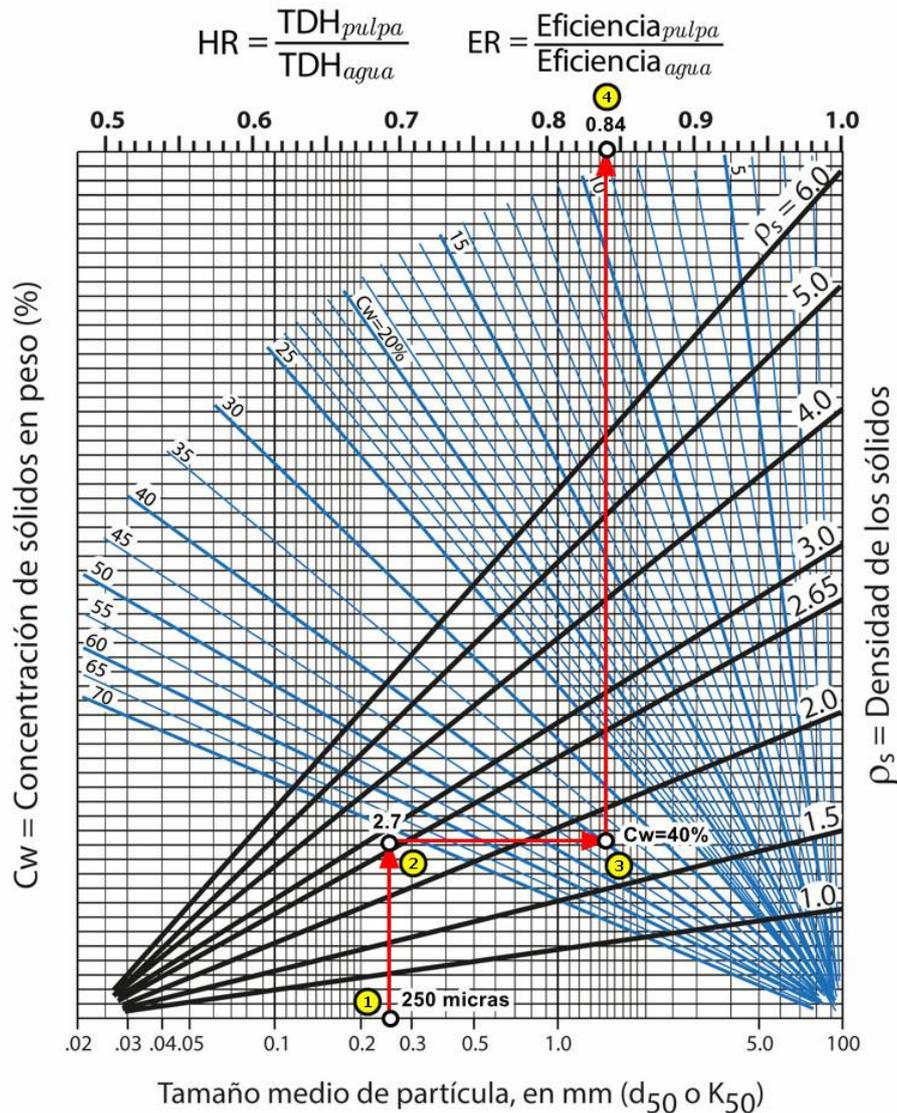
Para nuestro caso, la altura manométrica total expresada en columna de agua valdrá:

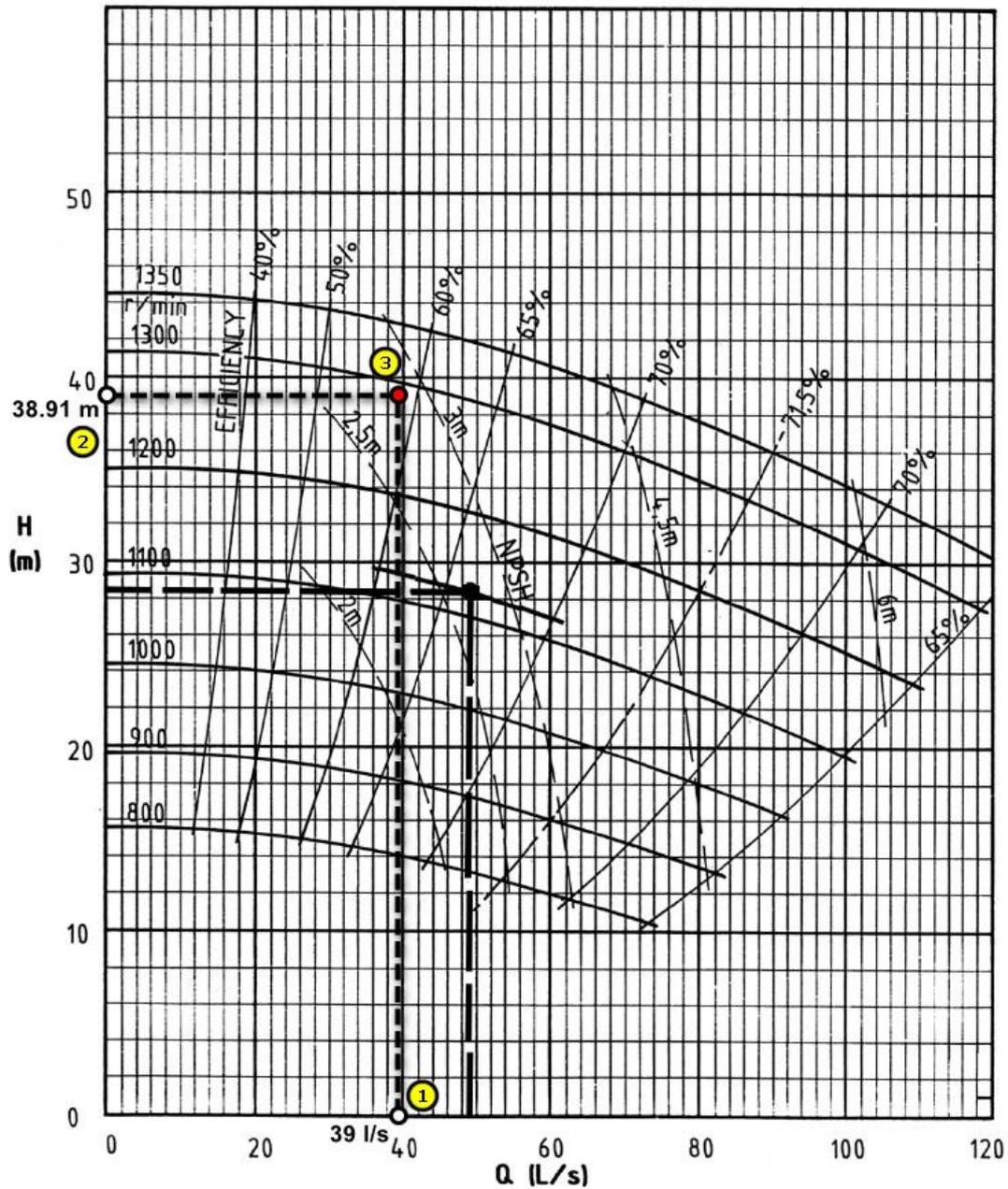
$$TDH_{agua} = \frac{TDH_{pulpa}}{HR} = \frac{32.68 \text{ m.c.l.}}{0.84} = 38.91 \text{ m.c.a.} \quad (6.21)$$

10. Selección de la bomba centrífuga.

Con el valor calculado de  $TDH_{agua}$  de 38.91 m.c.a. y con el caudal calculado anteriormente de  $Q = 139.93 \text{ m}^3/\text{h}$  (o aprox. 39 l/s), se puede entrar en las curvas características Q-H de los fabricantes de bombas y seleccionar la bomba adecuada a nuestra instalación de bombeo de pulpas.

Por ejemplo, para la curva característica Q-H que se facilita (Warman, 2000), la bomba sería una bomba trabajando a un rendimiento del 59%, a 1290 rpm y con un NPSHr de 2.8 m.c.a.





11. Cálculo de la potencia de la bomba.

Con el valor calculado de  $TDH_{agua}$  de 38.91 m.c.a., el caudal calculado de  $Q = 139.93 \text{ m}^3/\text{h}$ , tomando el rendimiento obtenido del 59%, la densidad de la pulpa de  $1.34 \text{ t/m}^3$  podemos calcular la potencia en kW que necesitará la bomba a través de la siguiente expresión:

$$N_{kw} = \frac{Q \times TDH_{agua} \times \rho_{pulpa}}{\frac{\eta}{100} \times 360} = \frac{139.93 \times 38.91 \times 1.34}{0.59 \times 360} = 34.35 \text{ kW} \quad (6.22)$$

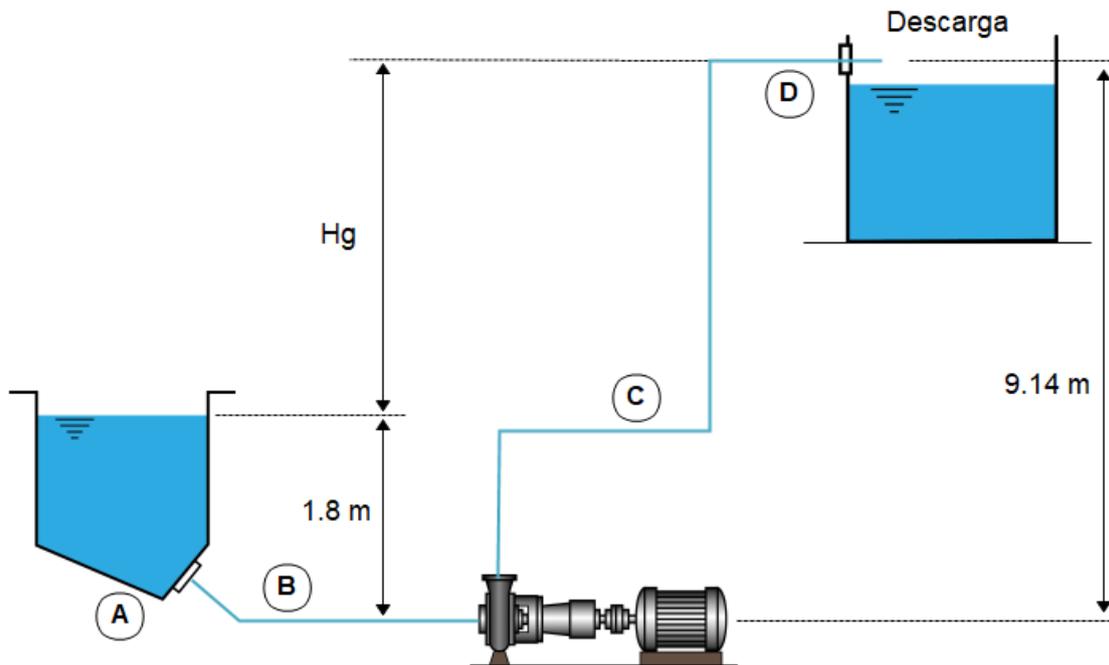
Se recomienda incrementar esta cantidad en un 25% debido a pérdidas en la transmisión y pérdidas en el rendimiento por causas de desgastes en las partes hidráulicas a medio plazo. Por lo que la potencia a instalar serían 42.94 kW.

#### Referencias:

- ANEFA. (2020). *Manual de Áridos para el Siglo XXI* (ANEFA, Ed.).
- Bouso, J. L. (1993). *Manual de bombeo de pulpas* (Fueyo, Ed.). ERAL, Equipos y Procesos S.A.
- Metso:Outotec. (2020). *Guidelines in slurry pumping. Slurry Pump Handbook* (8th ed.). Metso Minerals (Sala) AB. [www.metso.com/pumps](http://www.metso.com/pumps)
- Volk, M. (2013). *Pump Characteristics and Applications* (C. Press, Ed. 3rd ed.). <https://doi.org/https://doi.org/10.1201/b15559>
- Warman, L. (2000). *Warman Slurry Pumping Handbook*. Warman Slurry Pumping Handbook.

EJERCICIO 7 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO

7. Se dispone el siguiente sistema de bombeo de pulpas que bombea una pulpa compuesta por arena sílice con densidad específica de  $2.7 \text{ t/m}^3$  ( $\rho_s$ ) y agua. Los sólidos tienen una granulometría característica media de  $K_{50}$  de 250 micras, la concentración de sólidos en peso,  $C_w$ , es del 40%. El tonelaje de sólidos es de 75 t/h. La longitud de la tubería es de 100 metros lineales con 3 codos o curvas de radio amplio ( $R=3D$ ). La tubería de descarga alimenta un depósito que se encuentra a 9.14 metros (eje de la tubería de descarga). Considerar un diámetro,  $D$ , de tubería de 100 mm. Se pide calcular la tubería idónea para bombear la pulpa sílice, la altura dinámica total (TDH), y la selección de la bomba idónea para dicha instalación. Utilizar la fórmula de Williams y Hazen, considerando  $C = 150$ .



PMP2022

Solución:

1. Cálculo del caudal a bombear,  $Q$ , concentración de sólidos en volumen,  $C_v$ , y peso específico de la pulpa,  $\rho_p$ .

Para el cálculo de la concentración de sólidos en volumen hacemos uso de la siguiente expresión:

$$C_v = \frac{\frac{C_w}{100} \times \rho_l}{\rho_s - \frac{C_w}{100} \times (\rho_s - \rho_l)} \times 100 \quad (7.1)$$

Por lo que, sustituyendo:

$$C_v = \frac{0.40 \times 1.0}{2.7 - 0.40 \times (2.7 - 1.0)} \times 100 = 19.80\% \quad (7.2)$$

Para el cálculo de la densidad de la pulpa empleamos la siguiente expresión:

$$\frac{C_v}{100} = \frac{(\rho_p - \rho_l)}{(\rho_s - \rho_l)} \quad (7.3)$$

Por lo que, sustituyendo:

$$\rho_p = \frac{19.80}{100} \times (2.7 - 1.0) + 1.0 = 1.34 \text{ t/m}^3 \quad (7.4)$$

Para el cálculo del caudal de pulpa se establece que:

$$\left. \begin{array}{l} 75 \text{ t}_{\text{sólidos}}/\text{h} \rightarrow 40\% (C_w) \\ y \rightarrow 100\% \end{array} \right| y = 187.5 \text{ t}_{\text{pulpa}}/\text{h} \quad (7.5)$$

Sabiendo que la densidad de la pulpa es  $1.34 \text{ t/m}^3$ , entonces:

$$Q_{\text{pulpa}} = \frac{187.5 \text{ t/h}}{1.34 \text{ t/m}^3} = 139.93 \text{ m}^3/\text{h} \quad (7.6)$$

También se puede emplear la siguiente expresión para el cálculo del caudal de pulpa,  $Q_{\text{pulpa}}$  ( $\text{m}^3/\text{h}$ ) (Metso:Outotec, 2020):

$$Q_{\text{pulpa}} = tph_{\text{sólidos}} \times \left( \frac{1}{\rho_s} + \left( \frac{100}{C_w \%} - 1 \right) \right) \quad (7.7)$$

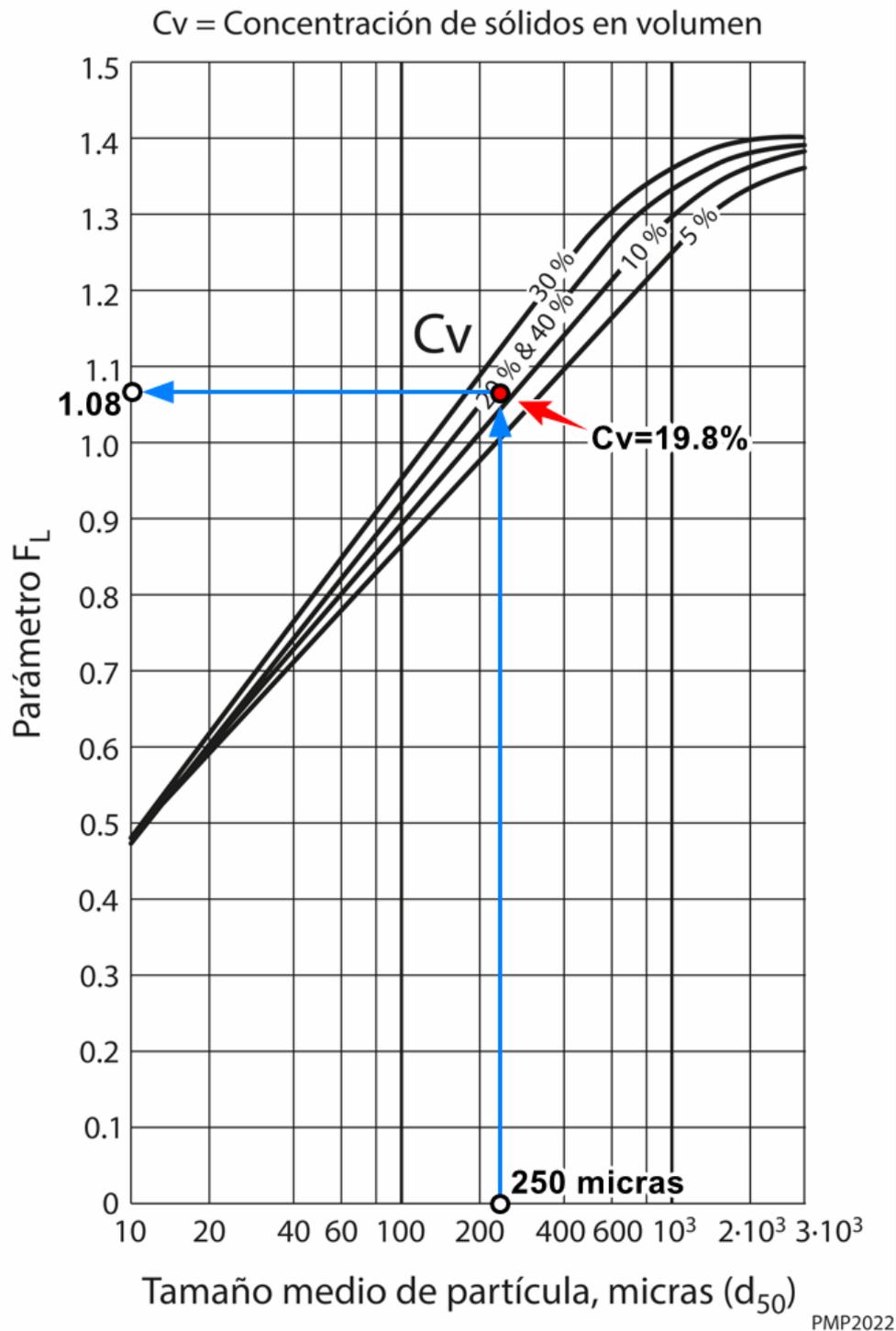
$$Q_{\text{pulpa}} = 75 \times \left( \frac{1}{2.7} + \left( \frac{100}{40} - 1 \right) \right) = 140.28 \text{ m}^3/\text{h}$$

## 2. Cálculo del diámetro óptimo de la tubería, la velocidad límite y la velocidad real de transporte.

Para estos cálculos vamos a utilizar la expresión de la velocidad límite según Durand (ANEFA, 2020):

$$V_l = F_l \times \sqrt{2 \times g \times D \times \frac{\rho_s - \rho_l}{\rho_l}} \quad (7.8)$$

Para la determinación del factor  $F_l$  se entra en el siguiente gráfico (ANEFA, 2020; Bouso, 1993; Warman, 2000) del que se obtiene un valor aproximado de 1.08. Con este valor se puede entrar en la anterior expresión de Durand y calcular la velocidad límite.



La velocidad límite valdrá:

$$V_l = 1.08 \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.100 \times \frac{2.7 - 1.0}{1.0}} = 1.97 \text{ m/s} \quad (7.9)$$

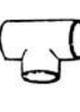
Ahora se comprueba que la velocidad real de transporte es superior que la velocidad límite:

$$V = \frac{Q}{\left(\frac{\pi \times D^2}{4}\right)} = \frac{139.93 \text{ m}^3/\text{h}}{\left(\frac{\pi \times 0.100^2}{4}\right)} = 4.95 \text{ m/s} \quad (7.10)$$

Por lo tanto, el diámetro seleccionado es adecuado ya que la velocidad a la que llevará la pulpa es superior a la velocidad límite calculada.

### 3. Cálculo de las pérdidas de carga en la conducción.

Lo primero es calcular la longitud equivalente de los accesorios y singularidades que en este ejemplo se trata de 3 curvas de gran diámetro (R=3D), y que entrando en la tabla adjunta se obtiene una longitud equivalente de 2.13 m.

	 Radius More Than 3 x N.B.	 Radius is 2 x N.B.			 Minimum Radius 10 x N.B.				
INTERNAL DIAMETER or N.B. mm	90° Long Radius Bend	90° Short Radius Bend	Elbow	Tee	Rubber Hose	Diaphragm Valve Full Open	Full Bore Valve Round Way	Plug-Lub Valve Rect. Way	*"Tech-Taylor" Valve Ball Type
EQUIV. LENGTH IN m OF STRAIGHT PIPE GIVING EQUIVALENT RESISTANCE TO FLOW									
25	0.52	0.70	0.82	1.77	0.30	2.56	—	0.37	—
32	0.73	0.91	1.13	2.38	0.40	3.29	—	0.49	—
40	0.85	1.10	1.31	2.74	0.49	3.44	1.19	0.58	—
50	1.07	1.40	1.68	3.35	0.55	3.66	1.43	0.73	—
65	1.28	1.65	1.98	4.27	0.70	4.60	1.52	0.85	—
80	1.55	2.07	2.47	5.18	0.85	4.88	1.92	1.04	0.20
90	1.83	2.44	2.90	5.79	1.01	—	—	1.22	—
100	2.13	2.77	3.35	6.71	1.16	7.62	2.19	1.40	0.23
115	2.41	3.05	3.66	7.32	1.28	—	—	1.58	—
125	2.71	3.66	4.27	8.23	1.43	13.11	3.05	1.77	0.30
150	3.35	4.27	4.88	10.06	1.55	18.29	3.11	2.13	0.37
200	4.27	5.49	6.40	13.11	2.41	19.81	7.92	2.74	0.82
250	5.18	6.71	7.92	17.07	2.99	21.34	10.67	3.47	0.61
300	6.10	7.92	9.75	20.12	3.35	28.96	15.85	4.08	0.76
350	7.01	9.45	10.97	23.16	4.27	28.96	—	4.88	0.91
400	8.23	10.67	12.80	26.52	4.88	—	—	5.49	1.04
450	9.14	12.19	14.02	30.48	5.49	—	—	6.22	1.16
500	10.36	13.11	15.85	33.53	6.10	—	—	7.32	1.25

La longitud equivalente de la tubería considerando las singularidades será:

$$L = 100 \text{ m} + 3 \times 2.13 \text{ m} = 106.39 \text{ m} \quad (7.11)$$

4. Cálculo de las pérdidas por fricción a través de Williams y Hazen.

El valor de estas pérdidas se obtiene aplicando la siguiente fórmula de Williams y Hazen:

$$H_f = \frac{5.6028}{10^8} \times \left( \frac{100}{C} \right)^{1.85} \times \frac{Q^{1.85}}{D^{4.8655}} \quad (\text{m}/100\text{m}) \quad (7.12)$$

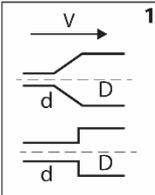
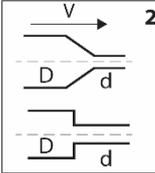
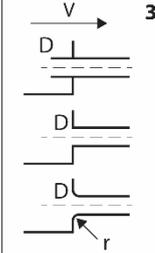
$$H_f = \frac{5.6028}{10^8} \times \left( \frac{100}{150} \right)^{1.85} \times \frac{140.28^{1.85}}{0.100^{4.8655}} = 18.20 \quad (\text{m}/100\text{m}) \quad (7.13)$$

Con el valor de  $H_f = 18.20 \text{ m}/100\text{m}$  de tubería y sabiendo que entre codos y tubería total se dispone de 106.39 metros de tubería equivalente, entonces se tendrá:

$$H_f = \frac{106.39}{100} \times 18.20 = 19.36 \text{ m.c.l.} \quad (7.14)$$

5. Pérdidas de carga a la salida del depósito,  $H_i$  (punto A).

Pérdidas de carga expresadas como proporción de la velocidad,  $V$ :  $H_i = K_i \times \frac{V^2}{2 \times g} \quad (m)$

GRUPO	SINGULARIDAD	Coefficiente $K_i$																														
	<b>AMPLIACIONES</b> <table border="1"> <tr> <td>d/D</td> <td>0.9</td> <td>0.8</td> <td>0.7</td> <td>0.6</td> <td>0.5</td> <td>0.4</td> <td>0.3</td> <td>0.2</td> <td>0.1</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.03</td> <td>0.09</td> <td>0.17</td> <td>0.28</td> <td>0.38</td> <td>0.48</td> <td>0.56</td> <td>0.62</td> <td>0.66</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.04</td> <td>0.13</td> <td>0.26</td> <td>0.41</td> <td>0.56</td> <td>0.71</td> <td>0.83</td> <td>0.92</td> <td>0.98</td> </tr> </table>	d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1		0.03	0.09	0.17	0.28	0.38	0.48	0.56	0.62	0.66		0.04	0.13	0.26	0.41	0.56	0.71	0.83	0.92	0.98	$K_i = 2.6 \times \sin \frac{\theta}{2} \times \left( 1 - \frac{d^2}{D^2} \right)^2$ $K_i = \left( 1 - \frac{d^2}{D^2} \right)^2$
d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1																							
	0.03	0.09	0.17	0.28	0.38	0.48	0.56	0.62	0.66																							
	0.04	0.13	0.26	0.41	0.56	0.71	0.83	0.92	0.98																							
	<b>REDUCCIONES</b> <table border="1"> <tr> <td>d/D</td> <td>0.9</td> <td>0.8</td> <td>0.7</td> <td>0.6</td> <td>0.5</td> <td>0.4</td> <td>0.3</td> <td>0.2</td> <td>0.1</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.04</td> <td>0.07</td> <td>0.11</td> <td>0.13</td> <td>0.16</td> <td>0.17</td> <td>0.19</td> <td>0.20</td> <td>0.20</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.10</td> <td>0.18</td> <td>0.26</td> <td>0.32</td> <td>0.38</td> <td>0.42</td> <td>0.46</td> <td>0.48</td> <td>0.50</td> </tr> </table>	d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1		0.04	0.07	0.11	0.13	0.16	0.17	0.19	0.20	0.20		0.10	0.18	0.26	0.32	0.38	0.42	0.46	0.48	0.50	$K_i = 0.8 - \sin \frac{\theta}{2} \times \left( 1 - \frac{d^2}{D^2} \right)$ $K_i = 0.5 - \left( 1 - \frac{d^2}{D^2} \right)$
d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1																							
	0.04	0.07	0.11	0.13	0.16	0.17	0.19	0.20	0.20																							
	0.10	0.18	0.26	0.32	0.38	0.42	0.46	0.48	0.50																							
	<b>ENTRADAS DESDE DEPÓSITOS A TUBERÍAS</b> <p><b>Conexión con tubo interior</b></p> <p><b>Conexión con arista viva</b></p> <p><b>Conexión redondeada</b></p> <table border="1"> <tr> <td>r/D</td> <td>0.02</td> <td>0.04</td> <td>0.06</td> <td>0.10</td> <td>0.15</td> </tr> <tr> <td><math>K_i</math></td> <td>0.28</td> <td>0.24</td> <td>0.15</td> <td>0.09</td> <td>0.04</td> </tr> </table>	r/D	0.02	0.04	0.06	0.10	0.15	$K_i$	0.28	0.24	0.15	0.09	0.04	$K_i = 0.78$ $K_i = 0.50$ $K_i = 0.05$																		
r/D	0.02	0.04	0.06	0.10	0.15																											
$K_i$	0.28	0.24	0.15	0.09	0.04																											

Considerando una conexión normal con arista viva (“*flush connection*”), según la tabla anterior, se toma un valor de  $K_i = 0.5$ .

Por lo que la pérdida de carga debido a la conexión al depósito (punto A) será:

$$H_i = K_i \times \frac{\rho_p \times V^2}{2 \times g} = 0.5 \times \frac{1.34 \times 4.95^2}{2 \times 9.81} = 0.84 \text{ m.c.l.} \quad (7.15)$$

6. Pérdidas de carga a la descarga,  $H_d$  (punto D).

Al ser una descarga a presión atmosférica, sólo se tiene en cuenta la pérdida de carga debido a la velocidad de descarga en dicho punto, y cuya expresión general es:

$$H_d = \frac{V^2}{2 \times g} = \frac{4.95^2}{2 \times 9.81} = 1.25 \text{ m.c.l.} \quad (7.16)$$

La pérdida de carga total ( $H_t$ ), será:

$$H_t = H_f + H_i + H_d = 19.36 + 0.84 + 1.25 = 21.45 \text{ m.c.l.} \quad (7.17)$$

7. Cálculo de la altura dinámica o manométrica total, o TDH (“*Total Dynamic Head*”).

El valor de TDH para este sistema hidráulico viene dado por:

$$TDH = (9.14 \text{ m} - 1.8 \text{ m}) + H_t = 7.34 + 21.45 = 28.79 \text{ m.c.l.} \quad (7.18)$$

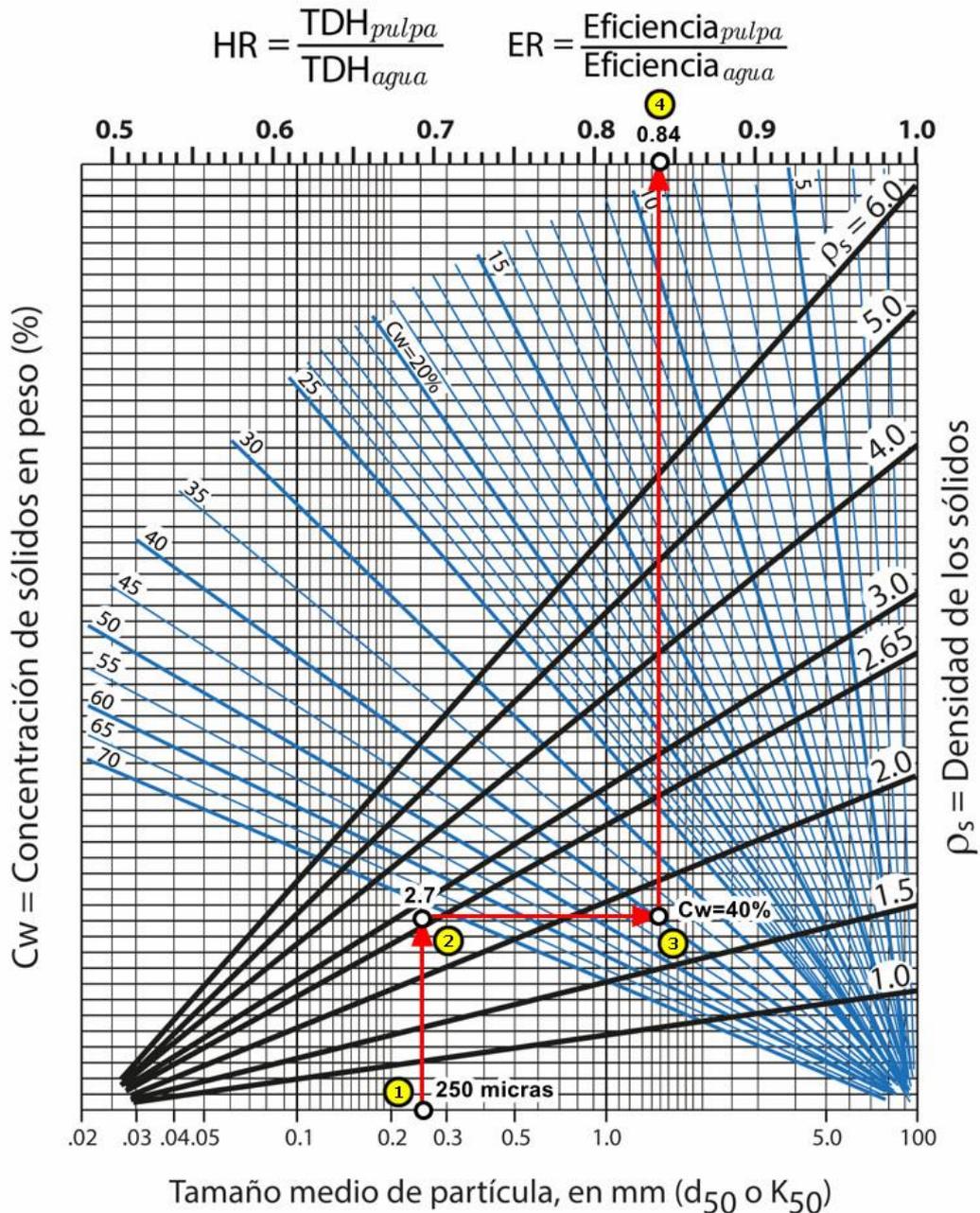
Para seleccionar la bomba adecuada, debido a que los fabricantes proporcionan la información en base al empleo de agua como principal fluido, debemos corregir los 28.79 metros de columna de pulpa (m.c.l.) a metros de columna de agua (m.c.a.) (ANEFA, 2020; Volk, 2013; Warman, 2000). Para ello se emplea la gráfica siguiente entrando con los datos proporcionado por el enunciado del problema, como es la densidad de las partículas sólidas ( $2.7 \text{ g/cm}^3$ ), el tamaño medio de partícula ( $K_{50} = 250$  micras) y la concentración de sólidos en peso ( $C_w = 40\%$ ).

Con estos datos, entrando en dicha gráfica se obtiene un HR (o ER) igual 0.84, lo que se puede expresar como:

$$HR = \frac{TDH_{pulpa}}{TDH_{agua}} \quad (7.19)$$

Para nuestro caso, la altura manométrica total expresada en columna de agua valdrá:

$$TDH_{agua} = \frac{TDH_{pulpa}}{HR} = \frac{28.79 \text{ m.c.l.}}{0.84} = 34.27 \text{ m.c.a.} \quad (7.20)$$



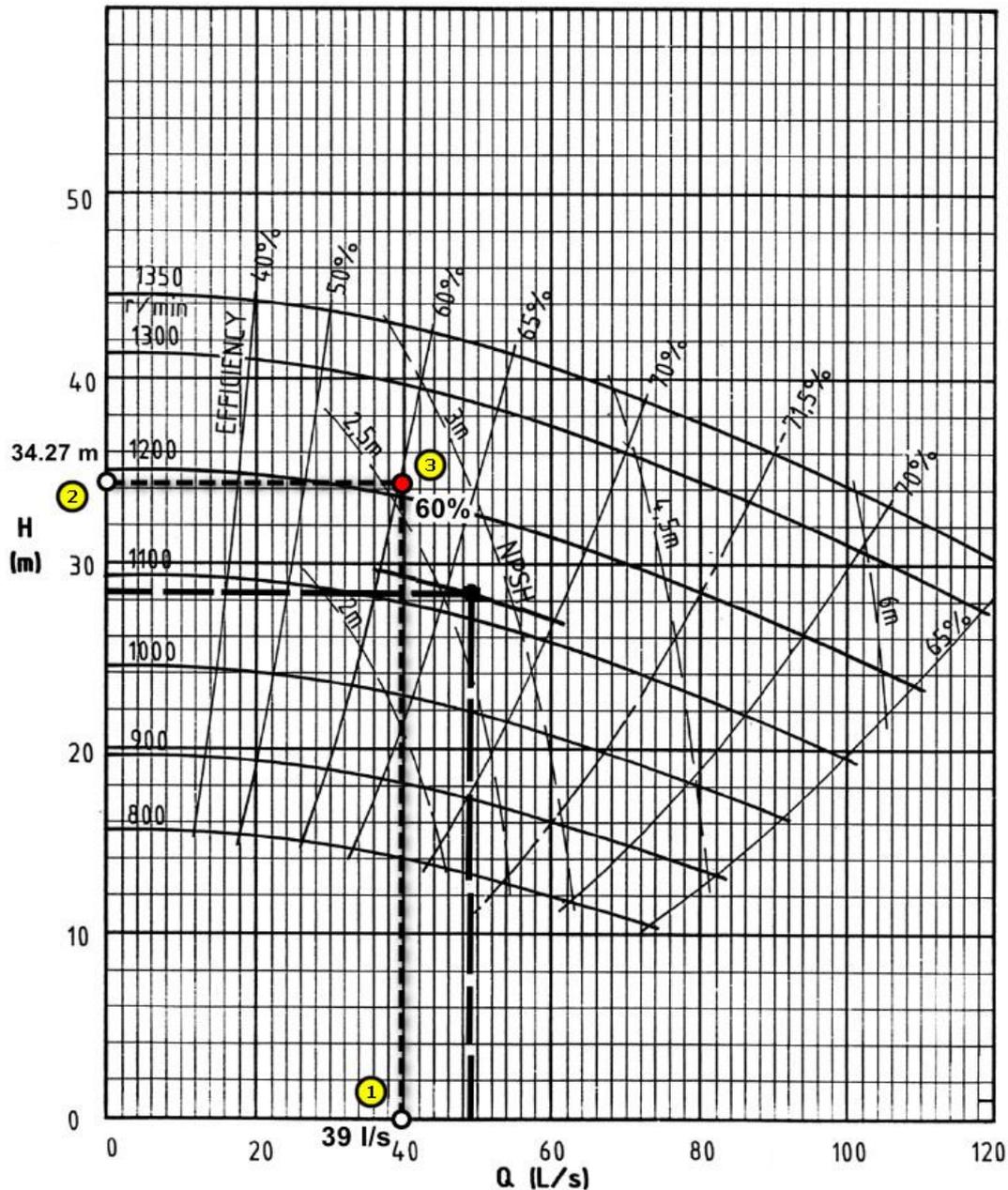
PMP2022

### 8. Selección de la bomba centrífuga.

Con el valor calculado de  $TDH_{agua}$  de 34.27 m.c.a. y con el caudal calculado anteriormente de  $Q = 139.93 \text{ m}^3/\text{h}$  (o aprox. 39 l/s), se puede entrar en las

curvas características Q-H de los fabricantes de bombas y seleccionar la bomba adecuada a nuestra instalación de bombeo de pulpas.

Por ejemplo, para la curva característica Q-H que se facilita (Warman, 2000), la bomba sería una bomba trabajando a un rendimiento del 60%, a 1200 rpm y con un NPSHr de 2.6 m.c.a.



9. Cálculo de la potencia de la bomba.

Con el valor calculado de  $TDH_{agua}$  de 34.27 m.c.a., el caudal calculado de  $Q = 139.93 \text{ m}^3/\text{h}$ , tomando el rendimiento obtenido del 60%, la densidad de la pulpa de  $1.34 \text{ t/m}^3$  podemos calcular la potencia en kW que necesitará la bomba a través de la siguiente expresión:

$$N_{kW} = \frac{Q \times TDH_{agua} \times \rho_{pulpa}}{\frac{\eta}{100} \times 360} = \frac{139.93 \times 34.27 \times 1.34}{0.60 \times 360} = 29.75 \text{ kW} \quad (7.21)$$

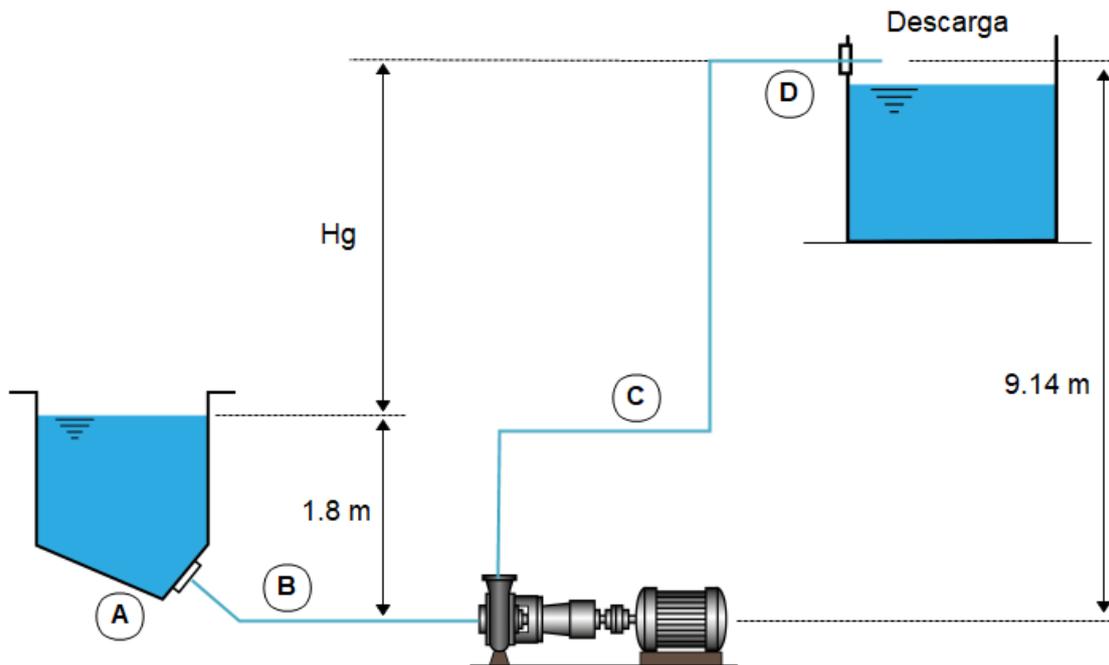
Se recomienda incrementar esta cantidad en un 25% debido a pérdidas en la transmisión y pérdidas en el rendimiento por causas de desgastes en las partes hidráulicas a medio plazo. Por lo que la potencia a instalar serían 37.19 kW.

#### Referencias:

- ANEFA. (2020). *Manual de Áridos para el Siglo XXI* (ANEFA, Ed.).
- Bouso, J. L. (1993). *Manual de bombeo de pulpas* (Fueyo, Ed.). ERAL, Equipos y Procesos S.A.
- Metso:Outotec. (2020). *Guidelines in slurry pumping. Slurry Pump Handbook* (8th ed.). Metso Minerals (Sala) AB. [www.metso.com/pumps](http://www.metso.com/pumps)
- Volk, M. (2013). *Pump Characteristics and Applications* (C. Press, Ed. 3rd ed.). <https://doi.org/https://doi.org/10.1201/b15559>
- Warman, L. (2000). *Warman Slurry Pumping Handbook*. Warman Slurry Pumping Handbook.

EJERCICIO 8 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO

8. Se dispone el siguiente sistema de bombeo de pulpas que bombea una pulpa compuesta por arena sílice con densidad específica de  $2.7 \text{ t/m}^3$  ( $\rho_s$ ) y agua. Los sólidos tienen una granulometría característica media de  $K_{50}$  de 250 micras, la concentración de sólidos en peso,  $C_w$ , es del 25%. El tonelaje de sólidos es de 75 t/h. La longitud de la tubería es de 150 metros lineales con 3 codos o curvas de radio amplio ( $R=3D$ ). La tubería de descarga alimenta un depósito que se encuentra a 9.14 metros (eje de la tubería de descarga). Considerar un diámetro,  $D$ , de tubería de 150 mm. Se pide calcular la tubería idónea para bombear la pulpa sílice, la altura dinámica total (TDH), y la selección de la bomba idónea para dicha instalación.



PMP2022

Solución:

1. Cálculo del caudal a bombear,  $Q$ , concentración de sólidos en volumen,  $C_v$ , y peso específico de la pulpa,  $\rho_p$ .

Para el cálculo de la concentración de sólidos en volumen hacemos uso de la siguiente expresión:

$$C_v = \frac{\frac{C_w}{100} \times \rho_l}{\rho_s - \frac{C_w}{100} \times (\rho_s - \rho_l)} \times 100 \quad (8.1)$$

Por lo que, sustituyendo:

$$C_v = \frac{0.25 \times 1.0}{2.7 - 0.25 \times (2.7 - 1.0)} \times 100 = 10.99\% \quad (8.2)$$

Para el cálculo de la densidad de la pulpa empleamos la siguiente expresión:

$$\frac{C_v}{100} = \frac{(\rho_p - \rho_l)}{(\rho_s - \rho_l)} \quad (8.3)$$

Por lo que, sustituyendo:

$$\rho_p = \frac{10.99}{100} \times (2.7 - 1.0) + 1.0 = 1.19 \text{ t/m}^3 \quad (8.4)$$

Para el cálculo del caudal de pulpa se establece que:

$$\left. \begin{array}{l} 75 \text{ t}_{\text{sólidos}}/\text{h} \rightarrow 25\% (C_w) \\ y \rightarrow 100\% \end{array} \right| y = 300 \text{ t}_{\text{pulpa}}/\text{h} \quad (8.5)$$

Sabiendo que la densidad de la pulpa es  $1.19 \text{ t/m}^3$ , entonces:

$$Q_{\text{pulpa}} = \frac{300 \text{ t/h}}{1.19 \text{ t/m}^3} = 252.10 \text{ m}^3/\text{h} \quad (8.6)$$

También se puede emplear la siguiente expresión para el cálculo del caudal de pulpa,  $Q_{\text{pulpa}}$  ( $\text{m}^3/\text{h}$ ) (Metso:Outotec, 2020):

$$Q_{\text{pulpa}} = t p h_{\text{sólidos}} \times \left( \frac{1}{\rho_s} + \left( \frac{100}{C_w \%} - 1 \right) \right) \quad (8.7)$$

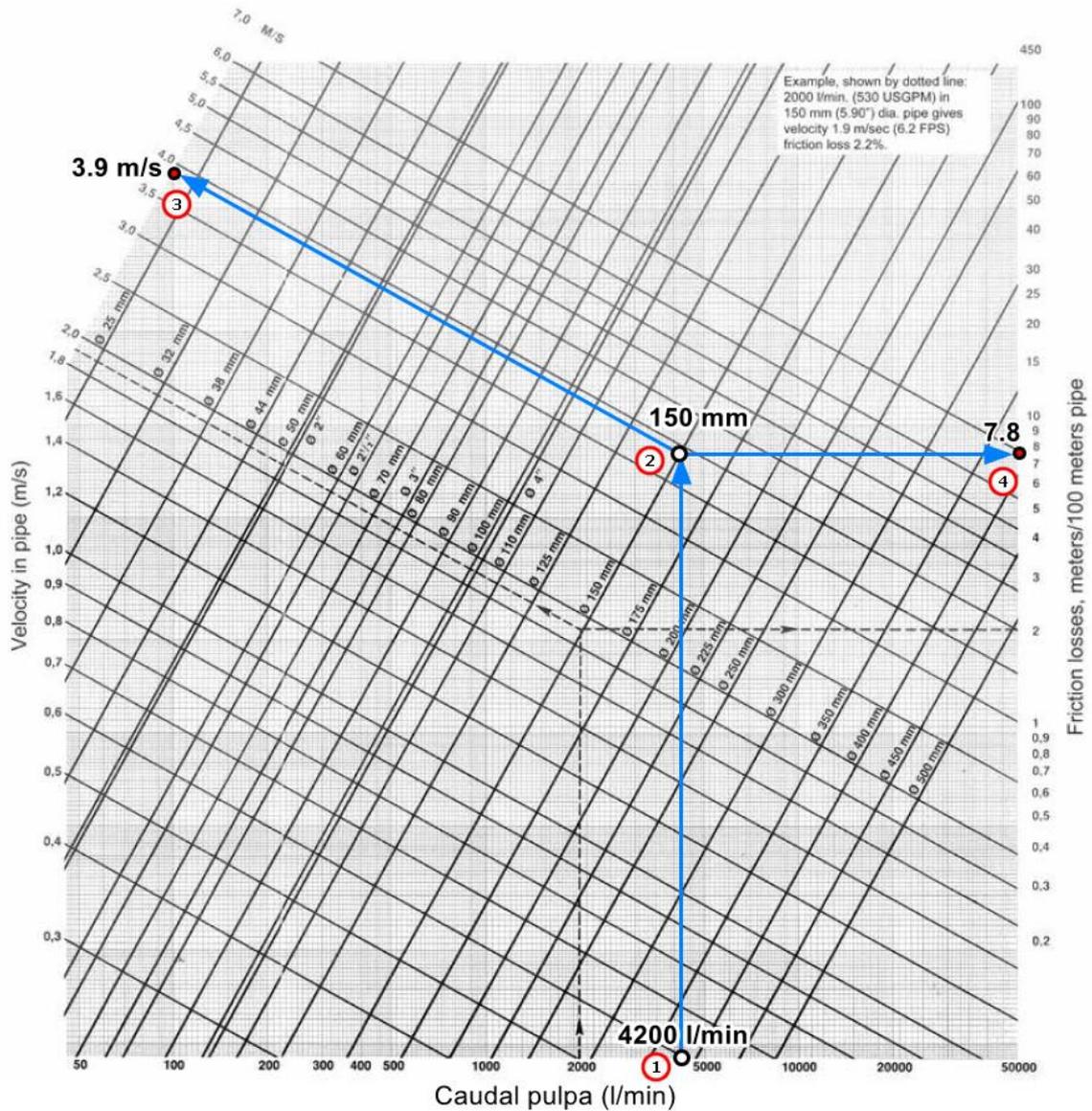
$$Q_{\text{pulpa}} = 75 \times \left( \frac{1}{2.7} + \left( \frac{100}{25} - 1 \right) \right) = 252.78 \text{ m}^3/\text{h}$$

2. Cálculo del diámetro óptimo de la tubería, la velocidad recomendada y la velocidad real de transporte.

Para estos cálculos vamos a utilizar el ábaco proporcionado por la fórmula de Williams y Hazen para obtener velocidades recomendadas y pérdidas de carga en tuberías de acero (Metso:Outotec, 2020).

Nota:

Para transporte de pulpas donde las partículas sólidas se encuentran en concentraciones en volumen inferiores al 15% se puede asumir que la pulpa se comporta como agua. Para concentraciones superiores al 15% ( $C_v$ ), las pérdidas de carga deben ser corregidas por un factor (Metso:Outotec, 2020).



La velocidad recomendable para la tubería de 150 mm y un caudal de pulpa de 4200 l/min sería de unos 3.9 m/s.

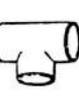
Ahora se comprueba que la velocidad real de transporte es ligeramente superior a la velocidad recomendable:

$$V = \frac{Q}{\left(\frac{\pi \times D^2}{4}\right)} = \frac{252.10 \text{ m}^3/\text{h}}{\left(\frac{\pi \times 0.150^2}{4}\right)} = 3.96 \text{ m/s} \quad (8.8)$$

Por lo tanto, el diámetro seleccionado de 150 mm es adecuado.

3. Cálculo de las pérdidas de carga en la conducción.

Lo primero es calcular la longitud equivalente de los accesorios y singularidades que en este ejemplo se trata de 3 curvas de gran diámetro (R=3D), y que entrando en la tabla adjunta se obtiene una longitud equivalente de 2.13 m.

									
INTERNAL DIAMETER or N.B. mm	Radius More Than 3 x N.B.	Radius is 2 x N.B.	Elbow	Tee	Minimum Radius 10 x N.B.	Diaphragm Valve Full Open	Full Bore Valve Round Way	Plug-Lub Valve Rect. Way	* "Tech-Taylor" Valve Ball Type
	EQUIV. LENGTH IN m OF STRAIGHT PIPE					GIVING EQUIVALENT RESISTANCE TO FLOW			
25	0.52	0.70	0.82	1.77	0.30	2.56	—	0.37	—
32	0.73	0.91	1.13	2.38	0.40	3.29	—	0.49	—
40	0.85	1.10	1.31	2.74	0.49	3.44	1.19	0.58	—
50	1.07	1.40	1.68	3.35	0.55	3.66	1.43	0.73	—
65	1.28	1.65	1.98	4.27	0.70	4.60	1.52	0.85	—
80	1.55	2.07	2.47	5.18	0.85	4.88	1.92	1.04	0.20
90	1.83	2.44	2.90	5.79	1.01	—	—	1.22	—
100	2.13	2.77	3.35	6.71	1.16	7.62	2.19	1.40	0.23
115	2.41	3.05	3.66	7.32	1.28	—	—	1.58	—
125	2.71	3.66	4.27	8.23	1.43	13.11	3.05	1.77	0.30
150	3.35	4.27	4.88	10.06	1.55	18.29	3.11	2.13	0.37
200	4.27	5.49	6.40	13.11	2.41	19.81	7.92	2.74	0.82
250	5.18	6.71	7.92	17.07	2.99	21.34	10.67	3.47	0.61
300	6.10	7.92	9.75	20.12	3.35	28.96	15.85	4.08	0.76
350	7.01	9.45	10.97	23.16	4.27	28.96	—	4.88	0.91
400	8.23	10.67	12.80	26.52	4.88	—	—	5.49	1.04
450	9.14	12.19	14.02	30.48	5.49	—	—	6.22	1.16
500	10.36	13.11	15.85	33.53	6.10	—	—	7.32	1.25

La longitud equivalente de la tubería considerando las singularidades será:

$$L = 100 \text{ m} + 3 \times 2.13 \text{ m} = 106.39 \text{ m} \quad (8.9)$$

Ahora se empleará el valor de pérdidas por fricción cada 100 metros de tubería equivalente obtenido anteriormente que tiene por valor 7.8 m/100 m de tubería equivalente (Metso:Outotec, 2020). También se puede aplicar la siguiente fórmula de Williams y Hazen:

$$H_f = \frac{5.6028}{10^8} \times \left(\frac{100}{C}\right)^{1.85} \times \frac{Q^{1.85}}{D^{4.8655}} \quad (8.10)$$

$$H_f = \frac{5.6028}{10^8} \times \left(\frac{100}{140}\right)^{1.85} \times \frac{252.10^{1.85}}{0.150^{4.8655}} = 8.51 \text{ m/100 m tubería} \quad (8.11)$$

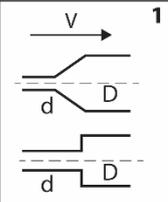
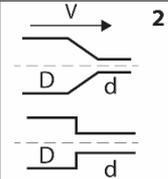
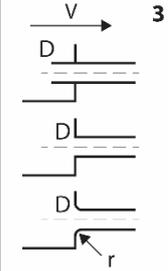
Con el valor de  $H_f = 8.51 \text{ m/100m}$  de tubería y sabiendo que entre codos y tubería total se dispone de 106.39 metros de tubería equivalente, entonces se tendrá:

$$H_{fd} = \frac{106.39}{100} \times 8.51 = 9.054 \text{ m.c.l.} \quad (8.12)$$

4. Pérdidas de carga a la salida del depósito,  $H_i$  (punto A).

Considerando una conexión normal con arista viva (“flush connection”), según la siguiente tabla, se toma un valore de  $K_i = 0.5$ .

Pérdidas de carga expresadas como proporción de la velocidad,  $V$ :  $H_i = K_i \times \frac{V^2}{2 \times g} \text{ (m)}$

GRUPO	SINGULARIDAD	Coefficiente $K_i$																														
	<b>AMPLIACIONES</b> <table border="1"> <tr> <td>d/D</td> <td>0.9</td> <td>0.8</td> <td>0.7</td> <td>0.6</td> <td>0.5</td> <td>0.4</td> <td>0.3</td> <td>0.2</td> <td>0.1</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.03</td> <td>0.09</td> <td>0.17</td> <td>0.28</td> <td>0.38</td> <td>0.48</td> <td>0.56</td> <td>0.62</td> <td>0.66</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.04</td> <td>0.13</td> <td>0.26</td> <td>0.41</td> <td>0.56</td> <td>0.71</td> <td>0.83</td> <td>0.92</td> <td>0.98</td> </tr> </table>	d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1		0.03	0.09	0.17	0.28	0.38	0.48	0.56	0.62	0.66		0.04	0.13	0.26	0.41	0.56	0.71	0.83	0.92	0.98	$K_i = 2.6 \times \sin \frac{\theta}{2} \times \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)^2$ $K_i = \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)^2$
d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1																							
	0.03	0.09	0.17	0.28	0.38	0.48	0.56	0.62	0.66																							
	0.04	0.13	0.26	0.41	0.56	0.71	0.83	0.92	0.98																							
	<b>REDUCCIONES</b> <table border="1"> <tr> <td>d/D</td> <td>0.9</td> <td>0.8</td> <td>0.7</td> <td>0.6</td> <td>0.5</td> <td>0.4</td> <td>0.3</td> <td>0.2</td> <td>0.1</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.04</td> <td>0.07</td> <td>0.11</td> <td>0.13</td> <td>0.16</td> <td>0.17</td> <td>0.19</td> <td>0.20</td> <td>0.20</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.10</td> <td>0.18</td> <td>0.26</td> <td>0.32</td> <td>0.38</td> <td>0.42</td> <td>0.46</td> <td>0.48</td> <td>0.50</td> </tr> </table>	d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1		0.04	0.07	0.11	0.13	0.16	0.17	0.19	0.20	0.20		0.10	0.18	0.26	0.32	0.38	0.42	0.46	0.48	0.50	$K_i = 0.8 - \sin \frac{\theta}{2} \times \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)$ $K_i = 0.5 - \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)$
d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1																							
	0.04	0.07	0.11	0.13	0.16	0.17	0.19	0.20	0.20																							
	0.10	0.18	0.26	0.32	0.38	0.42	0.46	0.48	0.50																							
	<b>ENTRADAS DESDE DEPÓSITOS A TUBERÍAS</b> <p><b>Conexión con tubo interior</b></p> <p><b>Conexión con arista viva</b></p> <p><b>Conexión redondeada</b></p> <table border="1"> <tr> <td>r/D</td> <td>0.02</td> <td>0.04</td> <td>0.06</td> <td>0.10</td> <td>0.15</td> </tr> <tr> <td><math>K_i</math></td> <td>0.28</td> <td>0.24</td> <td>0.15</td> <td>0.09</td> <td>0.04</td> </tr> </table>	r/D	0.02	0.04	0.06	0.10	0.15	$K_i$	0.28	0.24	0.15	0.09	0.04	$K_i = 0.78$ $K_i = 0.50$ $K_i = 0.05$																		
r/D	0.02	0.04	0.06	0.10	0.15																											
$K_i$	0.28	0.24	0.15	0.09	0.04																											

Por lo que la pérdida de carga debido a la conexión al depósito (punto A) será:

$$H_i = K_i \times \frac{V^2}{2 \times g} = 0.5 \times \frac{3.96^2}{2 \times 9.81} = 0.40 \text{ m.c.l.} \quad (8.13)$$

5. Pérdidas de carga a la descarga,  $H_d$  (punto D).

Al ser una descarga a presión atmosférica, sólo se tiene en cuenta la pérdida de carga debido a la velocidad de descarga en dicho punto, y cuya expresión general es:

$$H_d = \frac{V^2}{2 \times g} = \frac{3.96^2}{2 \times 9.81} = 0.80 \text{ m.c.l.} \quad (8.14)$$

La pérdida de carga total ( $H_t$ ), será:

$$H_t = H_{fd} + H_i + H_d = 9.054 + 0.40 + 0.80 = 10.25 \text{ m.c.l.} \quad (8.15)$$

6. Cálculo de la altura dinámica o manométrica total, o TDH (“Total Dynamic Head”).

El valor de TDH para este sistema hidráulico viene dado por:

$$TDH = (9.14 \text{ m} - 1.8 \text{ m}) + H_t = 7.34 + 10.25 = 17.6 \text{ m.c.l.} \quad (8.16)$$

Para seleccionar la bomba adecuada, debido a que los fabricantes proporcionan la información en base al empleo de agua como principal fluido, debemos corregir los 17.6 metros de columna de pulpa (m.c.l.) a metros de columna de agua (m.c.a.) (ANEFA, 2020; Volk, 2013; Warman, 2000). Para ello se emplea la gráfica siguiente entrando con los datos proporcionado por el enunciado del problema, como es la densidad de las partículas sólidas ( $2.7 \text{ g/cm}^3$ ), el tamaño medio de partícula ( $K_{50} = 250 \text{ micras}$ ) y la concentración de sólidos en peso ( $C_w = 25\%$ ).

Con estos datos, entrando en dicha gráfica se obtiene un HR (o ER) igual 0.90, lo que se puede expresar como:

$$HR = \frac{TDH_{pulpa}}{TDH_{agua}} \quad (8.17)$$

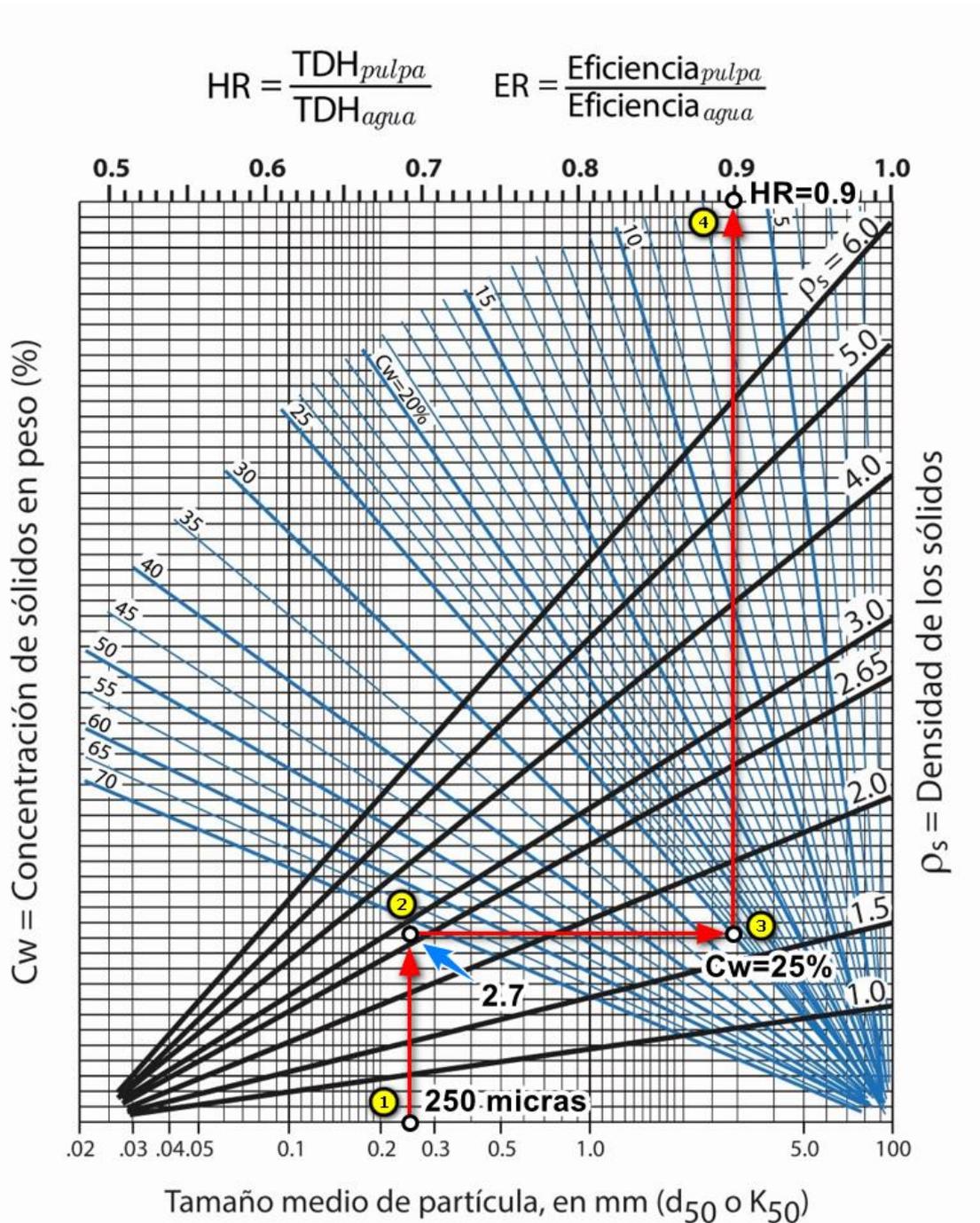
Para nuestro caso, la altura manométrica total expresada en columna de agua valdrá:

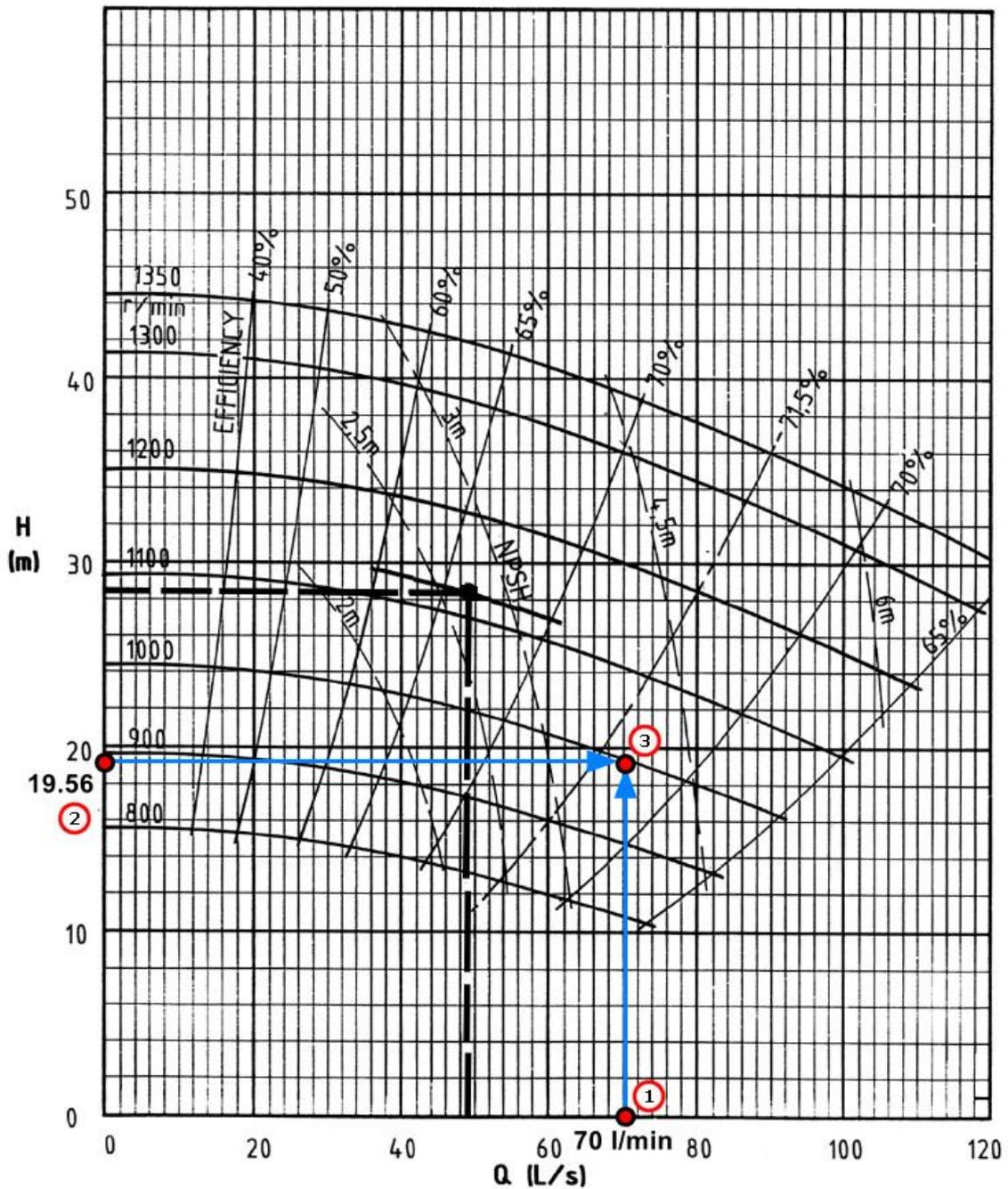
$$TDH_{agua} = \frac{TDH_{pulpa}}{HR} = \frac{17.6 \text{ m.c.l.}}{0.9} = 19.56 \text{ m.c.a.} \quad (8.18)$$

7. Selección de la bomba centrífuga.

Con el valor calculado de  $TDH_{agua}$  de 19.56 m.c.a. y con el caudal calculado anteriormente de  $Q = 252.10 \text{ m}^3/\text{h}$  (o aprox. 70 l/s), se puede entrar en las curvas características Q-H de los fabricantes de bombas y seleccionar la bomba adecuada a nuestra instalación de bombeo de pulpas.

Por ejemplo, para la curva característica Q-H que se facilita (Warman, 2000), la bomba sería una bomba trabajando a un rendimiento del 71%, a 1000 rpm y con un NPSHr de 3.7 m.c.a.





8. Cálculo de la potencia de la bomba.

Con el valor calculado de  $TDH_{agua}$  de 19.56 m.c.a., el caudal calculado de  $Q = 252.10 \text{ m}^3/\text{h}$ , el rendimiento obtenido del 71%, la densidad de la pulpa de  $1.19 \text{ t/m}^3$  podemos calcular la potencia en kW que necesitará la bomba a través de la siguiente expresión:

$$N_{kW} = \frac{Q \times TDH_{agua} \times \rho_{pulpa}}{\frac{\eta}{100} \times 360} = \frac{252.10 \times 19.56 \times 1.19}{0.71 \times 360} = 22.96 \text{ kW} \quad (8.19)$$

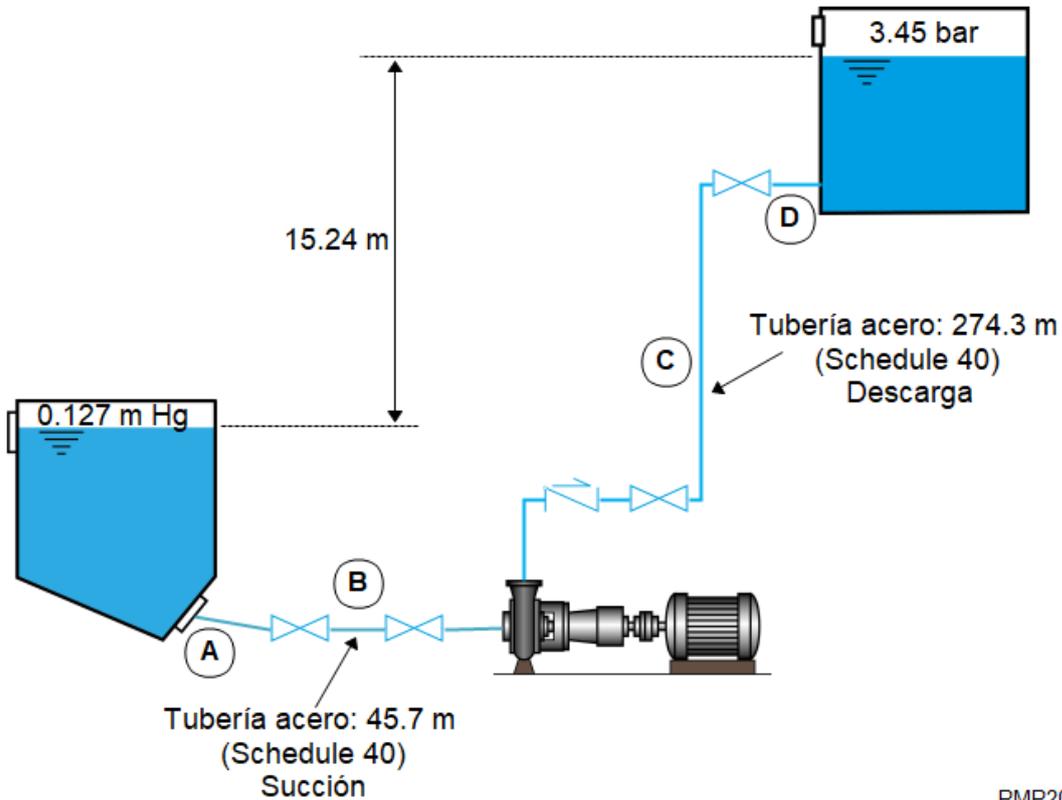
Se recomienda incrementar esta cantidad en un 25% debido a pérdidas en la transmisión y pérdidas en el rendimiento por causas de desgastes en las partes hidráulicas a medio plazo. Por lo que la potencia a instalar serían 28.69 kW.

#### Referencias:

- ANEFA. (2020). *Manual de Áridos para el Siglo XXI* (ANEFA, Ed.).
- Metso:Outotec. (2020). *Guidelines in slurry pumping. Slurry Pump Handbook* (8th ed.). Metso Minerals (Sala) AB. [www.metso.com/pumps](http://www.metso.com/pumps)
- Volk, M. (2013). *Pump Characteristics and Applications* (C. Press, Ed. 3rd ed.). <https://doi.org/https://doi.org/10.1201/b15559>
- Warman, L. (2000). *Warman Slurry Pumping Handbook*. Warman Slurry Pumping Handbook.

EJERCICIO 9 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO

9. Para el sistema hidráulico de bombeo que se facilita se pide: su dimensionado, cálculo de la altura manométrica o carga total dinámica (DTH) y selección de la bomba centrífuga más adecuada.



PMP2022

Datos:

- Capacidad =  $159 \text{ m}^3/\text{h} = 0.044 \text{ m}^3/\text{s}$
- Fluido = Agua a  $15.6^\circ\text{C}$  ( $\text{SG} = 1.0$ )
- Tipo de tuberías = Schedule 40 de acero (todos los accesorios y válvulas estarán unidos por bridas).
- Presión atmosférica =  $14.7 \text{ psi} = 29.9 \text{ in. Hg} = 1 \text{ Atm}$
- Para la selección de la bomba considerar dos velocidades del rodete =  $1800/3600 \text{ rpm}$ .

Solución:

1. Cálculo del apropiado rango de diseño de velocidades tanto para la tubería de succión como para la de descarga y sus diámetros.

Para obtener el rango adecuado de velocidades se parte del criterio que el rango de velocidades recomendado para la tubería de succión se encuentra entre 1 y 2 m/s, y para la tubería de descarga entre 2 y 3 m/s (Bombas Ideal, 1985; Lisbeth O. Lozano, 2018).

Según datos del problema, el caudal ( $Q$ ) debe ser de  $159 \text{ m}^3/\text{h}$ . Además, conociendo que para calcular el diámetro ( $D$ ) correspondiente a una tubería se puede establecer la siguiente expresión:

$$Q = V \times \pi \times \frac{D^2}{4} \quad (9.1)$$

Que despejando el diámetro queda de la siguiente forma:

$$D = \sqrt{\frac{4 \times Q}{\pi \times V}} \quad (9.2)$$

Por lo tanto:

- Tubería de succión:

Adoptando como velocidad ( $V_1$ ) de partida de  $1.5 \text{ m/s}$ , entonces:

$$D_1 = \sqrt{\frac{0.0442 \text{ m}^3/\text{s} \times 4}{\pi \times 1.5 \text{ m/s}}} = 0.194 \text{ m} = 194 \text{ mm} = 7.64 \text{ in} \quad (9.3)$$

- Tubería de descarga:

Adoptando como velocidad ( $V_2$ ) de partida de  $2.5 \text{ m/s}$ , entonces:

$$D_2 = \sqrt{\frac{0.0442 \text{ m}^3/\text{s} \times 4}{\pi \times 2.5 \text{ m/s}}} = 0.15 \text{ m} = 150 \text{ mm} = 5.91 \text{ in} \quad (9.4)$$

Una vez que se han estimado los diámetros probables para la tubería de succión ( $D_1$ ) y para la tubería de descarga ( $D_2$ ) se va a las tablas de los diámetros que el fabricante proporciona (se facilitan en pulgadas (in)) y se ve que los diámetros obtenidos no son comerciales (EngineeringToolBox, 2001; Hidraulic\_Institute, 1990; Volk, 2013) por lo que se elige los inmediatamente próximos:  $D_1 = 203 \text{ mm}$  (8 in),  $D_2 = 152 \text{ mm}$  (6 in).

Se hace una comprobación de que para esos diámetros comerciales todavía se sigue cumpliendo los rangos recomendables de velocidad:  $V_1 = 1.37 \text{ m/s}$  ( $D_1$ ) y  $V_2 = 2.44 \text{ m/s}$  ( $D_2$ ). Luego se cumplen.

De las tablas comerciales para la tubería de acero SCH 40 se obtienen datos que se necesitarán más adelante (EngineeringToolBox, 2001):

- Tubería de succión de diámetro 200 mm (8 in) y 0.044 m<sup>3</sup>/s:

$$V_1 = 1.40 \text{ m/s}$$

$$V_1^2/2g = 0.1 \text{ m.c.a.}$$

$$h_{f1} = 0.91 \text{ m.c.a./100m}$$

- Tubería de descarga de diámetro 154 mm (6 in) y 0.044 m<sup>3</sup>/s:

$$V_2 = 2.34 \text{ m/s}$$

$$V_2^2/2g = 0.28 \text{ m.c.a.}$$

$$h_{f2} = 3.36 \text{ m.c.a./100m}$$

## 2. Cálculo de la Altura o Carga Estática (Static Head), Hs.

Observando al esquema de la instalación se deduce que Hs = 15.24 m.

## 3. Cálculo de las pérdidas por fricción en la tubería de succión y en sus accesorios (H<sub>f1</sub>)

- Pérdidas de carga debidas a la longitud de la tubería de succión:

Sabiendo que hay instalados 45.7 m de tubería, entonces:

$$\frac{45.7 \text{ m}}{100 \text{ m}} \times 0.91 \text{ m.c.a.} = 0.42 \text{ m.c.a.} \quad (9.5)$$

- Pérdidas de carga a la salida del depósito (punto A):

Se estima un coeficiente de resistencia K = 0.5, por ello:

$$K \times \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = 0.5 \times 0.1 \text{ m.c.a.} = 0.05 \text{ m.c.a.} \quad (9.6)$$

- Pérdidas de carga debidas a los accesorios (punto B):

Estos accesorios consisten en 2 válvulas de compuerta (Gate Valve) que para un diámetro de tubería de 8 in según tablas de factores de fricción (Hidraulic\_Institute, 1990; Volk, 2013) se obtiene un coeficiente de resistencia de K = 0.07, por ello:

$$2 \times K \times \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = 2 \times 0.07 \times 0.1 \text{ m.c.a.} = 0.014 \text{ m.c.a.} \quad (9.7)$$

El valor total de las pérdidas por fricción para la tubería de succión será:

$$H_{f1} = 0.42 \text{ m.c.a.} + 0.05 \text{ m.c.a.} + 0.014 \text{ m.c.a.} = 0.484 \text{ m.c.a.} \quad (9.8)$$

4. Cálculo de las pérdidas por fricción en la tubería de descarga y en sus accesorios. ( $H_{f2}$ )

- Pérdidas de carga debidas a la longitud de la tubería de descarga:

Sabiendo que hay instalados 274.3 m de tubería, entonces:

$$\frac{274.3\text{m}}{100\text{m}} \times 3.36 \text{ m.c.a.} = 9.22 \text{ m.c.a.} \quad (9.9)$$

- Pérdidas de carga a la entrada del depósito (punto D):

Se estima un coeficiente de resistencia  $K = 1.0$ , por ello:

$$K \times \frac{V_2^2}{2 \cdot g} = 1.0 \times 0.28 \text{ m.c.a.} = 0.28 \text{ m.c.a.} \quad (9.10)$$

- Pérdidas de carga debidas a los accesorios de la descarga:

Estos accesorios consisten en 2 válvulas de compuerta (Gate Valve) y 1 válvula de retención (Check Valve) que para un diámetro de tubería de 6 in según tablas de factores de fricción (Hidraulic\_Institute, 1990; Volk, 2013) se obtienen unos coeficientes de resistencia de  $K_{\text{compuerta}} = 0.09$  y  $K_{\text{retención}} = 2$ , por ello:

$$2 \times K \times \frac{V_2^2}{2 \cdot g} = 2 \times 0.09 \times 0.28 \text{ m.c.a.} = 0.05 \text{ m.c.a.} \quad (9.11)$$

$$1 \times K \times \frac{V_2^2}{2 \cdot g} = 1 \times 2.0 \times 0.28 \text{ m.c.a.} = 0.56 \text{ m.c.a.} \quad (9.12)$$

El valor total de las pérdidas por fricción para la tubería de descarga será:

$$H_{f2} = 9.22 \text{ m.c.a.} + 0.28 \text{ m.c.a.} + 0.05 \text{ m.c.a.} + 0.56 \text{ m.c.a.} = 10.11 \text{ m.c.a.} \quad (9.13)$$

5. Cálculo de las alturas debidas a las presiones interiores de los depósitos ( $H_p$ )

- Depósito de succión:

Este depósito se encuentra en vacío a una presión de 0.127 m Hg (la presión en vacío se expresa como columna de mercurio), para pasar a unidades en m.c.a. se establece la siguiente conversión:

$$\text{Vac. (m.c.a.)} = \frac{\text{Vac. (m Hg)} \times 13.6}{SG} \quad (9.14)$$

$$H_{p1} = \text{Vac. (m.c.a.)} = \frac{0.127 \times 13.6}{1.0} = 1.73 \text{ m.c.a.}$$

- Depósito de descarga:

Este depósito se encuentra a una presión de 3.45 bar, para pasar a unidades en m.c.a. se establece la siguiente conversión:

$$H_{p2} = \text{m.c.a.} = \text{bar} \times \frac{10.2}{SG} = 3.45 \times \frac{10.2}{1.0} = 35.2 \text{ m.c.a.} \quad (9.15)$$

Luego la altura total debida a las presiones en los depósitos será:

$$H_p = H_{p1} + H_{p2} = 1.73 \text{ m.c.a.} + 35.2 \text{ m.c.a.} = 36.93 \text{ m.c.a.} \quad (9.16)$$

Nota: Si en el depósito de succión en lugar de estar en vacío estuviera con una presión positiva, entonces el valor de la presión en m.c.a. se restaría en la expresión anterior. Si el depósito de descarga estuviera en vacío, su presión se restaría, igualmente (Volk, 2013).

## 6. Cálculo de las alturas debidas a las velocidades en las tuberías ( $H_v$ )

- Tubería de succión:

La velocidad del flujo a través de ella es de 1.40 m/s, luego:

$$H_{v1} = \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = 0.1 \text{ m.c.a.} \quad (9.17)$$

- Tubería de descarga:

La velocidad del flujo a través de ella es de 2.34 m/s, luego:

$$H_{v2} = \frac{V_2^2}{2 \cdot g} = 0.28 \text{ m.c.a.} \quad (9.18)$$

Luego la altura total debida a las velocidades del flujo en las tuberías será:

$$H_v = H_{v1} + H_{v2} = 0.1 + 0.28 = 0.38 \text{ m.c.a.} \quad (9.19)$$

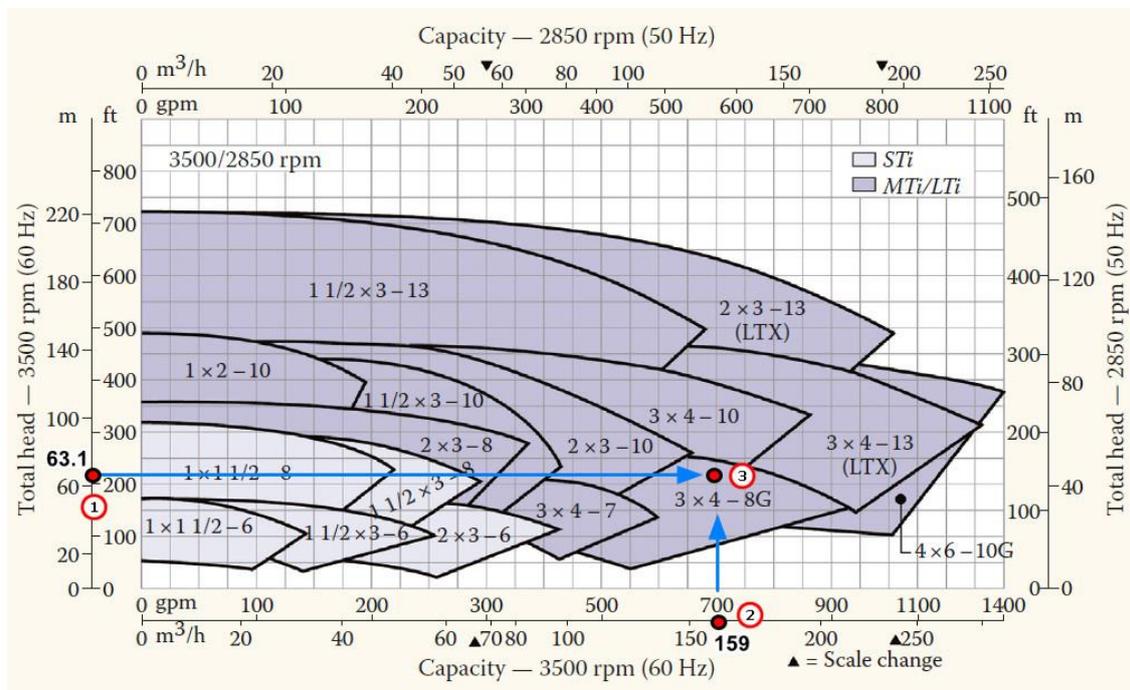
7. Cálculo de la altura dinámica total (DTH)

El valor de DTH será la suma de todas las alturas calculadas anteriormente, es decir:

$$DTH = H_s + H_{f1} + H_{f2} + H_p + H_v = 15.24 + 0.484 + 10.11 + 36.93 + 0.38 = 63.14 \text{ m.c.a.} \quad (9.20)$$

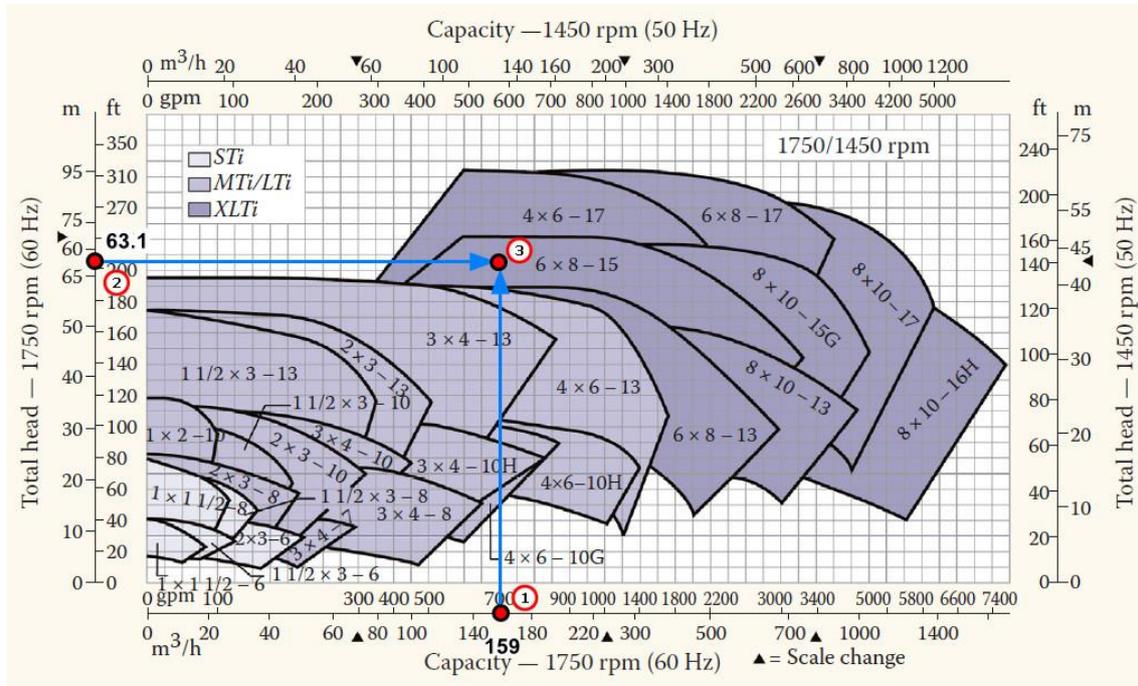
8. Selección de la bomba centrífuga adecuada

Para ellos nos apoyaremos en las siguientes curvas Q-H proporcionadas por fabricantes de bombas que, para 1800 rpm y 2850 rpm, y trabajando a 60Hz (EEUU), se pueden elegir:



Bomba 3x4-8G a 3500 rpm  
Bomba 6x8-15 a 1750 rpm

Donde la notación de este fabricante (convención establecida en EEUU) establece que el primer número representa el diámetro de salida de descarga de la bomba (pulgadas, in), el segundo se refiere al diámetro de entrada por la succión de la bomba (pulgadas, in) y el último al diámetro del rodete (*impeller*), también en pulgadas (in).

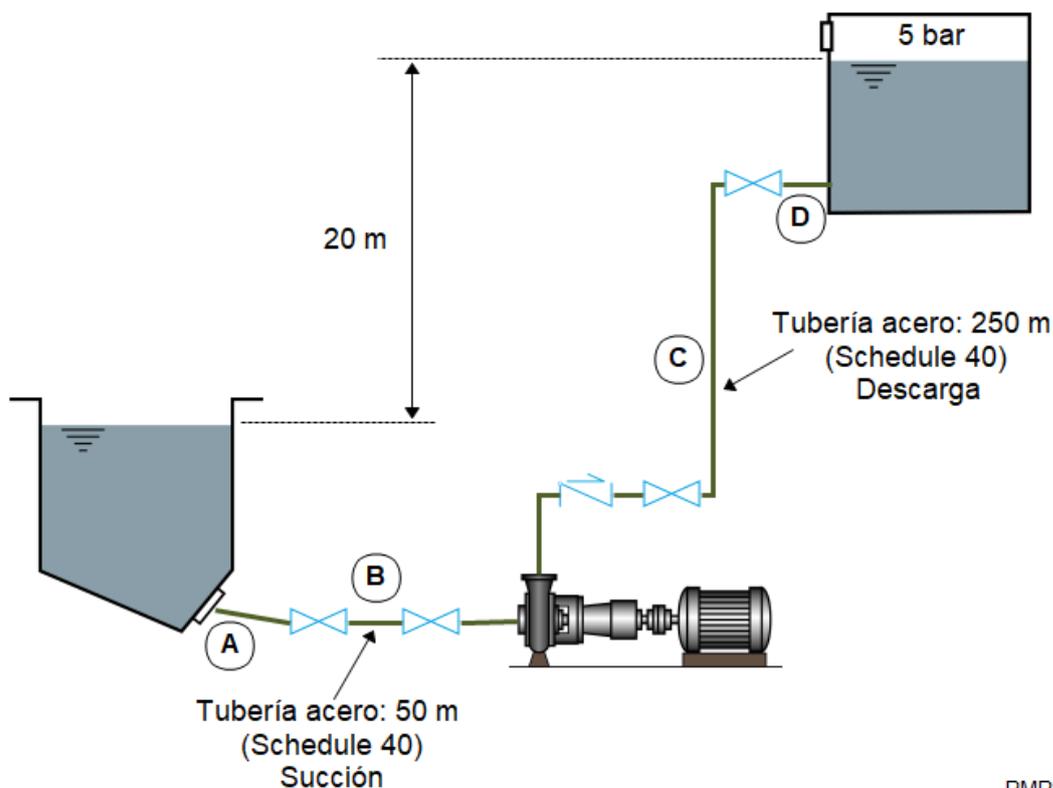


## Referencias:

- Bombas Ideal, S. A. (1985). *Datos técnicos de hidráulica. Bombas* (S. L. Signo Gráfico, Ed.). Bombas Ideal, S.A.
- EngineeringToolBox. (2001). *Steel Pipes Schedule 40 - Pressure Loss*. [https://www.engineeringtoolbox.com/pressure-loss-steel-pipes-d\\_307.html](https://www.engineeringtoolbox.com/pressure-loss-steel-pipes-d_307.html)
- Hdraulic\_Institute. (1990). *Engineering Data Book* (2nd ed.).
- Lisbeth O. Lozano, P. (2018). *Cálculo en detalle de sistemas de bombeo de agua* (I. published, Ed.).
- Volk, M. (2013). *Pump Characteristics and Applications* (C. Press, Ed. 3rd ed.). <https://doi.org/https://doi.org/10.1201/b15559>

EJERCICIO 10 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO

10. Se dispone del siguiente sistema de bombeo de pulpas que bombea una pulpa mineral compuesta por partículas de sulfuros metálicos con densidad específica  $3 \text{ t/m}^3$  ( $\rho_s$ ) y agua. Los sólidos tienen una granulometría característica media de  $d_{50}$  ( $K_{50}$ ) de 350 micras, la concentración de sólidos en peso,  $C_w$ , es del 40%. El tonelaje de sólidos es de 75 t/h. La longitud de la tubería de succión es de 50 metros y dispone de dos válvulas de compuerta, fabricada en acero Schedule 40. La tubería de impulsión o descarga tiene una longitud de 250 metros, presenta 3 codos de radio amplio, dos válvulas de compuerta y una de retención. Se pide la calcular el diámetro de tubería idónea para el tramo de succión y para el tramo de descarga (considerar el mismo diámetro), cálculo de la altura manométrica o carga total dinámica (DTH) y selección de la bomba centrífuga más adecuada.



PMP2022

Datos:

- Tipo de tuberías = Schedule 40 de acero (todos los accesorios y válvulas estarán unidos por bridas).
- Presión atmosférica = 14.7 psi = 29.9 in. Hg = 1 Atm

Solución:

1. Cálculo del caudal a bombear,  $Q$ , concentración de sólidos en volumen,  $C_v$ , y peso específico de la pulpa,  $\rho_p$ .

Para el cálculo de la concentración de sólidos en volumen hacemos uso de la siguiente expresión:

$$C_V = \frac{\frac{C_w}{100} \times \rho_l}{\rho_s - \frac{C_w}{100} \times (\rho_s - \rho_l)} \times 100 \quad (10.1)$$

Por lo que, sustituyendo:

$$C_V = \frac{0.40 \times 1.0}{3.0 - 0.40 \times (3.0 - 1.0)} \times 100 = 18.18\% \quad (10.2)$$

Para el cálculo de la densidad de la pulpa empleamos la siguiente expresión:

$$\frac{C_V}{100} = \frac{(\rho_p - \rho_l)}{(\rho_s - \rho_l)} \quad (10.3)$$

Por lo que, sustituyendo:

$$\rho_p = \frac{18.18}{100} \times (3.0 - 1.0) + 1.0 = 1.36 \text{ t/m}^3 \quad (10.4)$$

Para el cálculo del caudal de pulpa se establece que:

$$\left. \begin{array}{l} 75 \text{ t}_{\text{sólidos}}/\text{h} \rightarrow 40\% (C_w) \\ y \rightarrow 100\% \end{array} \right| y = 187.5 \text{ t}_{\text{pulpa}}/\text{h} \quad (10.5)$$

Sabiendo que la densidad de la pulpa es  $1.36 \text{ t/m}^3$ , entonces:

$$Q_{\text{pulpa}} = \frac{187.5 \text{ t/h}}{1.36 \text{ t/m}^3} = 137.87 \text{ m}^3/\text{h} \quad (10.6)$$

También se puede emplear la siguiente expresión para el cálculo del caudal de pulpa,  $Q_{\text{pulpa}}$  ( $\text{m}^3/\text{h}$ ) (Metso:Outotec, 2020):

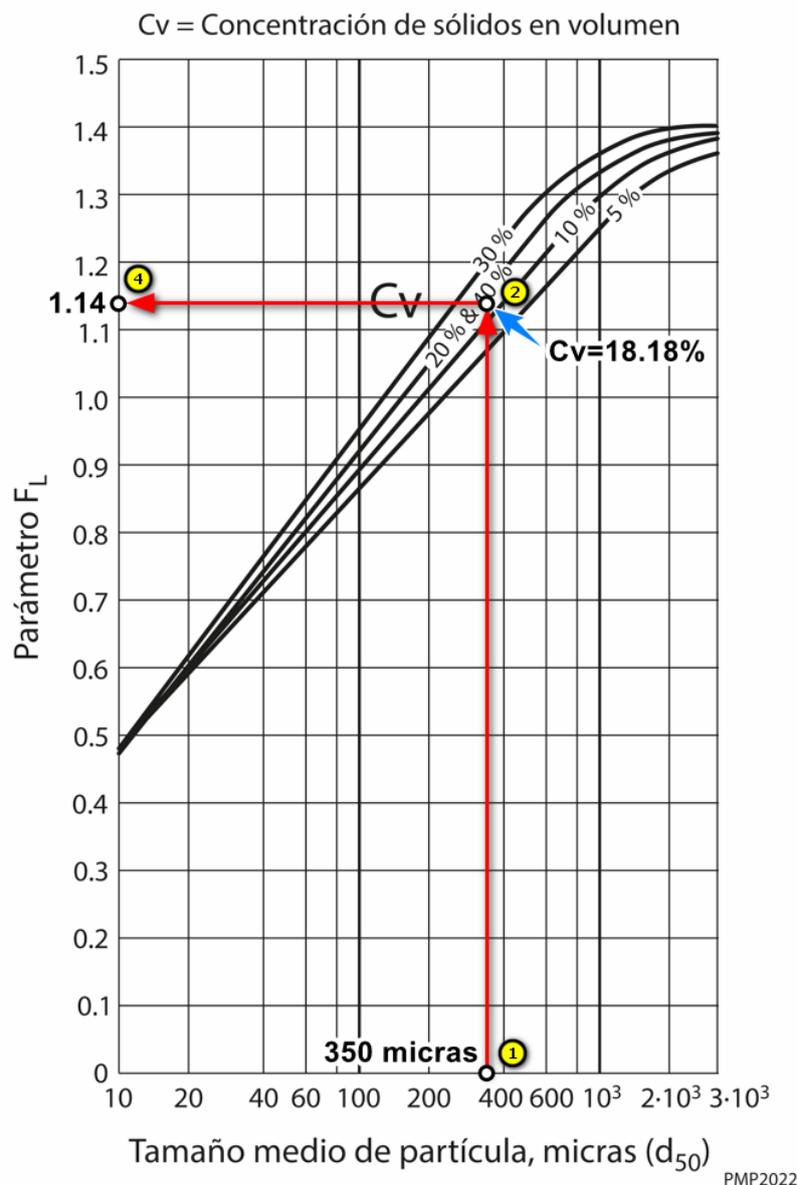
$$Q_{\text{pulpa}} = t p h_{\text{sólidos}} \times \left( \frac{1}{\rho_s} + \left( \frac{100}{C_w \%} - 1 \right) \right) \quad (10.7)$$

$$Q_{\text{pulpa}} = 75 \times \left( \frac{1}{3.0} + \left( \frac{100}{40} - 1 \right) \right) = 137.5 \text{ m}^3/\text{h}$$

2. Cálculo del apropiado rango de diseño de velocidades tanto para la tubería de succión como para la de descarga y sus diámetros.

Cuando se manejan pulpas debe cumplirse que la velocidad del flujo de pulpa sea superior a la velocidad límite para evitar la sedimentación de las partículas y para ello se adopta el criterio de Durand (ANEFA, 2020):

$$V_l = F_l \times \sqrt{2 \times g \times D \times \frac{\rho_s - \rho_l}{\rho_l}} \quad (10.8)$$



Para la determinación del factor  $F_1$  se entra en el gráfico anterior (ANEFA, 2020; Bouso, 1993; Warman, 2000), considerando un  $C_v = 18.18\%$ , y un tamaño medio de partícula de 350 micras ( $d_{50}$ ) del que se obtiene un valor

aproximado de 1.14. Con este valor se puede entrar en la anterior expresión de Durand y calcular la velocidad límite.

Vamos a adoptar un diámetro comercial de 128 mm (5 in) (EngineeringToolBox, 2001):

$$V_{l(succión)} = 1.14 \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.128 \times \frac{3.0 - 1.0}{1.0}} = 2.56 \text{ m/s} \quad (10.9)$$

Según se ha estimado más arriba, el caudal ( $Q_{pulp}$ ) debe ser de 137.87 m<sup>3</sup>/h (0.038 m<sup>3</sup>/s). Por lo tanto, podemos comprobar con la siguiente expresión la velocidad (V) correspondiente a la tubería y que cumple que es superior a la velocidad límite:

$$Q = V \times \pi \times \frac{D^2}{4} \quad (10.10)$$

Que despejando la velocidad nos queda de la siguiente forma:

$$V = \frac{4 \times Q}{\pi \times D^2} \quad (10.11)$$

Por lo tanto:

$$V = \frac{4 \times 137.87 \text{ m}^3/\text{h} \times \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}}{\pi \times 0.128^2} = 2.98 \text{ m/s} \quad (10.12)$$

De las tablas comerciales para la tubería de acero SCH 40 se obtienen datos que se necesitarán más adelante (EngineeringToolBox, 2001):

- Tubería de succión y descarga de diámetro 128 mm (5 in) y 0.038 m<sup>3</sup>/s:

$$V = 2.94 \text{ m/s}$$

$$V^2/2g = 0.44 \text{ m.c.l.}$$

$$h_f = 6.4 \text{ m.c.l./100m}$$

### 3. Cálculo de la Altura o Carga Estática (Static Head), H<sub>s</sub>.

Observando al esquema de la instalación se deduce que H<sub>s</sub> = 20 m.

4. Cálculo de las pérdidas por fricción en la tubería de succión y en sus accesorios. ( $H_{f1}$ )

- Pérdidas de carga debidas a la longitud de la tubería de succión:

Sabiendo que hay instalados 50 m de tubería, entonces:

$$\frac{50 \text{ m}}{100 \text{ m}} \times 6.4 \text{ m.c.l.} = 3.2 \text{ m.c.l.} \quad (10.13)$$

- Pérdidas de carga a la salida del depósito (punto A):

Se estima un coeficiente de resistencia  $K = 0.5$ , por ello:

$$K \times \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = 0.5 \times 0.44 \text{ m.c.l.} = 0.22 \text{ m.c.l.} \quad (10.14)$$

- Pérdidas de carga debidas a los accesorios (punto B):

Estos accesorios consisten en 2 válvulas de compuerta (Gate Valve) que para un diámetro de tubería de 5 in según tablas de factores de fricción (Hidraulic\_Institute, 1990; Volk, 2013) se obtiene un coeficiente de resistencia de  $K = 0.12$ , por ello:

$$2 \times K \times \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = 2 \times 0.12 \times 0.44 \text{ m.c.l.} = 0.11 \text{ m.c.l.} \quad (10.15)$$

El valor total de las pérdidas por fricción para la tubería de succión será:

$$H_{f1} = 3.2 \text{ m.c.l.} + 0.22 \text{ m.c.l.} + 0.11 \text{ m.c.l.} = 3.53 \text{ m.c.l.} \quad (10.16)$$

5. Cálculo de las pérdidas por fricción en la tubería de descarga y en sus accesorios. ( $H_{f2}$ )

- Pérdidas de carga debidas a la longitud de la tubería de descarga:

Sabiendo que hay instalados 250 m de tubería, entonces:

$$\frac{250 \text{ m}}{100 \text{ m}} \times 6.4 \text{ m.c.l.} = 16 \text{ m.c.l.} \quad (10.17)$$

- Pérdidas de carga a la entrada del depósito (punto D):

Se estima un coeficiente de resistencia  $K = 1.0$ , por ello:

$$K \times \frac{V_2^2}{2 \cdot g} = 1.0 \times 0.44 \text{ m.c.l.} = 0.44 \text{ m.c.l.} \quad (10.18)$$

- Pérdidas de carga debidas a los accesorios de la descarga:

Estos accesorios consisten en 2 válvulas de compuerta (Gate Valve) y 1 válvula de retención (Check Valve) que para un diámetro de tubería de 5 in según tablas de factores de fricción (Hidraulic\_Institute, 1990; Volk, 2013) se obtienen unos coeficientes de resistencia de  $K_{\text{compuerta}} = 0.12$  y  $K_{\text{retención}} = 2$ , por ello:

$$2 \times K \times \frac{V_2^2}{2 \cdot g} = 2 \times 0.12 \times 0.44 \text{ m.c.l.} = 0.11 \text{ m.c.l.} \quad (10.19)$$

$$1 \times K \times \frac{V_2^2}{2 \cdot g} = 1 \times 2.0 \times 0.44 \text{ m.c.l.} = 0.88 \text{ m.c.l.} \quad (10.20)$$

El valor total de las pérdidas por fricción para la tubería de descarga será:

$$H_{f2} = 16 \text{ m.c.l.} + 0.44 \text{ m.c.l.} + 0.11 \text{ m.c.l.} + 0.88 \text{ m.c.l.} = 17.43 \text{ m.c.l.} \quad (10.21)$$

#### 6. Cálculo de las alturas debidas a las presiones interiores de los depósitos ( $H_p$ )

- Depósito de succión:

Se encuentra abierto a la presión atmosférica, por lo que  $H_{p1} = 0$ .

- Depósito de descarga:

Este depósito se encuentra a una presión de 5 bar, para pasar a unidades en m.c.l. se establece la siguiente conversión:

$$H_{p2} = \text{m.c.l.} = \text{bar} \times \frac{10.2}{SG} = 5 \times \frac{10.2}{1.36} = 37.5 \text{ m.c.l.} \quad (10.22)$$

Luego la altura total debida a las presiones en los depósitos será:

$$H_p = H_{p1} + H_{p2} = 0 \text{ m.c.l.} + 37.5 \text{ m.c.l.} = 37.5 \text{ m.c.l.} \quad (10.23)$$

Nota: Si en el depósito de succión en lugar de estar en vacío estuviera con una presión positiva, entonces el valor de la presión en m.c.l. se restaría en la expresión anterior. Si el depósito de descarga estuviera en vacío, su presión se restaría, igualmente (Volk, 2013).

7. Cálculo de las alturas debidas a las velocidades en las tuberías ( $H_v$ )

- Tubería de succión:

La velocidad del flujo a través de ella es de 2.94 m/s, luego:

$$H_{v1} = \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = 0.44 \text{ m.c.l.} \quad (10.24)$$

- Tubería de descarga:

La velocidad del flujo a través de ella es de 2.34 m/s, luego:

$$H_{v2} = \frac{V_2^2}{2 \cdot g} = 0.44 \text{ m.c.l.} \quad (10.25)$$

Luego la altura total debida a las velocidades del flujo en las tuberías será:

$$H_v = H_{v1} + H_{v2} = 0.44 + 0.44 = 0.88 \text{ m.c.l.} \quad (10.26)$$

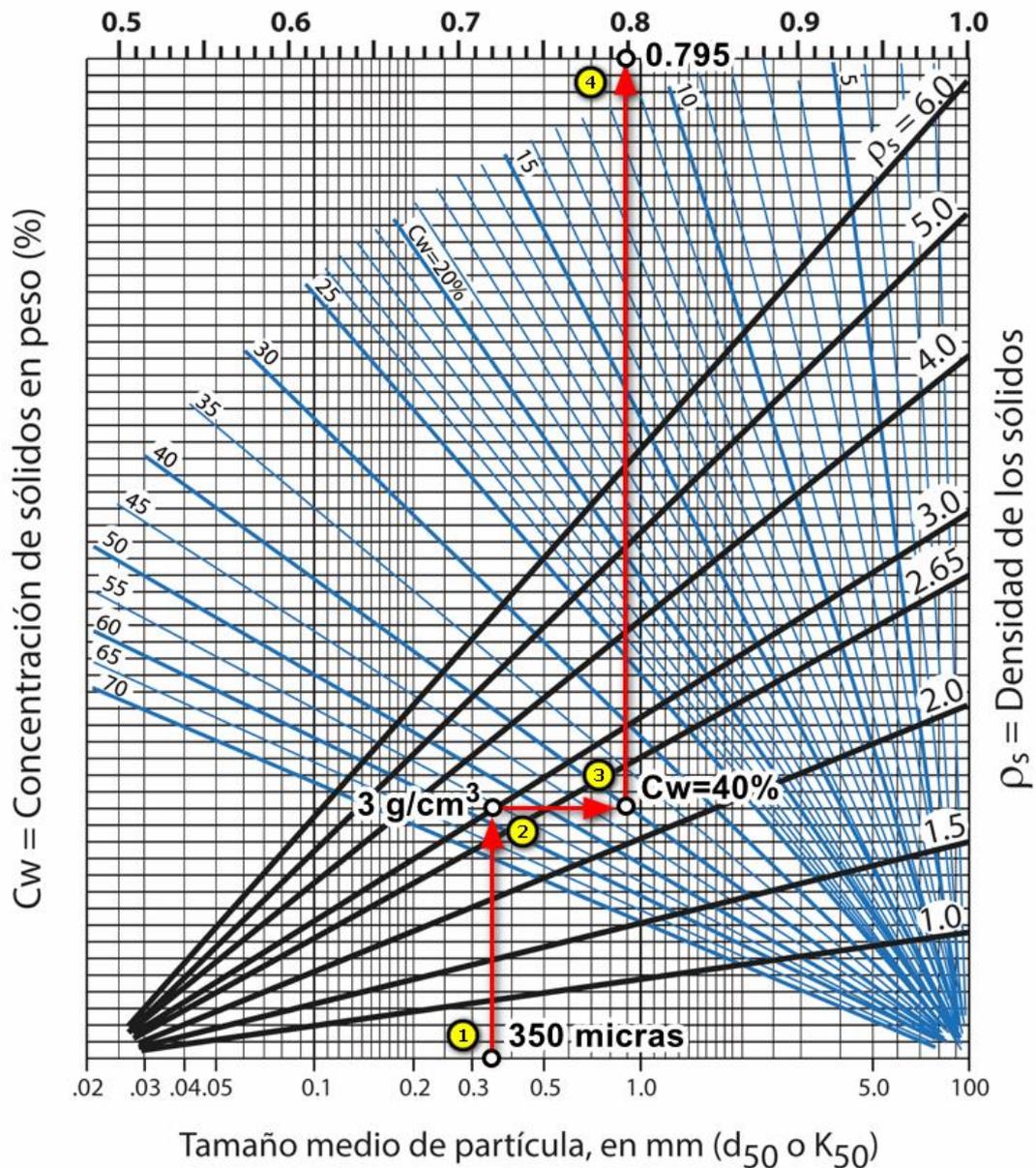
8. Cálculo de la altura dinámica total (DTH)

El valor de DTH será la suma de todas las alturas calculadas anteriormente, es decir:

$$DTH = H_s + H_{f1} + H_{f2} + H_p + H_v = 20 + 3.53 + 17.43 + 37.5 + 0.88 = 79.34 \text{ m.c.l.} \quad (10.27)$$

Para seleccionar la bomba adecuada, debido a que los fabricantes proporcionan la información en base al empleo de agua como principal fluido, debemos corregir los 79.34 metros de columna de pulpa (m.c.l.) a metros de columna de agua (m.c.a.) (ANEFA, 2020; Volk, 2013; Warman, 2000). Para ello se emplea la gráfica siguiente entrando con los datos proporcionado por el enunciado del problema, como es la densidad de las partículas sólidas ( $3 \text{ g/cm}^3$ ), el tamaño medio de partícula ( $K_{50} = 350 \text{ micras}$ ) y la concentración de sólidos en peso ( $C_w = 40\%$ ).

$$HR = \frac{TDH_{pulpa}}{TDH_{agua}} \quad ER = \frac{Eficiencia_{pulpa}}{Eficiencia_{agua}}$$



PMP2022

Con estos datos, entrando en dicha gráfica se obtiene un HR (o ER) igual 0.795, lo que se puede expresar como:

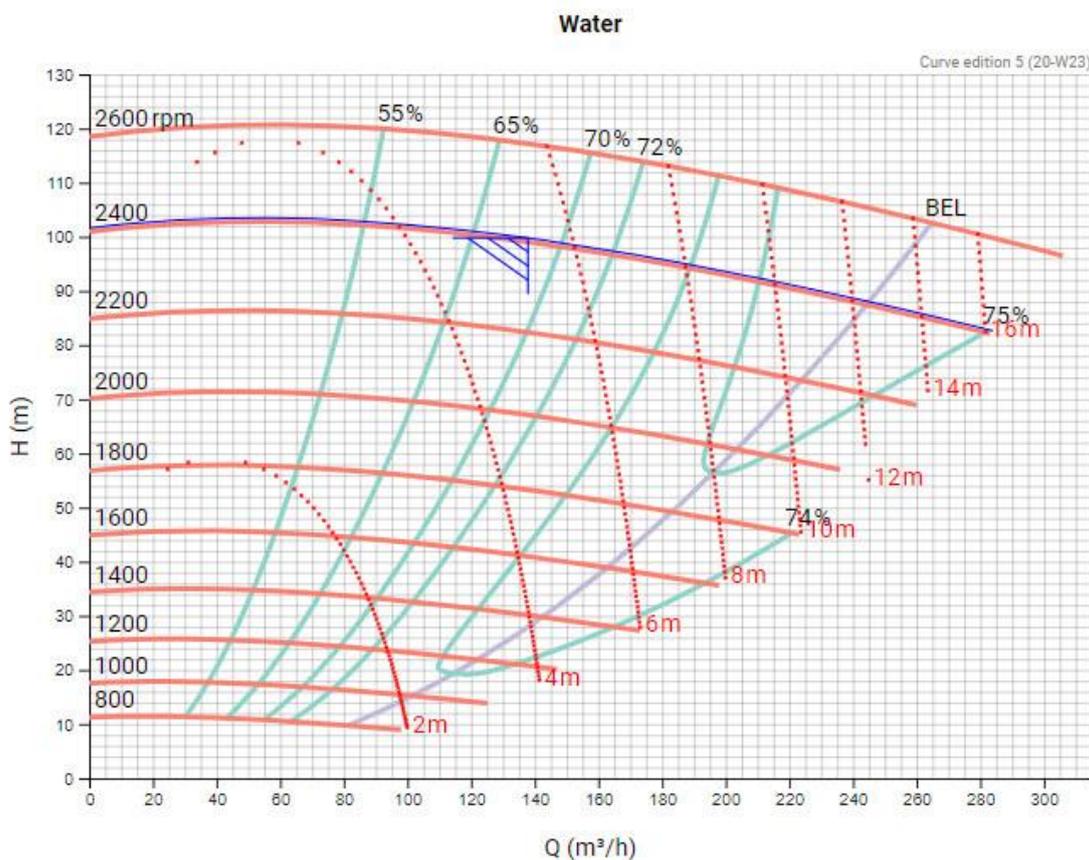
$$HR = \frac{TDH_{pulpa}}{TDH_{agua}} \quad (10.28)$$

Para nuestro caso, la altura manométrica total expresada en columna de agua valdrá:

$$TDH_{agua} = \frac{TDH_{pulpa}}{HR} = \frac{79.34 \text{ m.c.l.}}{0.795} = 99.79 \text{ m.c.a.} \quad (10.29)$$

9. Selección de la bomba centrífuga.

Con el valor calculado de  $TDH_{agua}$  de 99.79 m.c.a. y con el caudal calculado anteriormente de  $Q = 137.87 \text{ m}^3/\text{h}$  (o aprox. 38 l/s), se puede entrar en las curvas características Q-H de los fabricantes de bombas y seleccionar la bomba adecuada a nuestra instalación de bombeo de pulpas. En nuestro caso, hemos utilizado la aplicación PumpDim™ de Metso:Outotec y entrando los datos calculados nos ofrece la siguiente curva de características:



Que corresponde al siguiente modelo de bomba HM100



### HM100

Impeller Ø: 300 mm  
 Max sphere: 25 mm  
 BEP flow: 245 m<sup>3</sup>/h  
 BEP efficiency: 75.5 %  
 Duty speed: 2408 rpm  
 Duty efficiency: 68.3 %  
 Tip speed: 37.8 m/s  
 NPSH required: 5.3 m  
 Absorbed power: 54.7 kW

HR: 1  
 ER: 1  
 QR: 1

HIDE CURVE

Esta bomba a bomba sería una bomba trabajando a un rendimiento del 67%, a 2400 rpm y con un NPSH<sub>r</sub> de 5.5 m.c.a.

Nuestro NPSH<sub>d</sub> se ha calculado como sigue:

$$NPSH_d = H_{Atm} - H_{fl} - H_{v1} + H_{succión} - H_{vapor} = 10.2 - 3.53 - 0.44 + 2 - 0.5 = 7.73 \text{ m.c.a.} \quad (10.30)$$

Como NPSH<sub>d</sub> > NPSH<sub>r</sub> la bomba va a trabajar adecuadamente evitando fenómenos de cavitación.

#### 10. Cálculo de la potencia de la bomba.

Con el valor calculado de TDH<sub>agua</sub> de 99.79 m.c.a., el caudal calculado de Q = 137.87 m<sup>3</sup>/h, el rendimiento obtenido del 67%, la densidad de la pulpa de 1.36 t/m<sup>3</sup> podemos calcular la potencia en kW que necesitará la bomba a través de la siguiente expresión:

$$N_{kW} = \frac{Q \times TDH_{agua} \times \rho_{pulpa}}{\frac{\eta}{100} \times 360} = \frac{137.87 \times 99.79 \times 1.36}{0.67 \times 360} = 77.57 \text{ kW} \quad (10.31)$$

Se recomienda incrementar esta cantidad en un 25% debido a pérdidas en la transmisión y pérdidas en el rendimiento por causas de desgastes en las partes hidráulicas a medio plazo. Por lo que la potencia a instalar serían 97 kW.

#### Referencias:

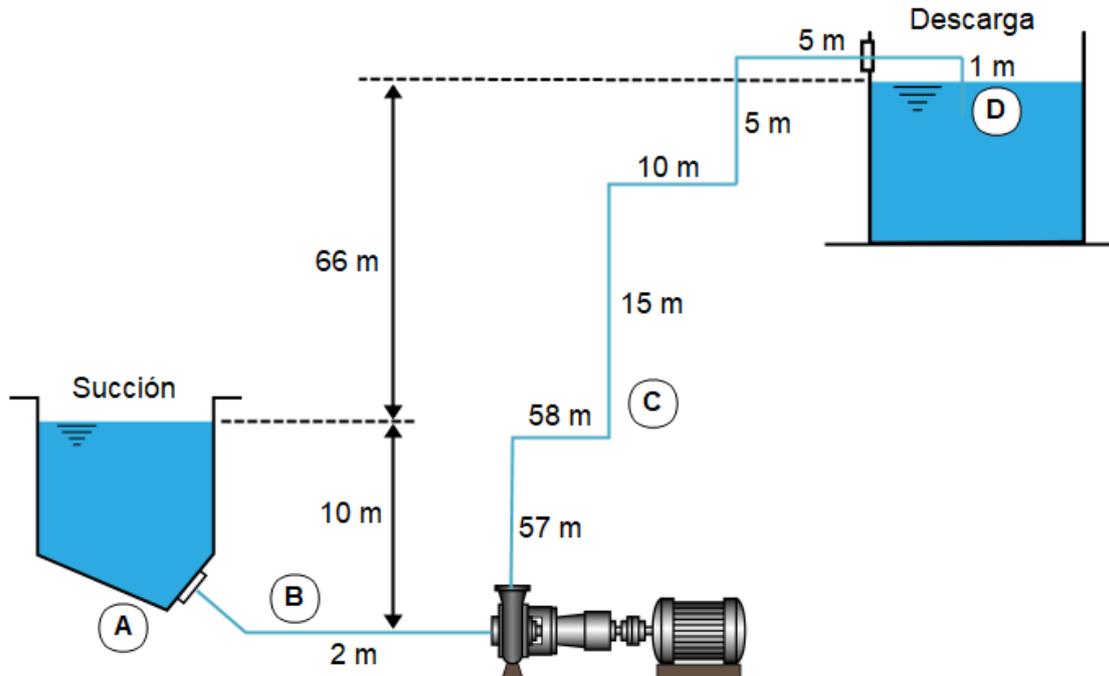
- ANEFA. (2020). *Manual de Áridos para el Siglo XXI* (ANEFA, Ed.).  
 Bouso, J. L. (1993). *Manual de bombeo de pulpas* (Fueyo, Ed.). ERAL, Equipos y Procesos S.A.  
 EngineeringToolBox. (2001). *Steel Pipes Schedule 40 - Pressure Loss*.  
[https://www.engineeringtoolbox.com/pressure-loss-steel-pipes-d\\_307.html](https://www.engineeringtoolbox.com/pressure-loss-steel-pipes-d_307.html)  
 Hydraulic\_Institute. (1990). *Engineering Data Book* (2nd ed.).

EJERCICIOS RESUELTOS DE SISTEMAS DE TRANSPORTE CONTINUO. BOMBAS Y CINTAS  
TRANSPORTADORAS

- Metso:Outotec. (2020). *Guidelines in slurry pumping. Slurry Pump Handbook* (8th ed.). Metso Minerals (Sala) AB. [www.metso.com/pumps](http://www.metso.com/pumps)
- Volk, M. (2013). *Pump Characteristics and Applications* (C. Press, Ed. 3rd ed.). <https://doi.org/https://doi.org/10.1201/b15559>
- Warman, L. (2000). *Warman Slurry Pumping Handbook*. Warman Slurry Pumping Handbook.

EJERCICIO 11 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO

11. Se quiere bombear desde A hasta D, sabiendo que la capacidad del tanque A es de 100000 litros de agua y se desea hacerlo en 6 horas. Se pide calcular el dimensionado de las tuberías, el cálculo de la altura manométrica o carga total dinámica (DTH) y la selección de la bomba centrífuga más adecuada, en términos de potencia absorbida (kW y CV).



PMP2022

Datos:

- Fluido = Agua a 15.6°C (SG = 1.0)
- Tipo de tuberías = Schedule 40 de acero (todos los accesorios y válvulas estarán unidos por bridas).
- El tramo de succión dispone de una válvula de compuerta tipo Gate, totalmente abierta, y un codo de gran radio a 45°. Todos los accesorios están unidos mediante brida (flanged).
- El tramo de descarga dispone de una válvula de compuerta tipo Gate, totalmente abierta, cuatro codos tipo regular de 90°, un codo de gran radio a 45°, y una válvula antirretorno tipo Swing Check. Todos los accesorios están unidos mediante brida (flanged).

Solución:

1. Cálculo del caudal a bombear.

Se nos pide que se eleven 100000 litros de agua en 6 horas, luego el caudal de diseño será:

$$Q = \frac{100000 \text{ l}}{6 \text{ h}} = 16666.67 \text{ l/h} = 16.67 \text{ m}^3/\text{h} = 0.00463 \text{ m}^3/\text{s} = 4.63 \text{ l/s}$$

(11.1)

2. Cálculo del apropiado rango de diseño de velocidades tanto para la tubería de succión como para la de descarga y sus diámetros.

Para obtener el rango adecuado de velocidades se parte del criterio que el rango de velocidades recomendado para la tubería de succión se encuentra entre 1 y 2 m/s, y para la tubería de descarga entre 2 y 3 m/s (Bombas Ideal, 1985; Lisbeth O. Lozano, 2018).

Según lo calculado, el caudal (Q) debe ser de 16.67 m<sup>3</sup>/h. Además, sabiendo que para calcular el diámetro (D), correspondiente a una tubería, se puede emplear la siguiente expresión:

$$Q = V \times \pi \times \frac{D^2}{4} \quad (11.2)$$

Y que despejando el diámetro queda de la siguiente forma:

$$D = \sqrt{\frac{4 \times Q}{\pi \times V}} \quad (11.3)$$

Entonces, por lo tanto:

- Tubería de succión:

Adoptando como velocidad (V<sub>1</sub>) de partida de 1.5 m/s, entonces:

$$D_1 = \sqrt{\frac{0.00463 \text{ m}^3/\text{s} \times 4}{\pi \times 1.5 \text{ m/s}}} = 0.0626 \text{ m} = 62.6 \text{ mm} \quad (11.4)$$

Entrando en tablas de tuberías comerciales de acero Schedule 40 (EngineeringToolBox, 2001), se puede observar que un diámetro próximo es el de 0.063 m (2.5 pulgadas). Por ello, es este el diámetro (D<sub>1</sub>) que se selecciona para la tubería de succión.

- Tubería de descarga:

Adoptando como velocidad (V<sub>2</sub>) de partida de 2.1 m/s, entonces:

$$D_2 = \sqrt{\frac{0.00463 \text{ m}^3/\text{s} \times 4}{\pi \times 2.1 \text{ m/s}}} = 0.053 \text{ m} = 53 \text{ mm} \quad (11.5)$$

Procediendo de forma similar para la tubería de descarga, tal y como se ha explicado para la tubería de succión, vemos que las tablas de diámetros comerciales de tubería de acero Schedule 40 ofrecen una tubería de 0.053 (2.1 pulgadas), por lo que es este diámetro ( $D_2$ ) el que se selecciona para la tubería de descarga.

De las tablas comerciales para la tubería de acero SCH 40 se obtienen datos que se necesitarán más adelante (EngineeringToolBox, 2001):

- Tubería de succión de diámetro 63 mm (2 1/2 in) y 0.00463 (0.005) m<sup>3</sup>/s:

$$V_1 = 1.6 \text{ m/s}$$

$$V_1^2/2g = 0.13 \text{ m.c.a.}$$

$$h_{f1} = 4.781 \text{ m.c.a./100m}$$

- Tubería de descarga de diámetro 53 mm (2.1 in) y 0.00463 (0.005) m<sup>3</sup>/s:

$$V_2 = 2.3 \text{ m/s}$$

$$V_2^2/2g = 0.27 \text{ m.c.a.}$$

$$h_{f2} = 11.345 \text{ m.c.a./100m}$$

### 3. Cálculo de la Altura o Carga Estática (Static Head), H<sub>s</sub>.

Observando al esquema de la instalación se deduce que  $H_s = 66 \text{ m (m.c.a.)}$ .

### 4. Cálculo de las pérdidas por fricción en la tubería de succión y en sus accesorios (H<sub>f1</sub>)

- Pérdidas de carga debidas a la longitud de la tubería de succión:

Sabiendo que hay instalados 2 m de tubería, entonces:

$$\frac{2 \text{ m}}{100 \text{ m}} \times 4.781 \text{ m.c.a.} = 0.096 \text{ m.c.a.} \quad (11.6)$$

- Pérdidas de carga a la salida del depósito (punto A):

Se estima un coeficiente de resistencia  $K = 0.5$ , por ello:

$$K \times \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = 0.5 \times 0.13 \text{ m.c.a.} = 0.065 \text{ m.c.a.} \quad (11.7)$$

- Pérdidas de carga debidas a los accesorios (punto B):

Estos accesorios consisten en 1 válvulas de compuerta completamente abierta (Gate Valve) que para un diámetro de tubería de 2 1/2" in según tablas de factores de fricción (Hidraulic\_Institute, 1990; Volk, 2013) se obtiene un coeficiente de resistencia de  $K = 0.2$ . Además, también hay que tener en cuenta la instalación de un codo de 45° de gran radio unido por brida, que ofrece un coeficiente de resistencia de  $K = 0.2$  (Volk, 2013), por ello:

$$K \times \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = 0.2 \times 0.13 \text{ m.c.a.} = 0.026 \text{ m.c.a.} \quad (11.8)$$

$$K \times \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = 0.2 \times 0.13 \text{ m.c.a.} = 0.026 \text{ m.c.a.} \quad (11.9)$$

El valor total de las pérdidas por fricción para la tubería de succión será:

$$H_{f1} = 0.0956 \text{ m.c.a.} + 0.065 \text{ m.c.a.} + 0.026 \text{ m.c.a.} + 0.026 \text{ m.c.a.} = 0.2126 \text{ m.c.a.} \quad (11.10)$$

5. Cálculo de las pérdidas por fricción en la tubería de descarga y en sus accesorios. ( $H_{f2}$ )

- Pérdidas de carga debidas a la longitud de la tubería de descarga:

Sabiendo que hay instalados  $58+57+10+20+5+1 = 151$  m de tubería, entonces:

$$\frac{151\text{m}}{100\text{m}} \times 11.345 \text{ m.c.a.} = 17.13 \text{ m.c.a.} \quad (11.11)$$

- Pérdidas de carga a la entrada del depósito (punto D):

Se estima un coeficiente de resistencia  $K = 1.0$ , por ello:

$$K \times \frac{V_2^2}{2 \cdot g} = 1.0 \times 0.27 \text{ m.c.a.} = 0.27 \text{ m.c.a.} \quad (11.12)$$

- Pérdidas de carga debidas a los accesorios de la descarga:

Estos accesorios consisten en 1 válvula de compuerta (Gate Valve) completamente abierta, 1 válvula de retención (Swing Check Valve), 1 codo de 45° de gran radio, y 4 codos de 90° tipo “regular”, estos accesorios para un diámetro de tubería de 2.1 pulgadas (in) según tablas de factores de fricción (Hidraulic\_Institute, 1990; Volk, 2013) se obtienen unos coeficientes de resistencia de  $K_{\text{compuerta}} = 0.2$ ,  $K_{\text{retención}} = 2.0$ ,  $K_{\text{Codo45°}} = 0.2$  y  $K_{\text{Codo90°}} = 0.38$ , respectivamente. Por ello:

$$K \times \frac{V_2^2}{2 \cdot g} = 0.2 \times 0.27 \text{ m.c.a.} = 0.054 \text{ m.c.a.} \quad (11.13)$$

$$K \times \frac{V_2^2}{2 \cdot g} = 2.0 \times 0.27 \text{ m.c.a.} = 0.54 \text{ m.c.a.} \quad (11.14)$$

$$K \times \frac{V_2^2}{2 \cdot g} = 0.2 \times 0.27 \text{ m.c.a.} = 0.054 \text{ m.c.a.} \quad (11.15)$$

$$4 \times K \times \frac{V_2^2}{2 \cdot g} = 4 \times 0.38 \times 0.27 \text{ m.c.a.} = 0.41 \text{ m.c.a.} \quad (11.16)$$

El valor total de las pérdidas por fricción para la tubería de descarga será:

$$H_{f2} = 17.13 \text{ m.c.a.} + 0.27 \text{ m.c.a.} + 0.54 \text{ m.c.a.} + 0.054 \text{ m.c.a.} + 0.41 \text{ m.c.a.} + 0.054 \text{ m.c.a.} = 18.4 \text{ m.c.a.} \quad (11.17)$$

#### 6. Cálculo de las alturas debidas a las velocidades en las tuberías ( $H_v$ )

- Tubería de succión:

La velocidad del flujo a través de ella es de 1.6 m/s, luego:

$$H_{v1} = \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = 0.13 \text{ m.c.a.} \quad (11.18)$$

- Tubería de descarga:

La velocidad del flujo a través de ella es de 2.3 m/s, luego:

$$H_{v2} = \frac{V_2^2}{2 \cdot g} = 0.27 \text{ m.c.a.} \quad (11.19)$$

Luego la altura total debida a las velocidades del flujo en las tuberías será:

$$H_v = H_{v1} + H_{v2} = 0.13 + 0.27 = 0.4 \text{ m.c.a.} \quad (11.20)$$

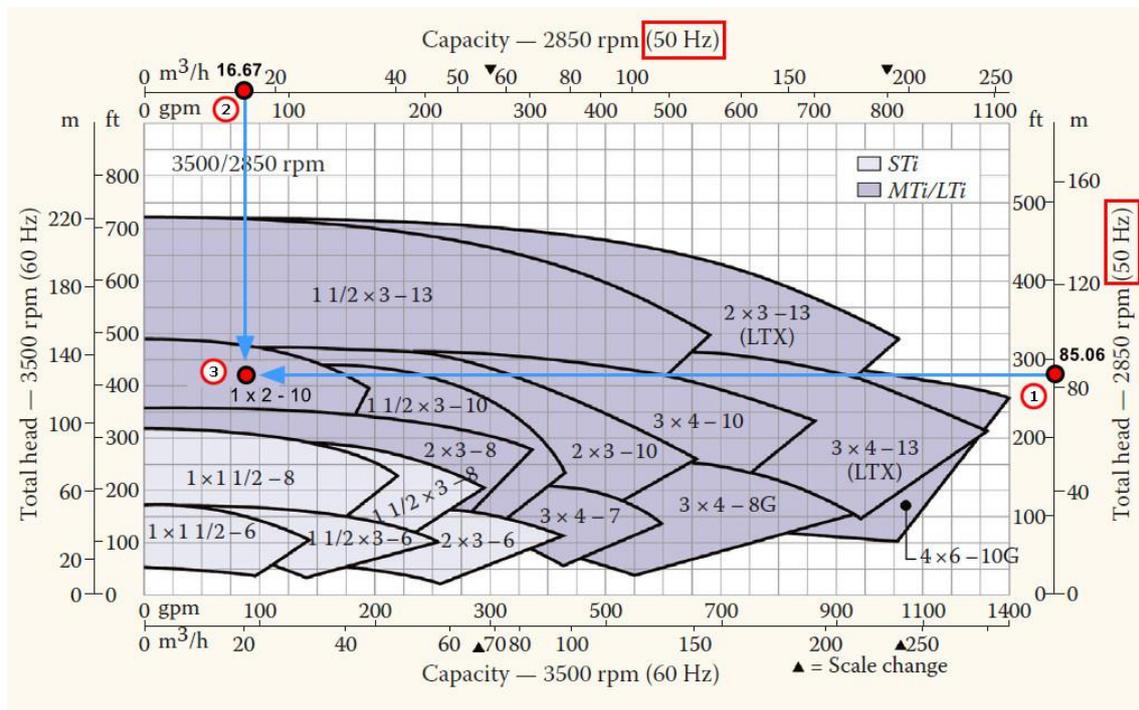
7. Cálculo de la altura dinámica total (DTH)

El valor de DTH será la suma de todas las alturas calculadas anteriormente, es decir:

$$DTH = H_s + H_{f1} + H_{f2} + H_v = 66 + 0.2126 + 18.45 + 0.4 = 85.058 \text{ m.c.a.} \quad (11.21)$$

8. Selección de la bomba centrífuga adecuada

Para ellos nos apoyaremos en las siguientes curvas Q-H proporcionadas por fabricantes de bombas que, trabajando a 50 Hz, se pueden elegir:



Bomba 1 x 2 - 10 a 2850 rpm

Donde la notación de este fabricante (convención establecida en EEUU) establece que el primer número representa el diámetro de salida de descarga de la bomba (pulgadas, in), el segundo se refiere al diámetro de entrada por la

succión de la bomba (pulgadas, in) y el último al diámetro del rodete (*impeller*), también en pulgadas (in).

### 9. Cálculo de la potencia de la bomba.

Con el valor calculado de  $TDH_{agua}$  de 85.06 m.c.a., el caudal calculado de  $Q = 16.67 \text{ m}^3/\text{h}$ , un rendimiento estimado del 60%, y la densidad del agua de  $1 \text{ t}/\text{m}^3$  podemos calcular la potencia en kW y CV que necesitará la bomba a través de la siguiente expresión:

$$N_{kW} = \frac{Q \times TDH_{agua} \times \rho_{agua}}{\frac{\eta}{100} \times 360} = \frac{16.67 \times 85.056 \times 1.00}{0.60 \times 360} = 6.75 \text{ kW} \quad (11.22)$$

$$N_{CV} = \frac{Q \text{ l/s} \times TDH_{agua} \times \rho_{agua}}{\frac{\eta}{100} \times 75} = \frac{4.63 \times 85.056 \times 1.00}{0.60 \times 75} = 8.75 \text{ CV} \quad (11.23)$$

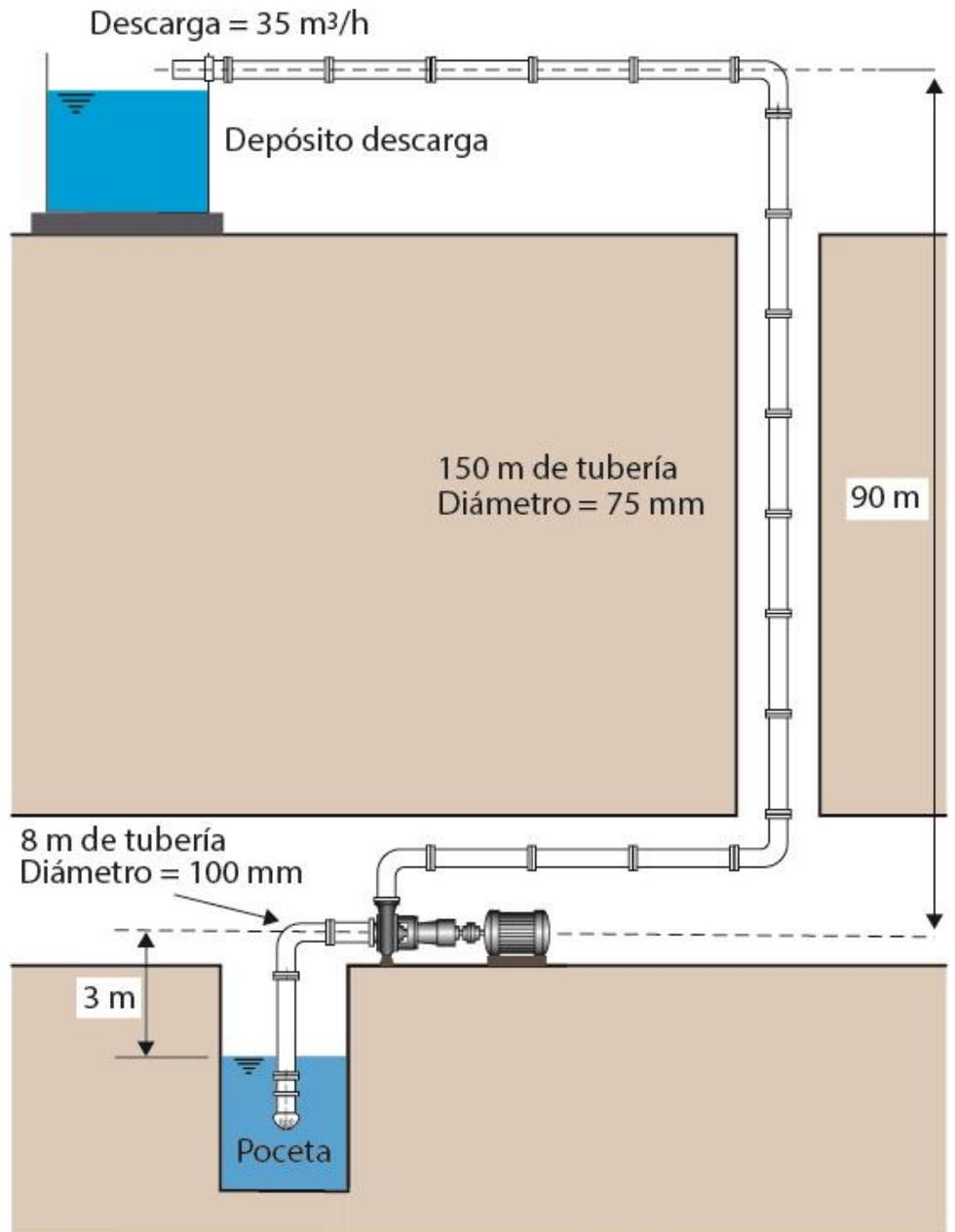
Se recomienda incrementar estas cantidades en un 25% debido a pérdidas en la transmisión y pérdidas en el rendimiento por causas de desgastes en las partes hidráulicas a medio plazo. Por lo que la potencia a instalar serían 8.44 kW (11 CV).

### Referencias:

- Bombas Ideal, S. A. (1985). *Datos técnicos de hidráulica. Bombas* (S. L. Signo Gráfico, Ed.). Bombas Ideal, S.A.
- EngineeringToolBox. (2001). *Steel Pipes Schedule 40 - Pressure Loss*. [https://www.engineeringtoolbox.com/pressure-loss-steel-pipes-d\\_307.html](https://www.engineeringtoolbox.com/pressure-loss-steel-pipes-d_307.html)
- Hidraulic\_Institute. (1990). *Engineering Data Book* (2nd ed.).
- Lisbeth O. Lozano, P. (2018). *Cálculo en detalle de sistemas de bombeo de agua* (I. published, Ed.).
- Volk, M. (2013). *Pump Characteristics and Applications* (C. Press, Ed. 3rd ed.). <https://doi.org/https://doi.org/10.1201/b15559>

EJERCICIO 12 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO

12. Se quiere desaguar una galería elevando el agua a un depósito de descarga externo a razón de  $45 \text{ m}^3/\text{h}$ . Para determinar la bomba más adecuada se pide calcular la altura manométrica o carga dinámica total (DTH) y la potencia teórica, en kW y CV, necesaria para la bomba. Considera un rendimiento para la bomba del 60%.



PMP2022

Nota:

- Fluido = Agua a  $15.6^\circ\text{C}$  ( $\text{SG} = 1.0$ )
- Tipo de tuberías = Hierro fundido (todos los accesorios y válvulas estarán unidos por bridas).

- Para los codos de la tubería de descarga considerar un coeficiente de fricción (K) igual a 0.35.
- Para los codos de la tubería de succión considerar un coeficiente de fricción (K) igual a 0.30.
- Para la válvula de pie (alcachofa) considerar un coeficiente de fricción (K) igual a 0.8.
- Para las pérdidas por fricción de la tubería, emplear la expresión de Williams y Hazen, con un  $C = 140$ :

$$H_f = \frac{5.6028}{10^8} \times \left( \frac{100}{C} \right)^{1.85} \times \frac{Q^{1.85}}{D^{4.8655}}$$

$D$  (m)

$Q$  (m<sup>3</sup>/h)

$H_f$  (m/100m)

Solución:

1. Caudal a bombear.

El problema nos dice que el caudal a bombear es de 35 m<sup>3</sup>/h es decir:

$$Q = 35 \text{ m}^3/\text{h} = 0.00972 \text{ m}^3/\text{s} = 9.72 \text{ l/s} \quad (12.1)$$

2. Cálculo del apropiado rango de diseño de velocidades tanto para la tubería de succión como para la de descarga y sus diámetros.

Para obtener el rango adecuado de velocidades se parte del criterio que el rango de velocidades recomendado para la tubería de succión se encuentra entre 1 y 2 m/s, y para la tubería de descarga entre 2 y 3 m/s (Bombas Ideal, 1985; Lisbeth O. Lozano, 2018).

Como sabemos el caudal (Q) es de 35 m<sup>3</sup>/h. Por otro lado, se dispone de la siguiente expresión:

$$Q = V \times \pi \times \frac{D^2}{4} \quad (12.2)$$

Y que despejando la velocidad queda de la siguiente forma:

$$V = \frac{4 \times Q}{\pi \times D^2} \quad (12.3)$$

Entonces, por lo tanto:

- Tubería de succión:

Adoptando como diámetro ( $D_1$ ) 0.100 m, entonces:

$$V_1 = \frac{0.00972 \text{ m}^3/\text{s} \times 4}{\pi \times (0.100 \text{ m})^2} = 1.24 \text{ m/s} \quad (12.4)$$

- Tubería de descarga:

Adoptando como diámetro ( $D_2$ ) 0.075 m, entonces:

$$V_2 = \frac{0.00972 \text{ m}^3/\text{s} \times 4}{\pi \times (0.075 \text{ m})^2} = 2.2 \text{ m/s} \quad (12.5)$$

- Tubería de succión de diámetro 100 mm:

$$V_1 = 1.24 \text{ m/s}$$

$$V_1^2/2g = 0.07 \text{ m.c.a.}$$

- Tubería de descarga de diámetro 75 mm:

$$V_2 = 2.2 \text{ m/s}$$

$$V_2^2/2g = 0.25 \text{ m.c.a.}$$

### 3. Cálculo de la Altura o Carga Estática (Static Head), $H_s$ .

Observando al esquema de la instalación se deduce que  $H_s = 90 \text{ m} + 3 \text{ m} = 93 \text{ m}$  (m.c.a.).

### 4. Cálculo de las pérdidas por fricción en la tubería de succión y en sus accesorios ( $H_{f1}$ )

- Pérdidas de carga debidas a la longitud de la tubería de succión:

Aplicando la ecuación de Williams y Hazen:

$$H_f = \frac{5.6028}{10^8} \times \left(\frac{100}{140}\right)^{1.85} \times \frac{35^{1.85}}{0.100^{4.8655}} = 1.59 \text{ (m.c.a./100m)} \quad (12.6)$$

Sabiendo que hay instalados 8 m de tubería, entonces:

$$H_{f \text{ tubería}} = \frac{8 \text{ m}}{100 \text{ m}} \times 1.59 \text{ m.c.a./100m} = 0.13 \text{ m.c.a.} \quad (12.7)$$

- Pérdidas de carga debidas al codo en la tubería de succión:

$$H_{f \text{ codo}} = K_{\text{codo}} \times \frac{V_1^2}{2 \times g} = 0.30 \times 0.07 = 0.021 \text{ m.c.a} \quad (12.8)$$

- Pérdidas de carga debidas a la válvula de pie de la tubería de succión:

$$H_{f \text{ pie}} = K_{\text{pie}} \times \frac{V_1^2}{2 \times g} = 0.80 \times 0.07 = 0.056 \text{ m.c.a} \quad (12.9)$$

Luego, el valor total de las pérdidas por fricción para la tubería de succión será:

$$H_{f1} = 0.13 \text{ m.c.a.} + 0.021 \text{ m.c.a.} + 0.056 \text{ m.c.a.} = 0.207 \text{ m.c.a.} \quad (12.10)$$

5. Cálculo de las pérdidas por fricción en la tubería de descarga y en sus accesorios. ( $H_{f2}$ )

- Pérdidas de carga debidas a la longitud de la tubería de descarga:

Aplicando la ecuación de Williams y Hazen:

$$H_f = \frac{5.6028}{10^8} \times \left( \frac{100}{140} \right)^{1.85} \times \frac{35^{1.85}}{0.075^{4.8655}} = 6.43 \text{ (m.c.a./100m)} \quad (12.11)$$

Sabiendo que hay instalados 150 m de tubería, entonces:

$$H_{f \text{ tubería}} = \frac{150 \text{ m}}{100 \text{ m}} \times 6.43 \text{ m.c.a./100m} = 9.64 \text{ m.c.a.} \quad (12.12)$$

- Pérdidas de carga debidas a los tres codos de la tubería de descarga:

$$H_{f \text{ codo}} = 3 \times K_{\text{codo}} \times \frac{V_2^2}{2 \times g} = 3 \times 0.35 \times 0.25 = 0.26 \text{ m.c.a} \quad (12.13)$$

Luego, el valor total de las pérdidas por fricción para la tubería de descarga será:

$$H_{f2} = 9.64 \text{ m.c.a.} + 0.26 \text{ m.c.a.} = 9.9 \text{ m.c.a.} \quad (12.14)$$

6. Cálculo de las alturas debidas a las velocidades en las tuberías ( $H_v$ )

- Tubería de succión:

La velocidad del flujo a través de ella es de 1.24 m/s, luego:

$$H_{v1} = \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = 0.07 \text{ m.c.a.} \quad (12.15)$$

- Tubería de descarga:

La velocidad del flujo a través de ella es de 2.2 m/s, luego:

$$H_{v2} = \frac{V_2^2}{2 \cdot g} = 0.25 \text{ m.c.a.} \quad (12.16)$$

Luego la altura total debida a las velocidades del flujo en las tuberías será:

$$H_v = H_{v1} + H_{v2} = 0.07 + 0.25 = 0.32 \text{ m.c.a.} \quad (12.17)$$

7. Cálculo de la altura dinámica total (DTH)

El valor de DTH será la suma de todas las alturas calculadas anteriormente, es decir:

$$DTH = H_s + H_{f1} + H_{f2} + H_v = 93 + 0.207 + 9.9 + 0.32 = 103.43 \text{ m.c.a.} \quad (12.18)$$

8. Cálculo de la potencia de la bomba.

Con el valor calculado de  $TDH_{\text{agua}}$  de 103.43 m.c.a., el caudal calculado de  $Q = 35 \text{ m}^3/\text{h}$ , un rendimiento estimado del 60%, y la densidad del agua de  $1 \text{ t}/\text{m}^3$  podemos calcular la potencia en kW y CV que necesitará la bomba a través de la siguiente expresión:

$$N_{kW} = \frac{Q \times TDH_{\text{agua}} \times \rho_{\text{agua}}}{\frac{\eta}{100} \times 360} = \frac{35 \times 103.43 \times 1.00}{0.60 \times 360} = 16.76 \text{ kW} \quad (12.19)$$

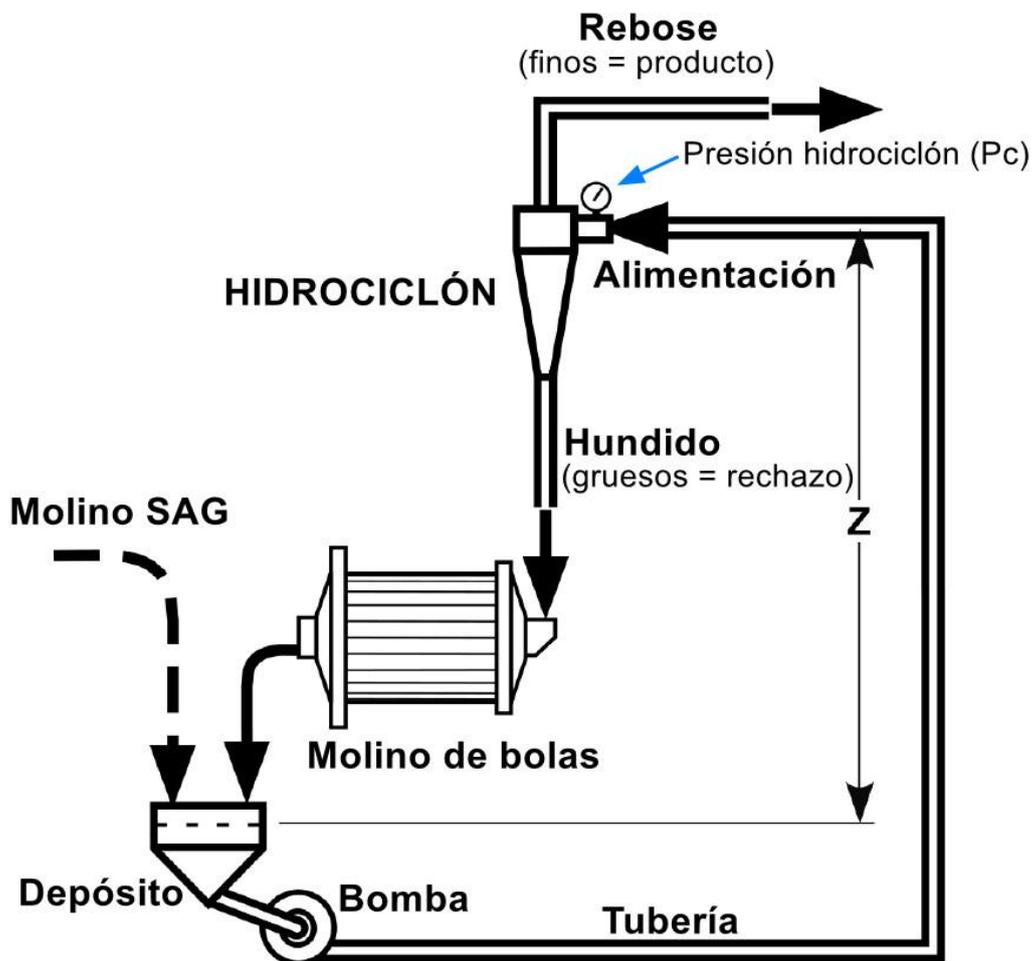
$$N_{CV} = \frac{Q \text{ l/s} \times TDH_{\text{agua}} \times \rho_{\text{agua}}}{\frac{\eta}{100} \times 75} = \frac{9.72 \times 103.43 \times 1.00}{0.60 \times 75} = 22.34 \text{ CV}$$

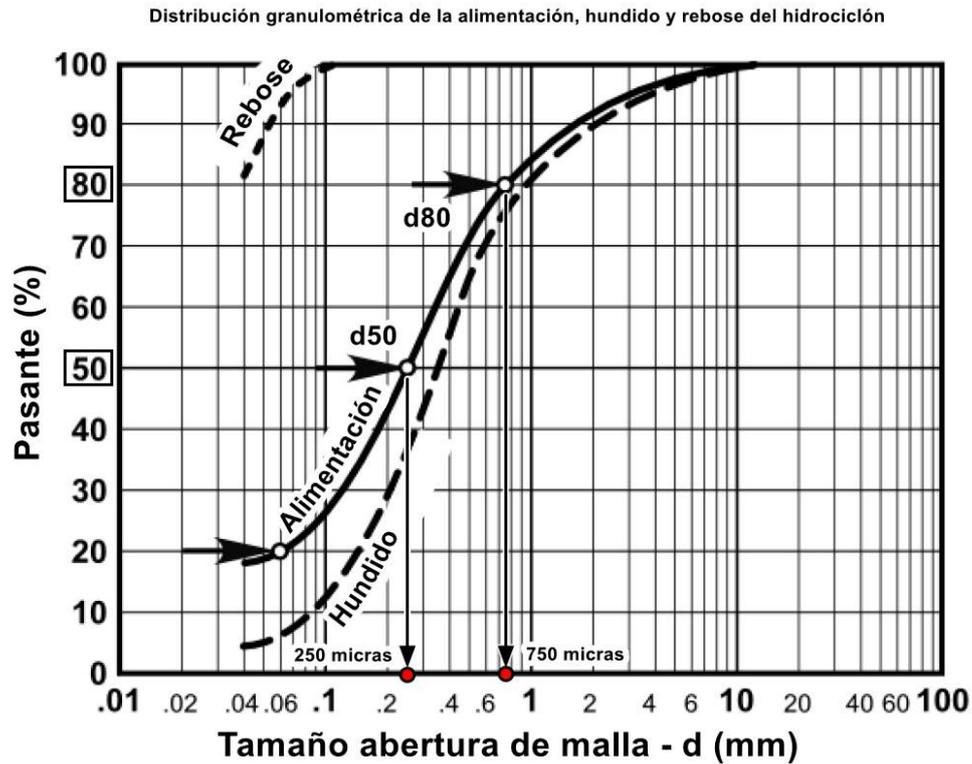
(12.20)

Se recomienda incrementar estas cantidades en un 25% debido a pérdidas en la transmisión y pérdidas en el rendimiento por causas de desgastes en las partes hidráulicas a medio plazo. Por lo que la potencia a instalar serían 20.95 kW (27.93 CV).

EJERCICIO 13 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO

13. Se tiene una planta de procesamiento de mineral de cobre compuesta por un molino SAG y un molino de bolas que mediante bombeo alimentan un hidrociclón, tal y como representa el esquema de flujo adjunto de la planta. El producto del hidrociclón es enviado a la siguiente etapa de concentración mineral por flotación (finos), mientras que las partículas superiores a 10 mm (gruesos) son renviadas, como hundido, al molino de bolas para su molienda, nuevamente. El caudal de alimentación de pulpa al hidrociclón es  $61.7 \text{ l/s}$ , la concentración de sólidos en peso ( $C_w$ ) es del 40%, y la concentración de sólidos en volumen ( $C_v$ ) es del 19%. La presión de entrada en el hidrociclón es de 65 kPa. Por otro lado, se sabe que la altura estática ( $Z$ ) es de 16 metros, el diámetro interno ( $D$ ) de la tubería es de 150 mm y la longitud equivalente total de tubería ( $L$ ) es de 30 metros (Nota: aquí ya se tienen en cuenta las pérdidas de carga por fricción de codos, accesorios, válvulas, etc.). Calcular el TDH requerido para la bomba en metros de columna de agua (m.c.a.), y la potencia absorbida teórica (kW). Emplea el ábaco de Warman para la obtención del coeficiente de fricción de Darcy,  $f$ .





Nota:

- Densidad específica (S.G.) del cobre = 2.85
- Densidad específica (S.G.) de la pulpa = 1.35
- Rugosidad relativa ( $\epsilon/D$ ) =  $2.8 \times 10^{-4}$
- Emplear el diagrama de Warman para el cálculo del factor de fricción de Darcy ( $f$ )
- Considerar una viscosidad del agua igual a  $0.001 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$
- Considerar una eficiencia de la bomba del 75%
- Considerar una eficiencia del motor del 80%

Solución:

1. Caudal de bombeo.

El caudal de pulpa a bombear hacia la entrada del hidrociclón es de 61.7 l/s de pulpa que equivale a 222.12  $\text{m}^3/\text{h}$  o 0.0617  $\text{m}^3/\text{s}$  de pulpa.

2. Altura estática,  $H_g$ .

El desnivel geométrico ( $Z$ ) que la pulpa debe de superar son 16 metros, es decir,  $H_g = 16$  metros.

3. Velocidad del flujo de pulpa.

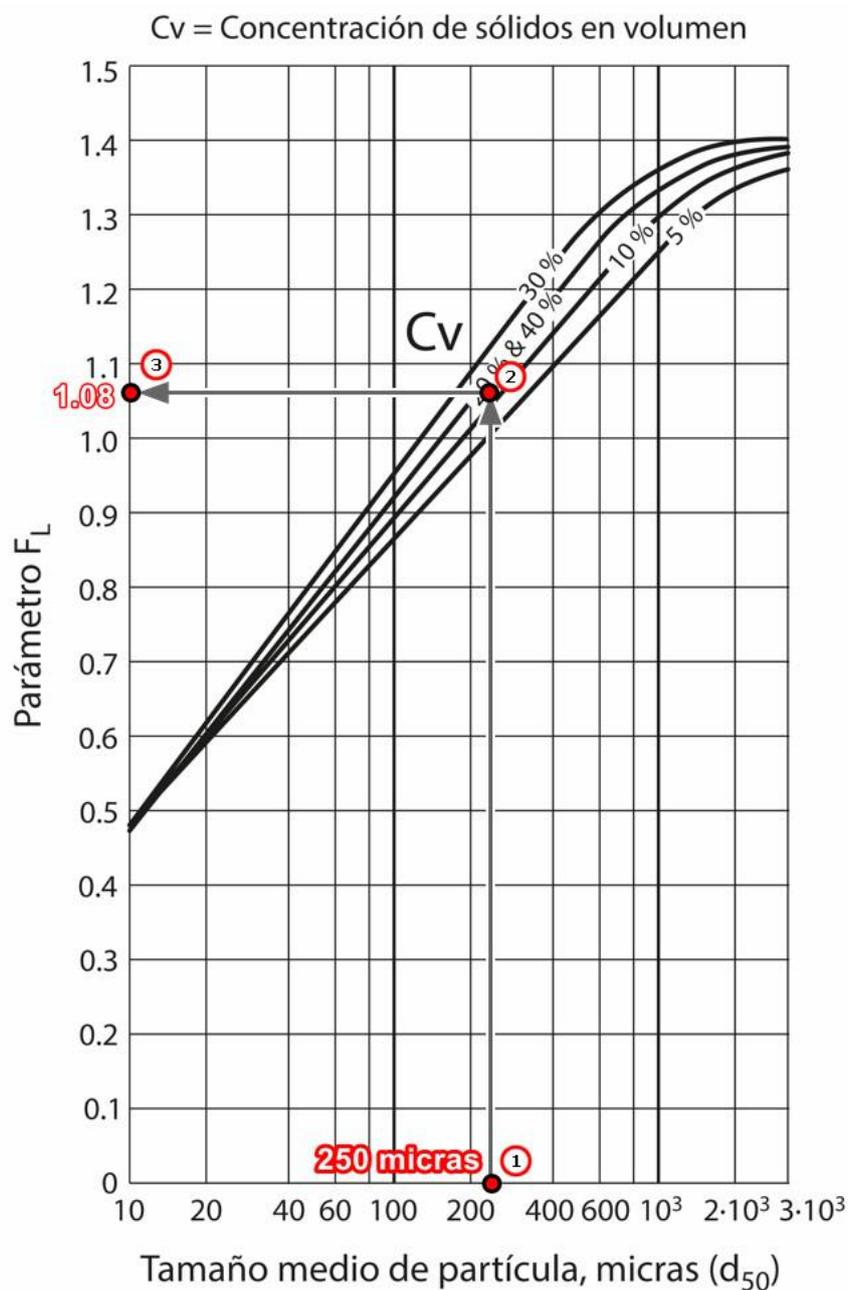
La velocidad de flujo de pulpa se obtiene con la siguiente expresión:

$$V = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi \times \frac{D^2}{4}} = \frac{0.0617 \text{ m}^3/\text{s}}{3.1415 \times \frac{(0.150 \text{ m})^2}{4}} = 3.49 \text{ m/s} \quad (13.1)$$

4. Velocidad límite o crítica.

La velocidad límite se calcula con la expresión de Durand:

$$V_L = F_L \times \sqrt{2 \times g \times D \times \frac{\rho_s - \rho_l}{\rho_l}} \quad (13.2)$$



Para una concentración de sólidos en volumen ( $C_v$ ) del 19% y un  $d_{50}$  igual a 250 micras, el parámetro de Durand,  $F_L$ , presenta un valor de aproximadamente 1.08, obtenido con la anterior gráfica.

Por lo tanto, con el parámetro de Durand calculado, la velocidad límite valdrá:

$$V_L = 1.08 \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.150 \times \frac{2.85 - 1.0}{1.0}} = 2.52 \text{ m/s} \quad (13.3)$$

Como la velocidad del flujo de pulpa es de 3.49 m/s, superior a la velocidad crítica por debajo de la cual tiene lugar la sedimentación de las partículas sólidas, entonces dicha velocidad es adecuada.

##### 5. Cálculo de la viscosidad dinámica y viscosidad cinemática.

La viscosidad dinámica o absoluta, según la siguiente expresión, vale:

$$\mu = \mu_{agua} \times \left(1 + 2.5 \times C_v + 10.05 \times C_v^2 + 0.000273 \times e^{16.6 \times C_v}\right) \quad (13.4)$$

$$\mu = 0.001 \times \left(1 + 2.5 \times 0.19 + 10.05 \times 0.19^2 + 0.000273 \times e^{16.6 \times 0.19}\right) = 0.00184 \text{ N}\times\text{s/m}^2 \quad (13.5)$$

La viscosidad cinemática valdrá:

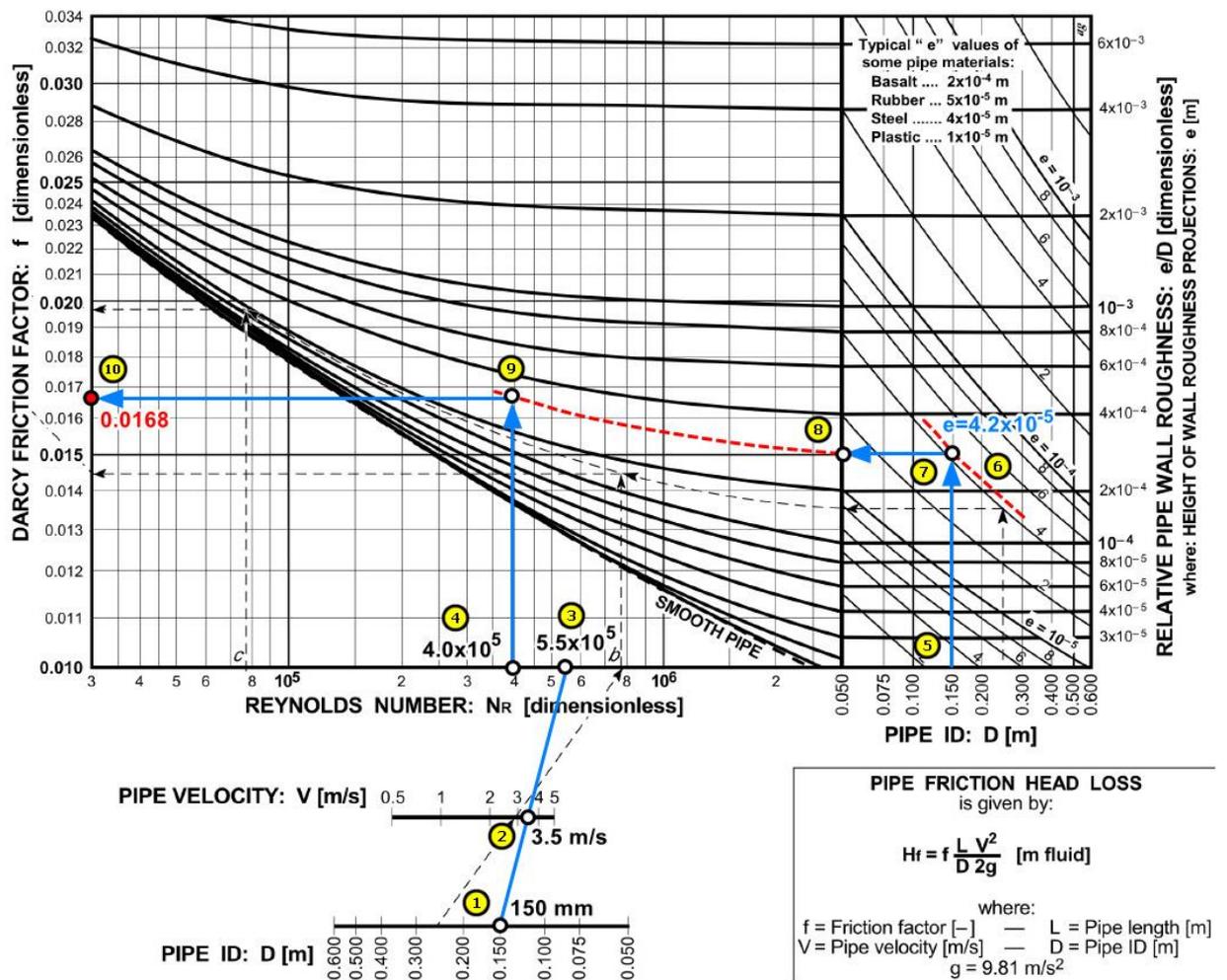
$$\mu_{cinematica} = \frac{\mu}{\rho_p} = \frac{0.00184 \text{ N}\times\text{s/m}^2}{1350 \text{ kg/m}^3} = 1.36 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} = 1.36 \text{ cSt} \quad (13.6)$$

##### 6. Obtención del factor de fricción de Darcy, $f$ .

Ahora se empleará el ábaco de Warman (Warman, 2000), considerando una rugosidad relativa de 0.00028 ( $e = 4.2 \times 10^{-5}$ ). Al número de Reynolds obtenido ( $5.5 \times 10^5$ ) se le debe dividir por la viscosidad cinemática anteriormente calculada (1.36 cSt), dando  $4.0 \times 10^5$ , que es el que valor con el que hay que entrar ahora. El resto de los pasos se facilitan en la figura adjunta y que llevan a la obtención de un factor de fricción de Darcy,  $f$ , de 0.0168 (ver diagrama adjunto).

Con el factor de fricción de Darcy, podemos calcular las pérdidas de carga debidas a la fricción en la longitud equivalente de tubería (30 metros):

$$H_f = f \times \frac{L}{D} \times \frac{V^2}{2 \times g} = 0.0168 \times \frac{30}{0.150} \times \frac{3.49^2}{2 \times 9.81} = 2.09 \text{ m.c.l.} \quad (13.7)$$



7. Altura de carga debida a la velocidad del flujo de pulpa,  $H_v$ .

Se obtiene a través de la siguiente expresión:

$$H_v = \frac{V^2}{2 \times g} = \frac{3.49^2}{2 \times 9.81} = 0.62 \text{ m.c.l.} \quad (13.8)$$

8. Altura de carga debida a la presión requerida en el hidrociclón,  $H_p$ .

El hidrociclón requiere una presión de trabajo en la entrada de alimentación de 65 kPa que equivalen a 0.65 bares y en metros de columna de pulpa (m.c.l.) será:

$$H_p = \frac{n^\circ \text{ bares} \times 10.2}{\rho_p} = \frac{0.65 \times 10.2}{1.35} = 4.91 \text{ m.c.l.} \quad (13.9)$$

9. Obtención de la altura manométrica total de la bomba,  $TDH_{pulpa}$ .

Con las alturas anteriormente calculadas, el valor de  $TDH_{pulpa}$  será:

$$TDH_{pulpa} = H_g + H_f + H_v + H_p = 16 + 2.09 + 0.62 + 4.91 = 23.62 \text{ m.c.l.} \quad (13.10)$$

10. Corrección de  $TDH_{pulpa}$  a  $TDH_{agua}$ .

Para entrar en los catálogos de curvas características Q-H de funcionamiento de una bomba, para poder decidir su selección, y que los fabricantes proporcionan, es necesario entrar con la altura manométrica total ( $TDH_{pulpa}$ ), en términos de altura de columna de agua (m.c.a.), ya que los ensayos de funcionamiento se hacen con agua, para ello, el valor de corrección HR que nos permite de pasar de una  $TDH_{pulpa}$  a una  $TDH_{agua}$  se obtiene con la siguiente gráfica, y cuyo valor de HR es aproximadamente 0.83:

Por lo tanto:

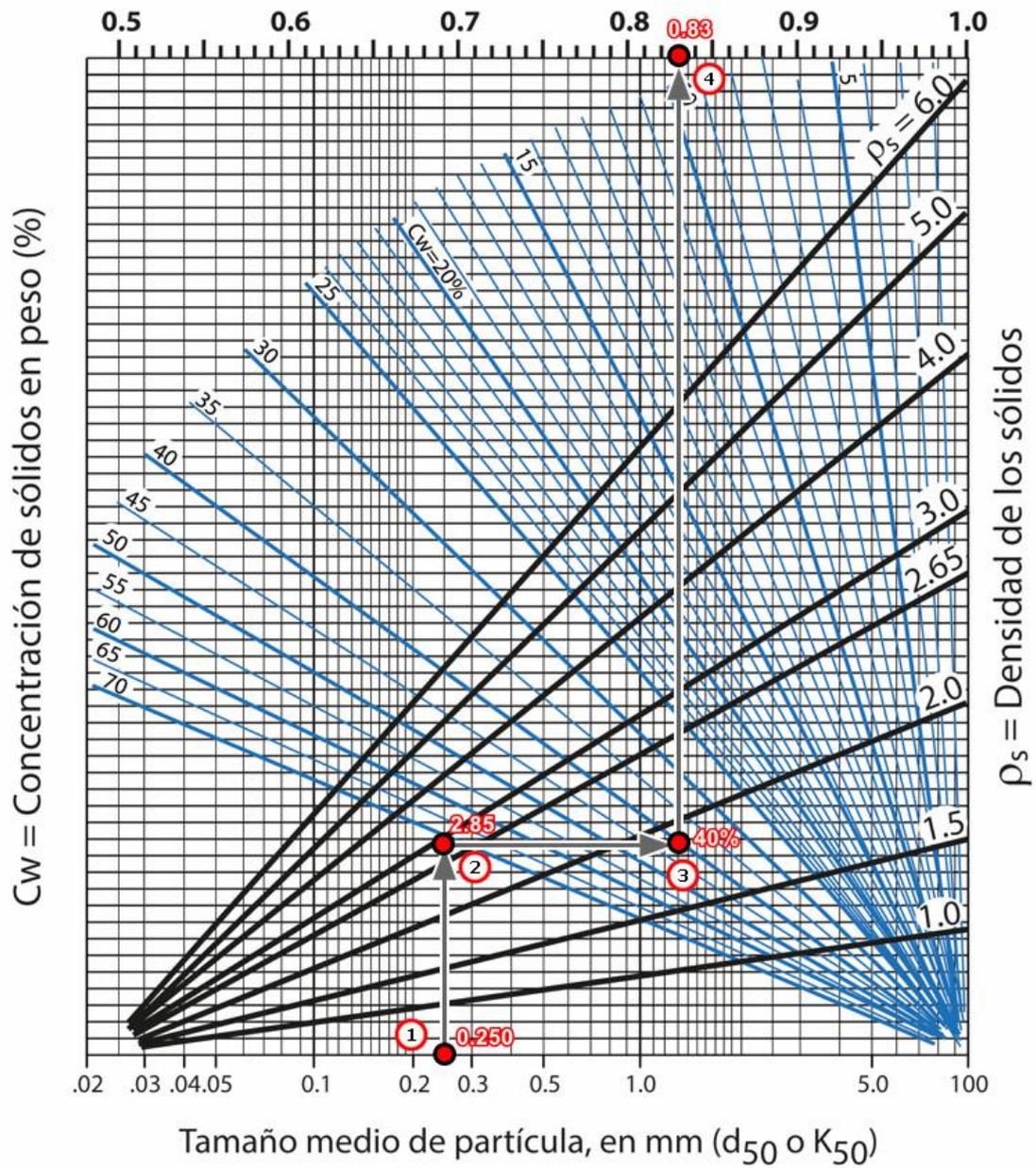
$$HR = 0.83 = \frac{TDH_{pulpa}}{TDH_{agua}} = \frac{23.62}{TDH_{agua}} \Rightarrow TDH_{agua} = 28.45 \text{ m.c.a.} \quad (13.11)$$

11. Cálculo de la potencia absorbida teórica.

Para una eficiencia de la bomba del 75%, y una eficiencia del motor del 80% debido a pérdidas de eficiencia en ejes, rodamientos, etc., se tiene que la potencia absorbida teórica de nuestra bomba de diseño valdrá, en kW:

$$N_{kW} = \frac{Q \cdot H_t \cdot \rho_p}{360 \cdot 0.75 \cdot 0.80} = \frac{222.12 \cdot 28.45 \cdot 1.35}{360 \cdot 0.75 \cdot 0.80} = 39.50 \text{ kW} \quad (13.12)$$

$$HR = \frac{TDH_{pulpa}}{TDH_{agua}} \quad ER = \frac{Eficiencia_{pulpa}}{Eficiencia_{agua}}$$

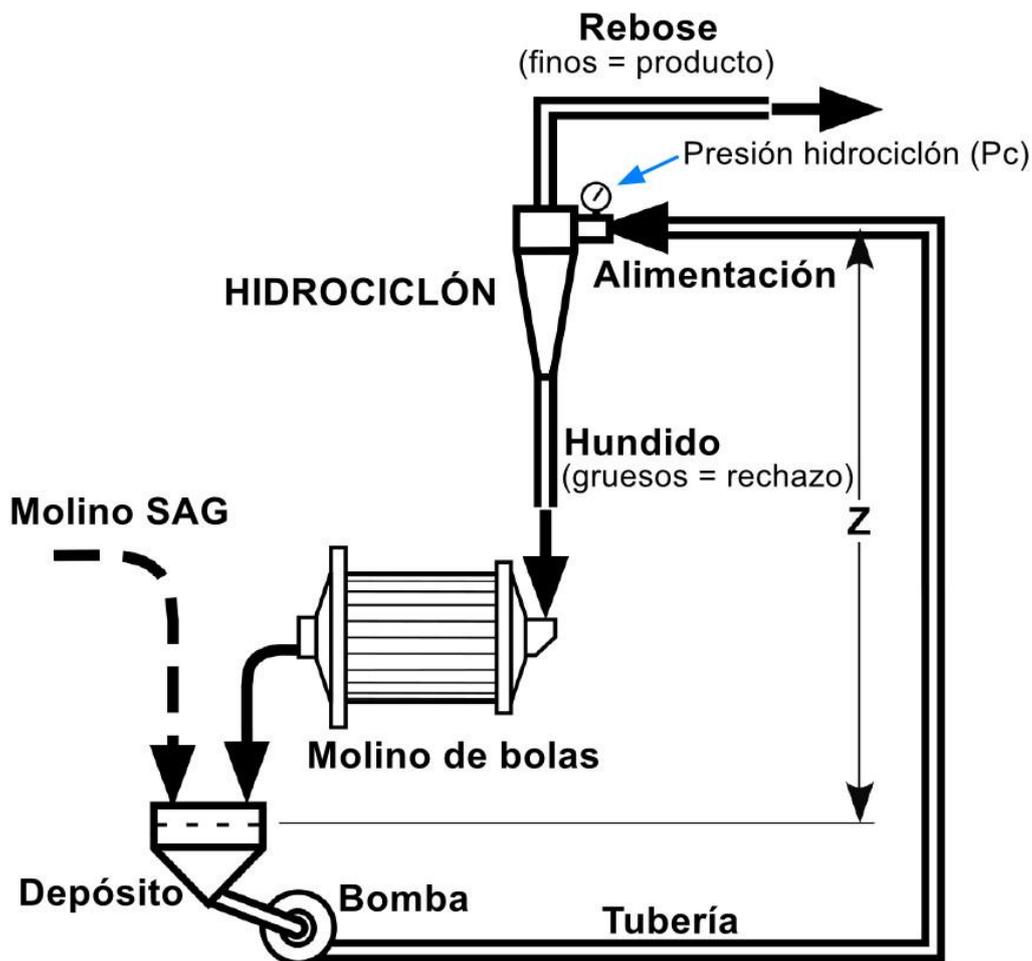


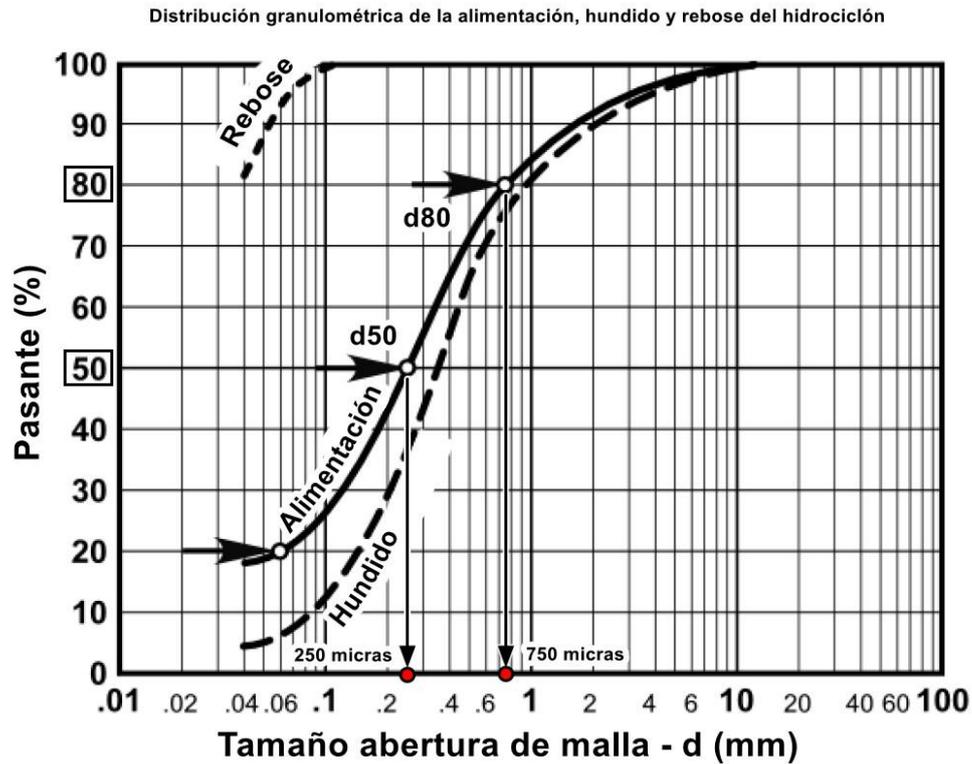
PMP2022

Warman, L. (2000). *Warman Slurry Pumping Handbook*. Warman Slurry Pumping Handbook.

EJERCICIO 14 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO

14. Se tiene una planta de procesamiento de mineral de cobre compuesta por un molino SAG y un molino de bolas que mediante bombeo alimentan un hidrociclón, tal y como representa el esquema de flujo adjunto de la planta. El producto del hidrociclón es enviado a la siguiente etapa de concentración mineral por flotación (finos), mientras que las partículas superiores a 10 mm (gruesos) son renviadas, como hundido, al molino de bolas para su molienda, nuevamente. El caudal de alimentación de pulpa al hidrociclón es 61.7 l/s, la concentración de sólidos en peso ( $C_w$ ) es del 40%, y la concentración de sólidos en volumen ( $C_v$ ) es del 19%. La presión de entrada en el hidrociclón es de 65 kPa. Por otro lado, se sabe que la altura estática ( $Z$ ) es de 16 metros, el diámetro interno ( $D$ ) de la tubería es de 150 mm y la longitud equivalente total de tubería ( $L$ ) es de 30 metros (Nota: aquí ya se tienen en cuenta las pérdidas de carga por fricción de codos, accesorios, válvulas, etc.). Calcular el TDH requerido para la bomba en metros de columna de agua (m.c.a.), y la potencia absorbida teórica (kW). Emplea el diagrama de Moody para la obtención del coeficiente de fricción de Darcy,  $f$ .





Nota:

- Densidad específica (S.G.) del cobre = 2.85
- Densidad específica (S.G.) de la pulpa = 1.35
- Rugosidad relativa ( $\epsilon/D$ ) =  $3 \times 10^{-4}$
- Emplear el diagrama de Moody para el cálculo del factor de fricción de Darcy ( $f$ )
- Considerar una viscosidad del agua igual a  $0.001 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$
- Considerar una eficiencia de la bomba del 75%
- Considerar una eficiencia del motor del 80%

Solución:

1. Caudal de bombeo.

El caudal de pulpa a bombear hacia la entrada del hidrociclón es de 61.7 l/s de pulpa que equivale a 222.12 m<sup>3</sup>/h o 0.0617 m<sup>3</sup>/s de pulpa.

2. Altura estática, H<sub>g</sub>.

El desnivel geométrico (Z) que la pulpa debe de superar son 16 metros, es decir, H<sub>g</sub> = 16 metros.

3. Velocidad del flujo de pulpa.

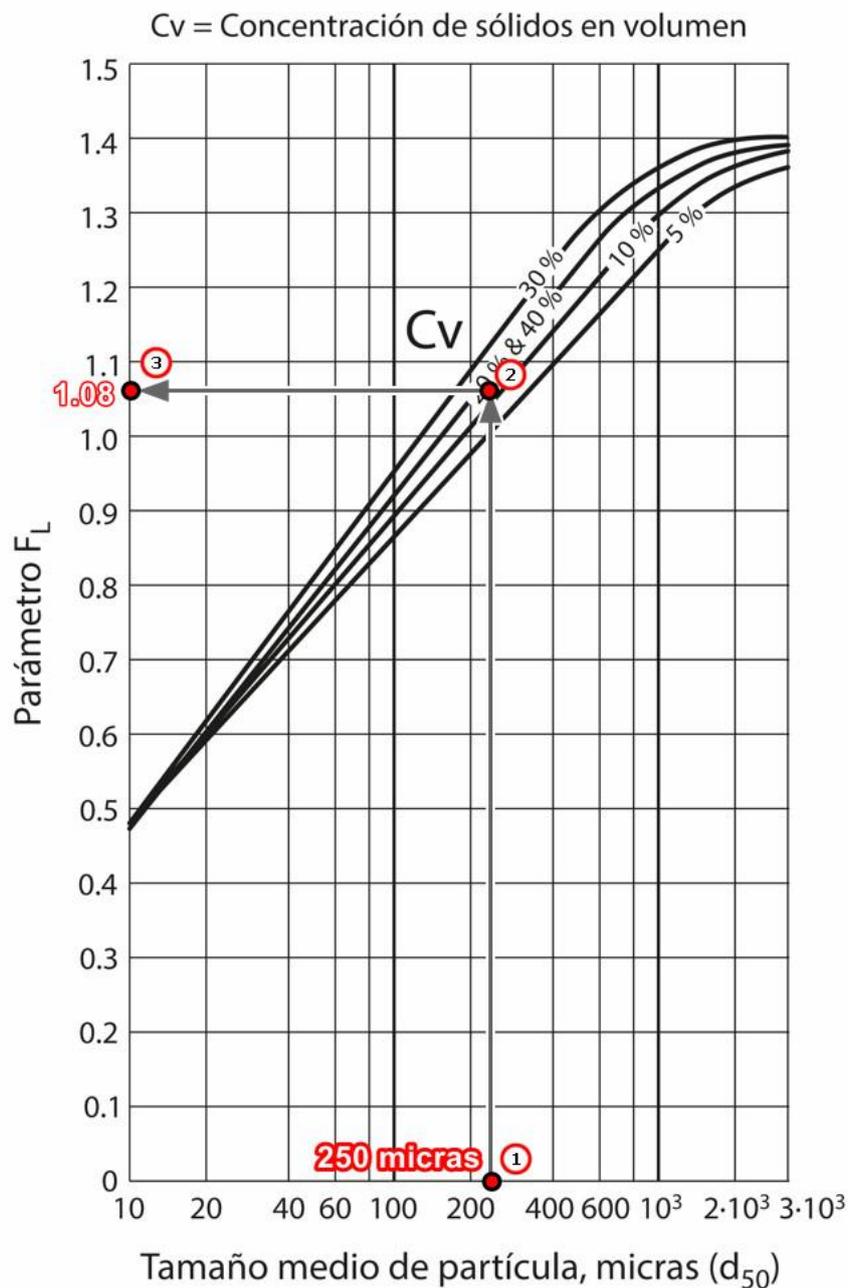
La velocidad de flujo de pulpa se obtiene con la siguiente expresión:

$$V = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi \times \frac{D^2}{4}} = \frac{0.0617 \text{ m}^3/\text{s}}{3.1415 \times \frac{(0.150 \text{ m})^2}{4}} = 3.49 \text{ m/s} \quad (14.1)$$

4. Velocidad límite o crítica.

La velocidad límite se calcula con la expresión de Durand:

$$V_L = F_L \times \sqrt{2 \times g \times D \times \frac{\rho_s - \rho_l}{\rho_l}} \quad (14.2)$$



Para una concentración de sólidos en volumen ( $C_v$ ) del 19% y un  $d_{50}$  igual a 250 micras, el parámetro de Durand,  $F_L$ , presenta un valor de aproximadamente 1.08, obtenido con la anterior gráfica.

Por lo tanto, con el parámetro de Durand calculado, la velocidad límite valdrá:

$$V_L = 1.08 \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.150 \times \frac{2.85 - 1.0}{1.0}} = 2.52 \text{ m/s} \quad (14.3)$$

Como la velocidad del flujo de pulpa es de 3.49 m/s, superior a la velocidad crítica por debajo de la cual tiene lugar la sedimentación de las partículas sólidas, entonces dicha velocidad es adecuada.

#### 5. Cálculo de la viscosidad dinámica ( $\mu_p$ )

La viscosidad dinámica o absoluta, según la siguiente expresión, vale:

$$\mu_p = \mu_{agua} \times \left( 1 + 2.5 \times C_v + 10.05 \times C_v^2 + 0.000273 \times e^{16.6 \times C_v} \right) \quad (14.4)$$

$$\mu_p = 0.001 \times \left( 1 + 2.5 \times 0.19 + 10.05 \times 0.19^2 + 0.000273 \times e^{16.6 \times 0.19} \right) = 0.00184 \text{ N}\cdot\text{s/m}^2 \quad (14.5)$$

#### 6. Obtención del Número de Reynolds ( $Re$ )

El número de Reynolds se obtiene con la siguiente expresión:

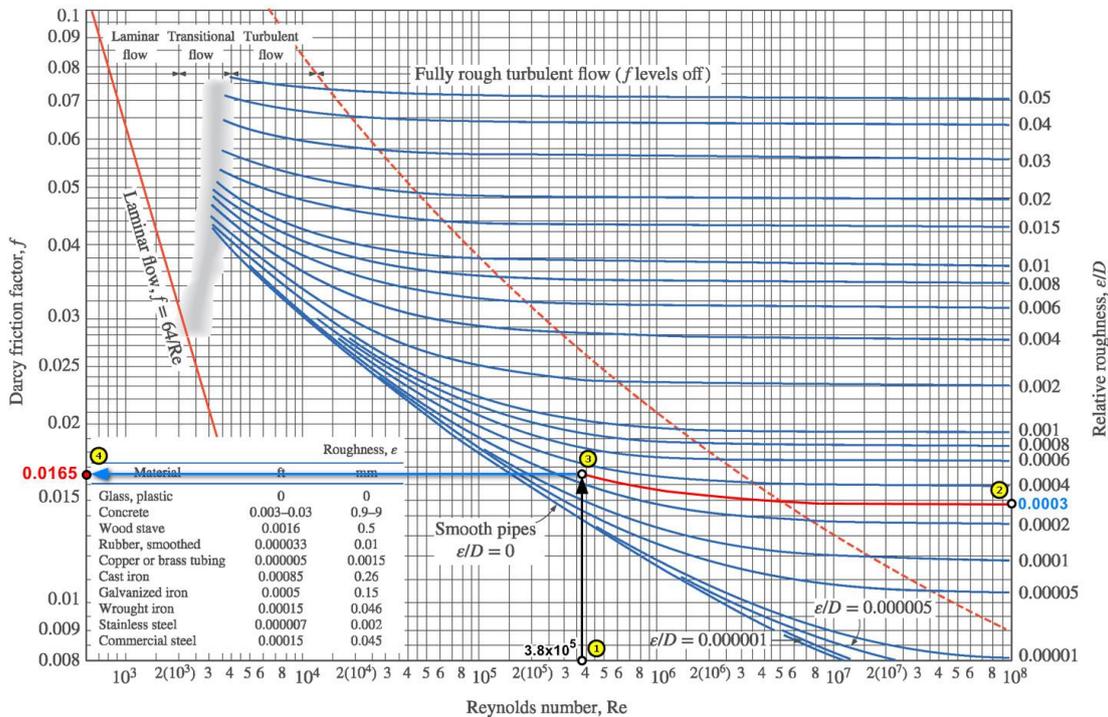
$$R_e = \frac{\rho_p \times V \times D}{\mu_p} = \frac{1350 \times 3.49 \times 0.150}{0.00184} \approx 3.8 \times 10^5 \quad (14.6)$$

#### 7. Obtención del factor de fricción de Darcy, $f$

Para ello emplearemos el diagrama de Moody, donde para una tubería de acero comercial con una rugosidad absoluta ( $\epsilon$ ) de 0.045 mm y un diámetro de tubería de 150 mm, nos da una rugosidad relativa de 0.0003. Entrando ahora con este valor y con el número de Reynolds, anteriormente calculado, se obtiene un factor de fricción,  $f$ , de 0.0165 (ver diagrama adjunto).

Con el factor de fricción de Darcy, podemos calcular las pérdidas de carga debidas a la fricción en la longitud equivalente de tubería (30 metros):

$$H_f = f \times \frac{L}{D} \times \frac{V^2}{2 \times g} = 0.0165 \times \frac{30}{0.150} \times \frac{3.49^2}{2 \times 9.81} = 2.05 \text{ m.c.l.} \quad (14.7)$$



8. Altura de carga debida a la velocidad del flujo de pulpa,  $H_v$ .

Se obtiene a través de la siguiente expresión:

$$H_v = \frac{V^2}{2 \times g} = \frac{3.49^2}{2 \times 9.81} = 0.62 \text{ m.c.l.} \quad (14.8)$$

9. Altura de carga debida a la presión requerida en el hidrociclón,  $H_p$ .

El hidrociclón requiere una presión de trabajo en la entrada de alimentación de 65 kPa que equivalen a 0.65 bares y en metros de columna de pulpa (m.c.l.) será:

$$H_p = \frac{n^\circ \text{ bares} \times 10.2}{\rho_p} = \frac{0.65 \times 10.2}{1.35} = 4.91 \text{ m.c.l.} \quad (14.9)$$

10. Obtención de la altura manométrica total de la bomba,  $TDH_{pulpa}$ .

Con las alturas anteriormente calculadas, el valor de  $TDH_{pulpa}$  será:

$$TDH_{pulpa} = H_g + H_f + H_v + H_p = 16 + 2.05 + 0.62 + 4.91 = 23.58 \text{ m.c.l.} \quad (14.10)$$

11. Corrección de  $TDH_{pulp}$  a  $TDH_{agua}$ .

Para entrar en los catálogos de curvas características Q-H de funcionamiento de una bomba, para poder decidir su selección, y que los fabricantes proporcionan, es necesario entrar con la altura manométrica total ( $TDH_{agua}$ ), en términos de altura de columna de agua (m.c.a.), ya que los ensayos de funcionamiento se hacen con agua, para ello, el valor de corrección HR que nos permite de pasar de una  $TDH_{pulp}$  a una  $TDH_{agua}$  se obtiene con la siguiente gráfica, y cuyo valor de HR es aproximadamente 0.83:

Por lo tanto:

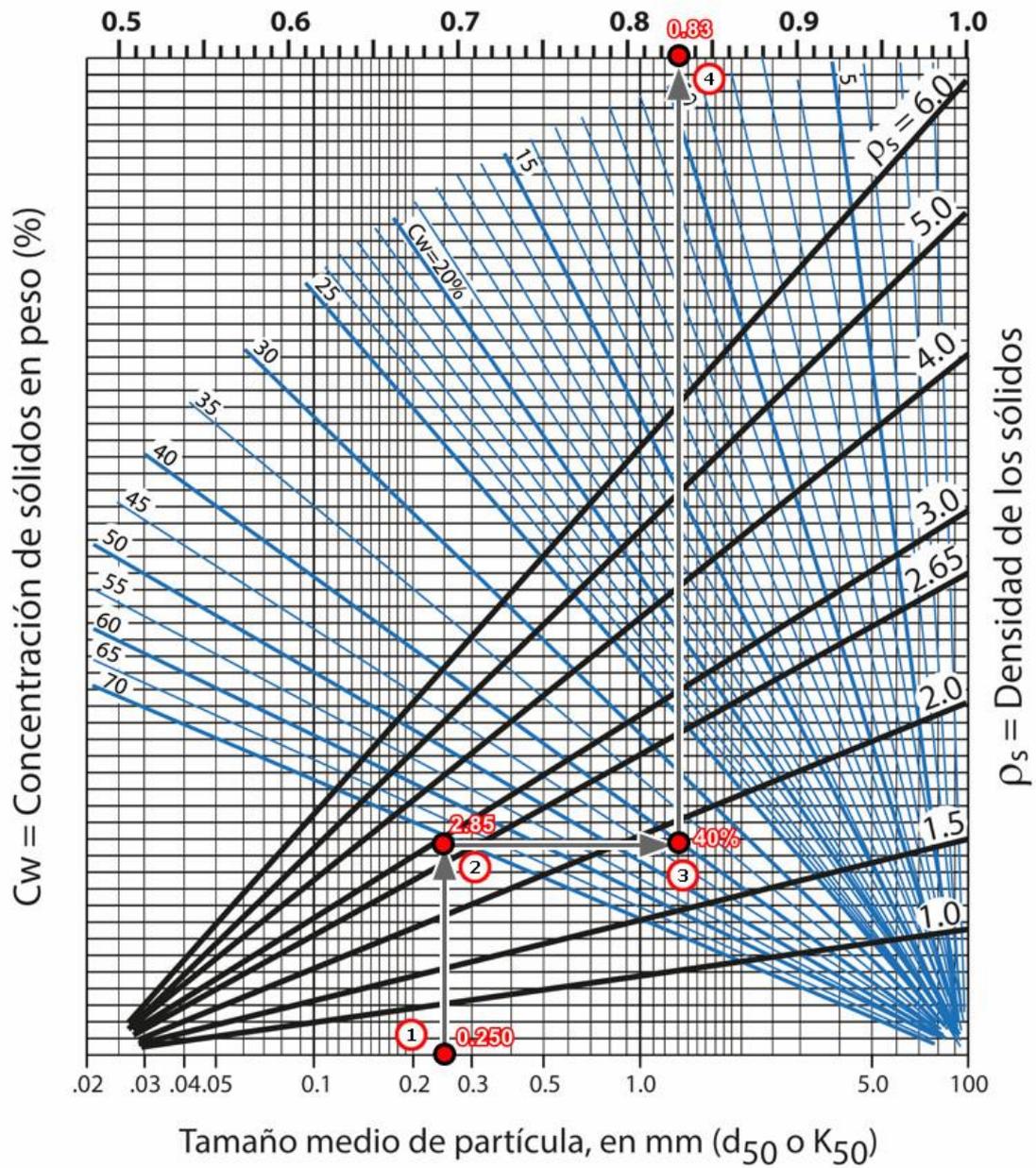
$$HR = 0.83 = \frac{TDH_{pulp}}{TDH_{agua}} = \frac{23.58}{TDH_{agua}} \Rightarrow TDH_{agua} = 28.41 \text{ m.c.a.} \quad (14.11)$$

12. Cálculo de la potencia absorbida teórica.

Para una eficiencia de la bomba del 75%, y una eficiencia del motor del 80% debido a pérdidas de eficiencia en ejes, rodamientos, etc., se tiene que la potencia absorbida teórica de nuestra bomba de diseño valdrá, en kW:

$$N_{kW} = \frac{Q \cdot H_t \cdot \rho_p}{360 \cdot 0.75 \cdot 0.80} = \frac{222.12 \cdot 28.41 \cdot 1.35}{360 \cdot 0.75 \cdot 0.80} = 39.44 \text{ kW} \quad (14.12)$$

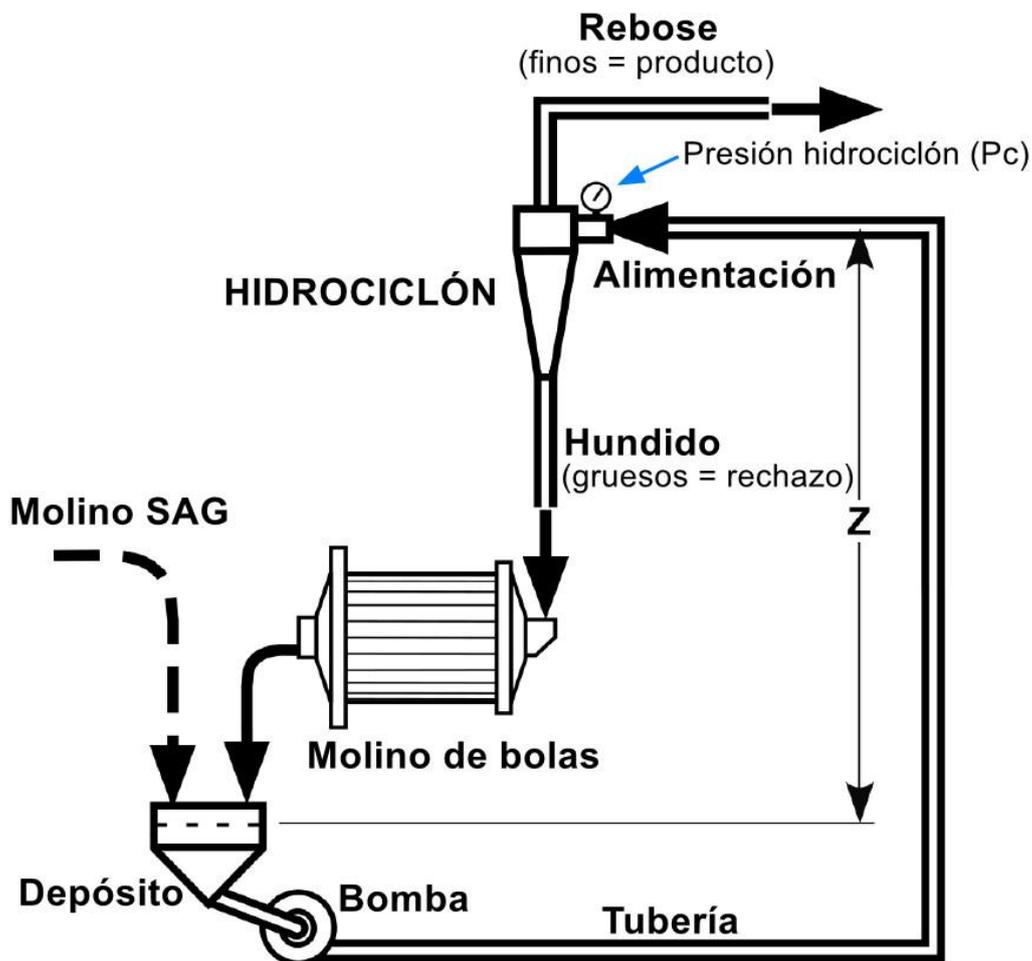
$$HR = \frac{TDH_{pulpa}}{TDH_{agua}} \quad ER = \frac{Eficiencia_{pulpa}}{Eficiencia_{agua}}$$

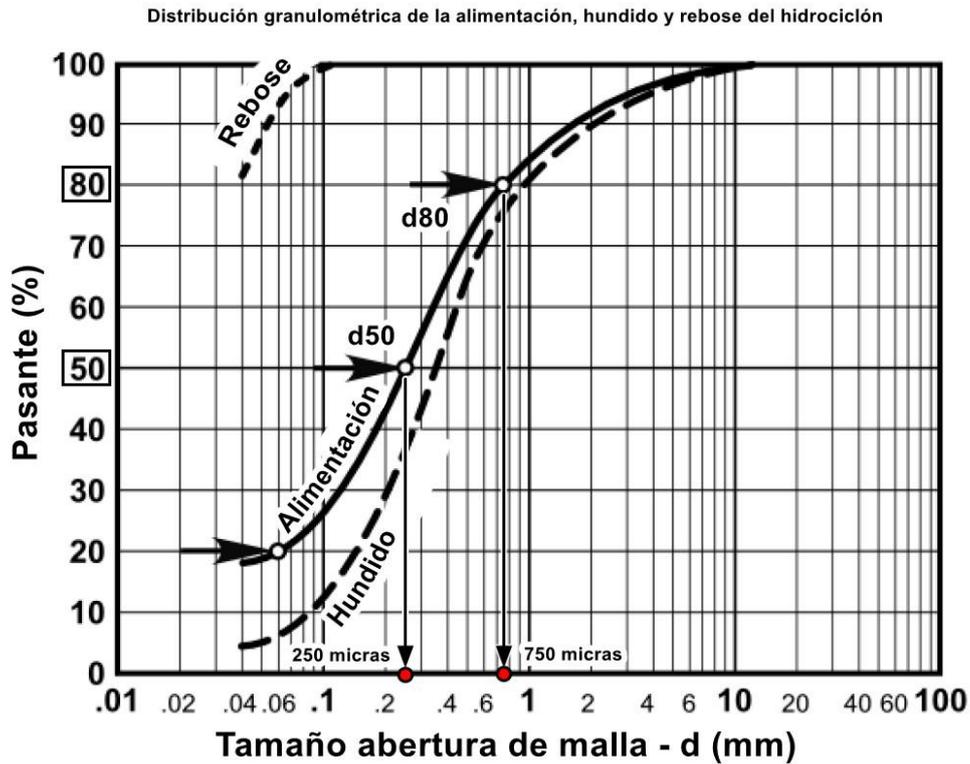


PMP2022

EJERCICIO 15 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO

15. Se tiene una planta de procesamiento de mineral de cobre compuesta por un molino SAG y un molino de bolas que mediante bombeo alimentan un hidrociclón, tal y como representa el esquema de flujo adjunto de la planta. El producto del hidrociclón es enviado a la siguiente etapa de concentración mineral por flotación (finos), mientras que las partículas superiores a 10 mm (gruesos) son renviadas, como hundido, al molino de bolas para su molienda, nuevamente. El caudal de alimentación de pulpa al hidrociclón es  $61.7 \text{ l/s}$ , la concentración de sólidos en peso ( $C_w$ ) es del 40%, y la concentración de sólidos en volumen ( $C_v$ ) es del 19%. La presión de entrada en el hidrociclón es de 65 kPa. Por otro lado, se sabe que la altura estática ( $Z$ ) es de 16 metros, el diámetro interno ( $D$ ) de la tubería es de 150 mm y la longitud equivalente total de tubería ( $L$ ) es de 30 metros (Nota: aquí ya se tienen en cuenta las pérdidas de carga por fricción de codos, accesorios, válvulas, etc.). Calcular el TDH requerido para la bomba en metros de columna de agua (m.c.a.), y la potencia absorbida teórica (kW). Utilizar la fórmula de Williams y Hazen, considerando  $C = 150$ .





Nota:

- Densidad específica (S.G.) del cobre = 2.85
- Densidad específica (S.G.) de la pulpa = 1.35
- Rugosidad relativa ( $\epsilon/D$ ) =  $3 \times 10^{-4}$
- Emplear el diagrama de Moody para el cálculo del factor de fricción de Darcy (f)
- Considerar una viscosidad del agua igual a  $0.001 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$
- Considerar una eficiencia de la bomba del 75%
- Considerar una eficiencia del motor del 80%

Solución:

1. Caudal de bombeo.

El caudal de pulpa a bombear hacia la entrada del hidrociclón es de 61.7 l/s de pulpa que equivale a 222.12 m<sup>3</sup>/h o 0.0617 m<sup>3</sup>/s de pulpa.

2. Altura estática, H<sub>g</sub>.

El desnivel geométrico (Z) que la pulpa debe de superar son 16 metros, es decir, H<sub>g</sub> = 16 metros.

3. Velocidad del flujo de pulpa.

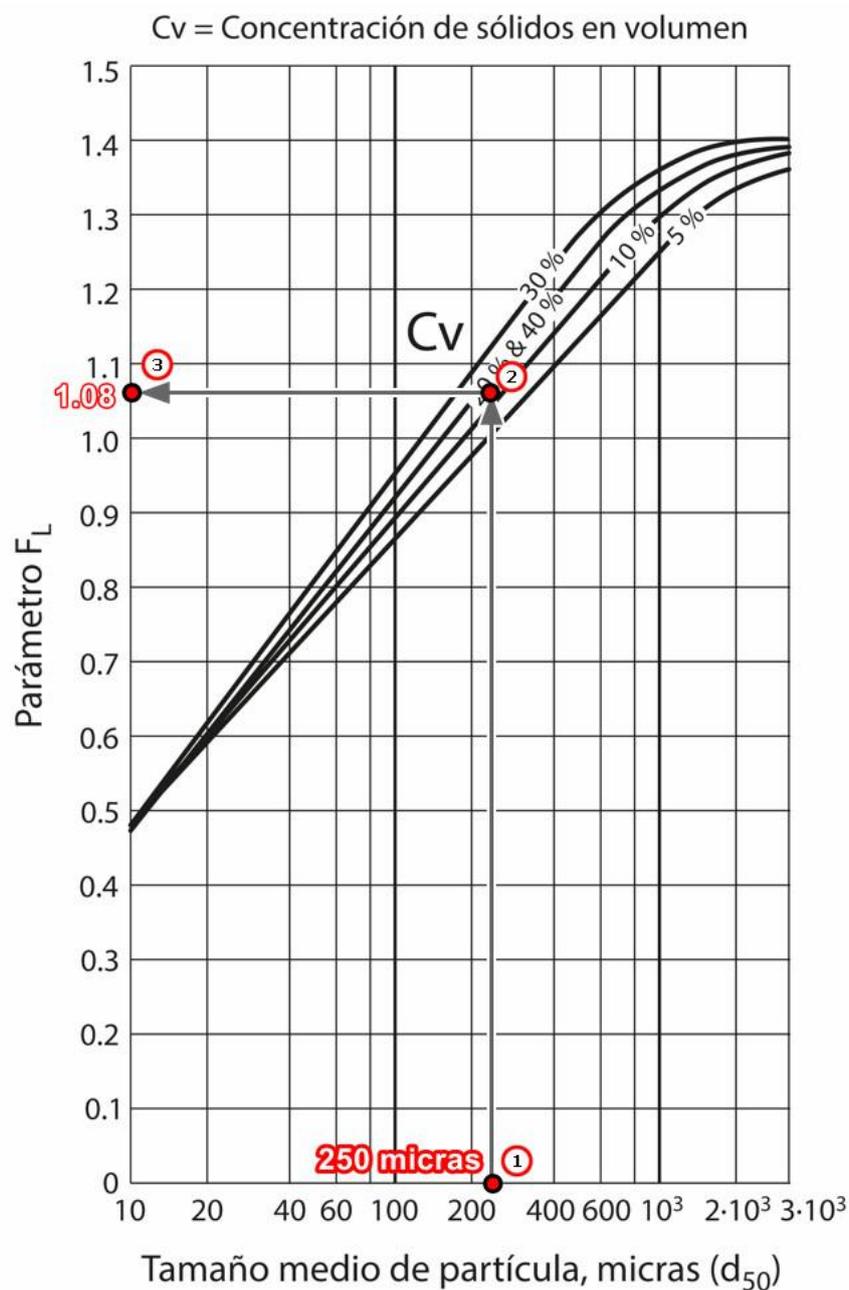
La velocidad de flujo de pulpa se obtiene con la siguiente expresión:

$$V = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi \times \frac{D^2}{4}} = \frac{0.0617 \text{ m}^3/\text{s}}{3.1415 \times \frac{(0.150 \text{ m})^2}{4}} = 3.49 \text{ m/s} \quad (15.1)$$

4. Velocidad límite o crítica.

La velocidad límite se calcula con la expresión de Durand:

$$V_L = F_L \times \sqrt{2 \times g \times D \times \frac{\rho_s - \rho_l}{\rho_l}} \quad (15.2)$$



Para una concentración de sólidos en volumen ( $C_v$ ) del 19% y un  $d_{50}$  igual a 250 micras, el parámetro de Durand,  $F_L$ , presenta un valor de aproximadamente 1.08, obtenido con la anterior gráfica.

Por lo tanto, con el parámetro de Durand calculado, la velocidad límite valdrá:

$$V_L = 1.08 \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.150 \times \frac{2.85 - 1.0}{1.0}} = 2.52 \text{ m/s} \quad (15.3)$$

Como la velocidad del flujo de pulpa es de 3.49 m/s, superior a la velocidad crítica por debajo de la cual tiene lugar la sedimentación de las partículas sólidas, entonces dicha velocidad es adecuada.

#### 5. Cálculo de las pérdidas por fricción a través de Williams y Hazen.

El valor de estas pérdidas se obtiene aplicando la siguiente fórmula de Williams y Hazen:

$$H_f = \frac{5.6028}{10^8} \times \left( \frac{100}{C} \right)^{1.85} \times \frac{Q^{1.85}}{D^{4.8655}} \text{ (m/100m)} \quad (15.4)$$

$$H_f = \frac{5.6028}{10^8} \times \left( \frac{100}{150} \right)^{1.85} \times \frac{222.12^{1.85}}{0.150^{4.8655}} = 5.92 \text{ (m/100m)} \quad (15.5)$$

Con el valor de  $H_f = 5.92$  m/100m de tubería y sabiendo que entre codos y tubería total se dispone de 30 metros de tubería equivalente, entonces se tendrá:

$$H_f = \frac{30}{100} \times 5.92 = 1.78 \text{ m.c.l.} \quad (15.6)$$

#### 6. Altura de carga debida a la velocidad del flujo de pulpa, $H_v$ .

Se obtiene a través de la siguiente expresión:

$$H_v = \frac{V^2}{2 \times g} = \frac{3.49^2}{2 \times 9.81} = 0.62 \text{ m.c.l.} \quad (15.7)$$

#### 7. Altura de carga debida a la presión requerida en el hidrociclón, $H_p$ .

El hidrociclón requiere una presión de trabajo en la entrada de alimentación de 65 kPa que equivalen a 0.65 bares y en metros de columna de pulpa (m.c.l.) será:

$$H_p = \frac{n^\circ \text{ bares} \times 10.2}{\rho_p} = \frac{0.65 \times 10.2}{1.35} = 4.91 \text{ m.c.l.} \quad (15.8)$$

8. Obtención de la altura manométrica total de la bomba,  $TDH_{pulpa}$ .

Con las alturas anteriormente calculadas, el valor de  $TDH_{pulpa}$  será:

$$TDH_{pulpa} = H_g + H_f + H_v + H_p = 16 + 1.78 + 0.62 + 4.91 = 23.31 \text{ m.c.l.} \quad (15.9)$$

9. Corrección de  $TDH_{pulpa}$  a  $TDH_{agua}$ .

Para entrar en los catálogos de curvas características Q-H de funcionamiento de una bomba, para poder decidir su selección, y que los fabricantes proporcionan, es necesario entrar con la altura manométrica total ( $TDH_{agua}$ ), en términos de altura de columna de agua (m.c.a.), ya que los ensayos de funcionamiento se hacen con agua, para ello, el valor de corrección HR que nos permite de pasar de una  $TDH_{pulpa}$  a una  $TDH_{agua}$  se obtiene con la siguiente gráfica, y cuyo valor de HR es aproximadamente 0.83:

Por lo tanto:

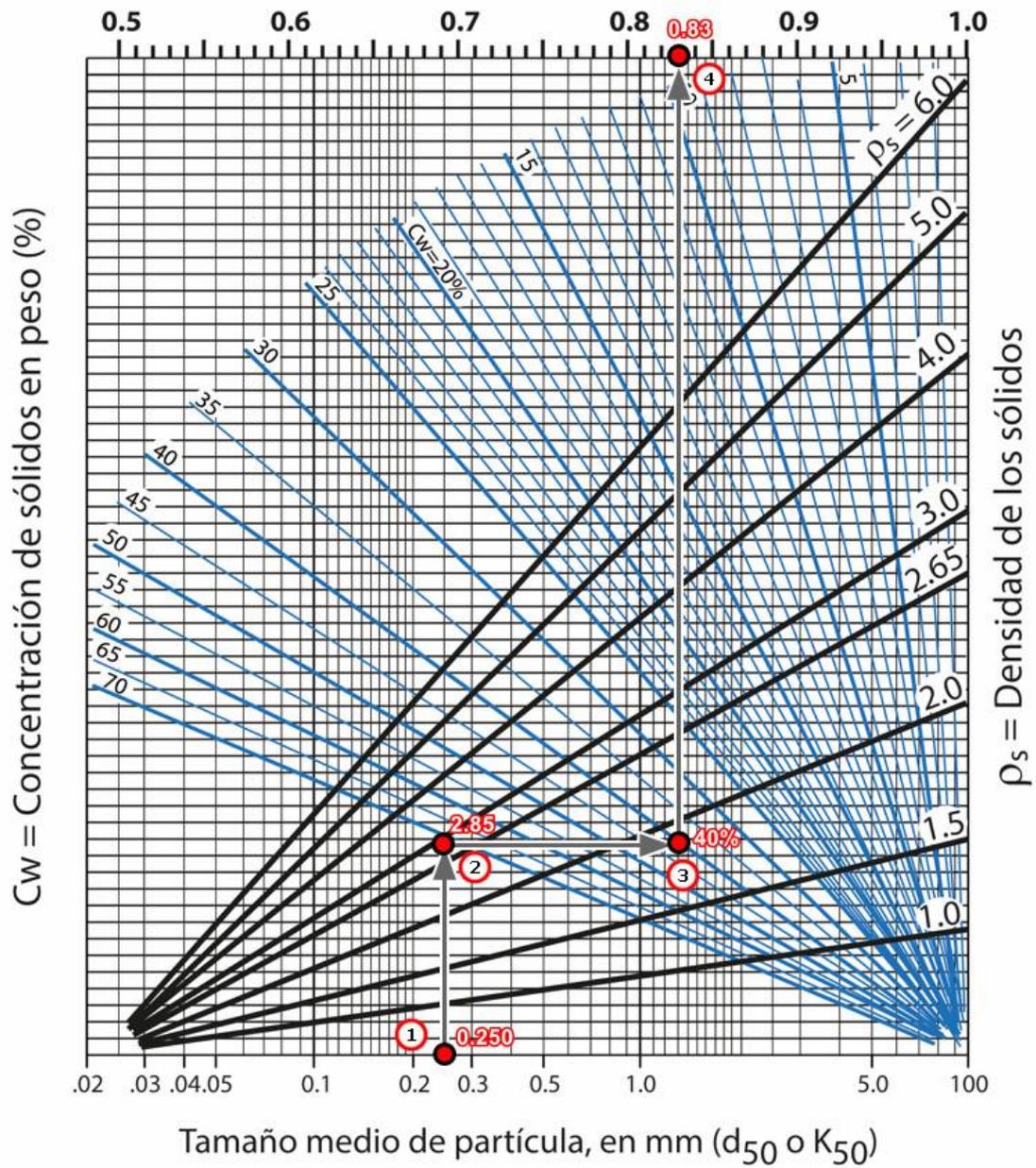
$$HR = 0.83 = \frac{TDH_{pulpa}}{TDH_{agua}} = \frac{23.31}{TDH_{agua}} \Rightarrow TDH_{agua} = 28.08 \text{ m.c.a.} \quad (15.10)$$

10. Cálculo de la potencia absorbida teórica.

Para una eficiencia de la bomba del 75%, y una eficiencia del motor del 80% debido a pérdidas de eficiencia en ejes, rodamientos, etc., se tiene que la potencia absorbida teórica de nuestra bomba de diseño valdrá, en kW:

$$N_{kW} = \frac{Q \cdot H_t \cdot \rho_p}{360 \cdot 0.75 \cdot 0.80} = \frac{222.12 \cdot 28.08 \cdot 1.35}{360 \cdot 0.75 \cdot 0.80} = 38.98 \text{ kW} \quad (15.11)$$

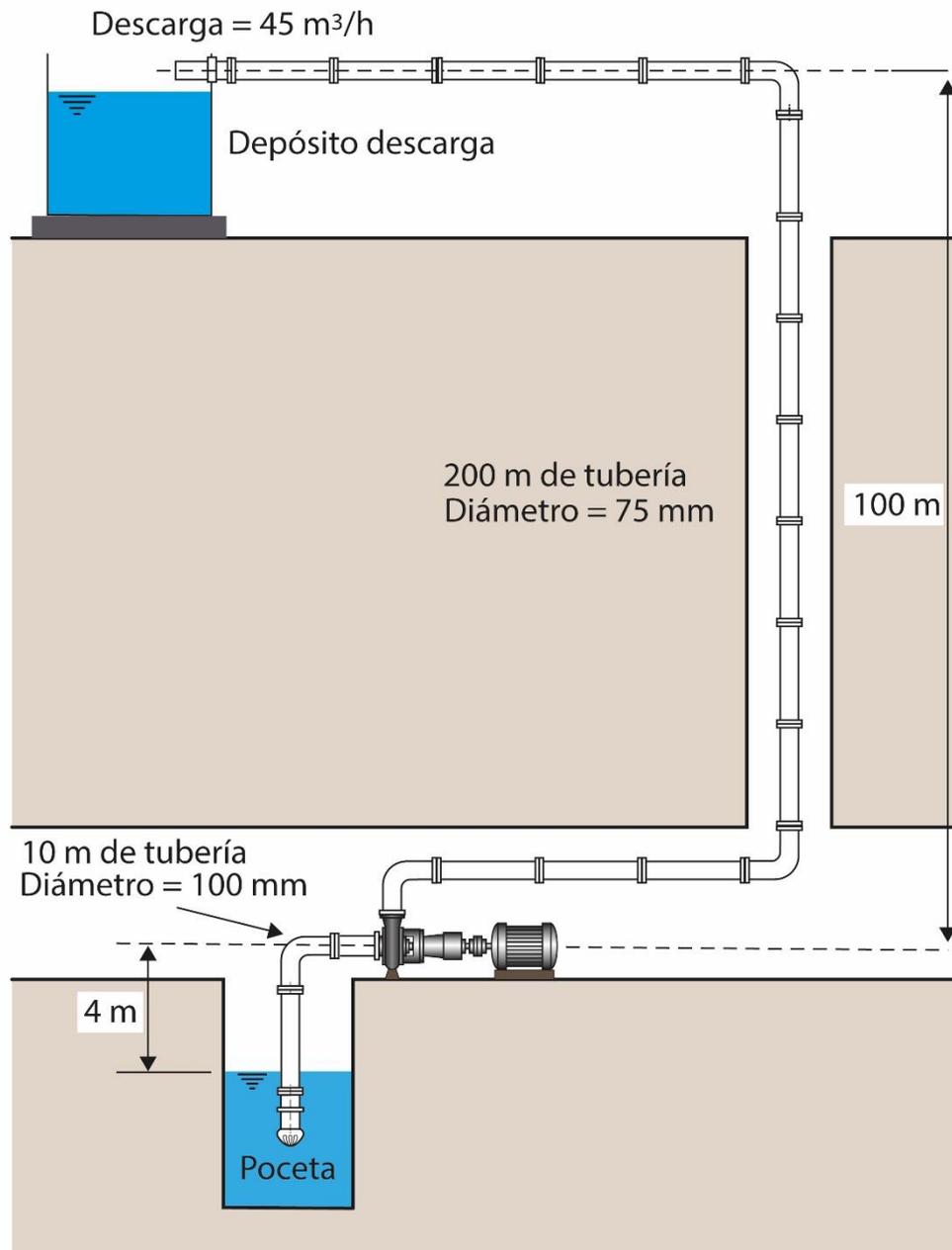
$$HR = \frac{TDH_{pulpa}}{TDH_{agua}} \quad ER = \frac{Eficiencia_{pulpa}}{Eficiencia_{agua}}$$



PMP2022

EJERCICIO 16 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO

16. Se quiere desaguar una galería elevando el agua a un depósito de descarga externo a razón de  $45 \text{ m}^3/\text{h}$ . Para determinar la bomba más adecuada se pide calcular la altura manométrica o carga dinámica total (DTH) y la potencia teórica necesaria (kW/CV) de la bomba. Considera un rendimiento para la bomba del 75%.



PMP2022

Nota:

- Fluido = Agua a  $15.6^\circ\text{C}$  (SG = 1.0)
- Tipo de tuberías = Hierro fundido (todos los accesorios y válvulas estarán unidos por bridas).

- Para los codos de la tubería de descarga considerar un coeficiente de fricción (K) igual a 0.35.
- Para los codos de la tubería de succión considerar un coeficiente de fricción (K) igual a 0.30.
- Para la válvula de pie (alcachofa) considerar un coeficiente de fricción (K) igual a 0.8.
- Para las pérdidas por fricción de la tubería, emplear la expresión de Williams y Hazen, con un  $C = 140$ :

$$H_f = \frac{5.6028}{10^8} \times \left( \frac{100}{C} \right)^{1.85} \times \frac{Q^{1.85}}{D^{4.8655}}$$

$D$  (m)

$Q$  (m<sup>3</sup>/h)

$H_f$  (m/100m)

Solución:

1. Caudal a bombear.

El problema nos dice que el caudal a bombear es de 45 m<sup>3</sup>/h es decir:

$$Q = 45 \text{ m}^3/\text{h} = 0.0125 \text{ m}^3/\text{s} = 12.5 \text{ l/s} \quad (16.1)$$

2. Cálculo del apropiado rango de diseño de velocidades tanto para la tubería de succión como para la de descarga y sus diámetros.

Para obtener el rango adecuado de velocidades se parte del criterio que el rango de velocidades recomendado para la tubería de succión se encuentra entre 1 y 2 m/s, y para la tubería de descarga entre 2 y 3 m/s (Bombas Ideal, 1985; Lisbeth O. Lozano, 2018).

Como sabemos el caudal ( $Q$ ) es de 45 m<sup>3</sup>/h. Por otro lado, se dispone de la siguiente expresión:

$$Q = V \times \pi \times \frac{D^2}{4} \quad (16.2)$$

Y que despejando la velocidad queda de la siguiente forma:

$$V = \frac{4 \times Q}{\pi \times D^2} \quad (16.3)$$

Entonces, por lo tanto:

- Tubería de succión:

Adoptando como diámetro ( $D_1$ ) 0.100 m, entonces:

$$V_1 = \frac{0.0125 \text{ m}^3/\text{s} \times 4}{\pi \times (0.100 \text{ m})^2} = 1.59 \text{ m/s} \quad (16.4)$$

- Tubería de descarga:

Adoptando como diámetro ( $D_2$ ) 0.075 m, entonces:

$$V_2 = \frac{0.0125 \text{ m}^3/\text{s} \times 4}{\pi \times (0.075 \text{ m})^2} = 2.83 \text{ m/s} \quad (16.5)$$

- Tubería de succión de diámetro 100 mm:

$$V_1 = 1.59 \text{ m/s}$$

$$V_1^2/2g = 0.13 \text{ m.c.a.}$$

- Tubería de descarga de diámetro 75 mm:

$$V_2 = 2.83 \text{ m/s}$$

$$V_2^2/2g = 0.41 \text{ m.c.a.}$$

### 3. Cálculo de la Altura o Carga Estática (Static Head), $H_s$ .

Observando al esquema de la instalación se deduce que  $H_s = 100 \text{ m} + 4 \text{ m} = 104 \text{ m}$  (m.c.a.).

### 4. Cálculo de las pérdidas por fricción en la tubería de succión y en sus accesorios. ( $H_{f1}$ )

- Pérdidas de carga debidas a la longitud de la tubería de succión:

Aplicando la ecuación de Williams y Hazen:

$$H_f = \frac{5.6028}{10^8} \times \left( \frac{100}{140} \right)^{1.85} \times \frac{45^{1.85}}{0.100^{4.8655}} = 2.52 \text{ (m.c.a./100m)} \quad (16.6)$$

Sabiendo que hay instalados 8 m de tubería, entonces:

$$H_{f \text{ tubería}} = \frac{10 \text{ m}}{100 \text{ m}} \times 2.52 \text{ m.c.a./100m} = 0.252 \text{ m.c.a.} \quad (16.7)$$

- Pérdidas de carga debidas al codo en la tubería de succión:

$$H_{f \text{ codo}} = K_{\text{codo}} \times \frac{V_1^2}{2 \times g} = 0.30 \times 0.13 = 0.039 \text{ m.c.a} \quad (16.8)$$

- Pérdidas de carga debidas a la válvula de pie de la tubería de succión:

$$H_{f \text{ pie}} = K_{\text{pie}} \times \frac{V_1^2}{2 \times g} = 0.80 \times 0.13 = 0.104 \text{ m.c.a} \quad (16.9)$$

Luego, el valor total de las pérdidas por fricción para la tubería de succión será:

$$H_{f1} = 0.252 \text{ m.c.a.} + 0.039 \text{ m.c.a.} + 0.104 \text{ m.c.a.} = 0.395 \text{ m.c.a.} \quad (16.10)$$

5. Cálculo de las pérdidas por fricción en la tubería de descarga y en sus accesorios ( $H_{f2}$ )

- Pérdidas de carga debidas a la longitud de la tubería de descarga:

Aplicando la ecuación de Williams y Hazen:

$$H_f = \frac{5.6028}{10^8} \times \left(\frac{100}{140}\right)^{1.85} \times \frac{45^{1.85}}{0.075^{4.8655}} = 10.23 \text{ (m.c.a./100m)} \quad (16.11)$$

Sabiendo que hay instalados 150 m de tubería, entonces:

$$H_{f \text{ tubería}} = \frac{200 \text{ m}}{100 \text{ m}} \times 10.23 \text{ m.c.a./100m} = 20.46 \text{ m.c.a.} \quad (16.12)$$

- Pérdidas de carga debidas a los tres codos de la tubería de descarga:

$$H_{f \text{ codo}} = 3 \times K_{\text{codo}} \times \frac{V_2^2}{2 \times g} = 3 \times 0.35 \times 0.41 = 0.43 \text{ m.c.a} \quad (16.13)$$

Luego, el valor total de las pérdidas por fricción para la tubería de descarga será:

$$H_{f2} = 20.46 \text{ m.c.a.} + 0.43 \text{ m.c.a.} = 20.89 \text{ m.c.a.} \quad (16.14)$$

6. Cálculo de las alturas debidas a las velocidades en las tuberías ( $H_v$ )

- Tubería de succión:

La velocidad del flujo a través de ella es de 1.59 m/s, luego:

$$H_{v1} = \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = 0.13 \text{ m.c.a.} \quad (16.15)$$

- Tubería de descarga:

La velocidad del flujo a través de ella es de 2.83 m/s, luego:

$$H_{v2} = \frac{V_2^2}{2 \cdot g} = 0.41 \text{ m.c.a.} \quad (16.16)$$

Luego la altura total debida a las velocidades del flujo en las tuberías será:

$$H_v = H_{v1} + H_{v2} = 0.13 + 0.41 = 0.54 \text{ m.c.a.} \quad (16.17)$$

#### 7. Cálculo de la altura dinámica total (DTH)

El valor de DTH será la suma de todas las alturas calculadas anteriormente, es decir:

$$DTH = H_s + H_{f1} + H_{f2} + H_v = 104 + 0.395 + 20.89 + 0.54 = 125.83 \text{ m.c.a.} \quad (16.18)$$

#### 8. Cálculo de la potencia de la bomba.

Con el valor calculado de  $TDH_{\text{agua}}$  de 125.83 m.c.a., el caudal conocido de  $Q = 45 \text{ m}^3/\text{h}$ , un rendimiento estimado para la bomba del 75%, y la densidad del agua de  $1 \text{ t/m}^3$  podemos calcular la potencia en kW y CV que necesitará la bomba a través de la siguiente expresión:

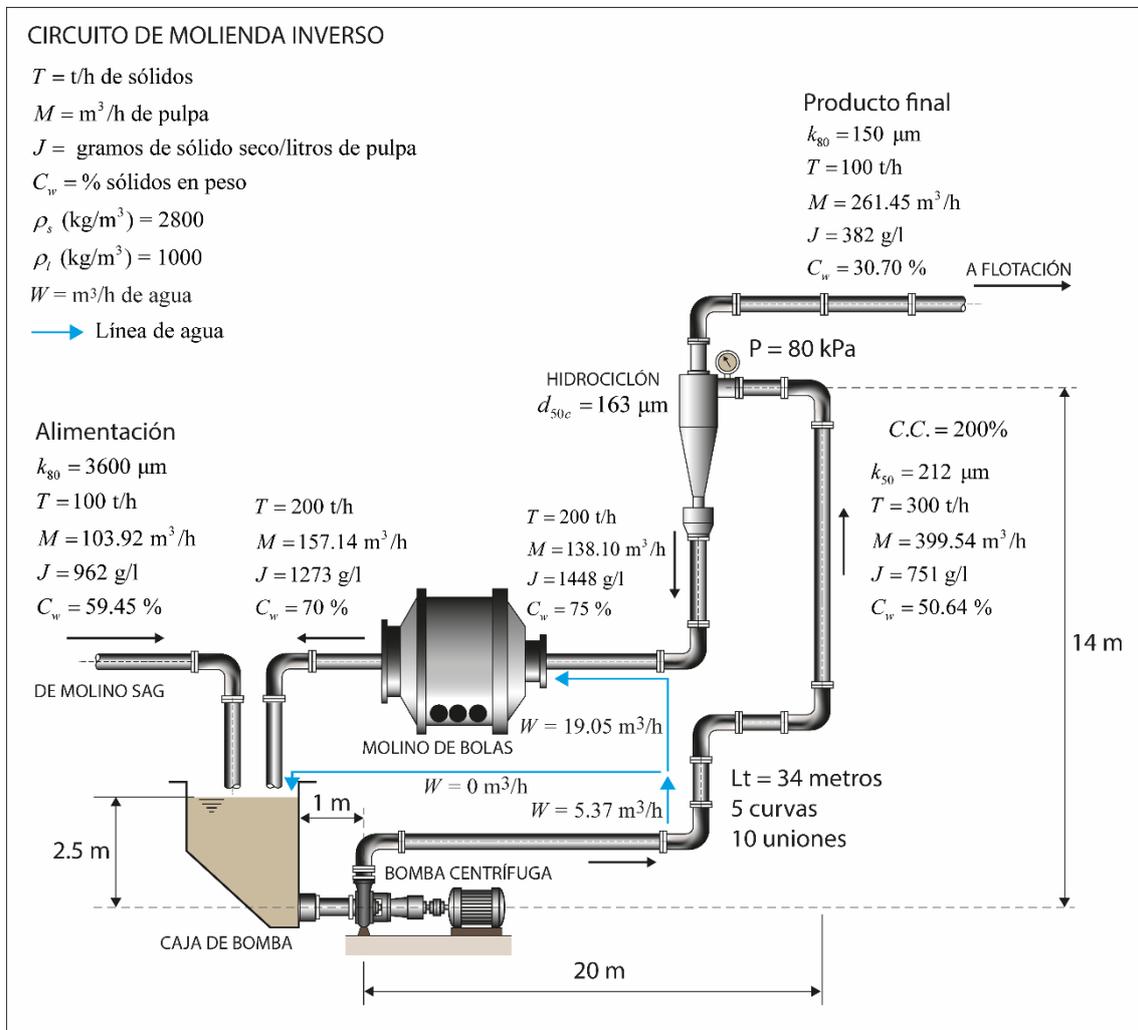
$$N_{kW} = \frac{Q \times TDH_{\text{agua}} \times \rho_{\text{agua}}}{\frac{\eta}{100} \times 360} = \frac{45 \times 125.83 \times 1.00}{0.75 \times 360} = 20.97 \text{ kW} \quad (16.19)$$

$$N_{CV} = \frac{Q \text{ l/s} \times TDH_{\text{agua}} \times \rho_{\text{agua}}}{\frac{\eta}{100} \times 75} = \frac{12.5 \times 125.83 \times 1.00}{0.75 \times 75} = 27.96 \text{ CV} \quad (16.20)$$

Se recomienda incrementar estas cantidades en un 25% debido a pérdidas en la transmisión y pérdidas en el rendimiento por causas de desgastes en las partes hidráulicas a medio plazo. Por lo que la potencia a instalar serían 26.21 kW (34.95 CV).

EJERCICIO 17 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO

17. Se tiene una planta de procesamiento de mineral de cobre compuesta por un molino SAG y un molino de bolas que mediante bombeo alimentan un hidrociclón, tal y como representa el esquema de flujo adjunto de la planta. El producto del hidrociclón es enviado a la siguiente etapa de concentración mineral por flotación (finos), mientras que las partículas gruesas son renviadas, como hundido, al molino de bolas para su molienda, nuevamente (ver esquema adjunto). El caudal de alimentación de pulpa al hidrociclón es de  $399.54 \text{ m}^3/\text{h}$ , la concentración de sólidos en peso ( $C_w$ ) es del 50.64%. La presión de entrada en el hidrociclón es de 80 kPa. Por otro lado, se sabe que la altura de la tubería de descarga que alimenta al hidrociclón se encuentra a 14 metros, el diámetro nominal interno (D) de la tubería se establece de 250 mm. La longitud de la tubería de descarga será de 34 metros y la longitud de la tubería de succión será de 1 metro. Calcular el TDH requerido para la bomba en metros de columna de agua (m.c.a.), y la potencia absorbida teórica (kW). Emplea el diagrama de Moody para la obtención del coeficiente de fricción de Darcy,  $f$ .



Nota:

- Densidad específica de las partículas sólidas =  $2.80 \text{ t/m}^3$
- Densidad específica del agua =  $1.00 \text{ t/m}^3$
- Rugosidad absoluta de la tubería con revestimiento de caucho ( $\epsilon$ ) =  $3 \times 10^{-6}$

- Considerar una viscosidad del agua igual a  $0.001 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$
- Considerar una eficiencia del motor del 80%

Solución:

1. Cálculo de la concentración de sólidos en volumen,  $C_V$ , y peso específico de la pulpa,  $\rho_p$ .

Para el cálculo de la concentración de sólidos en volumen hacemos uso de la siguiente expresión:

$$C_V = \frac{\frac{C_w}{100} \times \rho_l}{\rho_s - \frac{C_w}{100} \times (\rho_s - \rho_l)} \times 100 \quad (17.1)$$

Por lo que, sustituyendo:

$$C_V = \frac{\frac{50.64}{100} \times 1.0}{2.8 - \frac{50.64}{100} \times (2.8 - 1.0)} \times 100 = 26.82\% \quad (17.2)$$

Para el cálculo de la densidad de la pulpa empleamos la siguiente expresión:

$$\frac{C_V}{100} = \frac{(\rho_p - \rho_l)}{(\rho_s - \rho_l)} \quad (17.3)$$

Por lo que, sustituyendo:

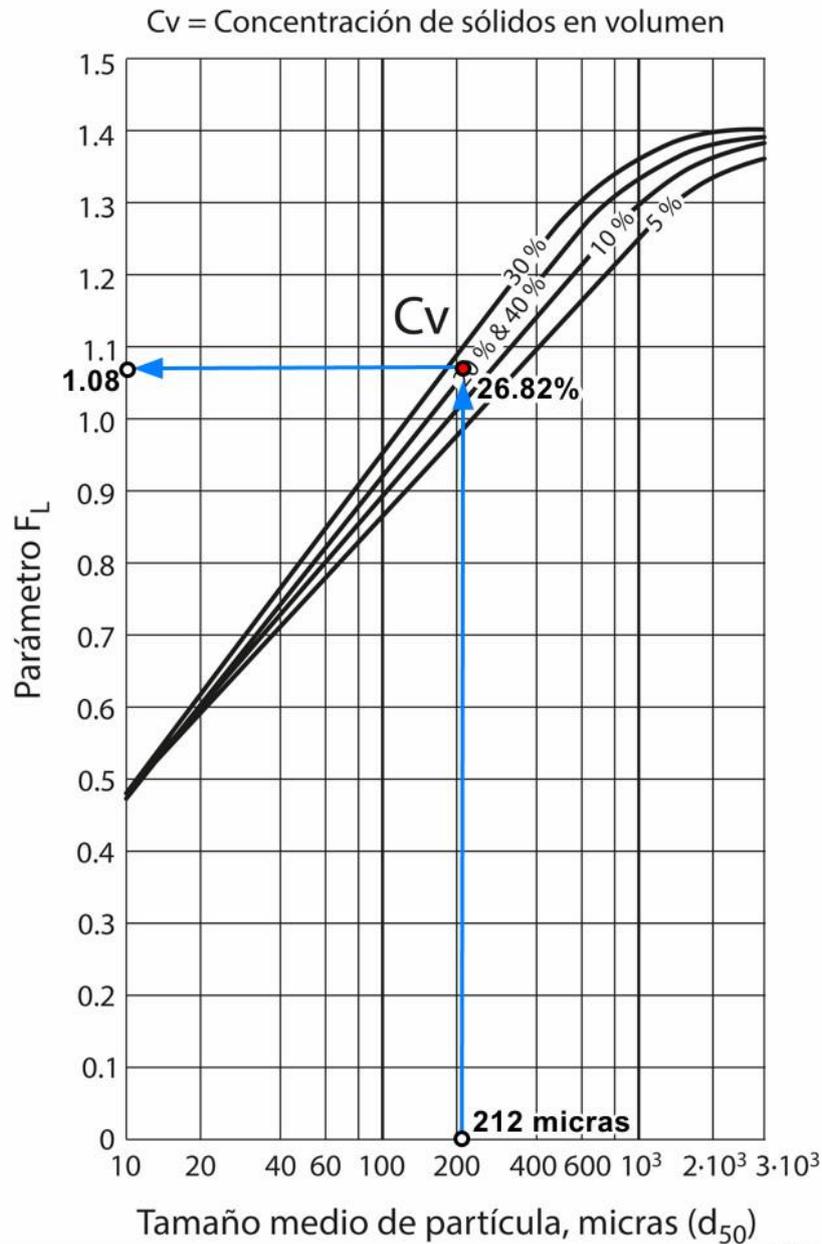
$$\rho_p = \frac{26.82}{100} \times (2.8 - 1.0) + 1.0 = 1.48 \text{ t}/\text{m}^3 \quad (17.4)$$

2. Cálculo del diámetro óptimo de la tubería, la velocidad límite y la velocidad real de transporte.

Para estos cálculos vamos a utilizar la expresión de la velocidad límite según Durand (ANEFA, 2020):

$$V_l = F_l \times \sqrt{2 \times g \times D \times \frac{\rho_s - \rho_l}{\rho_l}} \quad (17.5)$$

Para la determinación del factor  $F_1$  se entra en el siguiente gráfico (ANEFA, 2020; Bouso, 1993; Warman, 2000), con el valor de  $k_{50}$  de 212  $\mu\text{m}$  y un  $C_v$  de 26.82%, del que se obtiene un valor aproximado de 1.08. Con este valor se puede entrar en la anterior expresión de Durand y calcular la velocidad límite.



La velocidad límite valdrá:

$$V_l = 1.08 \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.250 \times \frac{2.8 - 1.0}{1.0}} = 3.2 \text{ m/s} \quad (17.6)$$

Ahora se comprueba que la velocidad real de transporte es superior que la velocidad límite:

$$V = \frac{M}{\left(\frac{\pi \times D^2}{4}\right)} = \frac{399.54 \text{ m}^3/\text{h} \times \frac{1\text{h}}{3600\text{s}}}{\left(\frac{\pi \times 0.250^2}{4}\right)} = 2.26 \text{ m/s} \quad (17.7)$$

Se observa que la velocidad a la que circularía la pulpa con tubería de 250 mm es inferior a la velocidad límite de 3.2 m/s, por lo que se adopta el seleccionar una tubería de diámetro interior de 200 mm. Para este nuevo diámetro se vuelve a calcular la velocidad a la circularía la pulpa, siendo:

$$V = \frac{M}{\left(\frac{\pi \times D^2}{4}\right)} = \frac{399.54 \text{ m}^3/\text{h} \times \frac{1\text{h}}{3600\text{s}}}{\left(\frac{\pi \times 0.200^2}{4}\right)} = 3.53 \text{ m/s} \quad (17.8)$$

Por lo tanto, el nuevo diámetro seleccionado es adecuado ya que la velocidad a la que llevará la pulpa de 3.53 m/s es superior a la velocidad límite calculada.

### 3. Cálculo de las pérdidas de carga en la conducción.

Lo primero es calcular la longitud equivalente de los accesorios y singularidades que en este ejemplo se trata de 5 curvas de radio corto (R=2B), y que entrando en la tabla adjunta (Warman, 2000) se obtiene una longitud equivalente de 5.49 m para cada curva.

									
	Radius More Than 3 x N.B.	Radius is 2 x N.B.			Minimum Radius 10 x N.B.				
INTERNAL DIAMETER or N.B.	90° Long Radius Bend	90° Short Radius Bend	Elbow	Tee	Rubber Hose	Diaphragm Valve Full Open	Full Bore Valve Round Way	Plug-Lub Valve Rect. Way	* "Tech-Taylor" Valve Ball Type
m m	EQUIV. LENGTH IN m OF STRAIGHT PIPE GIVING EQUIVALENT RESISTANCE TO FLOW								
25	0.52	0.70	0.82	1.77	0.30	2.56	—	0.37	—
32	0.73	0.91	1.13	2.38	0.40	3.29	—	0.49	—
40	0.85	1.10	1.31	2.74	0.49	3.44	1.19	0.58	—
50	1.07	1.40	1.68	3.35	0.55	3.66	1.43	0.73	—
65	1.28	1.65	1.98	4.27	0.70	4.60	1.52	0.85	—
80	1.55	2.07	2.47	5.18	0.85	4.88	1.92	1.04	0.20
90	1.83	2.44	2.90	5.79	1.01	—	—	1.22	—
100	2.13	2.77	3.35	6.71	1.16	7.62	2.19	1.40	0.23
115	2.41	3.05	3.66	7.32	1.28	—	—	1.58	—
125	2.71	3.66	4.27	8.23	1.43	13.11	3.05	1.77	0.30
150	3.35	4.27	4.88	10.06	1.55	18.29	3.11	2.13	0.37
200	4.27	5.49	6.40	13.11	2.41	19.81	7.92	2.74	0.82
250	5.18	6.71	7.92	17.07	2.99	21.34	10.67	3.47	0.61
300	6.10	7.92	9.75	20.12	3.35	28.96	15.85	4.08	0.76
350	7.01	9.45	10.97	23.16	4.27	28.96	—	4.88	0.91
400	8.23	10.67	12.80	26.52	4.88	—	—	5.49	1.04
450	9.14	12.19	14.02	30.48	5.49	—	—	6.22	1.16
500	10.36	13.11	15.85	33.53	6.10	—	—	7.32	1.25

La longitud equivalente de la tubería considerando las singularidades será:

$$L = 34 \text{ m} + 1 \text{ m} + 5 \times 5.49 \text{ m} = 62.45 \text{ m} \quad (17.9)$$

4. Cálculo de la viscosidad dinámica ( $\mu_p$ )

La viscosidad dinámica o absoluta para la pulpa, según la siguiente expresión, vale:

$$\mu_p = \mu_{agua} \times \left( 1 + 2.5 \times C_v + 10.05 \times C_v^2 + 0.000273 \times e^{16.6 \times C_v} \right) \quad (17.10)$$

$$\mu_p = 0.001 \times \left( 1 + 2.5 \times 0.268 + 10.05 \times 0.268^2 + 0.000273 \times e^{16.6 \times 0.268} \right) = 0.00242 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2 \quad (17.11)$$

5. Obtención del Número de Reynolds (Re)

El número de Reynolds se obtiene con la siguiente expresión:

$$R_e = \frac{\rho_p \times V \times D}{\mu_p} = \frac{1480 \times 3.53 \times 0.200}{0.00242} \approx 4.3 \times 10^5 \quad (17.12)$$

6. Determinación del valor de rugosidad relativa ( $\epsilon/D$ )

Estimando un valor de rugosidad absoluta de valor  $\epsilon = 3.0 \times 10^{-6} \text{ m}$  para una tubería de acero revestida internamente de caucho, entonces el valor de la rugosidad relativa valdrá:

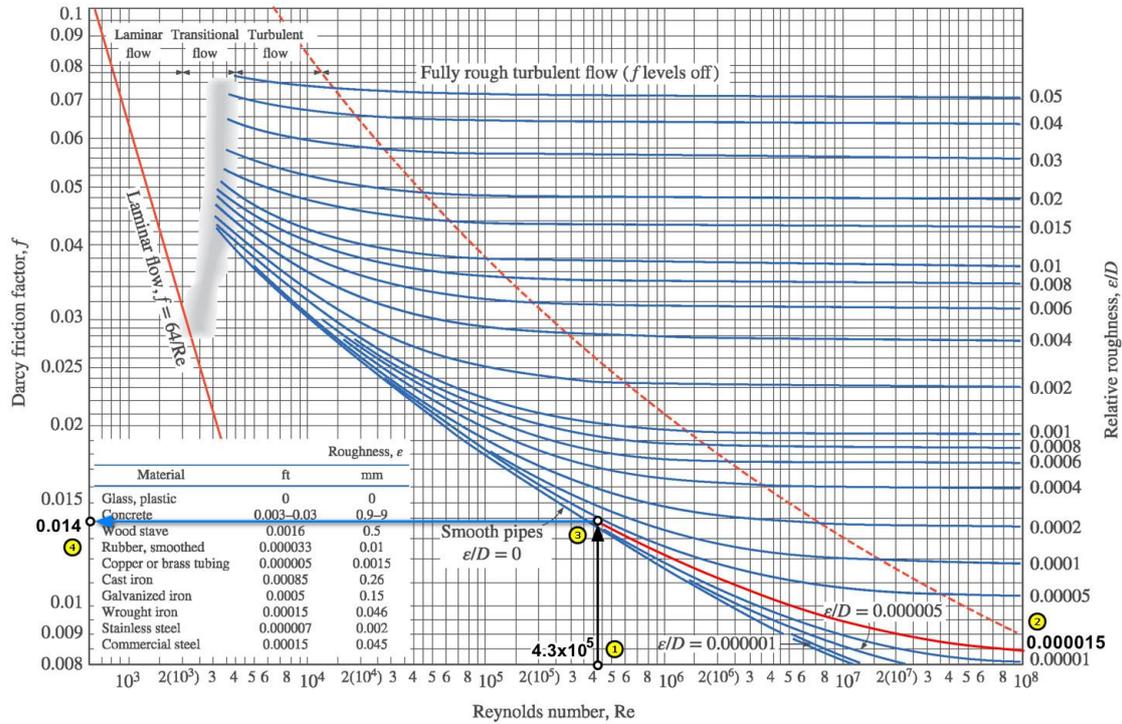
$$\text{Rugosidad relativa} = \frac{0.003 \text{ mm}}{200 \text{ mm}} = 1.5 \times 10^{-5} \quad (17.13)$$

7. Obtención del factor de fricción de Darcy,  $f$

Para ello emplearemos el diagrama de Moody, considerando una tubería de acero con revestimiento interno de caucho con una rugosidad relativa de 0.000015. Entrando ahora con este valor y con el número de Reynolds, anteriormente calculado, se obtiene un factor de fricción,  $f$ , de 0.014 (ver diagrama adjunto).

Con el factor de fricción de Darcy, podemos calcular las pérdidas de carga debidas a la fricción en la longitud equivalente de tubería (62.45 metros):

$$H_f = f \times \frac{L}{D} \times \frac{V^2}{2 \times g} = 0.014 \times \frac{62.45}{0.200} \times \frac{3.53^2}{2 \times 9.81} = 2.78 \text{ m.c.l.} \quad (17.14)$$



8. Pérdidas de carga a la salida del depósito,  $H_i$  (punto A).

Pérdidas de carga expresadas como proporción de la velocidad,  $V$ :  $H_i = K_i \times \frac{V^2}{2 \times g}$  (m)

GRUPO	SINGULARIDAD	Coefficiente $K_i$																														
<p>1</p>	<p><b>AMPLIACIONES</b></p> <table border="1"> <tr> <td>d/D</td> <td>0.9</td> <td>0.8</td> <td>0.7</td> <td>0.6</td> <td>0.5</td> <td>0.4</td> <td>0.3</td> <td>0.2</td> <td>0.1</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.03</td> <td>0.09</td> <td>0.17</td> <td>0.28</td> <td>0.38</td> <td>0.48</td> <td>0.56</td> <td>0.62</td> <td>0.66</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.04</td> <td>0.13</td> <td>0.26</td> <td>0.41</td> <td>0.56</td> <td>0.71</td> <td>0.83</td> <td>0.92</td> <td>0.98</td> </tr> </table>	d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1		0.03	0.09	0.17	0.28	0.38	0.48	0.56	0.62	0.66		0.04	0.13	0.26	0.41	0.56	0.71	0.83	0.92	0.98	$K_i = 2.6 \times \sin \frac{\theta}{2} \times \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)^2$ $K_i = \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)^2$
d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1																							
	0.03	0.09	0.17	0.28	0.38	0.48	0.56	0.62	0.66																							
	0.04	0.13	0.26	0.41	0.56	0.71	0.83	0.92	0.98																							
<p>2</p>	<p><b>REDUCCIONES</b></p> <table border="1"> <tr> <td>d/D</td> <td>0.9</td> <td>0.8</td> <td>0.7</td> <td>0.6</td> <td>0.5</td> <td>0.4</td> <td>0.3</td> <td>0.2</td> <td>0.1</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.04</td> <td>0.07</td> <td>0.11</td> <td>0.13</td> <td>0.16</td> <td>0.17</td> <td>0.19</td> <td>0.20</td> <td>0.20</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.10</td> <td>0.18</td> <td>0.26</td> <td>0.32</td> <td>0.38</td> <td>0.42</td> <td>0.46</td> <td>0.48</td> <td>0.50</td> </tr> </table>	d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1		0.04	0.07	0.11	0.13	0.16	0.17	0.19	0.20	0.20		0.10	0.18	0.26	0.32	0.38	0.42	0.46	0.48	0.50	$K_i = 0.8 - \sin \frac{\theta}{2} \times \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)$ $K_i = 0.5 - \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)$
d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1																							
	0.04	0.07	0.11	0.13	0.16	0.17	0.19	0.20	0.20																							
	0.10	0.18	0.26	0.32	0.38	0.42	0.46	0.48	0.50																							
<p>3</p>	<p><b>ENTRADAS DESDE DEPÓSITOS A TUBERÍAS</b></p> <p><b>Conexión con tubo interior</b></p> <p><b>Conexión con arista viva</b></p> <p><b>Conexión redondeada</b></p> <table border="1"> <tr> <td>r/D</td> <td>0.02</td> <td>0.04</td> <td>0.06</td> <td>0.10</td> <td>0.15</td> </tr> <tr> <td><math>K_i</math></td> <td>0.28</td> <td>0.24</td> <td>0.15</td> <td>0.09</td> <td>0.04</td> </tr> </table>	r/D	0.02	0.04	0.06	0.10	0.15	$K_i$	0.28	0.24	0.15	0.09	0.04	$K_i = 0.78$ $K_i = 0.50$ $K_i = 0.05$																		
r/D	0.02	0.04	0.06	0.10	0.15																											
$K_i$	0.28	0.24	0.15	0.09	0.04																											

Considerando una conexión normal con arista viva (“*flush connection*”), según la tabla anterior (Warman, 2000), se toma un valor de  $K_i = 0.5$ .

Por lo que la pérdida de carga debido a la conexión al depósito (punto A) será:

$$H_i = K_i \times \frac{\rho_p \times V^2}{\rho_{agua} \times 2 \times g} = 0.5 \times \frac{1.48 \times 3.53^2}{1.0 \times 2 \times 9.81} = 0.47 \text{ m.c.l.} \quad (17.15)$$

9. Altura de carga debida a la velocidad del flujo de pulpa,  $H_v$ .

Se obtiene a través de la siguiente expresión:

$$H_v = \frac{V^2}{2 \times g} = \frac{3.53^2}{2 \times 9.81} = 0.64 \text{ m.c.l.} \quad (17.16)$$

10. Altura de carga debida a la presión requerida en el hidrociclón,  $H_p$ .

El hidrociclón requiere una presión de trabajo en la entrada de alimentación de 80 kPa que equivalen a 0.80 bares y en metros de columna de pulpa (m.c.l.) será:

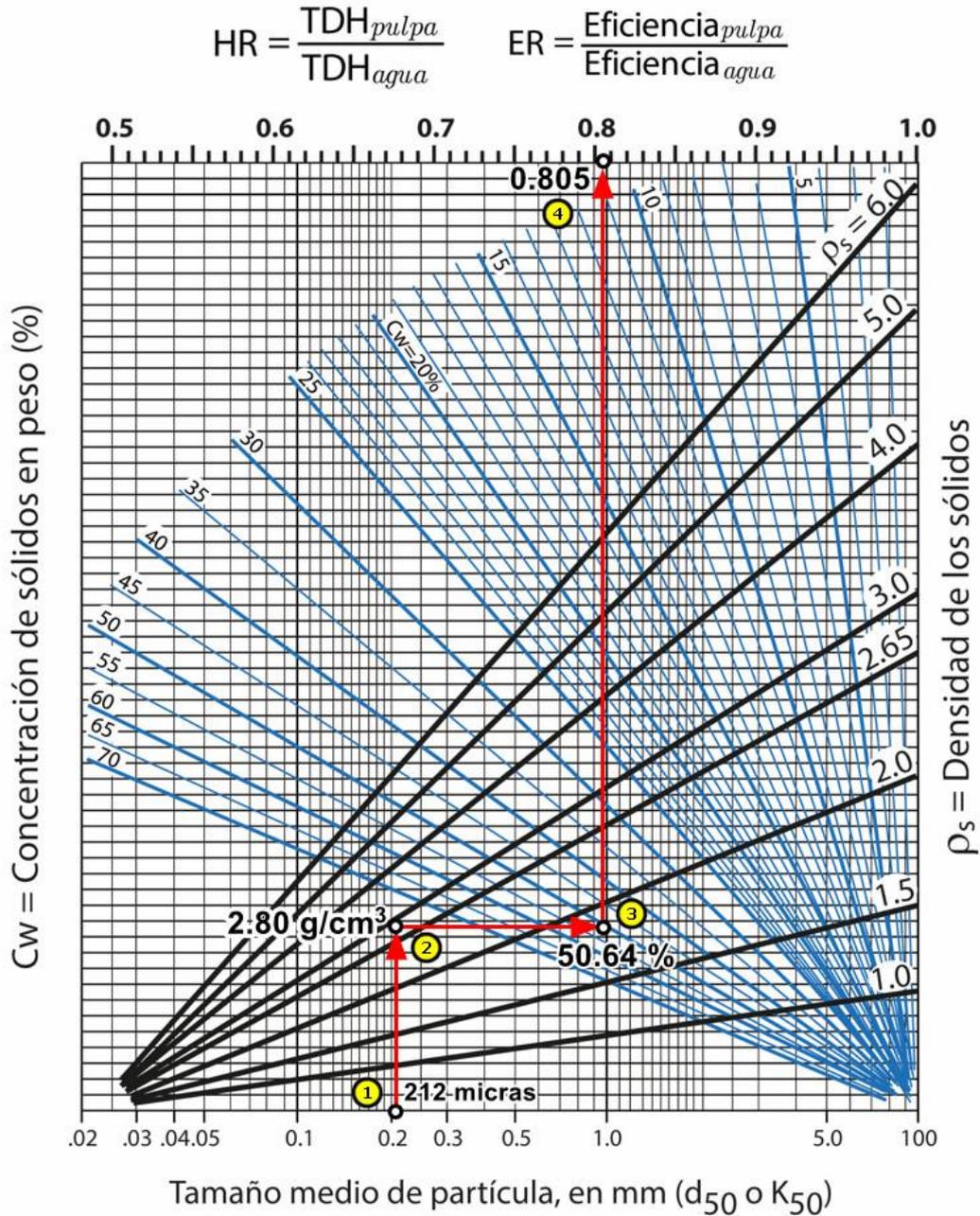
$$H_p = \frac{n^\circ \text{ bares} \times 10.2}{\rho_p} = \frac{0.80 \times 10.2}{1.48} = 5.51 \text{ m.c.l.} \quad (17.17)$$

11. Obtención de la altura manométrica total de la bomba,  $TDH_{pulpa}$ .

Con las alturas anteriormente calculadas, el valor de  $TDH_{pulpa}$  será:

$$TDH_{pulpa} = H_g + H_f + H_i + H_v + H_p = (14 - 2.5) + 2.78 + 0.47 + 0.64 + 5.51 = 20.9 \text{ m.c.l.} \quad (17.18)$$

Para seleccionar la bomba adecuada, debido a que los fabricantes proporcionan la información en base al empleo de agua como principal fluido, debemos corregir los 20.9 metros de columna de pulpa (m.c.l.) a metros de columna de agua (m.c.a.) (ANEFA, 2020; Volk, 2013; Warman, 2000). Para ello se emplea la gráfica siguiente entrando con los datos proporcionado por el enunciado del problema, como es la densidad de las partículas sólidas ( $2.80 \text{ g/cm}^3$ ), el tamaño medio de partícula ( $K_{50} = 212 \text{ micras}$ ) y la concentración de sólidos en peso ( $C_W = 50.64\%$ ).



Con estos datos, entrando en dicha gráfica se obtiene un HR (o ER) igual 0.805, lo que se puede expresar como:

$$HR = \frac{TDH_{pulpa}}{TDH_{agua}} \quad (17.19)$$

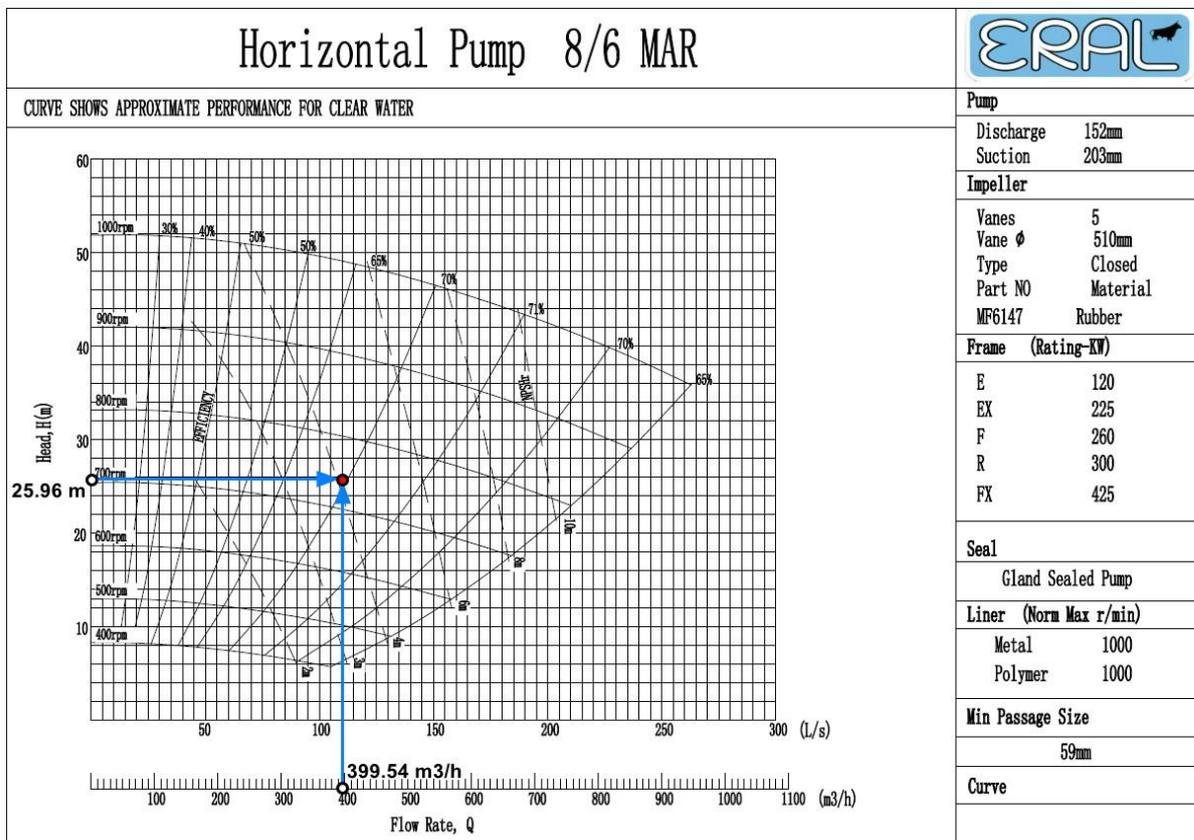
Para nuestro caso, la altura manométrica total expresada en columna de agua valdrá:

$$TDH_{agua} = \frac{TDH_{pulpa}}{HR} = \frac{20.9 \text{ m.c.l.}}{0.805} = 25.96 \text{ m.c.a.} \quad (17.20)$$

### 12. Selección de la bomba centrífuga.

Con el valor calculado de  $TDH_{agua}$  de 25.96 m.c.a. y con el caudal proporcionado de  $M = 399.54 \text{ m}^3/\text{h}$  (110.98 l/s), se puede entrar en las curvas características Q-H de los fabricantes de bombas y seleccionar la bomba adecuada a nuestra instalación de bombeo de pulpas.

Por ejemplo, para la curva característica Q-H que se facilita (ERAL), la bomba sería una bomba trabajando a un rendimiento del 70%, a 740 rpm y con un NPSHr de 4 m.c.a.



### 13. Cálculo de la potencia de la bomba.

Con el valor calculado de  $TDH_{agua}$  de 25.96 m.c.a., el caudal proporcionado de  $Q = 399.54 \text{ m}^3/\text{h}$ , el rendimiento obtenido del 70%, la densidad de la pulpa de  $1.48 \text{ t}/\text{m}^3$  podemos calcular la potencia en kW que necesitará la bomba a través de la siguiente expresión:

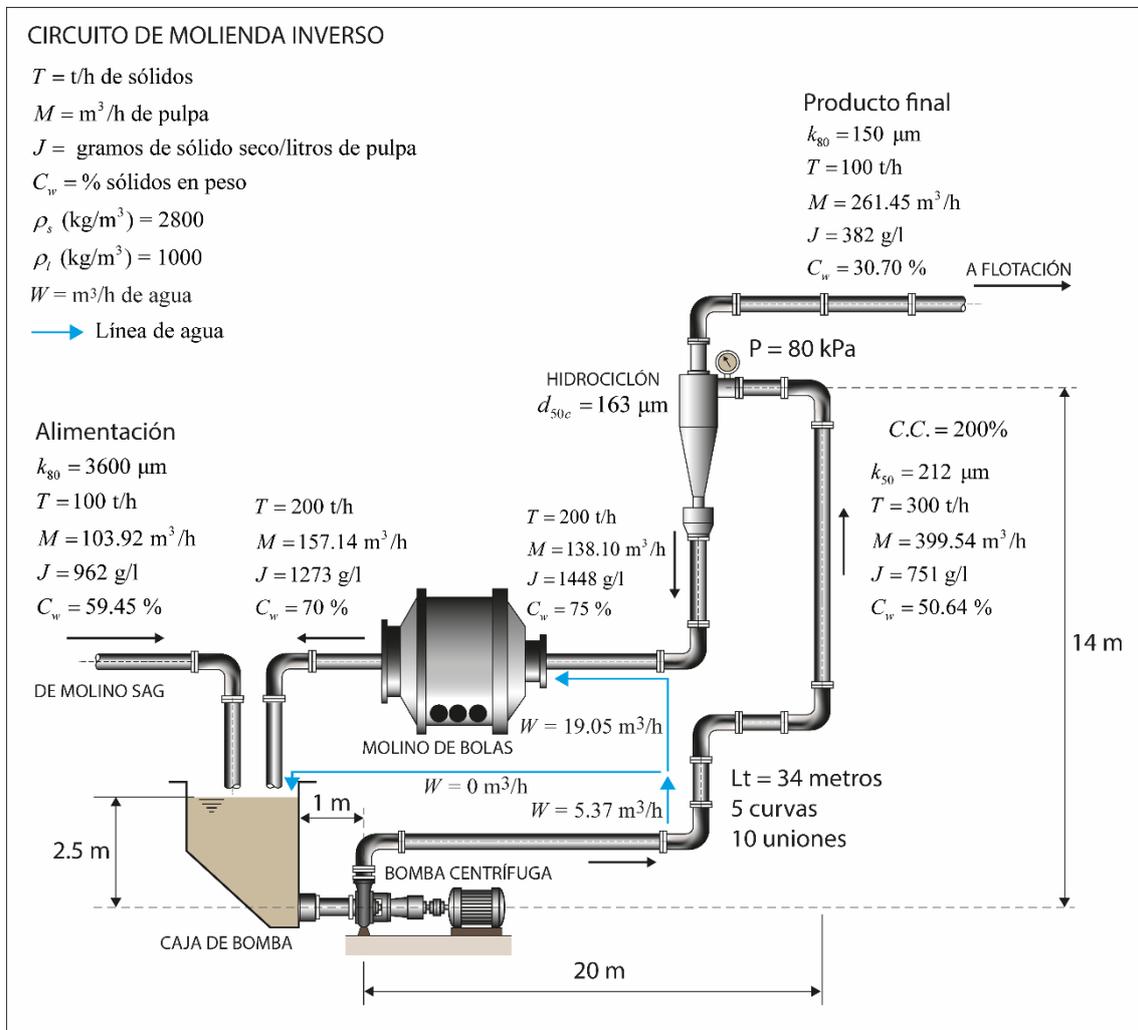
$$N_{kW} = \frac{Q \times TDH_{agua} \times \rho_{pulpa}}{\frac{\eta}{100} \times 360 \times 0.80} = \frac{399.54 \times 25.96 \times 1.48}{0.70 \times 360 \times 0.80} = 76.14 \text{ kW} \quad (17.21)$$

Referencias:

- ANEFA. (2020). *Manual de Áridos para el Siglo XXI* (ANEFA, Ed.).
- Bouso, J. L. (1993). *Manual de bombeo de pulpas* (Fueyo, Ed.). ERAL, Equipos y Procesos S.A.
- Volk, M. (2013). *Pump Characteristics and Applications* (C. Press, Ed. 3rd ed.).  
<https://doi.org/https://doi.org/10.1201/b15559>
- Warman, L. (2000). *Warman Slurry Pumping Handbook*. Warman Slurry Pumping Handbook.

EJERCICIO 18 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO

18. Se tiene una planta de procesamiento de mineral de cobre compuesta por un molino SAG y un molino de bolas que mediante bombeo alimentan un hidrociclón, tal y como representa el esquema de flujo adjunto de la planta. El producto del hidrociclón es enviado a la siguiente etapa de concentración mineral por flotación (finos), mientras que las partículas gruesas son renviadas, como hundido, al molino de bolas para su molienda, nuevamente (ver esquema adjunto). El caudal de alimentación de pulpa al hidrociclón es de  $399.54 \text{ m}^3/\text{h}$ , la concentración de sólidos en peso ( $C_w$ ) es del 50.64%. La presión de entrada en el hidrociclón es de 80 kPa. Por otro lado, se sabe que la altura de la tubería de descarga que alimenta al hidrociclón se encuentra a 14 metros, el diámetro nominal interno (D) de la tubería se establece de 250 mm. La longitud de la tubería de descarga será de 34 metros y la longitud de la tubería de succión será de 1 metro. Calcular el TDH requerido para la bomba en metros de columna de agua (m.c.a.), y la potencia absorbida teórica (kW). Utilizar la fórmula de Williams y Hazen, considerando  $C = 120$ .



Nota:

- Densidad específica de las partículas sólidas =  $2.80 \text{ t/m}^3$
- Densidad específica del agua =  $1.00 \text{ t/m}^3$
- Rugosidad absoluta de la tubería con revestimiento de caucho ( $\epsilon$ ) =  $3 \times 10^{-6}$

- Considerar una viscosidad del agua igual a  $0.001 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$
- Considerar una eficiencia del motor del 80%

Solución:

1. Cálculo de la concentración de sólidos en volumen,  $C_V$ , y peso específico de la pulpa,  $\rho_p$ .

Para el cálculo de la concentración de sólidos en volumen hacemos uso de la siguiente expresión:

$$C_V = \frac{\frac{C_w}{100} \times \rho_l}{\rho_s - \frac{C_w}{100} \times (\rho_s - \rho_l)} \times 100 \quad (18.1)$$

Por lo que, sustituyendo:

$$C_V = \frac{\frac{50.64}{100} \times 1.0}{2.8 - \frac{50.64}{100} \times (2.8 - 1.0)} \times 100 = 26.82\% \quad (18.2)$$

Para el cálculo de la densidad de la pulpa empleamos la siguiente expresión:

$$\frac{C_V}{100} = \frac{(\rho_p - \rho_l)}{(\rho_s - \rho_l)} \quad (18.3)$$

Por lo que, sustituyendo:

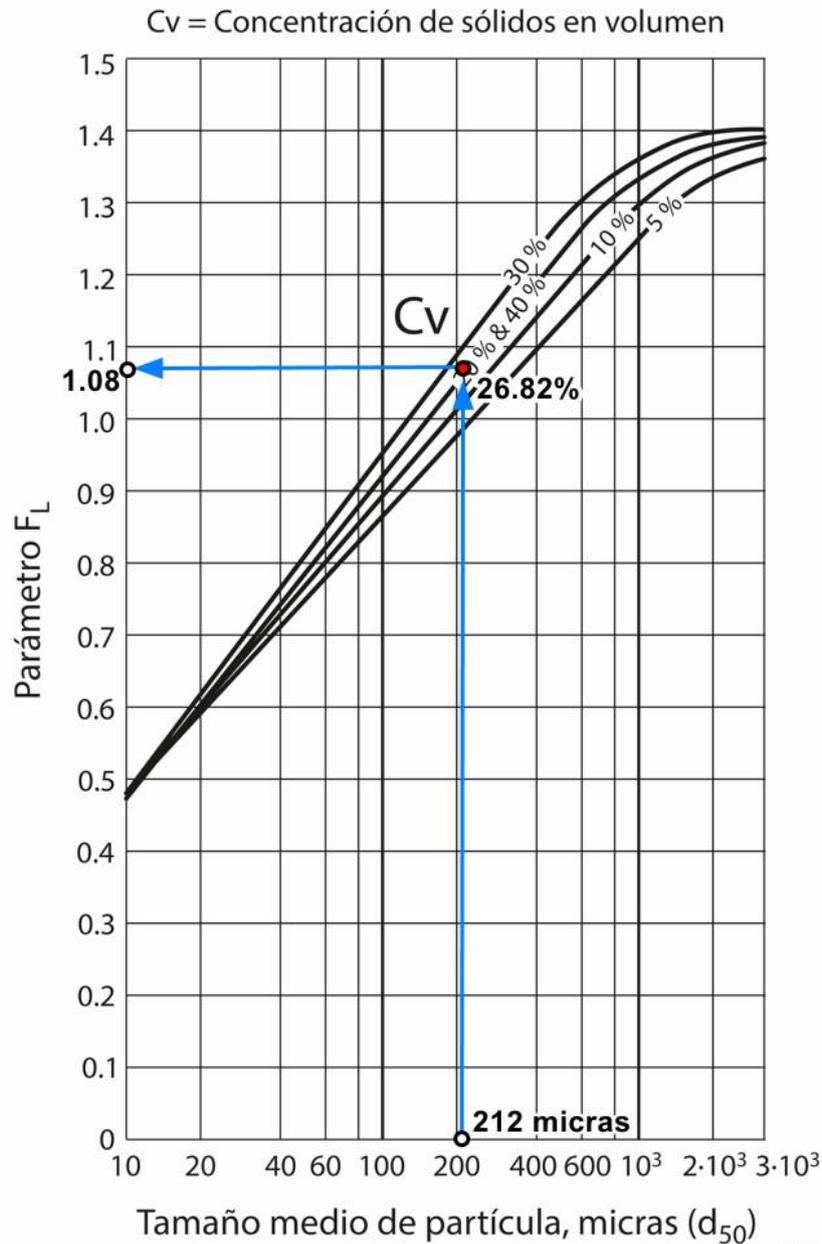
$$\rho_p = \frac{26.82}{100} \times (2.8 - 1.0) + 1.0 = 1.48 \text{ t}/\text{m}^3 \quad (18.4)$$

2. Cálculo del diámetro óptimo de la tubería, la velocidad límite y la velocidad real de transporte.

Para estos cálculos vamos a utilizar la expresión de la velocidad límite según Durand (ANEFA, 2020):

$$V_l = F_l \times \sqrt{2 \times g \times D \times \frac{\rho_s - \rho_l}{\rho_l}} \quad (18.5)$$

Para la determinación del factor  $F_1$  se entra en el siguiente gráfico (ANEFA, 2020; Bouso, 1993; Warman, 2000), con el valor de  $k_{50}$  de 212  $\mu\text{m}$  y un  $C_v$  de 26.82%, del que se obtiene un valor aproximado de 1.08. Con este valor se puede entrar en la anterior expresión de Durand y calcular la velocidad límite.



La velocidad límite valdrá:

$$V_l = 1.08 \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.250 \times \frac{2.8 - 1.0}{1.0}} = 3.2 \text{ m/s} \quad (18.6)$$

Ahora se comprueba que la velocidad real de transporte es superior que la velocidad límite:

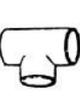
$$V = \frac{M}{\left(\frac{\pi \times D^2}{4}\right)} = \frac{399.54 \text{ m}^3/\text{h} \times \frac{1\text{h}}{3600\text{s}}}{\left(\frac{\pi \times 0.250^2}{4}\right)} = 2.26 \text{ m/s} \quad (18.7)$$

Se observa que la velocidad a la que circularía la pulpa con tubería de 250 mm es inferior a la velocidad límite de 3.2 m/s, por lo que se adopta el seleccionar una tubería de diámetro interior de 200 mm. Para este nuevo diámetro se vuelve a calcular la velocidad a la circularía la pulpa, siendo:

$$V = \frac{M}{\left(\frac{\pi \times D^2}{4}\right)} = \frac{399.54 \text{ m}^3/\text{h} \times \frac{1\text{h}}{3600\text{s}}}{\left(\frac{\pi \times 0.200^2}{4}\right)} = 3.53 \text{ m/s} \quad (18.8)$$

Por lo tanto, el nuevo diámetro seleccionado es adecuado ya que la velocidad a la que llevará la pulpa de 3.53 m/s es superior a la velocidad límite calculada.

3. Cálculo de las pérdidas de carga en la conducción.

	 Radius More Than 3 x N.B.	 Radius is 2 x N.B.			 Minimum Radius 10 x N.B.				
INTERNAL DIAMETER or N.B. m m	90° Long Radius Bend	90° Short Radius Bend	Elbow	Tee	Rubber Hose	Diaphragm Valve Full Open	Full Bore Valve Round Way	Plug-Lub Valve Rect. Way	* "Tech-Taylor" Valve Ball Type
EQUIV. LENGTH IN m OF STRAIGHT PIPE GIVING EQUIVALENT RESISTANCE TO FLOW									
25	0.52	0.70	0.82	1.77	0.30	2.56	—	0.37	—
32	0.73	0.91	1.13	2.38	0.40	3.29	—	0.49	—
40	0.85	1.10	1.31	2.74	0.49	3.44	1.19	0.58	—
50	1.07	1.40	1.68	3.35	0.55	3.66	1.43	0.73	—
65	1.28	1.65	1.98	4.27	0.70	4.60	1.52	0.85	—
80	1.55	2.07	2.47	5.18	0.85	4.88	1.92	1.04	0.20
90	1.83	2.44	2.90	5.79	1.01	—	—	1.22	—
100	2.13	2.77	3.35	6.71	1.16	7.62	2.19	1.40	0.23
115	2.41	3.05	3.66	7.32	1.28	—	—	1.58	—
125	2.71	3.66	4.27	8.23	1.43	13.11	3.05	1.77	0.30
150	3.35	4.27	4.88	10.06	1.55	18.29	3.11	2.13	0.37
200	4.27	5.49	6.40	13.11	2.41	19.81	7.92	2.74	0.82
250	5.18	6.71	7.92	17.07	2.99	21.34	10.67	3.47	0.61
300	6.10	7.92	9.75	20.12	3.35	28.96	15.85	4.08	0.76
350	7.01	9.45	10.97	23.16	4.27	28.96	—	4.88	0.91
400	8.23	10.67	12.80	26.52	4.88	—	—	5.49	1.04
450	9.14	12.19	14.02	30.48	5.49	—	—	6.22	1.16
500	10.36	13.11	15.85	33.53	6.10	—	—	7.32	1.25

Lo primero es calcular la longitud equivalente de los accesorios y singularidades que en este ejemplo se trata de 5 curvas de radio corto (R=2B), y que entrando

en la tabla adjunta (Warman, 2000) se obtiene una longitud equivalente de 5.49 m para cada curva.

La longitud equivalente de la tubería considerando las singularidades será:

$$L = 34 \text{ m} + 1 \text{ m} + 5 \times 5.49 \text{ m} = 62.45 \text{ m} \quad (18.9)$$

4. Cálculo de las pérdidas por fricción a través de Williams y Hazen.

El valor de estas pérdidas se obtiene aplicando la siguiente fórmula de Williams y Hazen:

$$H_f = \frac{5.6028}{10^8} \times \left( \frac{100}{C} \right)^{1.85} \times \frac{Q^{1.85}}{D^{4.8655}} \quad (\text{m}/100\text{m}) \quad (18.10)$$

$$H_f = \frac{5.6028}{10^8} \times \left( \frac{100}{120} \right)^{1.85} \times \frac{399.54^{1.85}}{0.200^{4.8655}} = 6.16 \quad (\text{m}/100\text{m}) \quad (18.11)$$

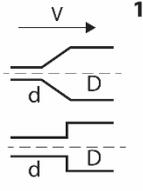
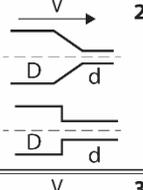
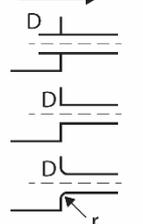
Con el valor de  $H_f = 6.16 \text{ m}/100\text{m}$  de tubería y sabiendo que entre codos y tubería total se dispone de 62.45 metros de tubería equivalente, entonces se tendrá:

$$H_f = \frac{62.45}{100} \times 6.16 = 3.85 \text{ m.c.l.} \quad (18.12)$$

5. Pérdidas de carga a la salida del depósito,  $H_i$  (punto A).

Considerando una conexión normal con arista viva ("*flush connection*"), según la siguiente tabla (Warman, 2000), se toma un valor de  $K_i = 0.5$ .

Pérdidas de carga expresadas como proporción de la velocidad, V:  $H_i = K_i \times \frac{V^2}{2 \times g}$  (m)

GRUPO	SINGULARIDAD	Coefficiente $K_i$																														
	<b>AMPLIACIONES</b> <table border="1"> <tr> <td>d/D</td> <td>0.9</td> <td>0.8</td> <td>0.7</td> <td>0.6</td> <td>0.5</td> <td>0.4</td> <td>0.3</td> <td>0.2</td> <td>0.1</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.03</td> <td>0.09</td> <td>0.17</td> <td>0.28</td> <td>0.38</td> <td>0.48</td> <td>0.56</td> <td>0.62</td> <td>0.66</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.04</td> <td>0.13</td> <td>0.26</td> <td>0.41</td> <td>0.56</td> <td>0.71</td> <td>0.83</td> <td>0.92</td> <td>0.98</td> </tr> </table>	d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1		0.03	0.09	0.17	0.28	0.38	0.48	0.56	0.62	0.66		0.04	0.13	0.26	0.41	0.56	0.71	0.83	0.92	0.98	$K_i = 2.6 \times \sin \frac{\theta}{2} \times \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)^2$ $K_i = \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)^2$
d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1																							
	0.03	0.09	0.17	0.28	0.38	0.48	0.56	0.62	0.66																							
	0.04	0.13	0.26	0.41	0.56	0.71	0.83	0.92	0.98																							
	<b>REDUCCIONES</b> <table border="1"> <tr> <td>d/D</td> <td>0.9</td> <td>0.8</td> <td>0.7</td> <td>0.6</td> <td>0.5</td> <td>0.4</td> <td>0.3</td> <td>0.2</td> <td>0.1</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.04</td> <td>0.07</td> <td>0.11</td> <td>0.13</td> <td>0.16</td> <td>0.17</td> <td>0.19</td> <td>0.20</td> <td>0.20</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.10</td> <td>0.18</td> <td>0.26</td> <td>0.32</td> <td>0.38</td> <td>0.42</td> <td>0.46</td> <td>0.48</td> <td>0.50</td> </tr> </table>	d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1		0.04	0.07	0.11	0.13	0.16	0.17	0.19	0.20	0.20		0.10	0.18	0.26	0.32	0.38	0.42	0.46	0.48	0.50	$K_i = 0.8 - \sin \frac{\theta}{2} \times \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)$ $K_i = 0.5 - \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)$
d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1																							
	0.04	0.07	0.11	0.13	0.16	0.17	0.19	0.20	0.20																							
	0.10	0.18	0.26	0.32	0.38	0.42	0.46	0.48	0.50																							
	<b>ENTRADAS DESDE DEPÓSITOS A TUBERÍAS</b> <b>Conexión con tubo interior</b> <b>Conexión con arista viva</b> <b>Conexión redondeada</b> <table border="1"> <tr> <td>r/D</td> <td>0.02</td> <td>0.04</td> <td>0.06</td> <td>0.10</td> <td>0.15</td> </tr> <tr> <td><math>K_i</math></td> <td>0.28</td> <td>0.24</td> <td>0.15</td> <td>0.09</td> <td>0.04</td> </tr> </table>	r/D	0.02	0.04	0.06	0.10	0.15	$K_i$	0.28	0.24	0.15	0.09	0.04	$K_i = 0.78$ $K_i = 0.50$ $K_i = 0.05$																		
r/D	0.02	0.04	0.06	0.10	0.15																											
$K_i$	0.28	0.24	0.15	0.09	0.04																											

Por lo que la pérdida de carga debido a la conexión al depósito (punto A) será:

$$H_i = K_i \times \frac{\rho_p \times V^2}{\rho_{agua} \times 2 \times g} = 0.5 \times \frac{1.48 \times 3.53^2}{1.0 \times 2 \times 9.81} = 0.47 \text{ m.c.l.} \quad (18.13)$$

6. Altura de carga debida a la velocidad del flujo de pulpa,  $H_v$ .

Se obtiene a través de la siguiente expresión:

$$H_v = \frac{V^2}{2 \times g} = \frac{3.53^2}{2 \times 9.81} = 0.64 \text{ m.c.l.} \quad (18.14)$$

7. Altura de carga debida a la presión requerida en el hidrociclón,  $H_p$ .

El hidrociclón requiere una presión de trabajo en la entrada de alimentación de 80 kPa que equivalen a 0.80 bares y en metros de columna de pulpa (m.c.l.) será:

$$H_p = \frac{n^\circ \text{ bares} \times 10.2}{\rho_p} = \frac{0.80 \times 10.2}{1.48} = 5.51 \text{ m.c.l.} \quad (18.15)$$

8. Obtención de la altura manométrica total de la bomba,  $TDH_{pulpa}$ .

Con las alturas anteriormente calculadas, el valor de  $TDH_{pulpa}$  será:

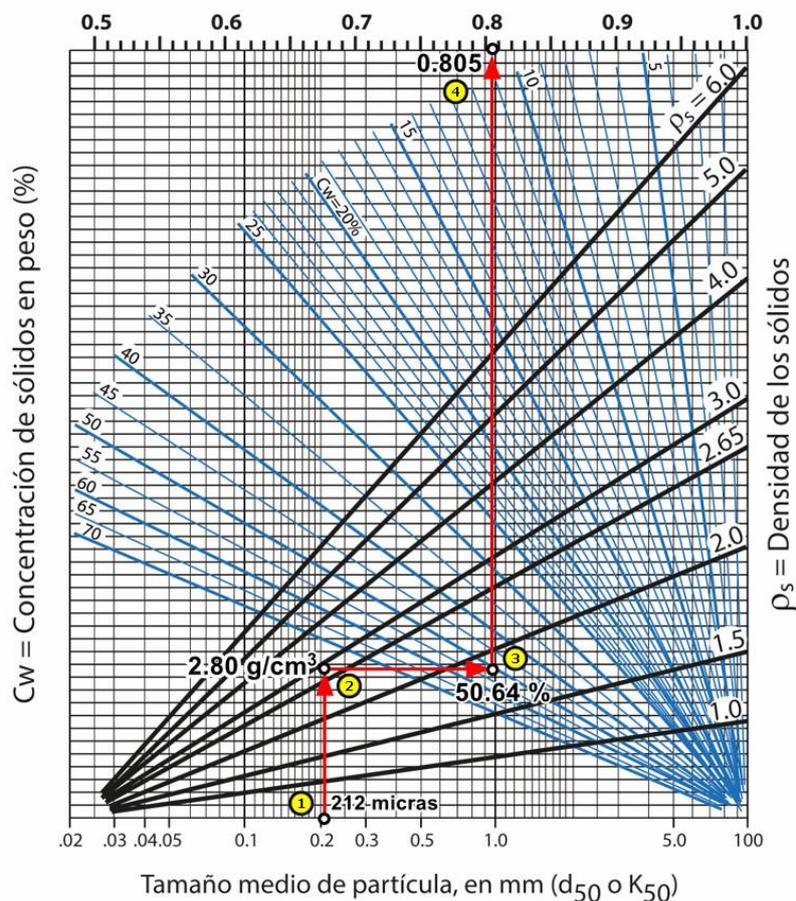
$$TDH_{pulpa} = H_g + H_f + H_i + H_v + H_p = (14 - 2.5) + 3.85 + 0.47 + 0.64 + 5.51 = 21.97 \text{ m.c.l.} \quad (18.16)$$

Para seleccionar la bomba adecuada, debido a que los fabricantes proporcionan la información en base al empleo de agua como principal fluido, debemos corregir los 21.97 metros de columna de pulpa (m.c.l.) a metros de columna de agua (m.c.a.) (ANEFA, 2020; Volk, 2013; Warman, 2000). Para ello se emplea la gráfica siguiente entrando con los datos proporcionado por el enunciado del problema, como es la densidad de las partículas sólidas ( $2.80 \text{ g/cm}^3$ ), el tamaño medio de partícula ( $K_{50} = 212 \text{ micras}$ ) y la concentración de sólidos en peso ( $C_w = 50.64\%$ ).

Con estos datos, entrando en dicha gráfica se obtiene un HR (o ER) igual 0.805, lo que se puede expresar como:

$$HR = \frac{TDH_{pulpa}}{TDH_{agua}} \quad (18.17)$$

$$HR = \frac{TDH_{pulpa}}{TDH_{agua}} \quad ER = \frac{\text{Eficiencia}_{pulpa}}{\text{Eficiencia}_{agua}}$$



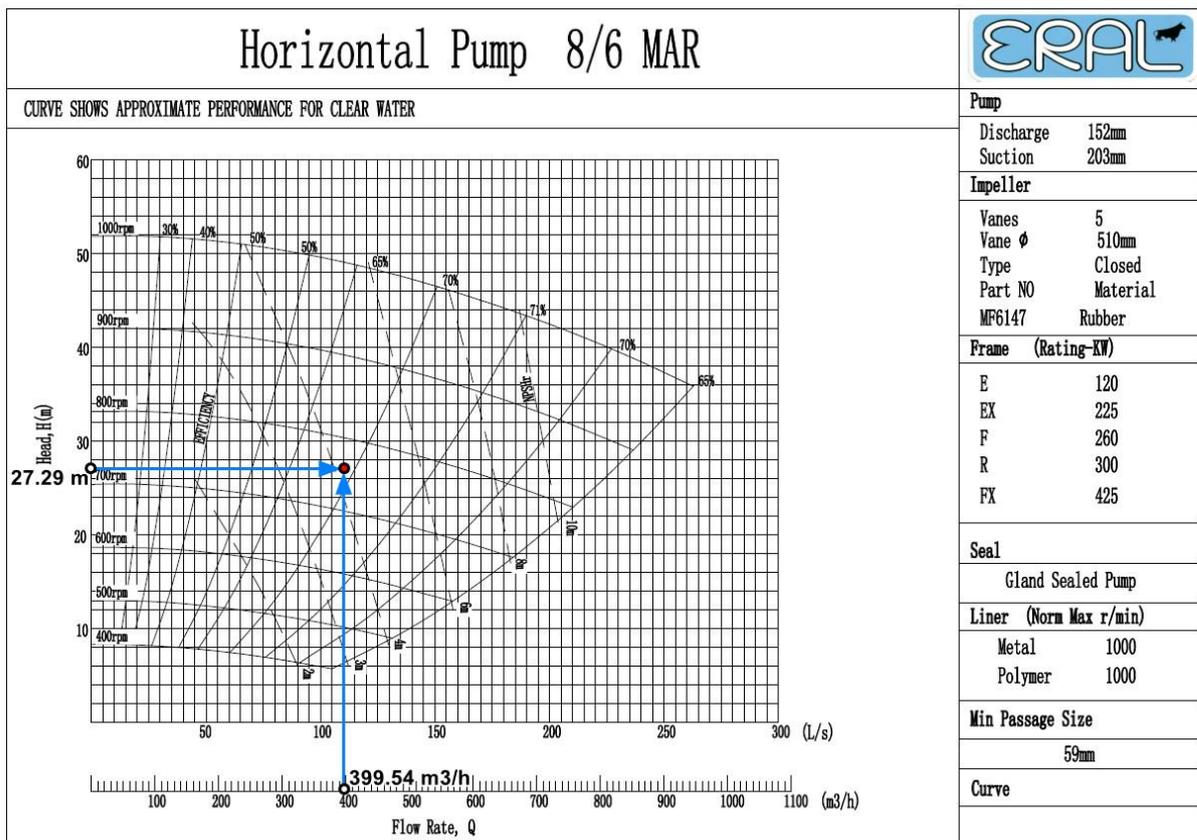
Para nuestro caso, la altura manométrica total expresada en columna de agua valdrá:

$$TDH_{agua} = \frac{TDH_{pulpa}}{HR} = \frac{21.97 \text{ m.c.l.}}{0.805} = 27.29 \text{ m.c.a.} \quad (18.18)$$

9. Selección de la bomba centrífuga.

Con el valor calculado de  $TDH_{agua}$  de 27.29 m.c.a. y con el caudal proporcionado de  $Q (M) = 399.54 \text{ m}^3/\text{h}$  (110.98 l/s), se puede entrar en las curvas características Q-H de los fabricantes de bombas, en nuestro caso ERAL, y seleccionar la bomba adecuada a nuestra instalación de bombeo de pulpas.

Por ejemplo, para la curva característica Q-H que se facilita (ERAL), la bomba sería una bomba trabajando a un rendimiento del 69%, a 760 rpm y con un NPSHr de 4.2 m.c.a.



10. Cálculo de la potencia de la bomba.

Con el valor calculado de  $TDH_{agua}$  de 27.29 m.c.a., el caudal proporcionado de  $Q = 399.54 \text{ m}^3/\text{h}$ , el rendimiento obtenido del 69%, la densidad de la pulpa de

1.48 t/m<sup>3</sup> podemos calcular la potencia en kW que necesitará la bomba a través de la siguiente expresión:

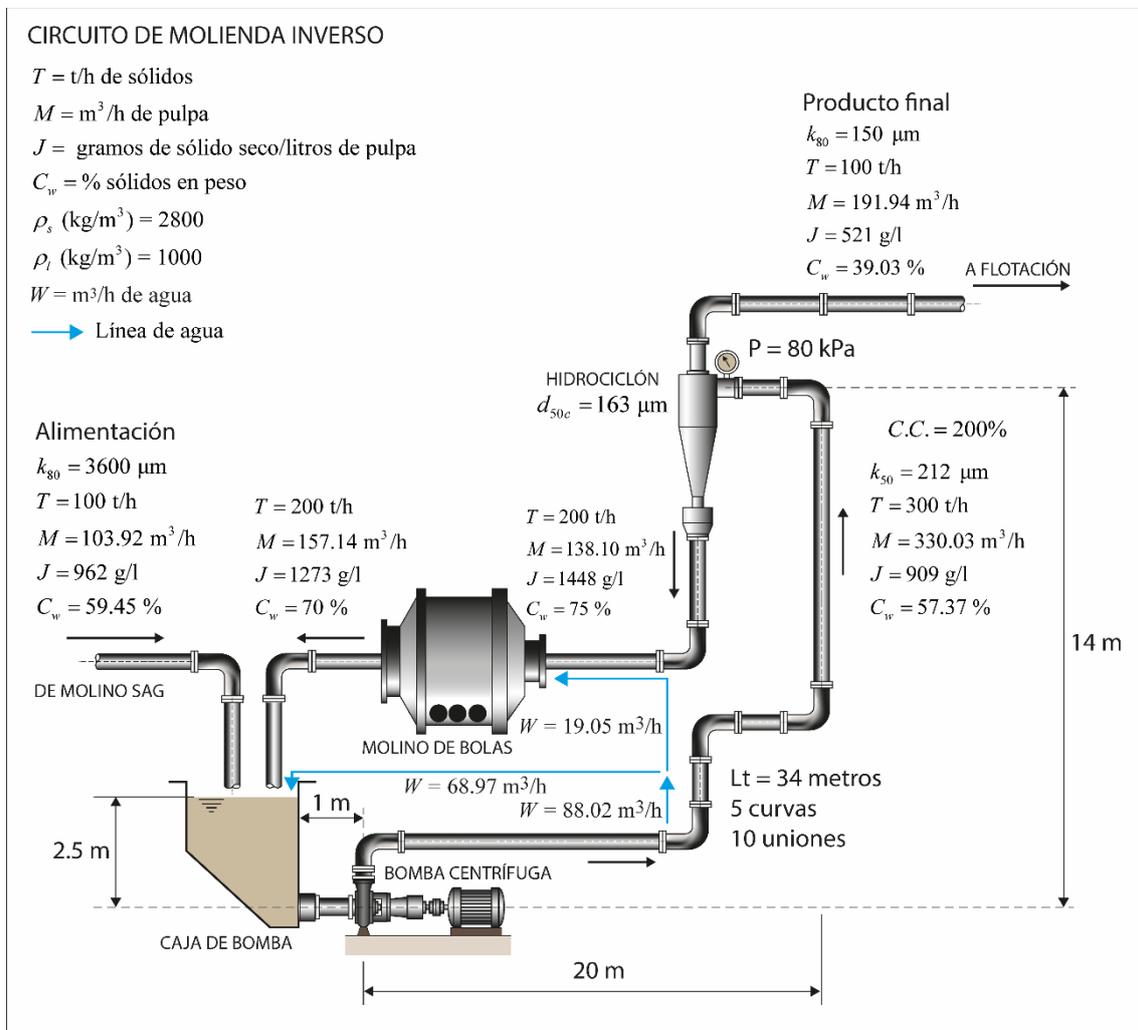
$$N_{kW} = \frac{Q \times TDH_{agua} \times \rho_{pulpa}}{\frac{\eta}{100} \times 360 \times 0.80} = \frac{399.54 \times 27.29 \times 1.48}{0.69 \times 360 \times 0.80} = 81.21 \text{ kW} \quad (18.19)$$

Referencias:

- ANEFA. (2020). *Manual de Áridos para el Siglo XXI* (ANEFA, Ed.).
- Bouso, J. L. (1993). *Manual de bombeo de pulpas* (Fueyo, Ed.). ERAL, Equipos y Procesos S.A.
- Volk, M. (2013). *Pump Characteristics and Applications* (C. Press, Ed. 3rd ed.).  
<https://doi.org/https://doi.org/10.1201/b15559>
- Warman, L. (2000). *Warman Slurry Pumping Handbook*. Warman Slurry Pumping Handbook.

EJERCICIO 19 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO

19. Se tiene una planta de procesamiento de mineral de cobre compuesta por un molino SAG y un molino de bolas que mediante bombeo alimentan un hidrociclón, tal y como representa el esquema de flujo adjunto de la planta. El producto del hidrociclón es enviado a la siguiente etapa de concentración mineral por flotación (finos), mientras que las partículas gruesas son renviadas, como hundido, al molino de bolas para su molienda, nuevamente (ver esquema adjunto). El caudal de alimentación de pulpa al hidrociclón es de  $330.03 \text{ m}^3/\text{h}$ , la concentración de sólidos en peso ( $C_w$ ) es del 57.37%. La presión de entrada en el hidrociclón es de 80 kPa. Por otro lado, se sabe que la altura de la tubería de descarga que alimenta al hidrociclón se encuentra a 14 metros, siendo ésta de acero estirado. El diámetro nominal (DN) de la tubería que se establece es de 250 mm con 10 mm de revestimiento interno de goma (2x5 mm). La longitud de la tubería de descarga será de 34 metros y la longitud de la tubería de succión será de 1 metro. Calcular el TDH requerido para la bomba en metros de columna de agua (m.c.a.), y la potencia absorbida teórica (kW). Emplea el diagrama de Moody para la obtención del coeficiente de fricción de Darcy,  $f$ .



Nota:

- Densidad específica de las partículas sólidas =  $2.80 \text{ t/m}^3$
- Densidad específica del agua =  $1.00 \text{ t/m}^3$

- Rugosidad absoluta de la tubería con revestimiento de caucho ( $\epsilon$ ) =  $3 \times 10^{-6}$
- Considerar una viscosidad del agua igual a  $0.001 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$
- Considerar una eficiencia del motor del 94% (motor de alta eficiencia Clase IE2)
- Considerar las pérdidas de carga debidas a las reducciones y ampliaciones graduales:
  - (a) reducción cónica de la tubería de aspiración con la boca de aspiración de la bomba,
  - (b) ampliación cónica de la boca de salida de la bomba con la tubería de impulsión, y
  - (c) reducción de la tubería de impulsión con la boca de entrada del hidrociclón.

Solución:

1. Cálculo de la concentración de sólidos en volumen,  $C_V$ , y peso específico de la pulpa,  $\rho_p$ .

Para el cálculo de la concentración de sólidos en volumen hacemos uso de la siguiente expresión:

$$C_V = \frac{\frac{C_w}{100} \times \rho_l}{\rho_s - \frac{C_w}{100} \times (\rho_s - \rho_l)} \times 100 \quad (19.1)$$

Por lo que, sustituyendo:

$$C_V = \frac{\frac{57.37}{100} \times 1.0}{2.8 - \frac{57.37}{100} \times (2.8 - 1.0)} \times 100 = 32.46\% \quad (19.2)$$

Para el cálculo de la densidad de la pulpa empleamos la siguiente expresión:

$$\frac{C_V}{100} = \frac{(\rho_p - \rho_l)}{(\rho_s - \rho_l)} \quad (19.3)$$

Por lo que, sustituyendo:

$$\rho_p = \frac{32.46}{100} \times (2.8 - 1.0) + 1.0 = 1.58 \text{ t/m}^3 \quad (19.4)$$

2. Determinación del diámetro interior de la tubería

Para la determinación del diámetro interior efectivo,  $D_i$ , se deben tener en cuenta los diámetros de las tuberías comerciales para un diámetro nominal de 250 mm (ver tabla) y restar el espesor debido al revestimiento interno de goma que será de 10 mm (2 x 5 mm).

TUBERÍAS DE ACERO ESTIRADO				Diámetro interior (mm)	Área interior (cm <sup>2</sup> )
Diámetro exterior (mm)	Espesor pared (mm)	Diámetro Nominal (DN)			
		(mm)	(pulgadas)		
219.1	5.9	200	8	207.3	337.5
244.5	6.3			231.9	422.4
273.0	6.3	250	10	260.4	532.6

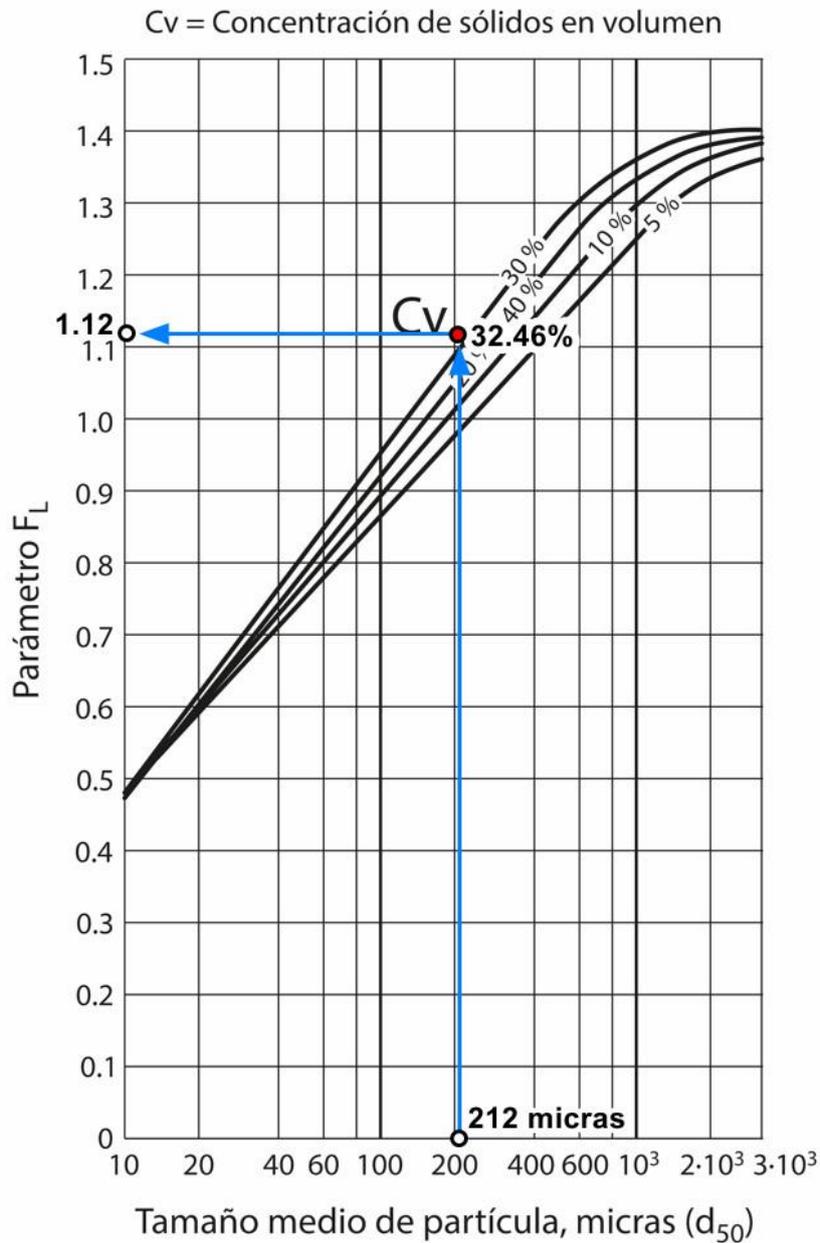
Por lo que para una tubería de acero estirado de diámetro nominal 250 mm, le corresponde un diámetro interior de 260.4 mm, al cual hay que restarle 10 mm debido al revestimiento interno de goma, por lo que el diámetro interior efectivo será de 250.4 mm ( $D_i$ ).

3. Cálculo del diámetro óptimo de la tubería, la velocidad límite y la velocidad real de transporte.

Para estos cálculos vamos a utilizar la expresión de la velocidad límite según Durand (ANEFA, 2020):

$$V_l = F_l \times \sqrt{2 \times g \times D_i \times \frac{\rho_s - \rho_l}{\rho_l}} \quad (19.5)$$

Para la determinación del factor  $F_l$  se entra en el siguiente gráfico (ANEFA, 2020; Bouso, 1993; Warman, 2000), con el valor de  $k_{50}$  de 212  $\mu\text{m}$  y un  $C_v$  de 32.46%, del que se obtiene un valor aproximado de 1.12. Con este valor se puede entrar en la anterior expresión de Durand y calcular la velocidad límite.



La velocidad límite valdrá:

$$V_l = 1.12 \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.2504 \times \frac{2.8 - 1.0}{1.0}} = 3.3 \text{ m/s} \quad (19.6)$$

Ahora se comprueba que la velocidad real de transporte es superior que la velocidad límite:

$$V = \frac{Q}{\left(\frac{\pi \times D_i^2}{4}\right)} = \frac{330.03 \text{ m}^3/\text{h} \times \frac{1\text{h}}{3600\text{s}}}{\left(\frac{\pi \times 0.2504^2}{4}\right)} = 1.86 \text{ m/s} \quad (19.7)$$

Se observa que la velocidad a la que circularía la pulpa con tubería de 250 mm es inferior a la velocidad límite de 3.3 m/s, por lo que se adopta el seleccionar una tubería de diámetro nominal de 200 mm. El diámetro interior efectivo será ahora de 197.3 mm. Para este nuevo diámetro se vuelve a calcular la velocidad límite que valdrá:

$$V_i = 1.12 \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.1973 \times \frac{2.8 - 1.0}{1.0}} = 2.96 \text{ m/s} \quad (19.8)$$

Y la velocidad a la que circularía la pulpa, será:

$$V = \frac{Q}{\left(\frac{\pi \times D_i^2}{4}\right)} = \frac{330.03 \text{ m}^3/\text{h} \times \frac{1\text{h}}{3600\text{s}}}{\left(\frac{\pi \times 0.1973^2}{4}\right)} \approx 3 \text{ m/s} \quad (19.9)$$

Por lo tanto, el nuevo diámetro seleccionado es adecuado ya que la velocidad a la que transportaría la pulpa sería de 3.0 m/s siendo superior a la velocidad límite calculada.

4. Cálculo de las pérdidas de carga en la conducción a los accesorios y singularidades.

Lo primero es calcular la longitud equivalente de los codos de la conducción consistentes en 5 curvas de radio amplio ( $R=3B$ ), y que entrando en la tabla adjunta (Warman, 2000), para un diámetro interior de 197.3 mm, se obtiene una longitud equivalente de 4.22 m para cada curva.

INTERNAL DIAMETER or N.B. m m									
	Radius More Than 3 x N.B.	Radius is 2 x N.B.	Elbow	Tee	Minimum Radius 10 x N.B.	Diaphragm Valve Full Open	Full Bore Valve Round Way	Plug-Lub Valve Rect. Way	*"Tech-Taylor" Valve Ball Type
EQUIV. LENGTH IN m OF STRAIGHT PIPE GIVING EQUIVALENT RESISTANCE TO FLOW									
25	0.52	0.70	0.82	1.77	0.30	2.56	—	0.37	—
32	0.73	0.91	1.13	2.38	0.40	3.29	—	0.49	—
40	0.85	1.10	1.31	2.74	0.49	3.44	1.19	0.58	—
50	1.07	1.40	1.68	3.35	0.55	3.66	1.43	0.73	—
65	1.28	1.65	1.98	4.27	0.70	4.60	1.52	0.85	—
80	1.55	2.07	2.47	5.18	0.85	4.88	1.92	1.04	0.20
90	1.83	2.44	2.90	5.79	1.01	—	—	1.22	—
100	2.13	2.77	3.35	6.71	1.16	7.62	2.19	1.40	0.23
115	2.41	3.05	3.66	7.32	1.28	—	—	1.58	—
125	2.71	3.66	4.27	8.23	1.43	13.11	3.05	1.77	0.30
150	3.35	4.27	4.88	10.06	1.55	18.29	3.11	2.13	0.37
200	4.27	5.49	6.40	13.11	2.41	19.81	7.92	2.74	0.82
250	5.18	6.71	7.92	17.07	2.99	21.34	10.67	3.47	0.61
300	6.10	7.92	9.75	20.12	3.35	28.96	15.85	4.08	0.76
350	7.01	9.45	10.97	23.16	4.27	28.96	—	4.88	0.91
400	8.23	10.67	12.80	26.52	4.88	—	—	5.49	1.04
450	9.14	12.19	14.02	30.48	5.49	—	—	6.22	1.16
500	10.36	13.11	15.85	33.53	6.10	—	—	7.32	1.25

La longitud equivalente de la tubería considerando las singularidades será:

$$L = 34 \text{ m} + 1 \text{ m} + 5 \times 4.22 \text{ m} = 56.1 \text{ m} \quad (19.10)$$

5. Cálculo de la viscosidad dinámica ( $\mu_p$ )

La viscosidad dinámica o absoluta para la pulpa, según la siguiente expresión, vale:

$$\mu_p = \mu_{agua} \times \left( 1 + 2.5 \times C_v + 10.05 \times C_v^2 + 0.000273 \times e^{16.6 \times C_v} \right) \quad (19.11)$$

$$\mu_p = 0.001 \times \left( 1 + 2.5 \times 0.3246 + 10.05 \times 0.3246^2 + 0.000273 \times e^{16.6 \times 0.3246} \right) = 0.00293 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2 \quad (19.12)$$

6. Obtención del Número de Reynolds ( $Re$ )

El número de Reynolds se obtiene con la siguiente expresión:

$$Re = \frac{\rho_p \times V \times D}{\mu_p} = \frac{1580 \times 3.00 \times 0.1973}{0.00293} \approx 3.2 \times 10^5 \quad (19.13)$$

7. Determinación del valor de rugosidad relativa ( $\epsilon/D$ )

Estimando un valor de rugosidad absoluta de valor  $\epsilon = 3.0 \times 10^{-6} \text{ m}$  para una tubería de acero revestida internamente de caucho, entonces el valor de la rugosidad relativa valdría:

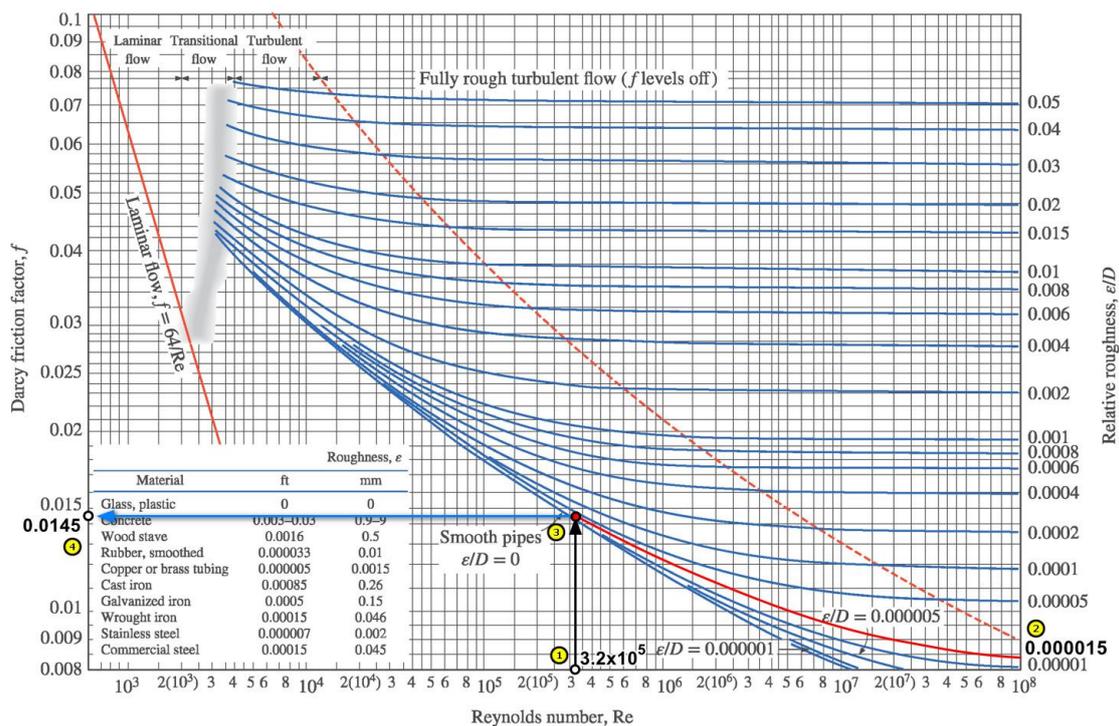
$$\text{Rugosidad relativa} = \frac{0.003 \text{ mm}}{197.3 \text{ mm}} \approx 1.5 \times 10^{-5} \quad (19.14)$$

8. Obtención del factor de fricción de Darcy,  $f$ .

Para ello emplearemos el diagrama de Moody, considerando una tubería de acero con revestimiento interno de caucho con una rugosidad relativa de 0.000015. Entrando ahora con este valor y con el número de Reynolds, anteriormente calculado, se obtiene un factor de fricción,  $f$ , de 0.0145 (ver diagrama adjunto).

Con el factor de fricción de Darcy, podemos calcular las pérdidas de carga debidas a la fricción en la longitud equivalente de tubería (56.1 metros):

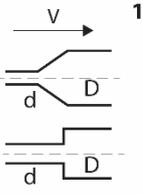
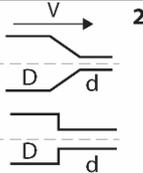
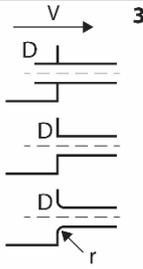
$$H_f = f \times \frac{L}{D} \times \frac{V^2}{2 \times g} = 0.0145 \times \frac{56.1}{0.1973} \times \frac{3.00^2}{2 \times 9.81} = 1.89 \text{ m.c.l.} \quad (19.15)$$



9. Pérdidas de carga a la salida del depósito,  $H_i$  (punto A).

Considerando una conexión normal con arista viva (“flush connection”), según la siguiente tabla (Warman, 2000), se toma un valor de  $K_i = 0.5$ .

Pérdidas de carga expresadas como proporción de la velocidad,  $V$ :  $H_i = K_i \times \frac{V^2}{2 \times g} (m)$

GRUPO	SINGULARIDAD	Coefficiente $K_i$																														
 <p><b>1</b></p>	<p><b>AMPLIACIONES</b></p> <table border="1"> <tr> <td>d/D</td> <td>0.9</td> <td>0.8</td> <td>0.7</td> <td>0.6</td> <td>0.5</td> <td>0.4</td> <td>0.3</td> <td>0.2</td> <td>0.1</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.03</td> <td>0.09</td> <td>0.17</td> <td>0.28</td> <td>0.38</td> <td>0.48</td> <td>0.56</td> <td>0.62</td> <td>0.66</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.04</td> <td>0.13</td> <td>0.26</td> <td>0.41</td> <td>0.56</td> <td>0.71</td> <td>0.83</td> <td>0.92</td> <td>0.98</td> </tr> </table>	d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1		0.03	0.09	0.17	0.28	0.38	0.48	0.56	0.62	0.66		0.04	0.13	0.26	0.41	0.56	0.71	0.83	0.92	0.98	$K_i = 2.6 \times \sin \frac{\theta}{2} \times \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)^2$ $K_i = \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)^2$
d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1																							
	0.03	0.09	0.17	0.28	0.38	0.48	0.56	0.62	0.66																							
	0.04	0.13	0.26	0.41	0.56	0.71	0.83	0.92	0.98																							
 <p><b>2</b></p>	<p><b>REDUCCIONES</b></p> <table border="1"> <tr> <td>d/D</td> <td>0.9</td> <td>0.8</td> <td>0.7</td> <td>0.6</td> <td>0.5</td> <td>0.4</td> <td>0.3</td> <td>0.2</td> <td>0.1</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.04</td> <td>0.07</td> <td>0.11</td> <td>0.13</td> <td>0.16</td> <td>0.17</td> <td>0.19</td> <td>0.20</td> <td>0.20</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.10</td> <td>0.18</td> <td>0.26</td> <td>0.32</td> <td>0.38</td> <td>0.42</td> <td>0.46</td> <td>0.48</td> <td>0.50</td> </tr> </table>	d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1		0.04	0.07	0.11	0.13	0.16	0.17	0.19	0.20	0.20		0.10	0.18	0.26	0.32	0.38	0.42	0.46	0.48	0.50	$K_i = 0.8 - \sin \frac{\theta}{2} \times \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)$ $K_i = 0.5 - \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)$
d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1																							
	0.04	0.07	0.11	0.13	0.16	0.17	0.19	0.20	0.20																							
	0.10	0.18	0.26	0.32	0.38	0.42	0.46	0.48	0.50																							
 <p><b>3</b></p>	<p><b>ENTRADAS DESDE DEPÓSITOS A TUBERÍAS</b></p> <p><b>Conexión con tubo interior</b></p> <p><b>Conexión con arista viva</b></p> <p><b>Conexión redondeada</b></p> <table border="1"> <tr> <td>r/D</td> <td>0.02</td> <td>0.04</td> <td>0.06</td> <td>0.10</td> <td>0.15</td> </tr> <tr> <td><math>K_i</math></td> <td>0.28</td> <td>0.24</td> <td>0.15</td> <td>0.09</td> <td>0.04</td> </tr> </table>	r/D	0.02	0.04	0.06	0.10	0.15	$K_i$	0.28	0.24	0.15	0.09	0.04	$K_i = 0.78$ $K_i = 0.50$ $K_i = 0.05$																		
r/D	0.02	0.04	0.06	0.10	0.15																											
$K_i$	0.28	0.24	0.15	0.09	0.04																											

Por lo que la pérdida de carga debido a la conexión al depósito (punto A) será:

$$H_i = K_i \times \frac{\rho_p \times V^2}{\rho_{agua} \times 2 \times g} = 0.5 \times \frac{1.58 \times 3.00^2}{1.0 \times 2 \times 9.81} = 0.36 \text{ m.c.l.} \quad (19.16)$$

#### 10. Altura de carga debida a la ampliación cónica, $H_{fc}$ .

Para el cálculo de la pérdida de carga debida a la ampliación cónica de la boca de salida de la bomba (150 mm) a un diámetro nominal de 200 mm, para la tubería de impulsión, se emplea la siguiente expresión (Mataix, 1986):

$$H_{fc} = m \times \frac{(V_b - V)^2}{2 \times g} \quad (19.17)$$

Siendo  $V_b$  la velocidad de la pulpa a la salida de la bomba:

$$V_b = \frac{Q}{\left(\frac{\pi \times D_b^2}{4}\right)} = \frac{330.03 \text{ m}^3/\text{h} \times \frac{1\text{h}}{3600\text{s}}}{\left(\frac{\pi \times 0.150^2}{4}\right)} \approx 5.19 \text{ m/s} \quad (19.18)$$

Para el valor de  $m$ , adoptando un ángulo de cono de  $30^\circ$ , según la siguiente tabla (Mataix, 1986), toma el valor de 0.81:

$\alpha$ ( $^\circ$ )	2.5	5	7.5	10	15	20	25	30
$m$	0.18	0.13	0.14	0.16	0.27	0.43	0.62	0.81

Por lo que sustituyendo en la expresión (10) tenemos un valor de  $H_{fc}$  de:

$$H_{fc} = 0.81 \times \frac{(5.19 - 3)^2}{2 \times 9.81} = 0.20 \text{ m.c.l.} \quad (19.19)$$

11. Altura de carga debida a la velocidad del flujo de pulpa,  $H_v$ .

Se obtiene a través de la siguiente expresión:

$$H_v = \frac{V^2}{2 \times g} = \frac{3.00^2}{2 \times 9.81} = 0.46 \text{ m.c.l.} \quad (19.20)$$

12. Altura de carga debida a la presión requerida en el hidrociclón,  $H_p$ .

El hidrociclón requiere una presión de trabajo en la entrada de alimentación de 80 kPa que equivalen a 0.80 bares y en metros de columna de pulpa (m.c.l.) será:

$$H_p = \frac{n^\circ \text{ bares} \times 10.2}{\rho_p} = \frac{0.80 \times 10.2}{1.58} = 5.17 \text{ m.c.l.} \quad (19.21)$$

13. Obtención de la altura manométrica total de la bomba,  $TDH_{pulpa}$ .

Con las alturas anteriormente calculadas, el valor de  $TDH_{pulpa}$  será:

$$TDH_{pulpa} = H_g + H_f + H_i + H_{fc} + H_v + H_p = (14 - 2.5) + 1.89 + 0.36 + 0.20 + 0.46 + 5.17 = 19.58 \text{ m.c.l.} \quad (19.22)$$

Para seleccionar la bomba adecuada, debido a que los fabricantes proporcionan la información en base al empleo de agua como principal fluido, debemos corregir los 19.58 metros de columna de pulpa (m.c.l.) a metros de columna de agua (m.c.a.) (ANEFA, 2020; Volk, 2013; Warman, 2000). Para ello se emplea la gráfica siguiente entrando con los datos proporcionado por el enunciado del problema, como es la densidad de las partículas sólidas ( $2.80 \text{ g/cm}^3$ ), el tamaño medio de partícula ( $K_{50} = 212 \text{ micras}$ ) y la concentración de sólidos en peso ( $C_W = 57.37\%$ ).

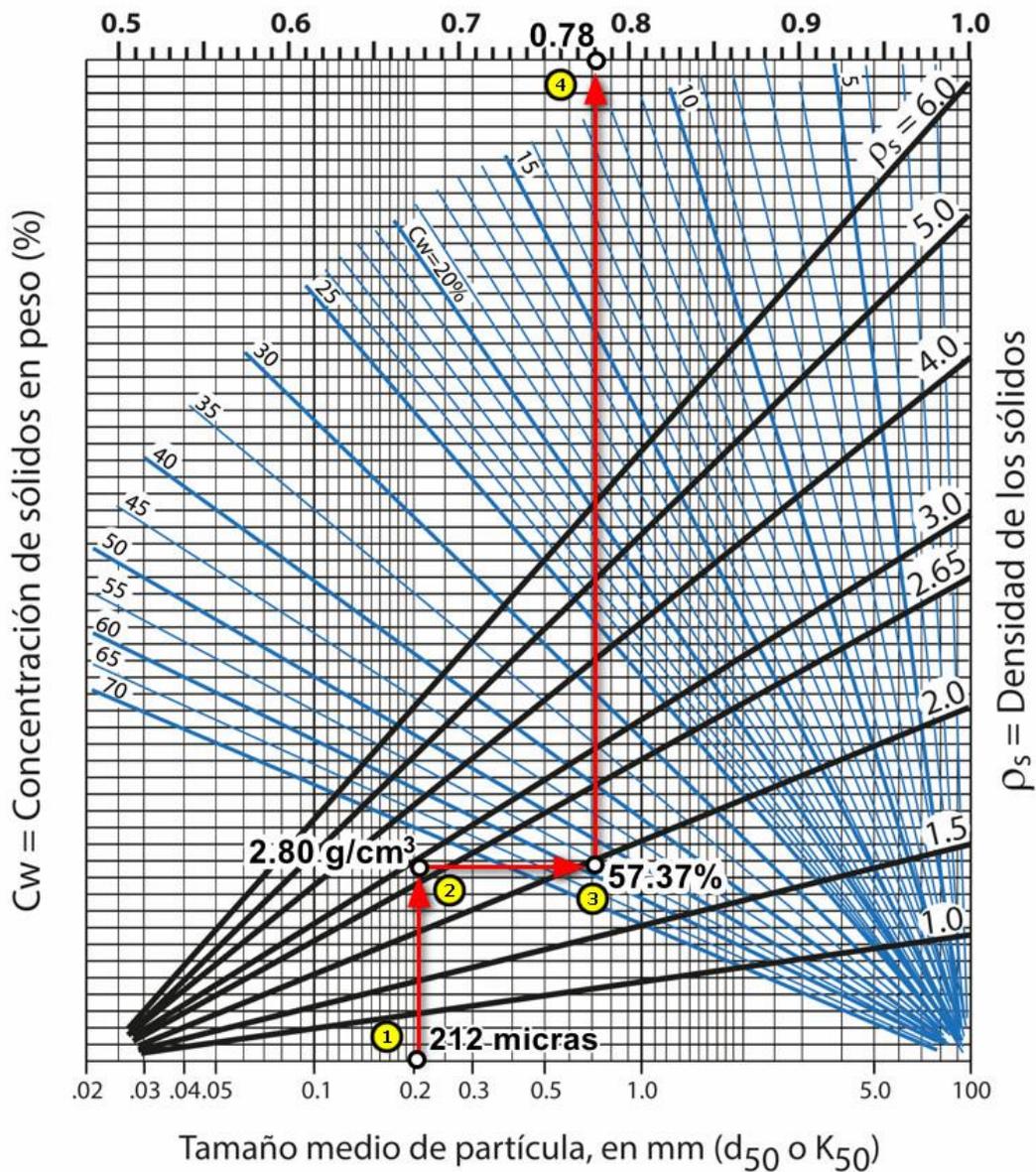
Con estos datos, entrando en dicha gráfica se obtiene un HR (o ER) igual 0.805, lo que se puede expresar como:

$$HR = \frac{TDH_{pulpa}}{TDH_{agua}} \quad (19.23)$$

Para nuestro caso, la altura manométrica total expresada en columna de agua valdrá:

$$TDH_{agua} = \frac{TDH_{pulpa}}{HR} = \frac{19.58 \text{ m.c.l.}}{0.78} = 25.10 \text{ m.c.a.} \quad (19.24)$$

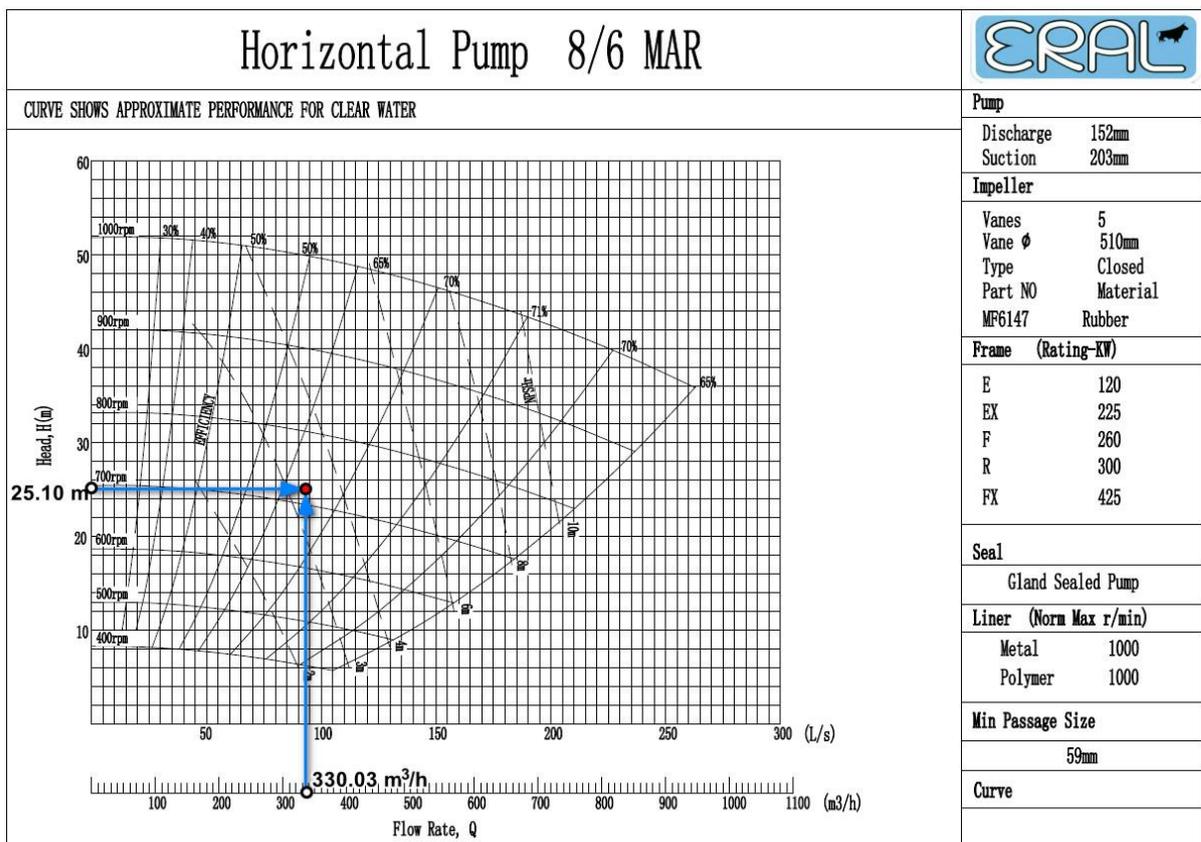
$$HR = \frac{TDH_{pulpa}}{TDH_{agua}} \quad ER = \frac{\text{Eficiencia}_{pulpa}}{\text{Eficiencia}_{agua}}$$



14. Selección de la bomba centrífuga.

Con el valor calculado de  $TDH_{agua}$  de 25.10 m.c.a. y con el caudal proporcionado de  $Q = 330.03 \text{ m}^3/\text{h}$ , se puede entrar en las curvas características Q-H de los fabricantes de bombas y seleccionar la bomba adecuada a nuestra instalación de bombeo de pulpas.

Por ejemplo, para la curva característica Q-H que se facilita (ERAL), la bomba sería una bomba trabajando a un rendimiento del 67%, a 720 rpm y con un NPSHr de 3.4 m.c.a.



15. Cálculo de la potencia de la bomba.

Con el valor calculado de  $TDH_{agua}$  de 25.10 m.c.a., el caudal proporcionado de  $Q = 330.03 \text{ m}^3/\text{h}$ , el rendimiento obtenido del 67%, la densidad de la pulpa de  $1.58 \text{ t}/\text{m}^3$  podemos calcular la potencia en kW que necesitará la bomba a través de la siguiente expresión:

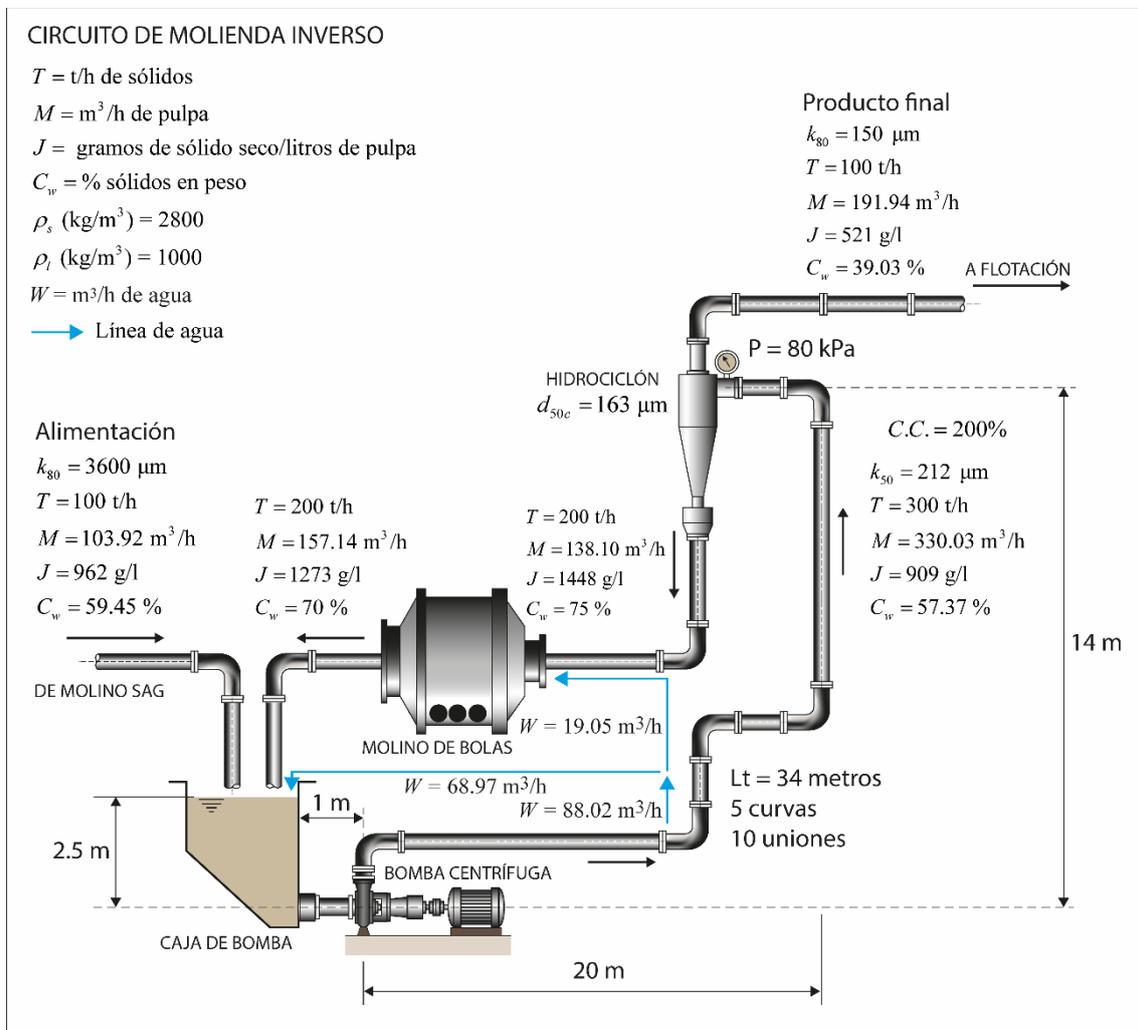
$$N_{kW} = \frac{Q \times TDH_{agua} \times \rho_{pulpa}}{\frac{\eta}{100} \times 360 \times 0.80} = \frac{330.03 \times 25.10 \times 1.58}{0.67 \times 360 \times 0.94} = 57.73 \text{ kW} \quad (19.25)$$

## Referencias:

- ANEFA. (2020). *Manual de Áridos para el Siglo XXI* (ANEFA, Ed.).
- Bouso, J. L. (1993). *Manual de bombeo de pulpas* (Fueyo, Ed.). ERAL, Equipos y Procesos S.A.
- Mataix, C. (1986). *Mecánica de fluidos y máquinas hidráulicas* (S. A. Ediciones del Castillo, Ed. Segunda ed.).
- Volk, M. (2013). *Pump Characteristics and Applications* (C. Press, Ed. 3rd ed.).  
<https://doi.org/https://doi.org/10.1201/b15559>
- Warman, L. (2000). *Warman Slurry Pumping Handbook*. Warman Slurry Pumping Handbook.

EJERCICIO 20 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO

20. Se tiene una planta de procesamiento de mineral de cobre compuesta por un molino SAG y un molino de bolas que mediante bombeo alimentan un hidrociclón, tal y como representa el esquema de flujo adjunto de la planta. El producto del hidrociclón es enviado a la siguiente etapa de concentración mineral por flotación (finos), mientras que las partículas gruesas son renviadas, como hundido, al molino de bolas para su molienda, nuevamente (ver esquema adjunto). El caudal de alimentación de pulpa al hidrociclón es de  $330.03 \text{ m}^3/\text{h}$ , la concentración de sólidos en peso ( $C_w$ ) es del 57.37%. La presión de entrada en el hidrociclón es de 80 kPa. Por otro lado, se sabe que la altura de la tubería de descarga que alimenta al hidrociclón se encuentra a 14 metros, siendo ésta de acero estirado. El diámetro nominal (DN) de la tubería que se establece es de 250 mm con 10 mm de revestimiento interno de goma (2x5 mm). La longitud de la tubería de descarga será de 34 metros y la longitud de la tubería de succión será de 1 metro. Calcular el TDH requerido para la bomba en metros de columna de agua (m.c.a.), y la potencia absorbida teórica (kW). Utilizar la fórmula de Williams y Hazen, considerando  $C = 120$ .



Nota:

- Densidad específica de las partículas sólidas =  $2.80 \text{ t/m}^3$
- Densidad específica del agua =  $1.00 \text{ t/m}^3$

- Rugosidad absoluta de la tubería con revestimiento de caucho ( $\epsilon$ ) =  $3 \times 10^{-6}$
- Considerar una viscosidad del agua igual a  $0.001 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$
- Considerar una eficiencia del motor del 94% (motor de alta eficiencia Clase IE2)
- Considerar las pérdidas de carga debidas a las reducciones y ampliaciones graduales:
  - (a) reducción cónica de la tubería de aspiración con la boca de aspiración de la bomba,
  - (b) ampliación cónica de la boca de salida de la bomba con la tubería de impulsión, y
  - (c) reducción de la tubería de impulsión con la boca de entrada del hidrociclón.

Solución:

1. Cálculo de la concentración de sólidos en volumen,  $C_V$ , y peso específico de la pulpa,  $\rho_p$ .

Para el cálculo de la concentración de sólidos en volumen hacemos uso de la siguiente expresión:

$$C_V = \frac{\frac{C_w}{100} \times \rho_l}{\rho_s - \frac{C_w}{100} \times (\rho_s - \rho_l)} \times 100 \quad (20.1)$$

Por lo que, sustituyendo:

$$C_V = \frac{\frac{57.37}{100} \times 1.0}{2.8 - \frac{57.37}{100} \times (2.8 - 1.0)} \times 100 = 32.46\% \quad (20.2)$$

Para el cálculo de la densidad de la pulpa empleamos la siguiente expresión:

$$\frac{C_V}{100} = \frac{(\rho_p - \rho_l)}{(\rho_s - \rho_l)} \quad (20.3)$$

Por lo que, sustituyendo:

$$\rho_p = \frac{32.46}{100} \times (2.8 - 1.0) + 1.0 = 1.58 \text{ t/m}^3 \quad (20.4)$$

2. Determinación del diámetro interior de la tubería

Para la determinación del diámetro interior efectivo,  $D_i$ , se deben tener en cuenta los diámetros de las tuberías comerciales para un diámetro nominal de 250 mm (ver tabla) y restar el espesor debido al revestimiento interno de goma que será de 10 mm (2 x 5 mm).

TUBERÍAS DE ACERO ESTIRADO				Diámetro interior (mm)	Área interior (cm <sup>2</sup> )
Diámetro exterior (mm)	Espesor pared (mm)	Diámetro Nominal (DN)			
		(mm)	(pulgadas)		
219.1	5.9	200	8	207.3	337.5
244.5	6.3			231.9	422.4
273.0	6.3	250	10	260.4	532.6

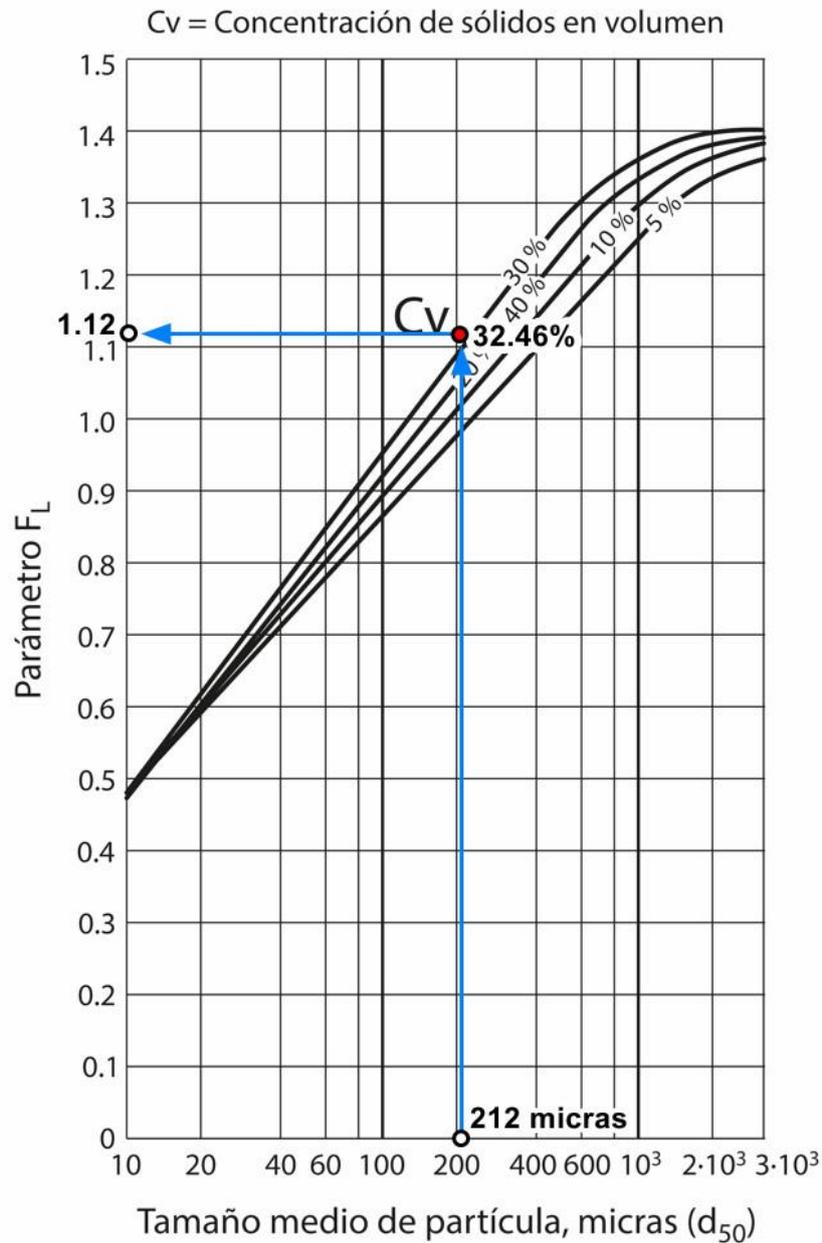
Por lo que para una tubería de acero estirado de diámetro nominal 250 mm, le corresponde un diámetro interior de 260.4 mm, al cual hay que restarle 10 mm debido al revestimiento interno de goma, por lo que el diámetro interior efectivo será de 250.4 mm ( $D_i$ ).

3. Cálculo del diámetro óptimo de la tubería, la velocidad límite y la velocidad real de transporte.

Para estos cálculos vamos a utilizar la expresión de la velocidad límite según Durand (ANEFA, 2020):

$$V_l = F_l \times \sqrt{2 \times g \times D_i \times \frac{\rho_s - \rho_l}{\rho_l}} \quad (20.5)$$

Para la determinación del factor  $F_l$  se entra en el siguiente gráfico (ANEFA, 2020; Bouso, 1993; Warman, 2000), con el valor de  $k_{50}$  de 212  $\mu\text{m}$  y un  $C_v$  de 32.46%, del que se obtiene un valor aproximado de 1.12. Con este valor se puede entrar en la anterior expresión de Durand y calcular la velocidad límite.



La velocidad límite valdrá:

$$V_l = 1.12 \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.2504 \times \frac{2.8 - 1.0}{1.0}} = 3.3 \text{ m/s} \quad (20.6)$$

Ahora se comprueba que la velocidad real de transporte es superior que la velocidad límite:

$$V = \frac{Q}{\left(\frac{\pi \times D_i^2}{4}\right)} = \frac{330.03 \text{ m}^3/\text{h} \times \frac{1\text{h}}{3600\text{s}}}{\left(\frac{\pi \times 0.2504^2}{4}\right)} = 1.86 \text{ m/s} \quad (20.7)$$

Se observa que la velocidad a la que circularía la pulpa con tubería de 250 mm es inferior a la velocidad límite de 3.3 m/s, por lo que se adopta el seleccionar una tubería de diámetro nominal de 200 mm. El diámetro interior efectivo será ahora de 197.3 mm. Para este nuevo diámetro se vuelve a calcular la velocidad límite que valdrá:

$$V_i = 1.12 \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.1973 \times \frac{2.8 - 1.0}{1.0}} = 2.96 \text{ m/s} \quad (20.8)$$

Y la velocidad a la que circularía la pulpa, será:

$$V = \frac{Q}{\left(\frac{\pi \times D_i^2}{4}\right)} = \frac{330.03 \text{ m}^3/\text{h} \times \frac{1\text{h}}{3600\text{s}}}{\left(\frac{\pi \times 0.1973^2}{4}\right)} \approx 3 \text{ m/s} \quad (20.9)$$

Por lo tanto, el nuevo diámetro seleccionado es adecuado ya que la velocidad a la que transportaría la pulpa sería de 3.0 m/s siendo superior a la velocidad límite calculada.

4. Cálculo de las pérdidas de carga en la conducción a los accesorios y singularidades.

Lo primero es calcular la longitud equivalente de los codos de la conducción consistentes en 5 curvas de radio amplio (R=3B), y que entrando en la tabla adjunta (Warman, 2000), para un diámetro interior de 197.3 mm, se obtiene una longitud equivalente de 4.22 m para cada curva.

									
INTERNAL DIAMETER or N.B. m m	Radius More Than 3 x N.B.	Radius is 2 x N.B.			Minimum Radius 10 x N.B.				
	90° Long Radius Bend	90° Short Radius Bend	Elbow	Tee	Rubber Hose	Diaphragm Valve Full Open	Full Bore Valve Round Way	Plug-Lub Valve Rect. Way	* "Tech-Taylor" Valve Ball Type
	EQUIV. LENGTH IN m OF STRAIGHT PIPE GIVING EQUIVALENT RESISTANCE TO FLOW								
25	0.52	0.70	0.82	1.77	0.30	2.56	—	0.37	—
32	0.73	0.91	1.13	2.38	0.40	3.29	—	0.49	—
40	0.85	1.10	1.31	2.74	0.49	3.44	1.19	0.58	—
50	1.07	1.40	1.68	3.35	0.55	3.66	1.43	0.73	—
65	1.28	1.65	1.98	4.27	0.70	4.60	1.52	0.85	—
80	1.55	2.07	2.47	5.18	0.85	4.88	1.92	1.04	0.20
90	1.83	2.44	2.90	5.79	1.01	—	—	1.22	—
100	2.13	2.77	3.35	6.71	1.16	7.62	2.19	1.40	0.23
115	2.41	3.05	3.66	7.32	1.28	—	—	1.58	—
125	2.71	3.66	4.27	8.23	1.43	13.11	3.05	1.77	0.30
150	3.35	4.27	4.88	10.06	1.55	18.29	3.11	2.13	0.37
200	4.27	5.49	6.40	13.11	2.41	19.81	7.92	2.74	0.82
250	5.18	6.71	7.92	17.07	2.99	21.34	10.67	3.47	0.61
300	6.10	7.92	9.75	20.12	3.35	28.96	15.85	4.08	0.76
350	7.01	9.45	10.97	23.16	4.27	28.96	—	4.88	0.91
400	8.23	10.67	12.80	26.52	4.88	—	—	5.49	1.04
450	9.14	12.19	14.02	30.48	5.49	—	—	6.22	1.16
500	10.36	13.11	15.85	33.53	6.10	—	—	7.32	1.25

Di = 197.3 mm  
4.22 m/100m

La longitud equivalente de la tubería considerando las singularidades será:

$$L = 34 \text{ m} + 1 \text{ m} + 5 \times 4.22 \text{ m} = 56.1 \text{ m} \quad (20.10)$$

5. Cálculo de las pérdidas por fricción a través de Williams y Hazen.

El valor de estas pérdidas se obtiene aplicando la siguiente fórmula de Williams y Hazen:

$$H_f = \frac{5.6028}{10^8} \times \left( \frac{100}{C} \right)^{1.85} \times \frac{Q^{1.85}}{D^{4.8655}} \text{ (m/100m)} \quad (20.11)$$

$$H_f = \frac{5.6028}{10^8} \times \left( \frac{100}{120} \right)^{1.85} \times \frac{330.03^{1.85}}{0.1973^{4.8655}} = 4.91 \text{ (m/100m)} \quad (20.12)$$

Con el valor de  $H_f = 4.91 \text{ m/100m}$  de tubería y sabiendo que entre codos y tubería total se dispone de 56.1 metros de tubería equivalente, entonces se tendrá:

$$H_f = \frac{56.1}{100} \times 4.91 = 2.76 \text{ m.c.l.} \quad (20.13)$$

6. Pérdidas de carga a la salida del depósito,  $H_i$  (punto A).

Considerando una conexión normal con arista viva (“*flush connection*”), según la siguiente tabla (Warman, 2000), se toma un valor de  $K_i = 0.5$ .

Pérdidas de carga expresadas como proporción de la velocidad, V:  $H_i = K_i \times \frac{V^2}{2 \times g} (m)$

GRUPO	SINGULARIDAD	Coefficiente $K_i$																														
	<b>AMPLIACIONES</b> <table border="1"> <tr> <td>d/D</td> <td>0.9</td> <td>0.8</td> <td>0.7</td> <td>0.6</td> <td>0.5</td> <td>0.4</td> <td>0.3</td> <td>0.2</td> <td>0.1</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.03</td> <td>0.09</td> <td>0.17</td> <td>0.28</td> <td>0.38</td> <td>0.48</td> <td>0.56</td> <td>0.62</td> <td>0.66</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.04</td> <td>0.13</td> <td>0.26</td> <td>0.41</td> <td>0.56</td> <td>0.71</td> <td>0.83</td> <td>0.92</td> <td>0.98</td> </tr> </table>	d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1		0.03	0.09	0.17	0.28	0.38	0.48	0.56	0.62	0.66		0.04	0.13	0.26	0.41	0.56	0.71	0.83	0.92	0.98	$K_i = 2.6 \times \sin \frac{\theta}{2} \times \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)^2$ $K_i = \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)^2$
d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1																							
	0.03	0.09	0.17	0.28	0.38	0.48	0.56	0.62	0.66																							
	0.04	0.13	0.26	0.41	0.56	0.71	0.83	0.92	0.98																							
	<b>REDUCCIONES</b> <table border="1"> <tr> <td>d/D</td> <td>0.9</td> <td>0.8</td> <td>0.7</td> <td>0.6</td> <td>0.5</td> <td>0.4</td> <td>0.3</td> <td>0.2</td> <td>0.1</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.04</td> <td>0.07</td> <td>0.11</td> <td>0.13</td> <td>0.16</td> <td>0.17</td> <td>0.19</td> <td>0.20</td> <td>0.20</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0.10</td> <td>0.18</td> <td>0.26</td> <td>0.32</td> <td>0.38</td> <td>0.42</td> <td>0.46</td> <td>0.48</td> <td>0.50</td> </tr> </table>	d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1		0.04	0.07	0.11	0.13	0.16	0.17	0.19	0.20	0.20		0.10	0.18	0.26	0.32	0.38	0.42	0.46	0.48	0.50	$K_i = 0.8 - \sin \frac{\theta}{2} \times \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)$ $K_i = 0.5 - \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)$
d/D	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1																							
	0.04	0.07	0.11	0.13	0.16	0.17	0.19	0.20	0.20																							
	0.10	0.18	0.26	0.32	0.38	0.42	0.46	0.48	0.50																							
	<b>ENTRADAS DESDE DEPÓSITOS A TUBERÍAS</b> <b>Conexión con tubo interior</b> <b>Conexión con arista viva</b> <b>Conexión redondeada</b> <table border="1"> <tr> <td>r/D</td> <td>0.02</td> <td>0.04</td> <td>0.06</td> <td>0.10</td> <td>0.15</td> </tr> <tr> <td><math>K_i</math></td> <td>0.28</td> <td>0.24</td> <td>0.15</td> <td>0.09</td> <td>0.04</td> </tr> </table>	r/D	0.02	0.04	0.06	0.10	0.15	$K_i$	0.28	0.24	0.15	0.09	0.04	$K_i = 0.78$ $K_i = 0.50$ $K_i = 0.05$																		
r/D	0.02	0.04	0.06	0.10	0.15																											
$K_i$	0.28	0.24	0.15	0.09	0.04																											

Por lo que la pérdida de carga debido a la conexión al depósito (punto A) será:

$$H_i = K_i \times \frac{\rho_p \times V^2}{\rho_{agua} \times 2 \times g} = 0.5 \times \frac{1.58 \times 3.0^2}{1.0 \times 2 \times 9.81} = 0.36 \text{ m.c.l.} \quad (20.14)$$

7. Altura de carga debida a la ampliación cónica,  $H_{fc}$ .

Para el cálculo de la pérdida de carga debida a la ampliación cónica de la boca de salida de la bomba (150 mm) al diámetro de la tubería de impulsión de 200 mm se emplea la siguiente expresión (Mataix, 1986):

$$H_{fc} = m \times \frac{(V_b - V)^2}{2 \times g} \quad (20.15)$$

Siendo  $V_b$  la velocidad de la pulpa a la salida de la bomba:

$$V_b = \frac{Q}{\left(\frac{\pi \times D_b^2}{4}\right)} = \frac{330.03 \text{ m}^3/\text{h} \times \frac{1\text{h}}{3600\text{s}}}{\left(\frac{\pi \times 0.150^2}{4}\right)} \approx 5.19 \text{ m/s} \quad (20.16)$$

Para el valor de  $m$ , adoptando un ángulo de cono de  $30^\circ$ , según la siguiente tabla (Mataix, 1986), toma el valor de 0.81:

$\alpha$ ( $^\circ$ )	2.5	5	7.5	10	15	20	25	30
$m$	0.18	0.13	0.14	0.16	0.27	0.43	0.62	0.81

Por lo que sustituyendo en la expresión (10) tenemos un valor de  $H_{fc}$  de:

$$H_{fc} = 0.81 \times \frac{(5.19 - 3)^2}{2 \times 9.81} = 0.20 \text{ m.c.l.} \quad (20.17)$$

8. Altura de carga debida a la velocidad del flujo de pulpa,  $H_v$ .

Se obtiene a través de la siguiente expresión:

$$H_v = \frac{V^2}{2 \times g} = \frac{3.00^2}{2 \times 9.81} = 0.46 \text{ m.c.l.} \quad (20.18)$$

9. Altura de carga debida a la presión requerida en el hidrociclón,  $H_p$ .

El hidrociclón requiere una presión de trabajo en la entrada de alimentación de 80 kPa que equivalen a 0.80 bares y en metros de columna de pulpa (m.c.l.) será:

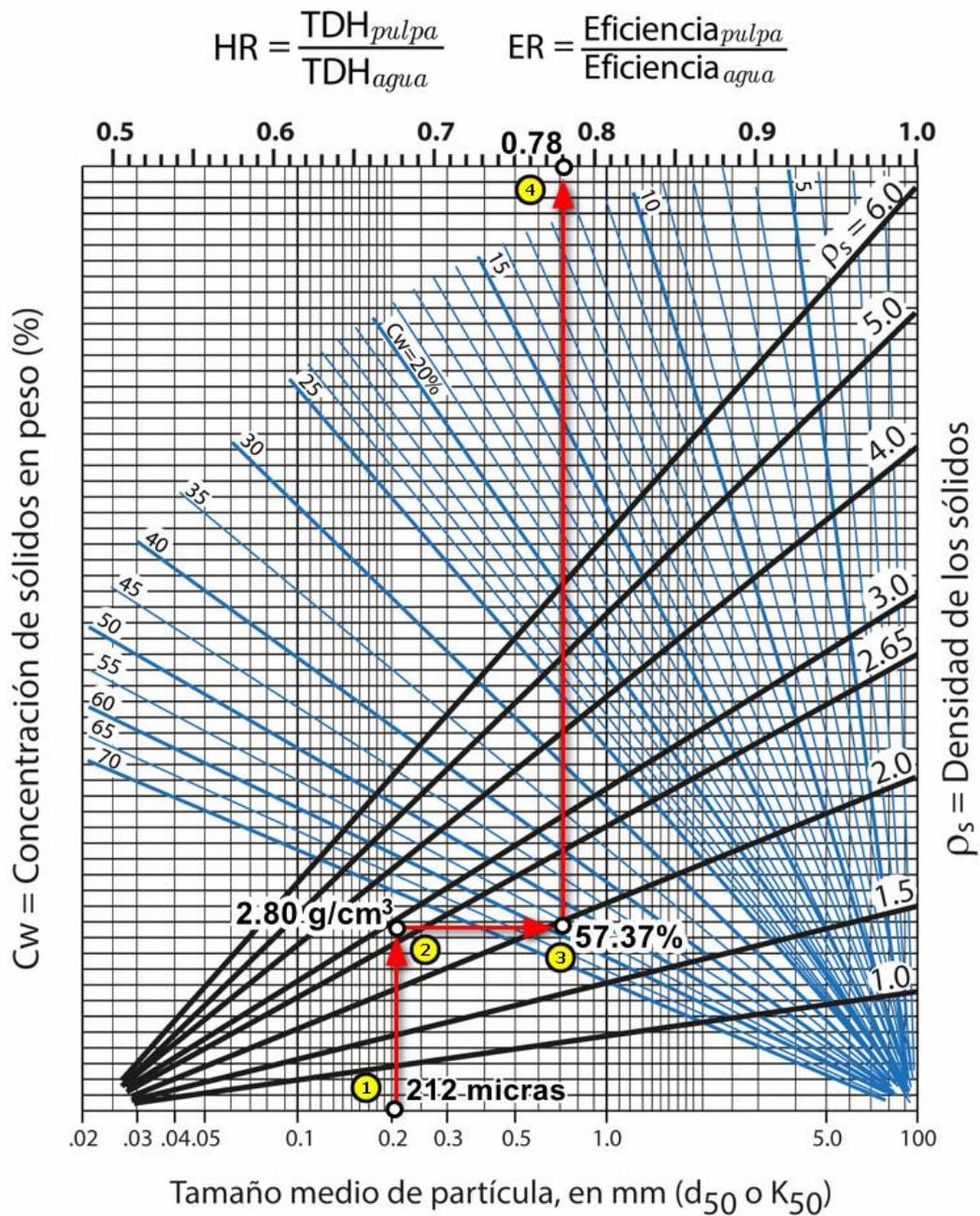
$$H_p = \frac{n^\circ \text{ bares} \times 10.2}{\rho_p} = \frac{0.80 \times 10.2}{1.58} = 5.17 \text{ m.c.l.} \quad (20.19)$$

10. Obtención de la altura manométrica total de la bomba,  $TDH_{pulpa}$ .

Con las alturas anteriormente calculadas, el valor de  $TDH_{pulpa}$  será:

$$TDH_{pulpa} = H_g + H_f + H_i + H_{fc} + H_v + H_p = (14 - 2.5) + 2.76 + 0.36 + 0.20 + 0.46 + 5.17 = 20.45 \text{ m.c.l.} \quad (20.20)$$

Para seleccionar la bomba adecuada, debido a que los fabricantes proporcionan la información en base al empleo de agua como principal fluido, debemos corregir los 20.45 metros de columna de pulpa (m.c.l.) a metros de columna de agua (m.c.a.) (ANEFA, 2020; Volk, 2013; Warman, 2000). Para ello se emplea la gráfica siguiente entrando con los datos proporcionado por el enunciado del problema, como es la densidad de las partículas sólidas ( $2.80 \text{ g/cm}^3$ ), el tamaño medio de partícula ( $K_{50} = 212 \text{ micras}$ ) y la concentración de sólidos en peso ( $C_W = 57.37\%$ ).



Con estos datos, entrando en dicha gráfica se obtiene un HR (o ER) igual 0.805, lo que se puede expresar como:

$$HR = \frac{TDH_{pulpa}}{TDH_{agua}} \quad (20.21)$$

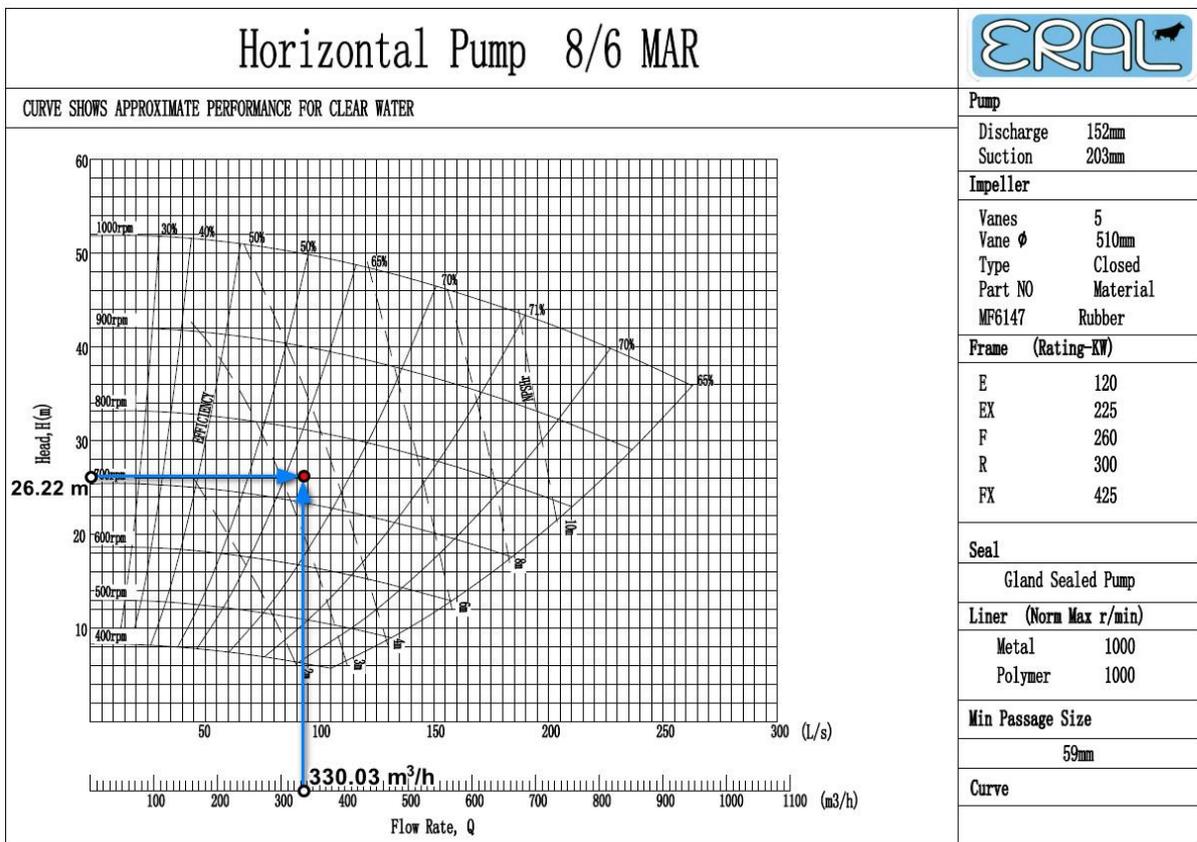
Para nuestro caso, la altura manométrica total expresada en columna de agua valdrá:

$$TDH_{agua} = \frac{TDH_{pulpa}}{HR} = \frac{20.45 \text{ m.c.l.}}{0.78} = 26.22 \text{ m.c.a.} \quad (20.22)$$

11. Selección de la bomba centrífuga.

Con el valor calculado de  $TDH_{agua}$  de 26.22 m.c.a. y con el caudal proporcionado de  $Q = 330.03 \text{ m}^3/\text{h}$ , se puede entrar en las curvas características Q-H de los fabricantes de bombas, en nuestro caso ERAL, y seleccionar la bomba adecuada a nuestra instalación de bombeo de pulpas.

Por ejemplo, para la curva característica Q-H que se facilita (ERAL), la bomba sería una bomba trabajando a un rendimiento del 67%, a 740 rpm y con un NPSHr de 3.5 m.c.a.



12. Cálculo de la potencia de la bomba.

Con el valor calculado de  $TDH_{agua}$  de 26.22 m.c.a., el caudal proporcionado de  $Q = 330.03 \text{ m}^3/\text{h}$ , el rendimiento obtenido del 67%, la densidad de la pulpa de  $1.58 \text{ t}/\text{m}^3$  podemos calcular la potencia en kW que necesitará la bomba a través de la siguiente expresión:

$$N_{kW} = \frac{Q \times TDH_{agua} \times \rho_{pulpa}}{\frac{\eta}{100} \times 360 \times 0.80} = \frac{330.03 \times 26.22 \times 1.58}{0.67 \times 360 \times 0.94} \approx 60.3 \text{ kW} \quad (20.23)$$

#### Referencias:

- ANEFA. (2020). *Manual de Áridos para el Siglo XXI* (ANEFA, Ed.).
- Bouso, J. L. (1993). *Manual de bombeo de pulpas* (Fueyo, Ed.). ERAL, Equipos y Procesos S.A.
- Mataix, C. (1986). *Mecánica de fluidos y máquinas hidráulicas* (S. A. Ediciones del Castillo, Ed. Segunda ed.).
- Volk, M. (2013). *Pump Characteristics and Applications* (C. Press, Ed. 3rd ed.).  
<https://doi.org/https://doi.org/10.1201/b15559>
- Warman, L. (2000). *Warman Slurry Pumping Handbook*. Warman Slurry Pumping Handbook.

EJERCICIO 21 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO

21. Una bomba está recomendada para elevar un caudal de 6 m<sup>3</sup>/h a 9 m, con una velocidad de 1500 r.p.m. Estimar el punto de funcionamiento recomendado si se hace girar la bomba a 3000 r.p.m. Para ambos casos, calcular la velocidad específica  $N_s$ .

Solución:

La definición de velocidad específica  $N_s$ , que es adimensional, es la siguiente:

$$N_s = N \times \frac{\sqrt{Q}}{H^{3/4}} \quad (21.1)$$

Donde  $N$  representa la velocidad de la bomba en r.p.m.,  $Q$  es el caudal en m<sup>3</sup>/s y  $H$  es la altura en m. Aunque  $N_s$  se podría calcular para cualquier condición de carga y capacidad, su definición se hace para el punto de mayor rendimiento de la bomba.

Atendiendo a los datos del problema,

$$N_s = 1500 \times \frac{\sqrt{\frac{6}{3600}}}{9^{3/4}} = 11.79 \quad (21.2)$$

Para el segundo caso, utilizaremos las leyes de semejanza de las bombas:

$$\begin{aligned} \frac{Q}{Q'} &= \frac{N}{N'} \rightarrow Q' = Q \times \frac{N'}{N} = 6 \times \frac{3000}{1500} = 12 \text{ m}^3/\text{h} \\ \frac{H}{H'} &= \left(\frac{N}{N'}\right)^2 \rightarrow H' = H \times \left(\frac{N'}{N}\right)^2 = 9 \times \left(\frac{3000}{1500}\right)^2 = 36 \text{ m} \end{aligned} \quad (21.3)$$

Calculemos ahora la velocidad específica,

$$N_s = 3000 \times \frac{\sqrt{\frac{12}{3600}}}{36^{3/4}} = 11.79 \quad (21.4)$$

Como vemos, la velocidad específica es la misma.

EJERCICIO 22 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO

22. Una bomba centrífuga presenta una velocidad específica  $N_s = 40$ . Eleva agua desde un depósito a otro con un caudal  $Q = 150$  litros/s bajo una altura manométrica  $H_m = 30,2$  m, consumiendo el motor eléctrico de accionamiento una potencia de 65 kW. El rendimiento del motor eléctrico es  $\eta_e = 0,9$ . Los rendimientos volumétrico y orgánico de la bomba son  $\eta_v = 0,94$  y  $\eta_o = 0,96$ , respectivamente. La velocidad de giro es de 1450 r.p.m. Calcular el rendimiento hidráulico o manométrico. Deducir si la bomba funciona con rendimiento máximo con las condiciones del enunciado.

Solución:

Se puede calcular el rendimiento total de la bomba,  $\eta_t$ , de la siguiente forma:

$$\eta_t = \frac{\rho \times Q \times g \times H_m}{\eta_e \times W_e} = \frac{1000 \text{ kg/m}^3 \times 0.15 \text{ m}^3/\text{s} \times 9.81 \text{ m/s}^2 \times 30.2 \text{ m}}{0.9 \times 65000 \text{ W}} = 0.760$$

(22.1)

El rendimiento hidráulico o manométrico se puede determinar de la siguiente forma:

$$\eta_h = \frac{\eta_t}{\eta_v \times \eta_o} = \frac{0.760}{0.94 \times 0.96} = 0.842$$

(22.2)

Una bomba estará funcionando en condiciones de rendimiento máximo cuando el valor de la velocidad específica sea el valor dado por el enunciado. Por tanto, vamos a calcular  $N_s$ :

$$N_s = N \times \frac{\sqrt{Q}}{H^{3/4}} = 1450 \times \frac{\sqrt{0.15}}{30.2^{3/4}} = 43.59$$

(22.3)

Este valor es diferente al de 40, por lo que la bomba no está funcionando en condiciones de rendimiento máximo.

EJERCICIO 23 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO

23. Una bomba se usa para elevar agua desde la toma de agua de un río a un depósito; a una altura de 22 m. La tubería de conexión tiene 2,5 km de longitud, 300 mm de diámetro y se asume que el factor de fricción de Darcy  $\lambda = 0.033$  (aunque  $\lambda$  no es constante, pues depende del número de Reynolds, y por tanto no es independiente del caudal, a efectos prácticos se suele ignorar su variación en el proyecto de bombas). La pérdida de carga en la tubería debida a la fricción se calcula mediante la ecuación empírica de Darcy-Weisbach:

$$h_f = \lambda \times \frac{L}{D} \times \frac{v^2}{2 \times g}$$

La curva altura manométrica-caudal, así como la curva rendimiento-caudal de la bomba es la siguiente:

<b>Caudal <math>Q</math>: m<sup>3</sup>/s</b>	<b>0</b>	<b>0.05</b>	<b>0.10</b>	<b>0.15</b>	<b>0.20</b>	<b>0.25</b>
<b>Altura manométrica de la bomba <math>H</math>: m</b>	<b>55.0</b>	<b>53.0</b>	<b>49.0</b>	<b>44.0</b>	<b>36.0</b>	<b>27.0</b>
<b>Eficiencia <math>\eta</math>: %</b>	<b>0</b>	<b>47</b>	<b>73</b>	<b>77</b>	<b>62</b>	<b>29</b>

- Determinar el punto de funcionamiento de la bomba y la potencia necesaria.
- Suponiendo que tenemos una bomba semejante cuya velocidad es un 20% superior a la anterior, determinar el nuevo punto de funcionamiento y la potencia de dicha bomba.
- Calcular la velocidad específica de ambas bombas.

Solución:

- Solucionaremos primero el punto de funcionamiento con la primera bomba.

El área de la sección de la tubería es:  $A = \pi * 0.15^2 = 0.07069 \text{ m}^2$ .

La velocidad es  $v = Q/A$

La altura que ha de ser suministrada para que se distribuya un caudal  $Q$  prefijado se puede calcular sustituyendo los valores de la velocidad por los del caudal dividido por el área en:

$$H = 22 + \frac{v^2}{2 \times g} + \lambda \times \frac{L}{D} \times \frac{v^2}{2 \times g} \quad (23.1)$$

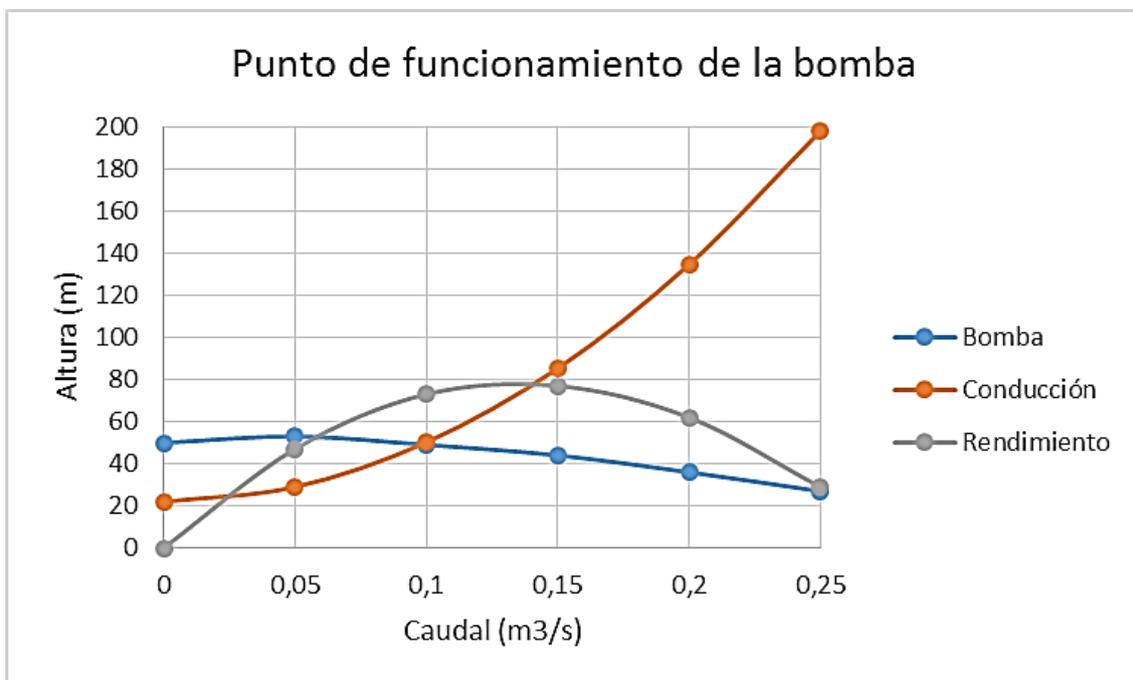
Sustituyendo los valores del caudal, obtenemos la curva característica de la conducción:

Caudal $Q$ : m <sup>3</sup> /s	0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
Altura manométrica de la conducción $H$ : m	22.0	29.0	50.2	85.3	134.6	198.0

Se ha representado en la gráfica el punto de funcionamiento de la bomba, que corresponde a una altura aproximada de 50 m y a un caudal de 0.10 m<sup>3</sup>/s. En dicho punto, la eficiencia de la bomba es del 73%.

De esta forma se puede calcular la potencia necesaria:

$$P = \frac{H \times Q \times \gamma}{\eta} = \frac{50 \times 0.10 \times 9.81}{0.73} = 67 \text{ kW} \quad (23.2)$$



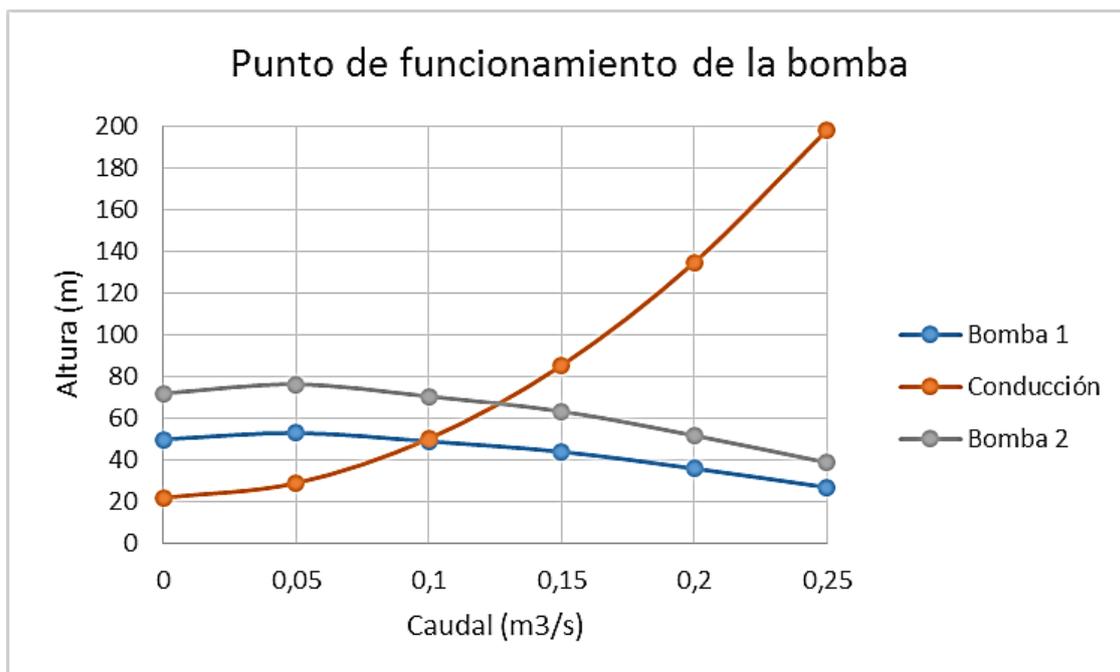
d) Para la nueva bomba, utilizaremos las leyes de semejanza de las bombas:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

$$\frac{H_1}{H_2} = \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^2 \quad (23.3)$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^3$$

Como  $v_1 = 1.20 * v_2$ , entonces podemos dibujar la nueva curva para la bomba 2, puesto que las nuevas alturas serán  $H_1 = 1.44 * H_2$ .



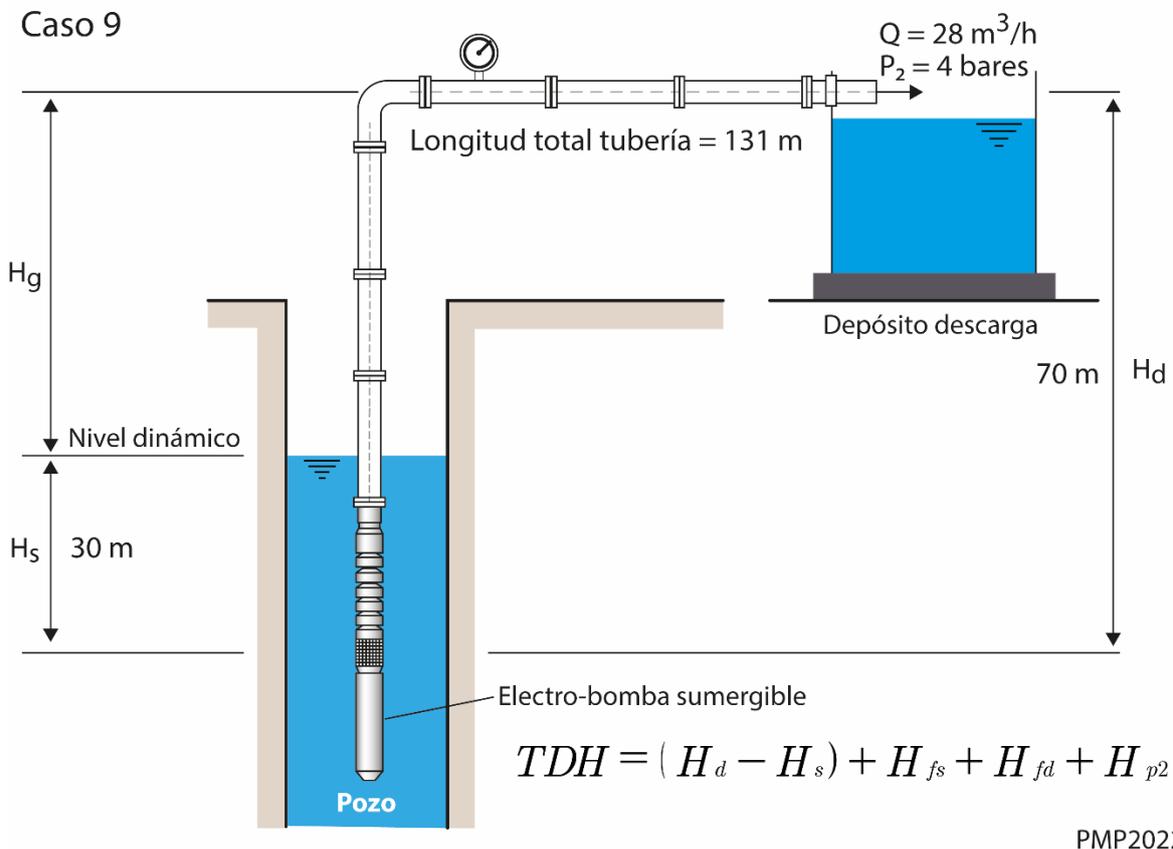
El nuevo punto de funcionamiento tiene un caudal de  $0.125 \text{ m}^3/\text{s}$  y  $68 \text{ m}$  de altura.

La potencia de la nueva bomba será  $P_2 = 1.728 * P_1 = 116 \text{ kW}$ .

Se puede despejar de este modo el rendimiento de la fórmula que relaciona la potencia con el caudal, de forma que la eficiencia de esta nueva bomba es del 72%.

EJERCICIO 24 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO

24. Se dispone de un pozo para captación de agua subterránea en el cual se quiere instalar una bomba sumergible para proporcionar un caudal de  $28 \text{ m}^3/\text{h}$  a una presión de 4 bares. Las dimensiones de la instalación de bombeo son las que se indican en la figura adjunta. La tubería de descarga se suministrará en acero Schedule 40 de 3 pulgadas de diámetro nominal. La longitud de la tubería de descarga a instalar será de 131 metros. Para determinar la bomba más adecuada se pide calcular la altura manométrica o carga dinámica total (DTH) y la potencia teórica, en kW y CV, necesaria para la bomba. Considera un rendimiento para la bomba del 90%. (Nota: para bombas sumergibles para extracción de agua subterránea se desprecia las pérdidas por fricción del tramo de tubería de succión, así como la altura manométrica debida a la velocidad de descarga del agua en el depósito).



Solución:

1. Caudal a bombear.

El problema nos dice que el caudal a bombear será de  $28 \text{ m}^3/\text{h}$  es decir:

$$Q = 28 \text{ m}^3/\text{h} = 0.00777 \text{ m}^3/\text{s} = 7.77 \text{ l/s} \quad (24.1)$$

2. Cálculo de la Altura Geométrica o Carga Estática (Static Head), H<sub>g</sub>.

Observando al esquema de la instalación se deduce que la altura de carga geométrica es igual a la altura de la tubería de descarga menos a la altura debida a la tubería de succión, es decir  $H_g = H_d - H_s = 70 \text{ m} - 30 \text{ m} = 40 \text{ m}$  (m.c.a.).

3. Cálculo de las pérdidas por fricción en la tubería de succión y en sus accesorios (H<sub>fs</sub>)

En instalaciones de bombas sumergibles para extracción de agua subterránea este valor se puede considerar despreciable o poco relevante.

4. Cálculo de las pérdidas por fricción en la tubería de descarga y en sus accesorios (H<sub>fd</sub>)

- Aquí sólo vamos a considerar las pérdidas de carga debidas a la fricción del fluido con las paredes de la tubería de descarga. Entrando en la página web: [https://www.engineeringtoolbox.com/pressure-loss-steel-pipes-d\\_307.html](https://www.engineeringtoolbox.com/pressure-loss-steel-pipes-d_307.html), se puede obtener, para una tubería de acero Schedule 40 de diámetro nominal 3 pulgadas y un caudal de 7.77 l/s, que la caída de presión por cada 100 metros de tubería será de aproximadamente 4 m.c.a. Por ello:

$$H_{fd} = \frac{131 \text{ m}}{100 \text{ m}} \times 4 \text{ m.c.a.} = 5.24 \text{ m.c.a.} \quad (24.2)$$

5. Cálculo de la altura debida a la presión necesaria en la tubería de descarga (H<sub>p2</sub>)

- La presión que se exige a la descarga de la tubería sobre el depósito será de 4 bares, que transformada en metros de columna de agua valdrá:

$$H_{p2} = \frac{\text{bares} \times 10.33}{\rho_{\text{agua}}} = \frac{4 \times 10.33}{1.0} = 41.32 \text{ m.c.a.} \quad (24.3)$$

6. Cálculo de la altura dinámica total (DTH)

El valor de DTH será la suma de todas las alturas calculadas anteriormente, es decir:

$$DTH = (H_d - H_s) + H_{fd} + H_{p2} = 40 + 5.24 + 41.32 = 86.56 \text{ m.c.a.} \quad (24.4)$$

7. Cálculo de la potencia de la bomba.

Con el valor calculado de  $TDH_{agua}$  de 86.56 m.c.a., el caudal calculado de  $Q = 28 \text{ m}^3/\text{h}$ , un rendimiento estimado del 90%, y la densidad del agua de  $1 \text{ t}/\text{m}^3$  podemos calcular la potencia en kW y CV que necesitará la bomba a través de la siguiente expresión:

$$N_{kW} = \frac{Q \times TDH_{agua} \times \rho_{agua}}{\frac{\eta}{100} \times 360} = \frac{28 \times 86.56 \times 1.00}{0.90 \times 360} = 7.48 \text{ kW} \quad (24.5)$$

$$N_{CV} = \frac{Q \text{ l/s} \times TDH_{agua} \times \rho_{agua}}{\frac{\eta}{100} \times 75} = \frac{7.77 \times 86.56 \times 1.00}{0.90 \times 75} = 9.96 \text{ CV} \quad (24.6)$$

Se recomienda incrementar estas cantidades en un 25% debido a pérdidas en la transmisión y pérdidas en el rendimiento por causas de desgastes en las partes hidráulicas a medio plazo. Por lo que la potencia a instalar serían 9.35 kW (12.45 CV).

Referencias:

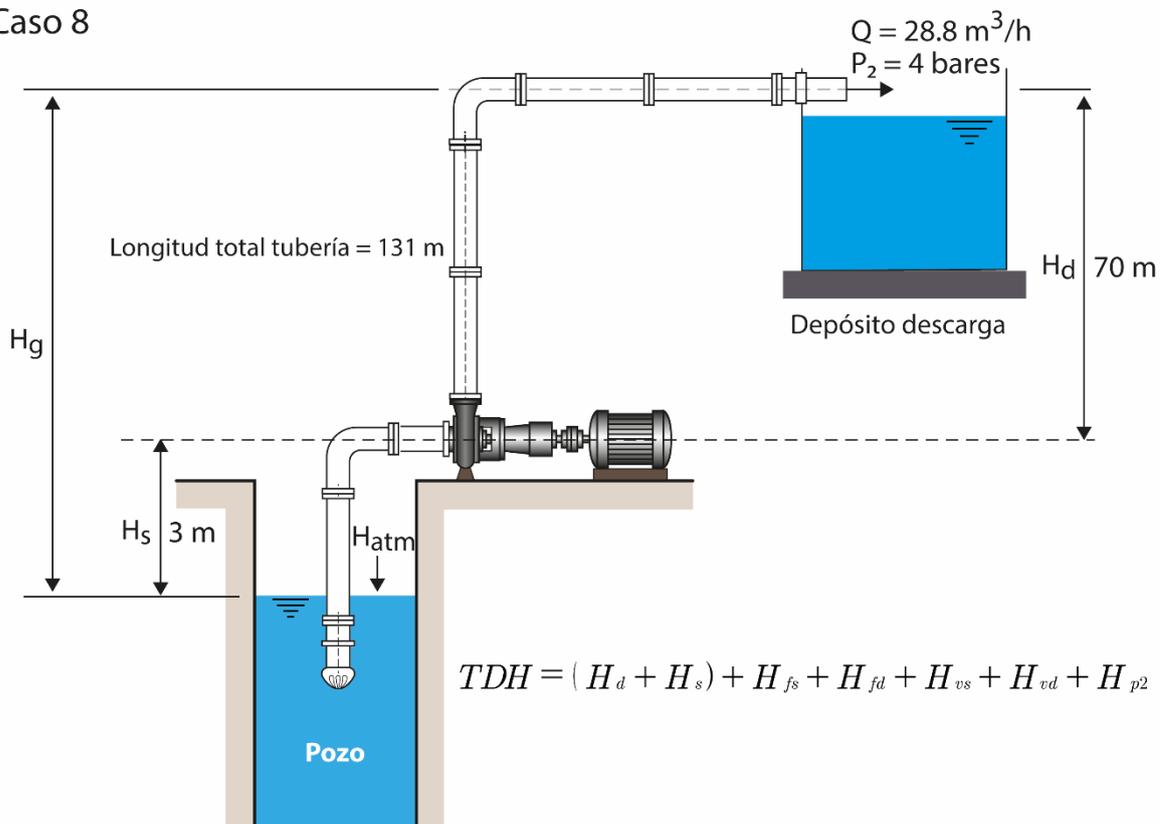
Sterrett, R.J. (2007). Groundwater and wells. Third edition, Johnson Screens, New Brighton, MN, pp. 812.

The Engineering ToolBox web page (<https://www.engineeringtoolbox.com/>). (ultimo acceso en diciembre de 2022).

EJERCICIO 25 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO

25. Se dispone de un pozo para captación de agua subterránea en el cual se quiere instalar una bomba para proporcionar un caudal de  $28.8 \text{ m}^3/\text{h}$  a una presión de 4 bares. Las dimensiones de la instalación de bombeo son las que se indican en la figura adjunta. La tubería de succión se suministrará en acero Schedule 40 de 78 mm de diámetro interior (3 pulgadas de diámetro nominal) y la tubería de descarga en acero Schedule 40 de 63 mm diámetro interior (2.5 pulgadas de diámetro nominal). La longitud de la tubería de descarga a instalar será de 131 metros. Para determinar la bomba más adecuada se pide calcular la altura manométrica o carga dinámica total (DTH) y la potencia teórica, en kW y CV, necesaria para la bomba. Considera un rendimiento para la bomba del 90%.

Caso 8



PMP2022

Nota:

- Fluido = Agua a  $15.6^\circ\text{C}$  ( $SG = 1.0$ )
- Tipo de tubería = acero Schedule 40 (todos los accesorios y válvulas estarán unidos por bridas).
- Para los codos de la tubería de descarga considerar un coeficiente de fricción ( $K$ ) igual a 0.35.
- Para los codos de la tubería de succión considerar un coeficiente de fricción ( $K$ ) igual a 0.30.
- Para la válvula de pie (alcachofa) considerar un coeficiente de fricción ( $K$ ) igual a 0.8.

- Para las pérdidas por fricción de la tubería emplear los datos que se facilitan en las tablas de: [https://www.engineeringtoolbox.com/pressure-loss-steel-pipes-d\\_307.html](https://www.engineeringtoolbox.com/pressure-loss-steel-pipes-d_307.html).

Solución:

1. Caudal a bombear.

El problema nos dice que el caudal a bombear es de 35 m<sup>3</sup>/h es decir:

$$Q = 28.8 \text{ m}^3/\text{h} = 0.0080 \text{ m}^3/\text{s} = 8.0 \text{ l/s} \quad (25.1)$$

2. Cálculo del apropiado rango de diseño de velocidades tanto para la tubería de succión como para la de descarga y sus diámetros.

Para obtener el rango adecuado de velocidades se parte del criterio que el rango de velocidades recomendado para la tubería de succión se encuentra entre 1 y 2 m/s, y para la tubería de descarga entre 2 y 3 m/s (Bombas Ideal, 1985; Lisbeth O. Lozano, 2018).

Como sabemos el caudal (Q) es de 28.8 m<sup>3</sup>/h. Por otro lado, se dispone de la siguiente expresión:

$$Q = V \times \pi \times \frac{D^2}{4} \quad (25.2)$$

Y que despejando la velocidad queda de la siguiente forma:

$$V = \frac{4 \times Q}{\pi \times D^2} \quad (25.3)$$

Entonces, por lo tanto:

- Tubería de succión:

Adoptando como diámetro (D<sub>1</sub>) 0.078 m, entonces:

$$V_1 = \frac{0.0080 \text{ m}^3/\text{s} \times 4}{\pi \times (0.078 \text{ m})^2} = 1.67 \text{ m/s} \quad (25.4)$$

- Tubería de descarga:

Adoptando como diámetro ( $D_2$ ) 0.063 m, entonces:

$$V_2 = \frac{0.0080 \text{ m}^3/\text{s} \times 4}{\pi \times (0.063 \text{ m})^2} = 2.6 \text{ m/s} \quad (25.5)$$

- Tubería de succión de diámetro interior 78 mm (3 pulgadas de diámetro nominal):

$$V_1 = 1.67 \text{ m/s}$$

$$V_1^2/2g = 0.14 \text{ m.c.a.}$$

- Tubería de descarga de diámetro interior 63 mm (2.5 pulgadas de diámetro nominal):

$$V_2 = 2.6 \text{ m/s}$$

$$V_2^2/2g = 0.35 \text{ m.c.a.}$$

### 3. Cálculo de la Altura Geométrica (Static Head), Hg.

Observando al esquema de la instalación se deduce que  $H_g = 70 \text{ m} + 3 \text{ m} = 73 \text{ m}$  (m.c.a.).

### 4. Cálculo de las pérdidas por fricción en la tubería de succión y en sus accesorios ( $H_{fs}$ )

- Pérdidas de carga debidas a la longitud de la tubería de succión:

Entrando en la página web: [https://www.engineeringtoolbox.com/pressure-loss-steel-pipes-d\\_307.html](https://www.engineeringtoolbox.com/pressure-loss-steel-pipes-d_307.html) (ver tabla adjunta) se tiene una caída de presión por cada 100 metros de tramo de tubería de acero Schedule 40 de 3 pulgadas de diámetro nominal de 4.02 m.c.a.

Sabiendo que hay instalados 3 m de tubería, entonces:

$$H_{f \text{ tubería}} = \frac{3 \text{ m}}{100 \text{ m}} \times 4.02 \text{ m.c.a./100m} = 0.12 \text{ m.c.a.} \quad (25.6)$$

- Pérdidas de carga debidas al codo en la tubería de succión:

$$H_{f \text{ codo}} = K_{\text{codo}} \times \frac{V_1^2}{2 \times g} = 0.30 \times 0.14 = 0.042 \text{ m.c.a} \quad (25.7)$$

- Pérdidas de carga debidas a la válvula de pie de la tubería de succión:

$$H_{f_{pie}} = K_{pie} \times \frac{V_1^2}{2 \times g} = 0.80 \times 0.14 = 0.11 \text{ m.c.a.} \quad (25.8)$$

Luego, el valor total de las pérdidas por fricción para la tubería de succión será:

$$H_{fs} = 0.12 \text{ m.c.a.} + 0.042 \text{ m.c.a.} + 0.11 \text{ m.c.a.} = 0.272 \text{ m.c.a.} \quad (25.9)$$

**Nominal Pipe Size: 3"**

• Inside Diameter: 0.078 m (3.1 inches) → Diámetro interior de 78 mm

	Flow			Velocity		Pressure Drop		
	(m <sup>3</sup> /s)	(liter/s)	(US gpm)	(m/s)	(ft/s)	(Pa/100m)	(mmH <sub>2</sub> O/100m)	(psi/100ft)
0.0012	1.2	19.0	0.25	0.82	1170	119	0.052	0.119
0.0013	1.3	21	0.27	0.89	1326	135	0.059	0.135
0.0014	1.4	22	0.29	0.96	1538	157	0.068	0.157
0.0015	1.5	24	0.31	1.03	1766	180	0.078	0.18
0.0016	1.6	25	0.33	1.1	1937	198	0.086	0.198
0.0017	1.7	27	0.36	1.17	2187	223	0.097	0.22
0.0018	1.8	29	0.38	1.24	2452	250	0.108	0.25
0.0019	1.9	30	0.4	1.3	2631	268	0.116	0.27
0.0020	2.0	32	0.42	1.37	2915	297	0.129	0.3
0.0030	3.0	48	0.63	2.1	6054	617	0.27	0.62
0.0040	4.0	63	0.84	2.7	10314	1052	0.46	1.05
0.0050	5.0	79	1.05	3.4	16116	1643	0.71	1.64
0.0060	6.0	95	1.26	4.1	22197	2263	0.98	2.3
0.0070	7.0	111	1.46	4.8	30213	3081	1.34	3.1
0.0080	8.0	127	1.67	5.5	39462	4024	1.74	4.0
0.0090	9.0	143	1.88	6.2	47674	4861	2.1	4.9
0.01	10.0	159	2.1	6.9	58857	6002	2.6	6.0
0.011	11.0	174	2.3	7.6	71217	7262	3.1	7.3
0.012	12.0	190	2.5	8.2	84754	8642	3.7	8.7
0.013	13.0	206	2.7	8.9	99468	10143	4.4	10.2
0.014	14.0	222	2.9	9.6	115360	11763	5.1	11.8
0.015	15.0	238	3.1	10.3	126122	12861	5.6	12.9
0.016	16.0	254	3.3	11.0	143499	14633	6.3	14.6
0.017	17.0	269	3.6	11.7	161997	16519	7.2	16.5
0.018	18.0	285	3.8	12.4	181616	18519	8.0	18.5

5. Cálculo de las pérdidas por fricción en la tubería de descarga y en sus accesorios. ( $H_{fd}$ )

- Pérdidas de carga debidas a la longitud de la tubería de descarga:

Entrando en la página web: [https://www.engineeringtoolbox.com/pressure-loss-steel-pipes-d\\_307.html](https://www.engineeringtoolbox.com/pressure-loss-steel-pipes-d_307.html) (ver tabla adjunta) se tiene una caída de presión por cada 100 metros de tramo de tubería de acero Schedule 40 de 2.5 pulgadas de diámetro nominal de 11.7 m.c.a.

Sabiendo que hay instalados 131 m de tubería, entonces:

$$H_{f_{tubería}} = \frac{131 \text{ m}}{100 \text{ m}} \times 11.7 \text{ m.c.a./100m} = 15.33 \text{ m.c.a.} \quad (25.10)$$

- Pérdidas de carga debidas al codo de la tubería de descarga:

$$H_{f_{codo}} = K_{codo} \times \frac{V_2^2}{2 \times g} = 0.35 \times 0.35 = 0.12 \text{ m.c.a.} \quad (25.11)$$

Luego, el valor total de las pérdidas por fricción para la tubería de descarga será:

$$H_{fd} = 15.33 \text{ m.c.a.} + 0.12 \text{ m.c.a.} = 15.45 \text{ m.c.a.} \quad (25.12)$$

Nominal Pipe Size: 2 1/2"

- Inside Diameter: 0.063 m (2.5 inches)

(m <sup>3</sup> /s)	Flow		Velocity		Pressure Drop			
	(liter/s)	(US gpm)	(m/s)	(ft/s)	(Pa/100m)	(mmH <sub>2</sub> O/100m)	(psi/100ft)	(ftH <sub>2</sub> O/100ft)
7.0E-4	0.7	11.1	0.22	0.74	1239	126	0.055	0.126
8.0E-4	0.8	12.7	0.26	0.84	1565	160	0.069	0.16
9.0E-4	0.9	14.3	0.29	0.95	1915	195	0.085	0.195
0.0010	1.0	15.9	0.32	1.05	2365	241	0.105	0.24
0.0011	1.1	17.4	0.35	1.16	2762	282	0.122	0.28
0.0012	1.2	19.0	0.38	1.26	3288	335	0.145	0.34
0.0013	1.3	21	0.42	1.37	3720	379	0.164	0.38
0.0014	1.4	22	0.45	1.47	4315	440	0.191	0.44
0.0015	1.5	24	0.48	1.58	4953	505	0.22	0.51
0.0016	1.6	25	0.51	1.68	5427	553	0.24	0.55
0.0017	1.7	27	0.55	1.79	6127	625	0.27	0.63
0.0018	1.8	29	0.58	1.89	6869	700	0.3	0.7
0.0019	1.9	30	0.61	2.0	7653	780	0.34	0.78
0.0020	2.0	32	0.64	2.1	8480	865	0.37	0.87
0.0030	3.0	48	0.96	3.2	17612	1796	0.78	1.8
0.0040	4.0	63	1.28	4.2	30005	3060	1.33	3.1
0.0050	5.0	79	1.6	5.3	46883	4781	2.1	4.8
0.0060	6.0	95	1.92	6.3	64576	6585	2.9	6.6
0.0070	7.0	111	2.2	7.4	87896	8963	3.9	9.0
0.0080	8.0	127	2.6	8.4	114802	11706	5.1	11.7
0.0090	9.0	143	2.9	9.5	138692	14142	6.1	14.2
0.01	10.0	159	3.2	10.5	171225	17460	7.6	17.5

### 6. Cálculo de las alturas debidas a las velocidades en las tuberías (H<sub>v</sub>)

- Tubería de succión:

La velocidad del flujo a través de ella es de 1.67 m/s, luego:

$$H_{vs} = \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = 0.14 \text{ m.c.a.} \quad (25.13)$$

- Tubería de descarga:

La velocidad del flujo a través de ella es de 2.6 m/s, luego:

$$H_{vd} = \frac{V_2^2}{2 \cdot g} = 0.35 \text{ m.c.a.} \quad (25.14)$$

Luego la altura total debida a las velocidades del flujo en las tuberías será:

$$H_v = H_{vs} + H_{vd} = 0.14 + 0.35 = 0.49 \text{ m.c.a.} \quad (25.15)$$

### 7. Cálculo de la altura debida a la presión de descarga (H<sub>p2</sub>)

- La presión de descarga del agua al depósito debe cumplir con una presión de 4 bares, luego su transformación a m.c.a. se realiza con la siguiente expresión:

$$H_{p2} = \frac{4 \text{ bares} \times 10.33}{1 \text{ t/m}^3} = 41.32 \text{ m.c.a.} \quad (25.16)$$

### 8. Cálculo de la altura dinámica total (DTH)

El valor de DTH será la suma de todas las alturas calculadas anteriormente, es decir:

$$DTH = H_g + H_{fs} + H_{fd} + H_v + H_{p2} = 73 + 0.272 + 15.45 + 0.49 + 41.32 = 130.53 \text{ m.c.a.} \quad (25.17)$$

### 9. Cálculo de la potencia de la bomba.

Con el valor calculado de TDH<sub>agua</sub> de 130.53 m.c.a., el caudal exigido de Q = 28.8 m<sup>3</sup>/h, un rendimiento estimado del 90%, y la densidad del agua de 1 t/m<sup>3</sup> podemos calcular la potencia en kW y CV que necesitará la bomba a través de la siguiente expresión:

$$N_{kw} = \frac{Q \times TDH_{agua} \times \rho_{agua}}{\frac{\eta}{100} \times 360} = \frac{28.8 \times 130.53 \times 1.00}{0.90 \times 360} = 11.60 \text{ kW} \quad (25.18)$$

$$N_{cv} = \frac{Q \text{ l/s} \times TDH_{agua} \times \rho_{agua}}{\frac{\eta}{100} \times 75} = \frac{8.0 \times 130.53 \times 1.00}{0.90 \times 75} = 15.47 \text{ CV} \quad (25.19)$$

Se recomienda incrementar estas cantidades en un 25% debido a pérdidas en la transmisión y pérdidas en el rendimiento por causas de desgastes en las partes hidráulicas a medio plazo. Por lo que la potencia a instalar serían 14.50 kW (19.34 CV).

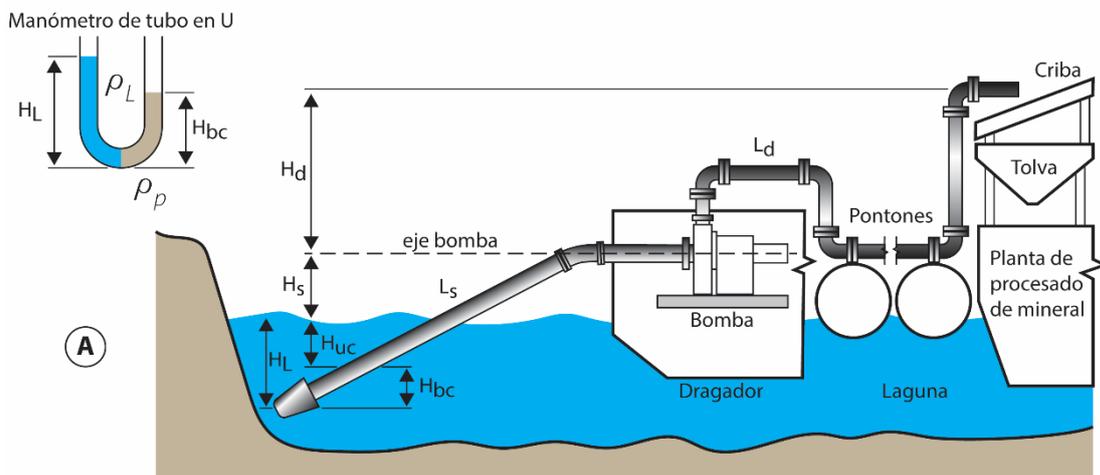
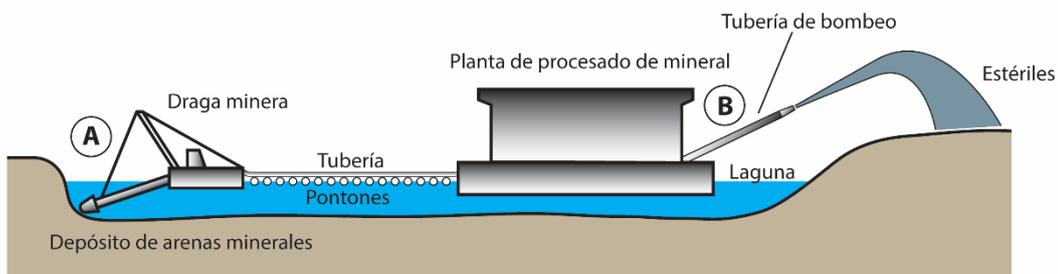
Referencias:

Sterrett, R.J. (2007). Groundwater and wells. Third edition, Johnson Screens, New Brighton, MN, pp. 812.

The Engineering ToolBox web page (<https://www.engineeringtoolbox.com/>). (ultimo acceso en diciembre de 2022).

EJERCICIO 26 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO

26. Se tiene una explotación de arenas minerales a través de un sistema formado por una draga y una planta de procesamiento de mineral, tal y como representa el esquema de flujo adjunto de la planta. El caudal de alimentación que proporciona la draga es 150 t/h de sólidos (arena), la concentración de sólidos en peso ( $C_w$ ) es del 30%, la concentración de sólidos en volumen ( $C_v$ ) es del 14%, la densidad de las partículas sólidas es de  $2.65 \text{ t/m}^3$ , la densidad de la pulpa es de  $1.23 \text{ t/m}^3$ , y la granulometría de sólidos viene caracterizada por un  $d_{50} = 200$  micras. Por otro lado, se sabe que la altura de la tubería de descarga que alimenta a la planta de procesamiento presenta una altura de 5 metros ( $H_d$ ), el diámetro nominal interno ( $D_i$ ) de la tubería se establece de 250 mm. La longitud de la tubería de descarga será de 150 metros (se incluye la longitud equivalente correspondiente a los diferentes accesorios y singularidades) y la longitud de la tubería de succión será de 0.5 metros ( $H_s$ ), también de un diámetro interno de 250 mm. Calcular el TDH requerido para la bomba draga en metros de columna de agua (m.c.a.), la potencia absorbida teórica (kW) y el NPSHa. Utilizar la fórmula de Williams y Hazen, considerando  $C = 120$  (se considera una tubería de acero con revestimiento de goma).



PMP2023

Nota:

- Densidad específica del agua =  $1.00 \text{ t/m}^3$
- Presión atmosférica ( $H_{atm}$ ) =  $10.3 \text{ m.c.a.}$  (Instalación a nivel del mar).
- Presión de vapor ( $H_{vap}$ ) =  $0.3 \text{ m}$  (Temperatura de  $25^\circ\text{C}$ ).
- Considerar una eficiencia del motor del 90%
- Considerar una bomba draga 8/6 G con un rendimiento del 60%.

- La draga forma un ángulo de 20.5° con la horizontal, ofreciendo un H<sub>L</sub> de 3 metros, un H<sub>s</sub> de 0.5 metros, y siendo la longitud de la tubería de succión de 10 metros.

Solución:

1. Cálculo del caudal de pulpa o lodo que envía la draga a la planta de procesamiento.

Según el enunciado, a la planta de procesamiento se debe enviar 150 t/h de arena, y también se sabe la concentración de sólidos en peso (C<sub>w</sub>) es del 30%, por lo que con estos datos se puede determinar el caudal de pulpa según la expresión siguiente:

$$\left| \begin{array}{l} 150 \text{ t/h sólidos} \rightarrow 30\% \\ Q_{pulpa} \text{ t/h} \rightarrow 100\% \end{array} \right| Q_{pulpa} = \frac{150 \times 100}{30} = 500 \text{ t/h pulpa} \quad (26.1)$$

Ahora podemos expresar el caudal de pulpa en diferentes unidades, aprovechando el valor conocido de la densidad de la pulpa que es de 1.23 t/m<sup>3</sup>:

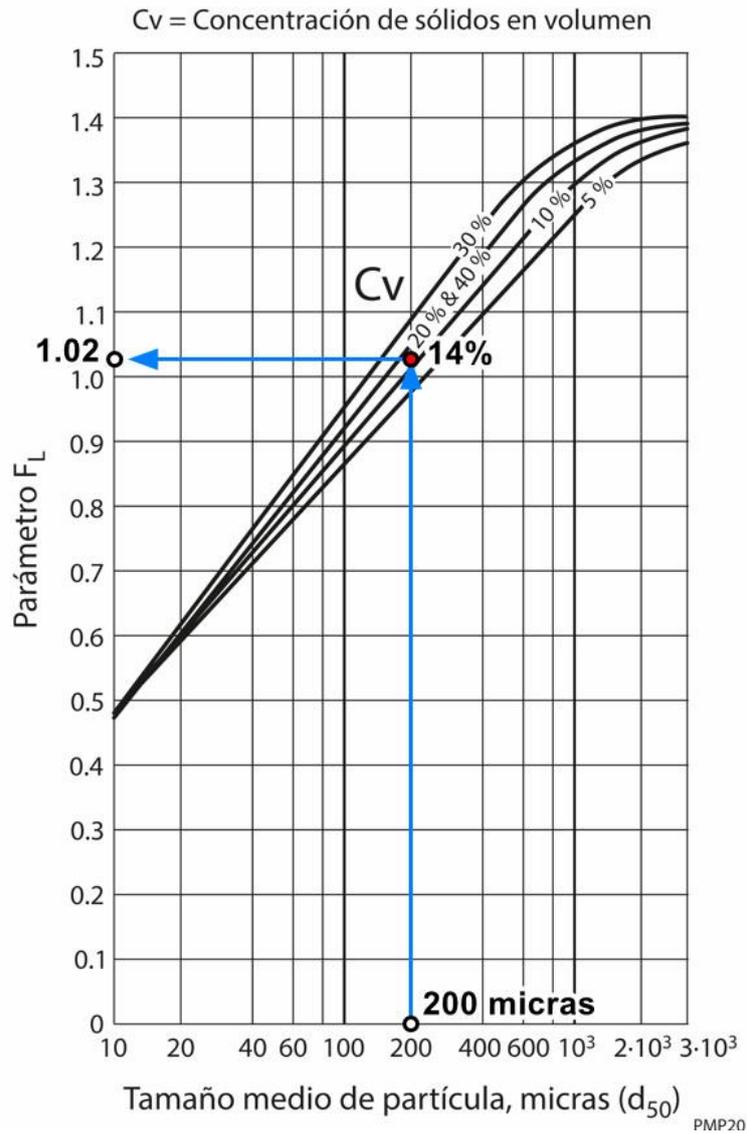
$$Q_{pulpa} = 500 \text{ t/h} \times \frac{1 \text{ m}^3}{1.23 \text{ t}} = 406.5 \text{ m}^3/\text{h} = 406.5 \text{ m}^3/\text{h} \times \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \times \frac{1000 \text{ l}}{1 \text{ m}^3} = 112.92 \text{ l/s} \quad (26.2)$$

2. Chequeo del diámetro de la tubería, cálculo de la velocidad límite y evaluación de la velocidad real de transporte.

Para estos cálculos vamos a utilizar la expresión de la velocidad límite según Durand (ANEFA, 2020):

$$V_l = F_l \times \sqrt{2 \times g \times D \times \frac{\rho_s - \rho_l}{\rho_l}} \quad (26.3)$$

Para la determinación del factor F<sub>l</sub> se entra en el siguiente gráfico (ANEFA, 2020; Bouso, 1993; Warman, 2000), con el valor de d<sub>50</sub> de 200 μm y un C<sub>v</sub> de 14%, del que se obtiene un valor aproximado de 1.02. Con este valor se puede entrar en la anterior expresión de Durand y calcular la velocidad límite.



La velocidad límite valdrá:

$$V_l = 1.02 \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.250 \times \frac{2.65 - 1.0}{1.0}} = 2.90 \text{ m/s} \quad (26.4)$$

Ahora se comprueba que la velocidad real de transporte es superior que la velocidad límite:

$$V = \frac{Q_{pulpa}}{\left(\frac{\pi \times D_i^2}{4}\right)} = \frac{406.5 \text{ m}^3/\text{h} \times \frac{1\text{h}}{3600\text{s}}}{\left(\frac{\pi \times 0.250^2}{4}\right)} = 2.30 \text{ m/s} \quad (26.5)$$

Se observa que la velocidad a la que circularía la pulpa con tubería de 250 mm es inferior a la velocidad límite de 2.90 m/s, por lo que se adopta el seleccionar

una tubería de diámetro interior de 200 mm. Para este nuevo diámetro se vuelve a calcular la velocidad a la circularía la pulpa, siendo:

$$V = \frac{Q_{pulpa}}{\left(\frac{\pi \times D^2}{4}\right)} = \frac{406.5 \text{ m}^3/\text{h} \times \frac{1\text{h}}{3600\text{s}}}{\left(\frac{\pi \times 0.200^2}{4}\right)} = 3.59 \text{ m/s} \quad (26.6)$$

Por lo tanto, el nuevo diámetro seleccionado es adecuado ya que la velocidad a la que llevará la pulpa de 3.59 m/s es superior a la velocidad límite calculada, evitando el depósito de arenas en codos y en singularidades de la tubería de alimentación o descarga.

### 3. Cálculo de la longitud total de la tubería, L.

Según el enunciado la longitud de la tubería de succión es de 10 metros y la longitud de la tubería de descarga es de 150 metros, en la cual ya se consideran las longitudes equivalentes de singularidades y accesorios (en caso contrario habría que calcularlas).

Por ello, la longitud total de la tubería, L, será:

$$L = 10 \text{ m} + 150 \text{ m} = 160 \text{ m} \quad (26.7)$$

### 4. Cálculo de las pérdidas por fricción a través de Williams y Hazen.

El valor de estas pérdidas se obtiene aplicando la siguiente fórmula de Williams y Hazen:

$$H_f = \frac{5.6028}{10^8} \times \left(\frac{100}{C}\right)^{1.85} \times \frac{Q^{1.85}}{D^{4.8655}} \text{ (m/100m)} \quad (26.8)$$

$$H_f = \frac{5.6028}{10^8} \times \left(\frac{100}{120}\right)^{1.85} \times \frac{406.5^{1.85}}{0.200^{4.8655}} = 6.75 \text{ (m/100m)} \quad (26.9)$$

Con el valor de  $H_f = 6.75 \text{ m/100m}$  de tubería y sabiendo que entre codos, accesorios, singularidades y tubería total se dispone de 160 metros de tubería equivalente, entonces se tendrá:

$$H_{ft} = \frac{160}{100} \times 6.75 = 10.80 \text{ m.c.l.} \quad (26.10)$$

5. Pérdidas de carga a la entrada de la draga,  $H_i$

Se va a considerar un valor de  $K_i = 1.0$ . Por lo que la pérdida de carga valdrá:

$$H_i = K_i \times \frac{\rho_p \times V^2}{\rho_{agua} \times 2 \times g} = 1.0 \times \frac{1.23 \times 3.59^2}{1.0 \times 2 \times 9.81} = 0.81 \text{ m.c.l.} \quad (26.11)$$

6. Altura de carga debida a la velocidad del flujo de pulpa,  $H_v$ .

Se obtiene a través de la siguiente expresión:

$$H_v = \frac{V^2}{2 \times g} = \frac{3.59^2}{2 \times 9.81} = 0.66 \text{ m.c.l.} \quad (26.12)$$

7. Altura de carga debida a la altura de succión,  $H_s + H_{uc}$ .

Para el caso de operaciones de dragado debe corregirse la altura de aspiración,  $H_s$ , que según el enunciado nos indica que es de 0.5 metros, en base a las densidades de la pulpa aspirada y del líquido, y de la altura de tubería de aspiración sumergida, para ello se empleará la siguiente expresión (Bouso, 1993, Weir, 2002), sabiendo que la toma de la draga se encuentra una profundidad de 3 metros ( $H_L$ ):

$$H_{bc} = H_L \times \frac{\rho_l}{\rho_s} = 3.0 \text{ m} \times \frac{1.0}{2.65} = 1.13 \text{ m.c.l.} \quad (26.13)$$

Por lo que la altura de pulpa que realmente deberá elevar la bomba será:

$$H_s + (H_L - H_{bc}) = 0.5 \text{ m} + (3 \text{ m} - 1.13 \text{ m}) = 2.37 \text{ m} \quad (26.14)$$

8. Obtención de la altura manométrica total de la bomba,  $TDH_{pulpa}$ .

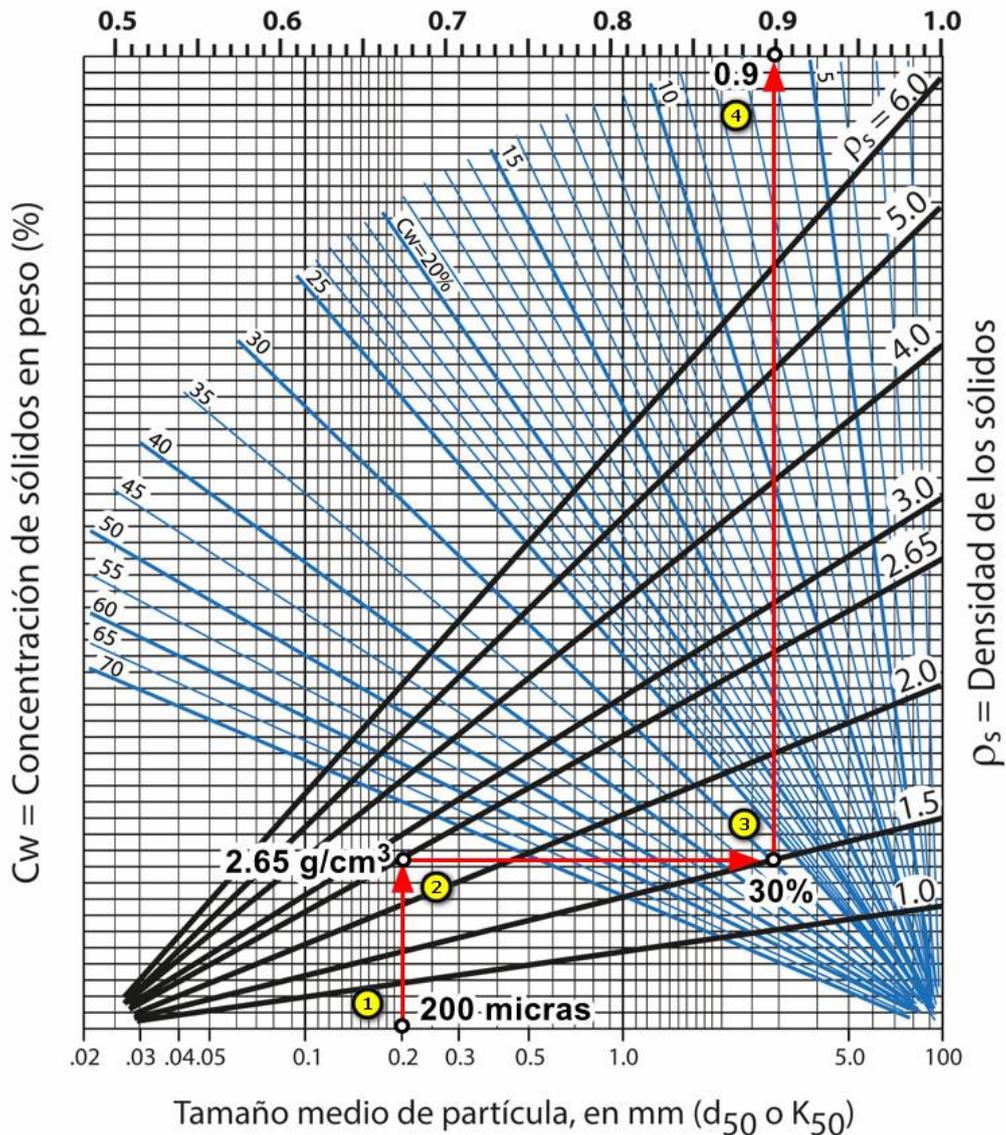
Con las alturas anteriormente calculadas, el valor de  $TDH_{pulpa}$  será:

$$TDH_{pulpa} = H_g + H_{ft} + H_i + H_v = (5 + 2.37) + 10.80 + 0.81 + 0.66 = 19.64 \text{ m.c.l.} \quad (26.15)$$

Para seleccionar la bomba adecuada, debido a que los fabricantes proporcionan la información en base al empleo de agua como principal fluido, debemos corregir los 19.64 metros de columna de pulpa (m.c.l.) a metros de columna de

agua (m.c.a.)(ANEFA, 2020; Volk, 2013; Warman, 2000). Para ello se emplea la gráfica siguiente entrando con los datos proporcionado por el enunciado del problema, como es la densidad de las partículas sólidas ( $2.65 \text{ g/cm}^3$ ), el tamaño medio de partícula ( $d_{50} = 200$  micras) y la concentración de sólidos en peso ( $C_w = 30\%$ ).

$$HR = \frac{TDH_{pulpa}}{TDH_{agua}} \quad ER = \frac{\text{Eficiencia}_{pulpa}}{\text{Eficiencia}_{agua}}$$



PMP2022

Con estos datos, entrando en dicha gráfica se obtiene un HR (o ER) igual 0.90, lo que se puede expresar como:

$$HR = \frac{TDH_{pulpa}}{TDH_{agua}} \quad (26.16)$$

Para nuestro caso, la altura manométrica total expresada en columna de agua valdrá:

$$TDH_{agua} = \frac{TDH_{pulpa}}{HR} = \frac{19.64 \text{ m.c.l.}}{0.90} = 21.82 \text{ m.c.a.} \quad (26.17)$$

#### 9. Cálculo de la potencia de la bomba.

Con el valor calculado de  $TDH_{agua}$  de 21.82 m.c.a., el caudal proporcionado de  $Q = 406.5 \text{ m}^3/\text{h}$ , un rendimiento estimado del 60%, la densidad de la pulpa de  $1.23 \text{ t/m}^3$  podemos calcular la potencia en kW que necesitará la bomba a través de la siguiente expresión:

$$N_{kW} = \frac{Q \times TDH_{agua} \times \rho_{pulpa}}{\frac{\eta}{100} \times 360 \times 0.90} = \frac{406.5 \times 21.82 \times 1.23}{0.60 \times 360 \times 0.90} = 56.12 \text{ kW} \quad (26.18)$$

#### 10. Cálculo del NPSHd.

Para estimar el NPSHd se emplea la siguiente expresión (Bouso, 1993, Weir, 2002):

$$NPSH_d = H_{atm} - H_{vap} \mp \frac{H_s}{HR} - \frac{H_i}{HR} - \frac{H_{fs}}{HR} = 10.3 - 0.3 - \frac{2.37}{0.9} - \frac{0.81}{0.9} - \frac{\frac{10}{100} \times 6.75}{0.9} = 5.75 \text{ m.c.a.} \quad (26.19)$$

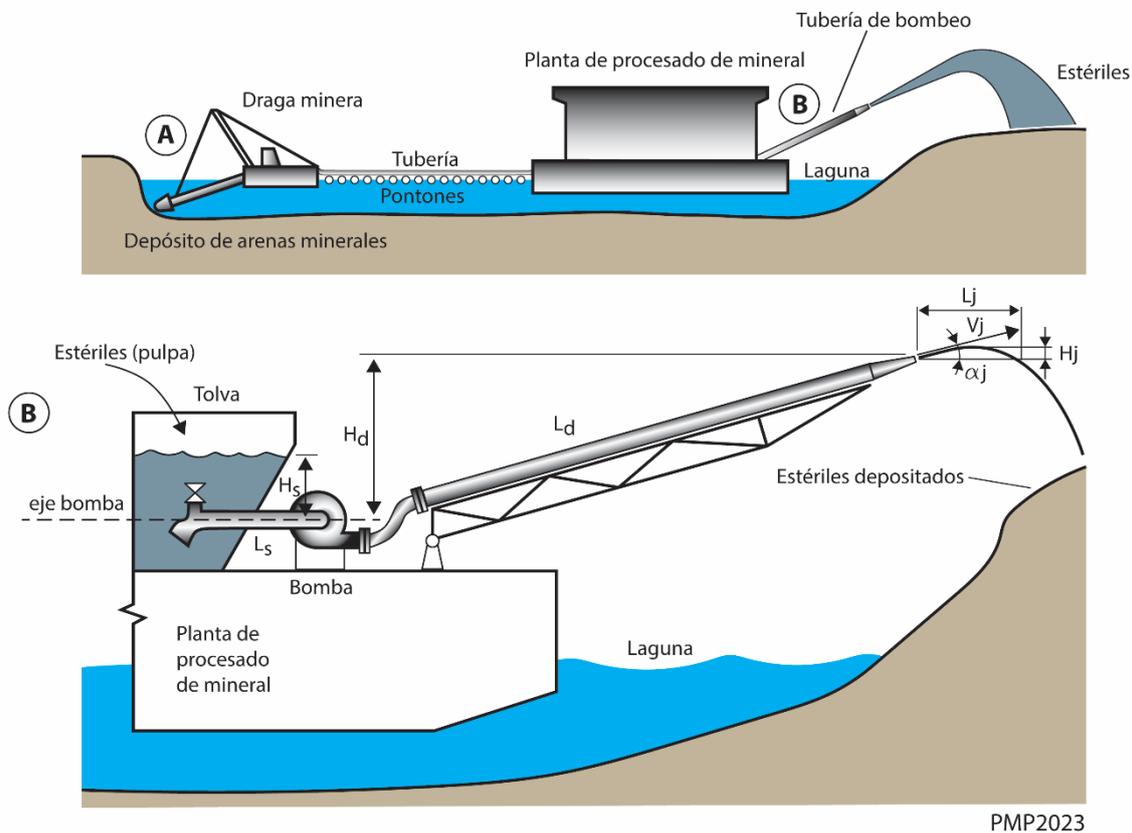
Nota: Se han dividido por HR (0.90) aquellos términos que venían expresados en metros de columna de pulpa (m.c.l.) para convertirlos a metros de columna de agua (m.c.a.).

#### Referencias:

- ANEFA. (2020). *Manual de Áridos para el Siglo XXI* (ANEFA, Ed.).  
 Bouso, J. L. (1993). *Manual de bombeo de pulpas* (Fueyo, Ed.). ERAL, Equipos y Procesos S.A.  
 Volk, M. (2013). *Pump Characteristics and Applications* (C. Press, Ed. 3rd ed.).  
<https://doi.org/https://doi.org/10.1201/b15559>  
 Warman, L. (2000). *Warman Slurry Pumping Handbook*. Warman Slurry Pumping Handbook.  
 Weir Slurry Division, Weir Group PLC. Warman International LTD. (2002). *Slurry Pumping Manual. Technical Application Guide For Users of Centrifugal Slurry Pumps and Slurry Pumping Systems*, pp. 66.

EJERCICIO 27 SOBRE TRANSPORTE HIDRÁULICO

27. Se tiene una explotación de arenas minerales a través de un sistema formado por una draga y una planta de procesamiento de mineral, tal y como representa el esquema de flujo adjunto de la planta. El caudal de estériles (pulpa) que produce la planta de procesamiento será de  $150 \text{ m}^3/\text{h}$ . Determina el TDH requerido en metros de columna de agua (m.c.a.) para la bomba de expulsión de estériles instalada en un sistema de bombeo tal y como representa la figura adjunta, la potencia absorbida teórica (kW) y el NPSHa; sabiendo que, la concentración de sólidos en peso ( $Cw$ ) es del 60%, la densidad de las partículas sólidas es de  $2.65 \text{ t/m}^3$ , y la granulometría de sólidos viene caracterizada por un  $d_{50} = 200$  micras. Por otro lado, se sabe que la altura de la tubería de descarga que lanza el estéril presenta una altura de 5 metros ( $H_d$ ). La longitud de la tubería de descarga será de 7 metros (se incluye la longitud equivalente correspondiente a los diferentes accesorios y singularidades) y la longitud de la tubería de succión será de 1 metro, y donde  $H_s$  vale 4 metros. Utilizar la fórmula de Williams y Hazen, considerando  $C = 120$  (se considera una tubería de acero con revestimiento de goma).



PMP2023

Nota:

- Densidad específica del agua =  $1.00 \text{ t/m}^3$
- Presión atmosférica ( $H_{atm}$ ) =  $10.3 \text{ m.c.a}$  (Instalación a nivel del mar)
- Presión de vapor ( $H_{vap}$ ) =  $0.3 \text{ m}$  (Temperatura de  $25^\circ\text{C}$ ).
- Considerar una eficiencia del motor del 90%
- Considerar una bomba de estériles 6/4 MAR con una eficiencia del 65%

- Considerar una velocidad de salida por el extremo de la tubería de 15 m/s ( $V_j$ ) para alcanzar la distancia de vertido necesaria de  $L_j$ , sabiendo que se debe cumplir (Weir, 2002):

$$L_j = 2 \times \cos \alpha_j \times \left( \frac{\sin \alpha_j}{g} \right)^2 \times V_j^3 \text{ (m)}$$

Solución:

1. Cálculo de la concentración de sólidos en volumen,  $C_v$ , y peso específico de la pulpa,  $\rho_p$ .

Para el cálculo de la concentración de sólidos en volumen hacemos uso de la siguiente expresión:

$$C_v = \frac{\frac{C_w}{100} \times \rho_l}{\rho_s - \frac{C_w}{100} \times (\rho_s - \rho_l)} \times 100 \quad (27.1)$$

Por lo que, sustituyendo:

$$C_v = \frac{\frac{60}{100} \times 1.0}{2.65 - \frac{60}{100} \times (2.65 - 1.0)} \times 100 = 36.15\% \quad (27.2)$$

Para el cálculo de la densidad de la pulpa empleamos la siguiente expresión:

$$\frac{C_v}{100} = \frac{(\rho_p - \rho_l)}{(\rho_s - \rho_l)} \quad (27.3)$$

Por lo que, sustituyendo:

$$\rho_p = \frac{36.15}{100} \times (2.65 - 1.0) + 1.0 = 1.60 \text{ t/m}^3 \quad (27.4)$$

2. Cálculo del caudal de estéril que se extrae de la planta de procesamiento.

Según el enunciado, de la planta de procesamiento se debe retirar 150 m<sup>3</sup>/h de estéril, donde el caudal de pulpa se puede expresar en otras unidades:

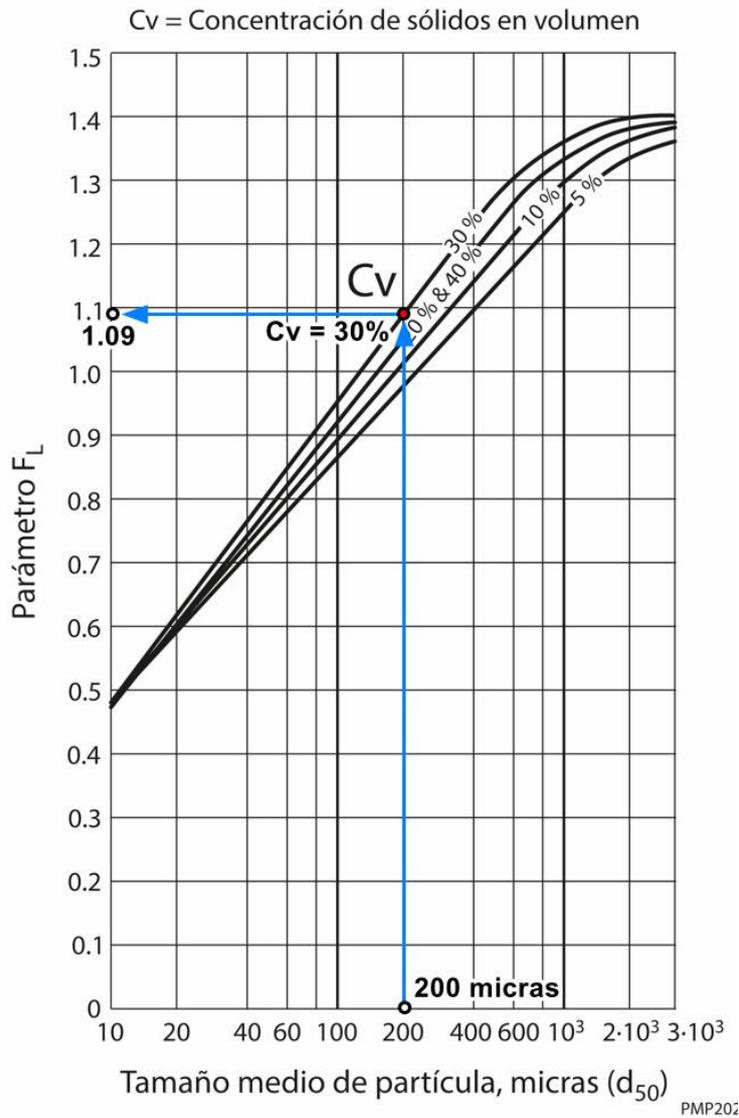
$$Q_{pulpa} = 150 \text{ m}^3/\text{h} \times \frac{1.60 \text{ t}}{\text{m}^3} = 240 \text{ t/h} = 150 \text{ m}^3/\text{h} \times \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \times \frac{1000 \text{ l}}{1 \text{ m}^3} = 41.67 \text{ l/s}$$

(27.5)

3. Cálculo de la velocidad límite y determinación del diámetro interno de la tubería.

Ahora vamos a calcular la velocidad límite. Para estos cálculos vamos a utilizar la expresión de la velocidad límite según Durand (ANEFA, 2020):

$$V_l = F_l \times \sqrt{2 \times g \times D \times \frac{\rho_s - \rho_l}{\rho_l}} \quad (27.6)$$



Para la determinación del factor  $F_l$  se entra en el anterior gráfico (ANEFA, 2020; Bouso, 1993; Warman, 2000), con el valor de  $d_{50}$  de 200  $\mu\text{m}$  y un  $C_v$  de

36.15% (Nota: Cuando  $C_v$  es superior al 30% se emplea un  $C_v = 30\%$ , (Weir, 2002)), del que se obtiene un valor de 1.09. Con este valor se puede entrar en la anterior expresión de Durand y calcular la velocidad límite.

Ahora, la velocidad límite, considerando un diámetro interior de tubería de 0.150 m, valdrá:

$$V_l = 1.09 \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.150 \times \frac{2.65 - 1.0}{1.0}} = 2.40 \text{ m/s} \quad (27.7)$$

Luego se ve que la velocidad que transportará el estéril hasta su zona de vertido será superior a la velocidad límite, evitando la deposición de la arena en codos o zonas bajas de la tubería.

La velocidad que realmente lleva el estéril por la tubería de 150 mm con un caudal de 150 m<sup>3</sup>/h será de:

$$V = \frac{Q_{\text{estéril}} \text{ m}^3/\text{h} \times \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}}{\pi \times \frac{D_i^2}{4}} = \frac{150 \text{ m}^3/\text{h} \times \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}}{\pi \times \frac{(0.150)^2}{4}} \approx 2.4 \text{ m/s} \quad (27.8)$$

Ahora se puede observar que la velocidad real a la que viaja el estéril por el interior de la tubería es aproximadamente igual a la velocidad límite que se recomienda, por lo que se va a optar por mantener un diámetro de 0.150 m y no reducirlo.

#### 4. Cálculo de la longitud total de la tubería, L.

Según el enunciado la longitud de la tubería de succión es de 1 metros y la longitud de la tubería de descarga es de 7 metros, en la cual ya se consideran las longitudes equivalentes de singularidades y accesorios (en caso contrario habría que calcularlas).

Por ello, la longitud total de la tubería, L, será:

$$L = 1 \text{ m} + 7 \text{ m} = 8 \text{ m} \quad (27.9)$$

#### 5. Cálculo de las pérdidas por fricción a través de Williams y Hazen.

El valor de estas pérdidas se obtiene aplicando la siguiente fórmula de Williams y Hazen:

$$H_f = \frac{5.6028}{10^8} \times \left( \frac{100}{C} \right)^{1.85} \times \frac{Q^{1.85}}{D^{4.8655}} \quad (\text{m}/100\text{m}) \quad (27.10)$$

$$H_f = \frac{5.6028}{10^8} \times \left( \frac{100}{120} \right)^{1.85} \times \frac{150^{1.85}}{0.150^{4.8655}} = 4.33 \quad (\text{m}/100\text{m}) \quad (27.11)$$

Con el valor de  $H_f = 4.33 \text{ m}/100\text{m}$  de tubería y sabiendo que entre codos, accesorios, singularidades y tubería total se dispone de 8 metros de tubería equivalente, entonces se tendrá:

$$H_{ft} = \frac{8}{100} \times 4.33 = 0.35 \text{ m.c.l.} \quad (27.12)$$

6. Pérdidas de carga a la salida del depósito de succión,  $H_i$

Se va a considerar un valor de  $K_i = 0.78$  (Conexión con tubo interior). Por lo que la pérdida de carga valdrá:

$$H_i = K_i \times \frac{\rho_p \times V^2}{\rho_{agua} \times 2 \times g} = 0.78 \times \frac{1.60 \times 2.4^2}{1.0 \times 2 \times 9.81} = 0.37 \text{ m.c.l.} \quad (27.13)$$

7. Altura de carga debida a la velocidad del flujo del estéril por la tubería de 0.150 m,  $H_v$ .

La altura de carga debida a esta velocidad será:

$$H_v = \frac{V^2}{2 \times g} = \frac{2.4^2}{2 \times 9.81} = 0.29 \text{ m.c.l.} \quad (27.14)$$

8. Altura de carga debida a la velocidad del flujo de estéril a la salida,  $H_{vj}$ .

Con el fin de garantizar una cierta distancia de proyección del estéril,  $L_j$ , la salida de la tubería de descarga se la dota de un estrechamiento de boquilla para que ofrezca una velocidad de 15 m/s, por lo que la altura de carga debida a esta velocidad será:

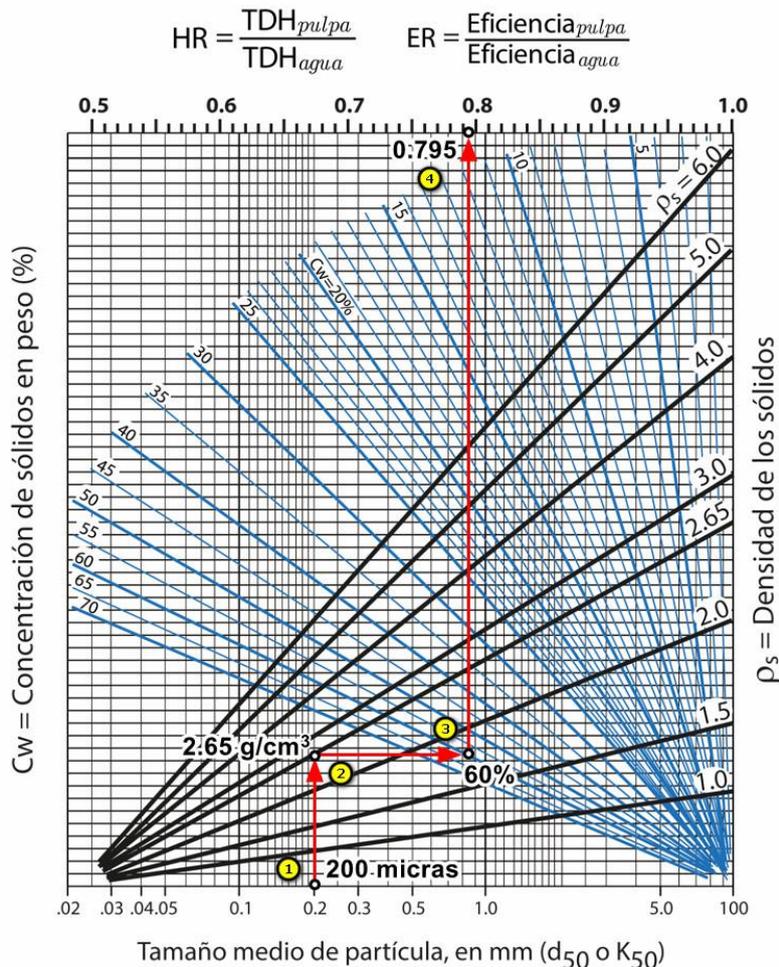
$$H_{vj} = \frac{V_j^2}{2 \times g} = \frac{15^2}{2 \times 9.81} = 11.5 \text{ m.c.l.} \quad (27.15)$$

9. Obtención de la altura manométrica total de la bomba,  $\text{TDH}_{\text{pulpa}}$ .

Con las alturas anteriormente calculadas, el valor de  $TDH_{pulpa}$  será:

$$TDH_{pulpa} = H_g + H_{ft} + H_i + H_v + H_{vj} = (5 - 4) + 0.35 + 0.37 + 0.29 + 11.5 = 13.51 \text{ m.c.l.} \quad (27.16)$$

Para seleccionar la bomba adecuada, debido a que los fabricantes proporcionan la información en base al empleo de agua como principal fluido, debemos corregir los 13.51 metros de columna de pulpa (m.c.l.) a metros de columna de agua (m.c.a.) (ANEFA, 2020; Volk, 2013; Warman, 2000). Para ello se emplea la gráfica siguiente entrando con los datos proporcionado por el enunciado del problema, como es la densidad de las partículas sólidas ( $2.65 \text{ g/cm}^3$ ), el tamaño medio de partícula ( $d_{50} = 200 \text{ micras}$ ) y la concentración de sólidos en peso ( $C_w = 60\%$ ).



Con estos datos, entrando en dicha gráfica se obtiene un HR (o ER) igual 0.795, lo que se puede expresar como:

$$HR = \frac{TDH_{pulpa}}{TDH_{agua}} \quad (27.17)$$

Para nuestro caso, la altura manométrica total expresada en columna de agua valdrá:

$$TDH_{agua} = \frac{TDH_{pulpa}}{HR} = \frac{13.51 \text{ m.c.l.}}{0.795} \approx 17 \text{ m.c.a.} \quad (27.18)$$

#### 10. Cálculo de la potencia de la bomba.

Con el valor calculado de  $TDH_{agua}$  de 17 m.c.a., el caudal proporcionado de  $Q = 150 \text{ m}^3/\text{h}$ , un rendimiento estimado del 65%, la densidad de la pulpa de  $1.60 \text{ t/m}^3$  podemos calcular la potencia en kW que necesitará la bomba a través de la siguiente expresión:

$$N_{kW} = \frac{Q \times TDH_{agua} \times \rho_{pulpa}}{\frac{\eta}{100} \times 360 \times 0.90} = \frac{150 \times 17 \times 1.60}{0.65 \times 360 \times 0.90} = 19.4 \text{ kW} \quad (27.19)$$

Nota: Actualmente existen bombas de pulpa que dan presiones altas, hasta 90-100 m.c.a., por lo que una sola bomba sería suficiente para lanzar los estériles a la orilla.

#### 11. Cálculo del NPSHd.

Para estimar el NPSHd se emplea la siguiente expresión (Bouso, 1993, Weir, 2002):

$$NPSH_d = H_{atm} - H_{vap} \mp \frac{H_s}{HR} - \frac{H_i}{HR} - \frac{H_{fs}}{HR} = 10.3 - 0.3 + \frac{4}{0.795} - \frac{0.37}{0.795} - \frac{\frac{1}{100} \times 4.33}{0.795} = 14.51 \text{ m.c.a.} \quad (27.20)$$

Nota: Se han dividido por HR (0.795) aquellos términos que venían expresados en metros de columna de pulpa (m.c.l.) para convertirlos a metros de columna de agua (m.c.a.).

#### Referencias:

- ANEFA. (2020). Manual de Áridos para el Siglo XXI (ANEFA, Ed.).  
 Bouso, J. L. (1993). Manual de bombeo de pulpas (Fueyo, Ed.). ERAL, Equipos y Procesos S.A.  
 Volk, M. (2013). Pump Characteristics and Applications (C. Press, Ed. 3rd ed.).  
<https://doi.org/https://doi.org/10.1201/b15559>  
 Warman, L. (2000). Warman Slurry Pumping Handbook. Warman Slurry Pumping Handbook.

EJERCICIO 28 SOBRE CINTAS TRANSPORTADORAS

28. En una cantera de caliza se desea transportar a una distancia de 350 metros, el material procedente de la trituradora primaria con una granulometría máxima (k) de 200 mm y una densidad de 2.4 t/m<sup>3</sup>. Se requiere una capacidad para la instalación de transporte de 1200 t/h. Se pide determinar la anchura de la banda, la velocidad de la cinta transportadora y la potencia estándar del motor que se requeriría para la cinta propuesta, considerando una eficiencia del 90%.

Otros datos:

- El material triturado contiene un 80% de finos (heterogéneo).
- El desnivel que debe superar la cinta es de unos 11 metros.
- La banda debe formar una artesa de 30° con un conjunto de tres rodillos.
- Condiciones normales de trabajo para la cinta transportadora.

Solución:

1. Determinación de la anchura de la banda, B.

Partiendo del dato de una granulometría (k) máxima de 200 mm, y siendo el material heterogéneo, según la siguiente tabla se escoge una anchura de cinta de 650 mm.

Ancho de banda mínimo (mm)	Granulometría, k (mm)	
	Homogénea (sized)	Heterogénea (unsized)
400	50	100
500	80	150
650	130	200
800	200	300
1000	250	400
1200	350	500
1400	400	600
1600	450	650
1800	550	700
2000	600	800

(Tomado de DUNLOP, pág. 36)

2. Determinación de la velocidad de la cinta, v.

Según recomendación de la siguiente tabla, para una caliza triturada, se recomienda una velocidad entre 1.05 y 2.09 m/s.

**Velocidades de la cinta transportadora recomendadas (m/s)**

Aplicación	v (m/s)
Cargas unitarias, líneas ensambladas	≤ 1.68
Cintas móviles	0.52 - 1.68
Material muy pulverulento: harinas, cemento, etc.	≤ 1.31
Cenizas volantes	≤ 1.68
<b>Caliza triturada, arenas y gravas, grano</b>	<b>1.05 - 2.09</b>
Mineral, carbón bituminoso, plantas térmicas, parques de almacenamiento e instalaciones de carga	1.31 - 3.35
Cintas de gran longitud, estériles, lignito	2.62 - 6.60
Cintas lanzadoras (apiladoras)	≥ 8.40
Cintas perfiladas de pendiente pronunciada (diseño Chevron o High Chevron)	0.84 - 2.62

(Tomado de DUNLOP, pág. 35)

Por otro lado, la siguiente tabla nos proporciona la capacidad, en m<sup>3</sup>/h, para una cinta de 650 mm con una velocidad de 1 m/s y una artesa a 30<sup>a</sup>, siendo esta capacidad de 156 m<sup>3</sup>/h.

Ancho de Banda (mm)	Banda plana (m <sup>3</sup> /h)	Banda en artesa DIN 22107			L <sub>1</sub> = L <sub>2</sub> (mm)	Artesa 20° (m <sup>3</sup> /h)	Artesa 25° (m <sup>3</sup> /h)	Artesa 30° (m <sup>3</sup> /h)	Artesa 35° (m <sup>3</sup> /h)	Artesa 40° (m <sup>3</sup> /h)	Artesa 45° (m <sup>3</sup> /h)
		L <sub>1</sub> (mm)	L <sub>2</sub> (rodillo central) (mm)	Artesa 20° (m <sup>3</sup> /h)							
300	12	132	132		132						
400	23	165	165		165						
500	38	200	200	74	200	74	80	87	91	95	98
<b>650</b>	69	250	250	133	250	133	144	<b>156</b>	164	172	176
800	108	315	315	208	315	208	227	244	258	269	276
1.000	173	380	380	336	380	336	365	394	415	434	445
1.200	255	465	465	494	465	494	537	580	610	638	654
1.400	351	530	530	680	530	680	738	798	840	878	900
1.600	464	530	735	850	600	898	976	1.055	1.110	1.160	1.190
1.800	592	600	800	1.085	670	1.145	1.245	1.340	1.415	1.475	1.515
2.000	735	665	870	1.350	740	1.422	1.545	1.665	1.760	1.835	1.880
2.200	893	735	930	1.675	800	1.730	1.880	2.030	2.140	2.235	2.290
2.400	1.070	800	1.000	2.010	870	2.070	2.250	2.430	2.560	2.670	2.740
2.600	1.260	870	1.060	2.390	940	2.430	2.640	2.850	3.000	3.135	3.220
2.800	1.465	930	1.140	2.770	1.000	2.840	3.085	3.330	3.510	3.660	3.760
3.000	1.683	1.000	1.200	3.200	1.070	3.270	3.550	3.830	4.040	4.210	4.320

Fuente: ITGE (1991). Manual de Arranque, Carga y Transporte en Minería a Cielo Abierto. 664 pp

La capacidad en t/h nos da un valor de:

$$Q_m = 156 \text{ m}^3/\text{h} \times 2.4 \text{ t/m}^3 = 374.4 \text{ (t/h)/(1 m/s)} \quad (28.1)$$

Luego para obtener 1200 t/h se precisa que la cinta tenga una velocidad de:

$$v = \frac{1200 \text{ t/h}}{374.4 \text{ t/h}} = 3.2 \text{ m/s} \quad (28.2)$$

Luego, esta velocidad es superior a lo recomendado, por ello, vamos a elegir la siguiente anchura de banda que es la de 800 mm. Para esta nueva elección de anchura según la siguiente tabla, nos proporciona una capacidad de 244 m<sup>3</sup>/h por cada m/s de velocidad.

Ancho de Banda (mm)	Banda plana (m <sup>3</sup> /h)	Banda en artesa DIN 22107			L <sub>1</sub> = L <sub>2</sub> (mm)	Artesa 20° (m <sup>3</sup> /h)	Artesa 25° (m <sup>3</sup> /h)	Artesa 30° (m <sup>3</sup> /h)	Artesa 35° (m <sup>3</sup> /h)	Artesa 40° (m <sup>3</sup> /h)	Artesa 45° (m <sup>3</sup> /h)
		L <sub>1</sub> (mm)	L <sub>2</sub> (rodillo central) (mm)	Artesa 20° (m <sup>3</sup> /h)							
300	12	132	132		132						
400	23	165	165		165						
500	38	200	200	74	200	74	80	87	91	95	98
650	69	250	250	133	250	133	144	156	164	172	176
800	108	315	315	208	315	208	227	244	258	269	276
1.000	173	380	380	336	380	336	365	394	415	434	445
1.200	255	465	465	494	465	494	537	580	610	638	654
1.400	351	530	530	680	530	680	738	798	840	878	900
1.600	464	530	735	850	600	898	976	1.055	1.110	1.160	1.190
1.800	592	600	800	1.085	670	1.145	1.245	1.340	1.415	1.475	1.515
2.000	735	665	870	1.350	740	1.422	1.545	1.665	1.760	1.835	1.880
2.200	893	735	930	1.675	800	1.730	1.880	2.030	2.140	2.235	2.290
2.400	1.070	800	1.000	2.010	870	2.070	2.250	2.430	2.560	2.670	2.740
2.600	1.260	870	1.060	2.390	940	2.430	2.640	2.850	3.000	3.135	3.220
2.800	1.465	930	1.140	2.770	1.000	2.840	3.085	3.330	3.510	3.660	3.760
3.000	1.683	1.000	1.200	3.200	1.070	3.270	3.550	3.830	4.040	4.210	4.320

Fuente: ITGE (1991). Manual de Arranque, Carga y Transporte en Minería a Cielo Abierto. 664 pp

La capacidad en t/h nos da un valor de:

$$Q_m = 244 \text{ m}^3/\text{h} \times 2.4 \text{ t/m}^3 = 585.6 \text{ (t/h)/(1 m/s)} \quad (28.3)$$

Luego para obtener 1200 t/h se precisa que la cinta tenga una velocidad de:

$$v = \frac{1200 \text{ t/h}}{585.6 \text{ t/h}} = 2.04 \text{ m/s} \quad (28.4)$$

Por lo que es una velocidad adecuada y para ello se adopta una velocidad próxima estándar como es la de 2.09 m/s.

3. Determinación del ángulo de inclinación,  $\delta$  ( $^{\circ}$ ).

El ángulo de inclinación será:

$$\delta = \arctan\left(\frac{11 \text{ m}}{350 \text{ m}}\right) = 1.8^{\circ} \quad (28.5)$$

4. Determinación de  $C_B$ .

Según la siguiente tabla se obtiene un valor de 144.

Valor  $C_B$  (kg/m)

Tipo Operación	Densidad material $\rho$ (t/m <sup>3</sup> )	Anchura de la banda, B (mm)											
		300	400	500	650	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000	2200
Ligera	Hasta 1.0	31	54	67	81	108	133	194	227	291			
Media	1.0 a 2.0	36	59	76	92	126	187	277	320	468	554	691	745
Pesada	Superior 2.0		65	86	103	144	241	360	414	644	727	957	1033

(Tomado de DUNLOP, pág. 41)

5. Determinación de  $k_f$ .

Según la siguiente tabla se obtiene un valor de 1.

Factor  $k_f$

Condiciones de operación de la cinta transportadora	$k_f$
Favorables, buen alineamiento, velocidad baja	1.17
Condiciones normales estándar	1
Desfavorables, pulverulentas, baja temperatura, sobrecarga, alta velocidad	0.87 - 0.74
Temperaturas extremadamente bajas	0.57

(Tomado de DUNLOP, pág. 41)

6. Determinación de  $C_L$ .

Según la siguiente tabla se obtiene un valor de 41.

Factor  $C_L$  (1/m)

L (m)	3	4	5	6	8	10	12.5	16	20
$C_L$	667	625	555	526	454	417	370	323	286
L (m)	25	32	40	50	63	80	90	100	150
$C_L$	250	222	192	167	145	119	109	103	77
L (m)	200	250	300	350	400	450	500	550	600
$C_L$	63	53	47	41	37	33	31	28	26
L (m)	700	800	900	1000	1500	2000			
$C_L$	23	20	18	17	12	9			

L (m) = Longitud de la cinta de transporte

(Tomado de DUNLOP, pág. 41)

7. Determinación del valor de la potencia  $P_T$ .

Con todos los términos determinados el valor de la potencia teórica,  $P_T$ , será:

$$P_T = \frac{C_B \times v + Q_m}{C_L \times k_f} + \frac{H \times Q_m}{367} = \frac{144 \times 2.09 + 1200}{41 \times 1} + \frac{11 \times 1200}{367} = 72.58 \text{ kW} \quad (28.6)$$

8. Determinación del valor de la potencia  $P_M$ .

La potencia motor,  $P_M$ , considerando una eficiencia del 90% será:

$$P_M = \frac{P_T}{\eta} = \frac{72.58 \text{ kW}}{0.90} = 80.64 \text{ kW} \quad (28.7)$$

9. Determinación de la potencia estándar o normalizada  $P_N$ .

Según potencias normalizadas de fabricantes (tabla adjunta) la potencia que se deberá elegir es de 90 kW.

### Potencias estándar de motores eléctricos (kW)

1.5	2.2	3	4	5.5	7.5	11
15	18.5	22	30	37	45	55
75	90	110	132	160	200	250
315	400	500	630			

(Tomado de DUNLOP, pág. 41)

EJERCICIO 29 SOBRE CINTAS TRANSPORTADORAS

29. Determina la potencia normalizada de selección, en kW, para el motor de una cinta transportadora y su velocidad adecuada, en m/s, para el transporte de lignito en una mina sabiendo que la densidad del mineral es  $0.7 \text{ t/m}^3$ , la longitud de la cinta debe ser de 600 metros, con un desnivel de 30 m, y una sección en artesa a  $30^\circ$  ( $\lambda$ ) formada por un conjunto de tres rodillos y con una anchura de banda de 1200 mm. La cinta transportadora deberá ser capaz de alcanzar una producción de  $2500 \text{ m}^3/\text{h}$ .

Valores de los pesos por unidad de longitud de banda:

- Longitud del rodillo,  $L = 465 \text{ mm}$  (DUNLOP (1994), pág. 37)
- Peso de la banda por unidad de longitud de banda,  $m'_G = 30 \text{ kg/m}$ .
- Peso de los rodamientos por unidad de longitud de banda del ramal superior  $m'_{RO} = 26.7 \text{ kg/m}$  (separación entre rodillos 1 m).
- Peso de los rodamientos por unidad de longitud de banda del ramal inferior  $m'_{RU} = 10.3 \text{ kg/m}$  (separación entre rodillos 2 m).
- Eficiencia del motor = 90%

Solución:

1. Determinación de la capacidad en t/h,  $Q_m$ .

Partiendo del dato de una capacidad horaria volumétrica,  $Q_v$ , de  $2500 \text{ m}^3/\text{h}$  y de una densidad para el mineral de lignito de  $0.7 \text{ t/m}^3$ , el caudal horario en peso será:

$$Q_m = Q_v \times \rho = 2500 \text{ m}^3/\text{h} \times 0.7 \text{ t/m}^3 = 1750 \text{ t/h} \quad (29.1)$$

2. Determinación de la velocidad de la cinta,  $v$ .

Según recomendación de la siguiente tabla, para el transporte de lignito, se recomienda una velocidad entre 2.62 y 6.60 m/s.

**Velocidades de la cinta transportadora recomendadas (m/s)**

Aplicación	v (m/s)
Cargas unitarias, líneas ensambladas	≤ 1.68
Cintas móviles	0.52 - 1.68
Material muy pulverulento: harinas, cemento, etc.	≤ 1.31
Cenizas volantes	≤ 1.68
Caliza triturada, arenas y gravas, grano	1.05 - 2.09
Mineral, carbón bituminoso, plantas térmicas, parques de almacenamiento e instalaciones de carga	1.31 - 3.35
Cintas de gran longitud, estériles <b>lignito</b>	<b>2.62 - 6.60</b>
Cintas lanzadoras (apiladoras)	≥ 8.40
Cintas perfiladas de pendiente pronunciada (diseño Chevron o High Chevron)	0.84 - 2.62

(Tomado de DUNLOP, pág. 35)

Por otro lado, la siguiente tabla nos proporciona la capacidad, en m<sup>3</sup>/h, para una cinta de 1200 mm con una velocidad de 1 m/s y una artesa a 30<sup>a</sup>, siendo esta capacidad de 580 m<sup>3</sup>/h.

Ancho de Banda (mm)	Banda plana (m <sup>3</sup> /h)	Banda en artesa DIN 22107			L <sub>1</sub> = L <sub>2</sub> (mm)	Artesa 20° (m <sup>3</sup> /h)	Artesa 25° (m <sup>3</sup> /h)	Artesa 30° (m <sup>3</sup> /h)	Artesa 35° (m <sup>3</sup> /h)	Artesa 40° (m <sup>3</sup> /h)	Artesa 45° (m <sup>3</sup> /h)
		L <sub>1</sub> (mm)	L <sub>2</sub> (rodillo central) (mm)	Artesa 20° (m <sup>3</sup> /h)							
300	12	132	132		132						
400	23	165	165		165						
500	38	200	200	74	200	74	80	87	91	95	98
650	69	250	250	133	250	133	144	156	164	172	176
800	108	315	315	208	315	208	227	244	258	269	276
1.000	173	380	380	336	380	336	365	394	415	434	445
<b>1.200</b>	255	465	465	494	465	494	537	<b>580</b>	610	638	654
1.400	351	530	530	680	530	680	738	798	840	878	900
1.600	464	530	735	850	600	898	976	1.055	1.110	1.160	1.190
1.800	592	600	800	1.085	670	1.145	1.245	1.340	1.415	1.475	1.515
2.000	735	665	870	1.350	740	1.422	1.545	1.665	1.760	1.835	1.880
2.200	893	735	930	1.675	800	1.730	1.880	2.030	2.140	2.235	2.290
2.400	1.070	800	1.000	2.010	870	2.070	2.250	2.430	2.560	2.670	2.740
2.600	1.260	870	1.060	2.390	940	2.430	2.640	2.850	3.000	3.135	3.220
2.800	1.465	930	1.140	2.770	1.000	2.840	3.085	3.330	3.510	3.660	3.760
3.000	1.683	1.000	1.200	3.200	1.070	3.270	3.550	3.830	4.040	4.210	4.320

Fuente: ITGE (1991). Manual de Arranque, Carga y Transporte en Minería a Cielo Abierto. 664 pp

La capacidad en t/h nos da un valor de:

$$Q_m = 580 \text{ m}^3/\text{h} \times 0.7 \text{ t/m}^3 = 406 \text{ (t/h)/(1 m/s)} \quad (29.2)$$

Luego para obtener 1750 t/h se precisa que la cinta tenga una velocidad de:

$$v = \frac{1750 \text{ t/h}}{406 \text{ t/h}} = 4.3 \text{ m/s} \quad (29.3)$$

Luego, esta velocidad está dentro del intervalo recomendado, pero no es un valor de velocidad normalizado, por lo que adoptaremos el valor superior más próximo de la velocidad normalizada, siendo este de 5.20 m/s que aún está dentro del intervalo recomendado:

#### Valores estándar

Velocidades V (m/s)						
0.42	-	0.52	-	0.66	-	0.84
1.05	-	1.31	-	1.68	-	2.09
2.62	-	3.35	-	4.19	-	5.20
6.60	-	8.40	-		-	

(Tomado de DUNLOP, pág. 35)

#### 3. Determinación del ángulo de inclinación, $\delta$ ( $^\circ$ ).

El ángulo de inclinación será:

$$\delta = \arctan\left(\frac{30 \text{ m}}{600 \text{ m}}\right) = 2.9^\circ \quad (29.4)$$

#### 4. Determinación del ángulo de reposo dinámico, $\beta$ ( $^\circ$ ).

Para el cálculo del ángulo de reposo dinámico, según la tabla siguiente (DUNLOP (1994), pág. 157), establecemos un valor de 15 $^\circ$ .

EJERCICIOS RESUELTOS DE SISTEMAS DE TRANSPORTE CONTINUO. BOMBAS Y CINTAS TRANSPORTADORAS

Material	Bulk Density $\rho$ (t/m <sup>3</sup> )	Surcharge Angle $\beta$ (°)	Maximum Angle of Inclination height of profiles				Recom- mended Dunlop Quality
			Smooth Belts	6 mm	16 mm	32 mm	
Carbon pellets	0.35	5	15	20	25	30	RA
Carborundum up to 80mm	1.60	10	15	-	-	-	RS
Casein	0.60	15	15	-	-	-	-
Cast Iron swarf	2.08 - 3.20	20	22	-	-	-	RA
Cement, clinker	1.20 - 1.30	15	18	-	30	30	RE - RS
Cement, dry	1.20	10	20	22	30	30	-
Cement Mortar	2.00	10	8	-	-	-	-
Chalk, broken	1.35 - 1.45	15	17	-	30	30	RA
Chalk, pulverised	1.10 - 1.20	15	15 - 18	-	30	30	RA
Charcoal	0.35	15	20	-	25	30	RA
Chestnuts	0.80	5	8 - 10	-	30	40	-
Chrome Ore	2.00 - 2.24	10	17	-	-	-	RE - RS
Clay, calcined	1.28 - 1.60	15	18	20	30	40	RA - RS
Clay, dry	1.60	15	15	-	25	30	-
Clay, dry	1.60 - 1.80	15	28	20	30	35	-
Clay, dry, lumps	0.96 - 1.20	15	15	20	30	35	RA - RS
Clay, wet	2.00	15	20	-	25	30	-
Clay, wet	1.80 - 2.00	15	15 - 18	20	30	40	-
Coal <b>Carbón</b>	0.95	10 - 15	10	-	-	30	-
Coal, anthracite up to 3mm	0.95	20	18	20	35	35	RA - BV
Coal dust	0.06 - 0.11	10	5	-	-	-	RA
Coal, pelletized	0.32 - 0.40	-	-	-	-	-	-
Cocoa beans	0.55	10	12	-	-	-	RA
Cocoa powder	0.50	5	20	-	25	30	RA

5. Determinación del área de la sección transversal de la carga, A.

Para obtener este valor se aplica la siguiente expresión:

$$0.25 \times \tan \beta \times (L + (b - L) \times \cos \lambda)^2 + L_1 \times \sin \lambda \times (L + L_1 \times \cos \lambda) \quad (\text{m}^2) \quad (29.5)$$

Donde:

$$b = 0.9 \times B - 0.05 \quad (B \leq 2000 \text{ mm}) \quad (29.6)$$

$$b = 0.9 \times 1.200 - 0.05 = 1.03 \text{ m}$$

$$L_1 = 0.5 \times (b - L) \quad (3 \text{ rodillos, } L = 0.465 \text{ m}) \quad (29.7)$$

$$L_1 = 0.5 \times (1.03 - 0.465) = 0.28$$

Luego sustituyendo los términos por sus valores ya determinados o previamente conocidos, tendremos un valor de A (m<sup>2</sup>) igual a:

$$0.25 \times \tan 15^\circ \times (0.465 + (1.03 - 0.465) \times \cos 30^\circ)^2 + 0.28 \times \sin 30^\circ \times (0.465 + 0.28 \times \cos 30^\circ) = 0.103 \quad (\text{m}^2) \quad (29.8)$$

6. Determinación del peso de la carga por unidad de longitud de cinta, m'L.

El valor del peso de la carga de mineral por unidad de longitud de cinta, m'L, se obtiene a través de la siguiente expresión:

$$m'_L = \frac{Q_m \text{ (t/h)}}{3.6 \times v \text{ (m/s)}} = \frac{1750 \text{ (t/h)}}{3.6 \times 5.20 \text{ (m/s)}} = 93.48 \text{ kg/m} \quad (29.9)$$

7. Determinación del valor de la resistencia principal al movimiento,  $F_H$ .

Este valor se obtendrá a través de la siguiente expresión:

$$F_H = f \times L_{\text{cinta}} \times g \times \left[ m'_R + (2 \times m'_G + m'_L) \times \cos \delta \right] \text{ (N)} \quad (29.10)$$

El factor de fricción  $f$  toma un valor de 0.020 considerando condiciones de trabajo normales.

Tabla para la obtención de factor  $f$

<b>Instalaciones horizontales, o ligeramente inclinadas</b>	
Condiciones de trabajo muy favorables	0.017
<b>Condiciones de trabajo normales</b>	<b>0.020</b>
Condiciones de trabajo desfavorables	0.023 - 0.027
<b>Instalaciones con fuerte pendiente</b>	0.012 - 0.016

(Tomado de DUNLOP (1994), pág. 55)

Por lo que el valor de  $F_H$ , en N, sustituyendo variables por los valores ya obtenidos, valdrá:

$$F_H = 0.020 \times 600 \times 9.81 \times \left[ (26.7 + 10.3) + (2 \times 30 + 93.48) \times \cos 2.9^\circ \right] = 22400 \text{ (N)} \quad (29.11)$$

8. Determinación del valor de la resistencia secundaria al movimiento,  $F_N$ .

Este valor se obtendrá a través de la siguiente expresión:

$$F_N = (C - 1) \times F_H \text{ (N)} \quad (29.12)$$

El coeficiente C, para una longitud de cinta de 600 metros toma un valor de 1.17.

Valor del coeficiente C

L (m)	3	4	5	6	8	10	13	16	20
C	9.0	7.6	6.6	5.9	5.1	4.5	4.0	3.6	3.0
L (m)	25	32	40	50	63	80	90	100	120
C	2.9	2.6	2.4	2.2	2.0	1.92	1.86	1.78	1.70
L (m)	140	160	180	200	250	300	350	400	450
C	1.63	1.56	1.50	1.45	1.38	1.31	1.27	1.25	1.20
L (m)	500	550	600	700	800	900	1000	1500	2000
C	1.20	1.18	1.17	1.14	1.12	1.10	1.09	1.06	1.00

(Tomado de DUNLOP (1994), pág. 54)

Por lo que el valor de  $F_N$ , en N, sustituyendo variables por los valores ya obtenidos, valdrá:

$$F_N = (1.17 - 1) \times 22400 = 3808 \text{ (N)} \quad (29.13)$$

Determinación del valor de la resistencia por desnivel,  $F_{St}$ .

Este valor se obtendrá a través de la siguiente expresión:

$$F_{St} = \pm H \times g \times m'_L \text{ (N)} \quad (29.14)$$

Por lo que el valor de  $F_{St}$ , sabiendo que el desnivel, H, es positivo (cinta ascendente) de 30 m, será:

$$F_{St} = 30 \times 9.81 \times 93.48 = 27511 \text{ (N)} \quad (29.15)$$

9. Determinación del valor de la fuerza resistente tangencial total,  $F_U$ .

Este valor es el resultado de sumar los valores de las tres resistencias al movimiento anteriores (se estima que no existen fuerzas resistentes especiales,  $F_s$ ):

$$F_U = F_H + F_N + F_{St} \text{ (N)} \quad (29.16)$$

Por lo que el valor de  $F_U$  será:

$$F_U = 22400 + 3808 + 27511 = 53719 \text{ (N)} \quad (29.17)$$

10. Determinación del valor de la potencia  $P_T$ .

Con todos los términos determinados el valor de la potencia teórica,  $P_T$ , será:

$$P_T = \frac{F_U \text{ (N)} \times v \text{ (m/s)}}{1000} = \frac{53719 \text{ N} \times 5.20 \text{ (m/s)}}{1000} = 279.34 \text{ kW} \quad (29.18)$$

11. Determinación del valor de la potencia  $P_M$ .

La potencia motor,  $P_M$ , considerando una eficiencia del 90% será:

$$P_M = \frac{P_T}{\eta} = \frac{279.34 \text{ kW}}{0.90} = 310.38 \text{ kW} \quad (29.19)$$

12. Determinación de la potencia estándar o normalizada  $P_N$ .

Según potencias normalizadas de fabricantes (tabla adjunta) la potencia que se deberá elegir es de 315 kW.

Potencias estándar de motores eléctricos (kW)

1.5	2.2	3	4	5.5	7.5	11
15	18.5	22	30	37	45	55
75	90	110	132	160	200	250
315	400	500	630			

(Tomado de DUNLOP, pág. 41)

EJERCICIO 30 SOBRE CINTAS TRANSPORTADORAS

30. Determina la potencia normalizada de selección, en kW, para el motor de una cinta transportadora y su velocidad adecuada, en m/s, para el transporte de lignito en una mina sabiendo que la densidad del mineral es  $0.7 \text{ t/m}^3$ , la longitud de la cinta debe ser de 500 metros, con un desnivel de 25 m, y una sección en artesa a  $30^\circ$  ( $\lambda$ ) formada por un conjunto de tres rodillos y con una anchura de banda de 1200 mm. La cinta transportadora deberá ser capaz de alcanzar una producción de  $1800 \text{ m}^3/\text{h}$ . Establecer un ángulo de reposo dinámico de  $15^\circ$  y condiciones de trabajo normales. Además, el rendimiento del motor se establecerá en un valor del 90%.

Valores de los pesos por unidad de longitud de banda:

- Longitud del rodillo,  $L = 465 \text{ mm}$  (DUNLOP (1994), pág. 37)
- Peso de la banda por unidad de longitud de banda,  $m'_G = 30 \text{ kg/m}$ .
- Peso de los rodamientos por unidad de longitud de banda del ramal superior  $m'_{RO} = 26.7 \text{ kg/m}$  (separación entre rodillos 1 m).
- Peso de los rodamientos por unidad de longitud de banda del ramal inferior  $m'_{RU} = 10.3 \text{ kg/m}$  (separación entre rodillos 2 m).
- Eficiencia del motor = 90%

Solución:

1. Determinación de la capacidad en t/h,  $Q_m$ .

Partiendo del dato de una capacidad horaria volumétrica,  $Q_v$ , de  $1800 \text{ m}^3/\text{h}$  y de una densidad para el mineral de lignito de  $0.7 \text{ t/m}^3$ , el caudal horario en peso será:

$$Q_m = Q_v \times \rho = 1800 \text{ m}^3/\text{h} \times 0.7 \text{ t/m}^3 = 1260 \text{ t/h} \quad (30.1)$$

2. Determinación de la velocidad de la cinta,  $v$ .

Según recomendación de la siguiente tabla, para el transporte de lignito, se recomienda una velocidad entre 2.62 y 6.60 m/s.

**Velocidades de la cinta transportadora recomendadas (m/s)**

Aplicación	v (m/s)
Cargas unitarias, líneas ensambladas	≤ 1.68
Cintas móviles	0.52 - 1.68
Material muy pulverulento: harinas, cemento, etc.	≤ 1.31
Cenizas volantes	≤ 1.68
Caliza triturada, arenas y gravas, grano	1.05 - 2.09
Mineral, carbón bituminoso, plantas térmicas, parques de almacenamiento e instalaciones de carga	1.31 - 3.35
Cintas de gran longitud, estériles <b>lignito</b>	<b>2.62 - 6.60</b>
Cintas lanzadoras (apiladoras)	≥ 8.40
Cintas perfiladas de pendiente pronunciada (diseño Chevron o High Chevron)	0.84 - 2.62

(Tomado de DUNLOP, pág. 35)

Por otro lado, la siguiente tabla nos proporciona la capacidad, en m<sup>3</sup>/h, para una cinta de 1200 mm con una velocidad de 1 m/s y una artesa a 30<sup>a</sup>, siendo esta capacidad de 580 m<sup>3</sup>/h.

Ancho de Banda (mm)	Banda plana (m <sup>3</sup> /h)	Banda en artesa DIN 22107			L <sub>1</sub> = L <sub>2</sub> (mm)	Artesa 20° (m <sup>3</sup> /h)	Artesa 25° (m <sup>3</sup> /h)	Artesa 30° (m <sup>3</sup> /h)	Artesa 35° (m <sup>3</sup> /h)	Artesa 40° (m <sup>3</sup> /h)	Artesa 45° (m <sup>3</sup> /h)
		L <sub>1</sub> (mm)	L <sub>2</sub> (rodillo central) (mm)	Artesa 20° (m <sup>3</sup> /h)							
300	12	132	132		132						
400	23	165	165		165						
500	38	200	200	74	200	74	80	87	91	95	98
650	69	250	250	133	250	133	144	156	164	172	176
800	108	315	315	208	315	208	227	244	258	269	276
1.000	173	380	380	336	380	336	365	394	415	434	445
<b>1.200</b>	255	465	465	494	465	494	537	<b>580</b>	610	638	654
1.400	351	530	530	680	530	680	738	798	840	878	900
1.600	464	530	735	850	600	898	976	1.055	1.110	1.160	1.190
1.800	592	600	800	1.085	670	1.145	1.245	1.340	1.415	1.475	1.515
2.000	735	665	870	1.350	740	1.422	1.545	1.665	1.760	1.835	1.880
2.200	893	735	930	1.675	800	1.730	1.880	2.030	2.140	2.235	2.290
2.400	1.070	800	1.000	2.010	870	2.070	2.250	2.430	2.560	2.670	2.740
2.600	1.260	870	1.060	2.390	940	2.430	2.640	2.850	3.000	3.135	3.220
2.800	1.465	930	1.140	2.770	1.000	2.840	3.085	3.330	3.510	3.660	3.760
3.000	1.683	1.000	1.200	3.200	1.070	3.270	3.550	3.830	4.040	4.210	4.320

Fuente: ITGE (1991). Manual de Arranque, Carga y Transporte en Minería a Cielo Abierto. 664 pp

La capacidad en t/h nos da un valor de:

$$Q_m = 580 \text{ m}^3/\text{h} \times 0.7 \text{ t/m}^3 = 406 \text{ (t/h)/(1 m/s)} \quad (30.2)$$

Luego para obtener 1260 t/h se precisa que la cinta tenga una velocidad de:

$$v = \frac{1260 \text{ t/h}}{406 \text{ t/h}} = 3.10 \text{ m/s} \quad (30.3)$$

Luego, esta velocidad está dentro del intervalo recomendado, pero no es un valor de velocidad normalizado, por lo que adoptaremos el valor superior más próximo de la velocidad normalizada, siendo este de 3.35 m/s que aún está dentro del intervalo recomendado:

### Valores estándar

Velocidades V (m/s)						
0.42	-	0.52	-	0.66	-	0.84
1.05	-	1.31	-	1.68	-	2.09
2.62	-	3.35	-	4.19	-	5.20
6.60	-	8.40	-		-	

(Tomado de DUNLOP, pág. 35)

### 3. Determinación del ángulo de inclinación, $\delta$ ( $^\circ$ ).

El ángulo de inclinación será:

$$\delta = \arctan\left(\frac{25 \text{ m}}{500 \text{ m}}\right) = 2.9^\circ \quad (30.4)$$

### 4. Determinación del ángulo de reposo dinámico, $\beta$ ( $^\circ$ ).

Para el cálculo del ángulo de reposo dinámico, según la tabla siguiente (DUNLOP (1994), pág. 157), establecemos un valor de 15°.

EJERCICIOS RESUELTOS DE SISTEMAS DE TRANSPORTE CONTINUO. BOMBAS Y CINTAS TRANSPORTADORAS

Material	Bulk Density $\rho$ (t/m <sup>3</sup> )	Surcharge Angle $\beta$ (°)	Maximum Angle of Inclination height of profiles				Recommended Dunlop Quality
			Smooth Belts	6 mm	16 mm	32 mm	
Carbon pellets	0.35	5	15	20	25	30	RA
Carborundum up to 80mm	1.60	10	15	-	-	-	RS
Casein	0.60	15	15	-	-	-	-
Cast Iron swarf	2.08 - 3.20	20	22	-	-	-	RA
Cement, clinker	1.20 - 1.30	15	18	-	30	30	RE - RS
Cement, dry	1.20	10	20	22	30	30	-
Cement Mortar	2.00	10	8	-	-	-	-
Chalk, broken	1.35 - 1.45	15	17	-	30	30	RA
Chalk, pulverised	1.10 - 1.20	15	15 - 18	-	30	30	RA
Charcoal	0.35	15	20	-	25	30	RA
Chestnuts	0.80	5	8 - 10	-	30	40	-
Chrome Ore	2.00 - 2.24	10	17	-	-	-	RE - RS
Clay, calcined	1.28 - 1.60	15	18	20	30	40	RA - RS
Clay, dry	1.60	15	15	-	25	30	-
Clay, dry	1.60 - 1.80	15	28	20	30	35	-
Clay, dry, lumps	0.96 - 1.20	15	15	20	30	35	RA - RS
Clay, wet	2.00	15	20	-	25	30	-
Clay, wet	1.80 - 2.00	15	15 - 18	20	30	40	-
Coal Carbón	0.95	10 - 15	10	-	-	30	-
Coal, anthracite up to 3mm	0.95	20	18	20	35	35	RA - BV
Coal dust	0.06 - 0.11	10	5	-	-	-	RA
Coal, pelletized	0.32 - 0.40	-	-	-	-	-	-
Cocoa beans	0.55	10	12	-	-	-	RA
Cocoa powder	0.50	5	20	-	25	30	RA

5. Determinación del área de la sección transversal de la carga, A.

Para obtener este valor se aplica la siguiente expresión:

$$0.25 \times \tan \beta \times (L + (b - L) \times \cos \lambda)^2 + L_1 \times \sin \lambda \times (L + L_1 \times \cos \lambda) \quad (\text{m}^2) \quad (30.5)$$

Donde:

$$b = 0.9 \times B - 0.05 \quad (B \leq 2000 \text{ mm}) \quad (30.6)$$

$$b = 0.9 \times 1.200 - 0.05 = 1.03 \text{ m}$$

$$L_1 = 0.5 \times (b - L) \quad (3 \text{ rodillos, } L = 0.465 \text{ m}) \quad (30.7)$$

$$L_1 = 0.5 \times (1.03 - 0.465) = 0.28$$

Luego sustituyendo los términos por sus valores ya determinados o previamente conocidos, tendremos un valor de A (m<sup>2</sup>) igual a:

$$0.25 \times \tan 15^\circ \times (0.465 + (1.03 - 0.465) \times \cos 30^\circ)^2 + 0.28 \times \sin 30^\circ \times (0.465 + 0.28 \times \cos 30^\circ) = 0.103 \quad (\text{m}^2) \quad (30.8)$$

6. Determinación del peso de la carga por unidad de longitud de cinta,  $m'_L$ .

El valor del peso de la carga de mineral por unidad de longitud de cinta,  $m'_L$ , se obtiene a través de la siguiente expresión:

$$m'_L = \frac{Q_m \text{ (t/h)}}{3.6 \times v \text{ (m/s)}} = \frac{1260 \text{ (t/h)}}{3.6 \times 3.35 \text{ (m/s)}} = 104.48 \text{ kg/m} \quad (30.9)$$

7. Determinación del valor de la resistencia principal al movimiento,  $F_H$ .

Este valor se obtendrá a través de la siguiente expresión:

$$F_H = f \times L_{\text{cinta}} \times g \times \left[ m'_R + (2 \times m'_G + m'_L) \times \cos \delta \right] \text{ (N)} \quad (30.10)$$

El factor de fricción  $f$  toma un valor de 0.020 considerando condiciones de trabajo normales.

Tabla para la obtención de factor  $f$

<b>Instalaciones horizontales, o ligeramente inclinadas</b>	
Condiciones de trabajo muy favorables	0.017
<b>Condiciones de trabajo normales</b>	<b>0.020</b>
Condiciones de trabajo desfavorables	0.023 - 0.027
<b>Instalaciones con fuerte pendiente</b>	0.012 - 0.016

(Tomado de DUNLOP (1994), pág. 55)

Por lo que el valor de  $F_H$ , en N, sustituyendo variables por los valores ya obtenidos, valdrá:

$$F_H = 0.020 \times 500 \times 9.81 \times \left[ (26.7 + 10.3) + (2 \times 30 + 104.48) \times \cos 2.9^\circ \right] = 19744.52 \text{ (N)} \quad (30.11)$$

8. Determinación del valor de la resistencia secundaria al movimiento,  $F_N$ .

Este valor se obtendrá a través de la siguiente expresión:

$$F_N = (C - 1) \times F_H \quad (\text{N}) \quad (30.12)$$

El coeficiente C, para una longitud de cinta de 500 metros toma un valor de 1.20.

Valor del coeficiente C

L (m)	3	4	5	6	8	10	13	16	20
C	9.0	7.6	6.6	5.9	5.1	4.5	4.0	3.6	3.0
L (m)	25	32	40	50	63	80	90	100	120
C	2.9	2.6	2.4	2.2	2.0	1.92	1.86	1.78	1.70
L (m)	140	160	180	200	250	300	350	400	450
C	1.63	1.56	1.50	1.45	1.38	1.31	1.27	1.25	1.20
L (m)	500	550	600	700	800	900	1000	1500	2000
C	1.20	1.18	1.17	1.14	1.12	1.10	1.09	1.06	1.00

(Tomado de DUNLOP (1994), pág. 54)

Por lo que el valor de  $F_N$ , en N, sustituyendo variables por los valores ya obtenidos, valdrá:

$$F_N = (1.20 - 1) \times 19744.52 = 3948.91 \quad (\text{N}) \quad (30.13)$$

Determinación del valor de la resistencia por desnivel,  $F_{St}$ .

Este valor se obtendrá a través de la siguiente expresión:

$$F_{St} = \pm H \times g \times m'_L \quad (\text{N}) \quad (30.14)$$

Por lo que el valor de  $F_{St}$ , sabiendo que el desnivel, H, es positivo (cinta ascendente) de 25 m, será:

$$F_{St} = 25 \times 9.81 \times 104.48 = 25623.72 \quad (\text{N}) \quad (30.15)$$

9. Determinación del valor de la fuerza resistente tangencial total,  $F_U$ .

Este valor es el resultado de sumar los valores de las tres resistencias al movimiento anteriores (se estima que no existen fuerzas resistentes especiales,  $F_s$ ):

$$F_U = F_H + F_N + F_{St} \quad (\text{N}) \quad (30.16)$$

Por lo que el valor de  $F_U$  será:

$$F_U = 19744.54 + 3948.91 + 25623.72 = 49317.17 \text{ (N)} \quad (30.17)$$

10. Determinación del valor de la potencia  $P_T$ .

Con todos los términos determinados el valor de la potencia teórica,  $P_T$ , será:

$$P_T = \frac{F_U \text{ (N)} \times v \text{ (m/s)}}{1000} = \frac{49317.17 \text{ N} \times 3.35 \text{ (m/s)}}{1000} = 165.21 \text{ kW} \quad (30.18)$$

11. Determinación del valor de la potencia  $P_M$ .

La potencia motor,  $P_M$ , considerando una eficiencia del 90% será:

$$P_M = \frac{P_T}{\eta} = \frac{165.21 \text{ kW}}{0.90} = 183.57 \text{ kW} \quad (30.19)$$

12. Determinación de la potencia estándar o normalizada  $P_N$ .

Según potencias normalizadas de fabricantes (tabla adjunta) la potencia que se deberá elegir es de 200 kW.

**Potencias estándar de motores eléctricos (kW)**

1.5	2.2	3	4	5.5	7.5	11
15	18.5	22	30	37	45	55
75	90	110	132	160	200	250
315	400	500	630			

(Tomado de DUNLOP, pág. 41)

EJERCICIO 31 SOBRE CINTAS TRANSPORTADORAS

31. Determina la potencia normalizada de selección, en kW, para el motor de una cinta transportadora y su velocidad adecuada, en m/s, para el transporte de carbón bituminoso en una mina sabiendo que la densidad del mineral es  $0.9 \text{ t/m}^3$ , la longitud de la cinta debe ser de 900 metros, sin desnivel, y una sección en artesa a  $30^\circ$  ( $\lambda$ ) formada por un conjunto de tres rodillos y con una anchura de banda de 1200 mm. La cinta transportadora deberá ser capaz de alcanzar una producción de  $550 \text{ m}^3/\text{h}$ .

Valores de los pesos por unidad de longitud de banda:

- Longitud del rodillo,  $L = 465 \text{ mm}$  (DUNLOP (1994), pág. 37)
- Peso de la banda por unidad de longitud de banda,  $m'_G = 30 \text{ kg/m}$ .
- Peso de los rodamientos por unidad de longitud de banda del ramal superior  $m'_{RO} = 24.5 \text{ kg/m}$  (separación entre rodillos 1 m).
- Peso de los rodamientos por unidad de longitud de banda del ramal inferior  $m'_{RU} = 13 \text{ kg/m}$  (separación entre rodillos 2 m).
- Eficiencia del motor = 85%

Solución:

1. Determinación de la capacidad en t/h,  $Q_m$ .

Partiendo del dato de una capacidad horaria volumétrica,  $Q_v$ , de  $550 \text{ m}^3/\text{h}$  y de una densidad para el carbón bituminoso de  $0.9 \text{ t/m}^3$ , el caudal horario en peso será:

$$Q_m = Q_v \times \rho = 550 \text{ m}^3/\text{h} \times 0.9 \text{ t/m}^3 = 495 \text{ t/h} \quad (31.1)$$

2. Determinación de la velocidad de la cinta,  $v$ .

Según recomendación de la siguiente tabla, para el transporte de carbón bituminoso, se recomienda una velocidad entre 1.31 y 3.35 m/s.

**Velocidades de la cinta transportadora recomendadas (m/s)**

Aplicación	v (m/s)
Cargas unitarias, líneas ensambladas	≤ 1.68
Cintas móviles	0.52 - 1.68
Material muy pulverulento: harinas, cemento, etc.	≤ 1.31
Cenizas volantes	≤ 1.68
Caliza triturada, arenas y gravas, grano	1.05 - 2.09
Mineral <b>carbón bituminoso</b> , plantas térmicas, parques de almacenamiento e instalaciones de carga	<b>1.31 - 3.35</b>
Cintas de gran longitud, estériles, lignito	2.62 - 6.60
Cintas lanzadoras (apiladoras)	≥ 8.40
Cintas perfiladas de pendiente pronunciada (diseño Chevron o High Chevron)	0.84 - 2.62

(Tomado de DUNLOP, pág. 35)

Por otro lado, la siguiente tabla nos proporciona la capacidad, en m<sup>3</sup>/h, para una cinta de 1200 mm con una velocidad de 1 m/s y una artesa a 30<sup>a</sup>, siendo esta capacidad de 580 m<sup>3</sup>/h.

Ancho de Banda (mm)	Banda plana (m <sup>3</sup> /h)	Banda en artesa DIN 22107			L <sub>1</sub> = L <sub>2</sub> (mm)	Artesa 20° (m <sup>3</sup> /h)	Artesa 25° (m <sup>3</sup> /h)	Artesa 30° (m <sup>3</sup> /h)	Artesa 35° (m <sup>3</sup> /h)	Artesa 40° (m <sup>3</sup> /h)	Artesa 45° (m <sup>3</sup> /h)
		L <sub>1</sub> (mm)	L <sub>2</sub> (rodillo central) (mm)	Artesa 20° (m <sup>3</sup> /h)							
300	12	132	132		132						
400	23	165	165		165						
500	38	200	200	74	200	74	80	87	91	95	98
650	69	250	250	133	250	133	144	156	164	172	176
800	108	315	315	208	315	208	227	244	258	269	276
1.000	173	380	380	336	380	336	365	394	415	434	445
<b>1.200</b>	255	465	465	494	465	494	537	<b>580</b>	610	638	654
1.400	351	530	530	680	530	680	738	798	840	878	900
1.600	464	530	735	850	600	898	976	1.055	1.110	1.160	1.190
1.800	592	600	800	1.085	670	1.145	1.245	1.340	1.415	1.475	1.515
2.000	735	665	870	1.350	740	1.422	1.545	1.665	1.760	1.835	1.880
2.200	893	735	930	1.675	800	1.730	1.880	2.030	2.140	2.235	2.290
2.400	1.070	800	1.000	2.010	870	2.070	2.250	2.430	2.560	2.670	2.740
2.600	1.260	870	1.060	2.390	940	2.430	2.640	2.850	3.000	3.135	3.220
2.800	1.465	930	1.140	2.770	1.000	2.840	3.085	3.330	3.510	3.660	3.760
3.000	1.683	1.000	1.200	3.200	1.070	3.270	3.550	3.830	4.040	4.210	4.320

Fuente: ITGE (1991). Manual de Arranque, Carga y Transporte en Minería a Cielo Abierto. 664 pp

La capacidad en t/h nos da un valor de:

$$Q_m = 580 \text{ m}^3/\text{h} \times 0.9 \text{ t/m}^3 = 522 \text{ (t/h)/(1 m/s)} \quad (31.2)$$

Luego para obtener 495 t/h se precisa que la cinta tenga una velocidad de:

$$v = \frac{495 \text{ t/h}}{522 \text{ t/h}} = 0.95 \text{ m/s} \quad (31.3)$$

Luego, esta velocidad está por debajo del intervalo recomendado, por lo que iremos a elegir un ancho de banda inferior, concretamente la de 1000 mm. Para esta nueva anchura la capacidad en m<sup>3</sup>/h es de 394.

Ancho de Banda (mm)	Banda plana (m <sup>3</sup> /h)	Banda en artesa DIN 22107			L <sub>1</sub> = L <sub>2</sub> (mm)	Artesa 20° (m <sup>3</sup> /h)	Artesa 25° (m <sup>3</sup> /h)	Artesa 30° (m <sup>3</sup> /h)	Artesa 35° (m <sup>3</sup> /h)	Artesa 40° (m <sup>3</sup> /h)	Artesa 45° (m <sup>3</sup> /h)
		L <sub>1</sub> (mm)	L <sub>2</sub> (rodillo central) (mm)	Artesa 20° (m <sup>3</sup> /h)							
300	12	132	132		132						
400	23	165	165		165						
500	38	200	200	74	200	74	80	87	91	95	98
650	69	250	250	133	250	133	144	156	164	172	176
800	108	315	315	208	315	208	227	244	258	269	276
1.000	173	380	380	336	380	336	365	394	415	434	445
1.200	255	465	465	494	465	494	537	580	610	638	654
1.400	351	530	530	680	530	680	738	798	840	878	900
1.600	464	530	735	850	600	898	976	1.055	1.110	1.160	1.190
1.800	592	600	800	1.085	670	1.145	1.245	1.340	1.415	1.475	1.515
2.000	735	665	870	1.350	740	1.422	1.545	1.665	1.760	1.835	1.880
2.200	893	735	930	1.675	800	1.730	1.880	2.030	2.140	2.235	2.290
2.400	1.070	800	1.000	2.010	870	2.070	2.250	2.430	2.560	2.670	2.740
2.600	1.260	870	1.060	2.390	940	2.430	2.640	2.850	3.000	3.135	3.220
2.800	1.465	930	1.140	2.770	1.000	2.840	3.085	3.330	3.510	3.660	3.760
3.000	1.683	1.000	1.200	3.200	1.070	3.270	3.550	3.830	4.040	4.210	4.320

Fuente: ITGE (1991). Manual de Arranque, Carga y Transporte en Minería a Cielo Abierto. 664 pp

La capacidad en t/h nos da un valor de:

$$Q_m = 394 \text{ m}^3/\text{h} \times 0.9 \text{ t/m}^3 = 354.6 \text{ (t/h)/(1 m/s)} \quad (31.4)$$

Luego para obtener 495 t/h se precisa que la cinta tenga una velocidad de:

$$v = \frac{495 \text{ t/h}}{354.6 \text{ t/h}} = 1.40 \text{ m/s} \quad (31.5)$$

Esta velocidad ya está dentro del intervalo recomendado, pero no es un valor de velocidad normalizado, por lo que adoptaremos el valor superior más próximo de la velocidad normalizada, siendo este de 1.68 m/s que aún está dentro del intervalo recomendado:

### Valores estándar

Velocidades V (m/s)						
0.42	0.52	0.66	0.84	1.05	1.31	1.68
2.09	2.62	3.35	4.19	5.20	6.60	8.40

(Tomado de DUNLOP, pág. 35)

### 3. Determinación del ángulo de inclinación, $\delta$ (°).

El ángulo de inclinación es cero.

### 4. Determinación del ángulo de reposo dinámico, $\beta$ (°).

Para el cálculo del ángulo de reposo dinámico, según la tabla siguiente (DUNLOP (1994), pág. 157), establecemos un valor de 15°.

Material	Bulk Density $\rho$ (t/m <sup>3</sup> )	Surcharge Angle $\beta$ (°)	Maximum Angle of Inclination				Recommended Dunlop Quality
			Smooth Belts	height of profiles 6 mm	16 mm	32 mm	
Carbon pellets	0.35	5	15	20	25	30	RA
Carborundum up to 80mm	1.60	10	15	-	-	-	RS
Casein	0.60	15	15	-	-	-	-
Cast Iron swarf	2.08 - 3.20	20	22	-	-	-	RA
Cement, clinker	1.20 - 1.30	15	18	-	30	30	RE - RS
Cement, dry	1.20	10	20	22	30	30	-
Cement Mortar	2.00	10	8	-	-	-	-
Chalk, broken	1.35 - 1.45	15	17	-	30	30	RA
Chalk, pulverised	1.10 - 1.20	15	15 - 18	-	30	30	RA
Charcoal	0.35	15	20	-	25	30	RA
Chestnuts	0.80	5	8 - 10	-	30	40	-
Chrome Ore	2.00 - 2.24	10	17	-	-	-	RE - RS
Clay, calcined	1.28 - 1.60	15	18	20	30	40	RA - RS
Clay, dry	1.60	15	15	-	25	30	-
Clay, dry	1.60 - 1.80	15	28	20	30	35	-
Clay, dry, lumps	0.96 - 1.20	15	15	20	30	35	RA - RS
Clay, wet	2.00	15	20	-	25	30	-
Clay, wet	1.80 - 2.00	15	15 - 18	20	30	40	-
Coal - Carbón	0.95	10 - 15	10	-	-	30	-
Coal, anthracite up to 3mm	0.95	20	18	20	35	35	RA - BV
Coal dust	0.06 - 0.11	10	5	-	-	-	RA
Coal, pelletized	0.32 - 0.40	-	-	-	-	-	-
Cocoa beans	0.55	10	12	-	-	-	RA
Cocoa powder	0.50	5	20	-	25	30	RA

### 5. Determinación del área de la sección transversal de la carga, A.

Para obtener este valor se aplica la siguiente expresión:

$$0.25 \times \tan \beta \times (L + (b - L) \times \cos \lambda)^2 + L_1 \times \sin \lambda \times (L + L_1 \times \cos \lambda) \quad (\text{m}^2) \quad (31.6)$$

Donde:

$$b = 0.9 \times B - 0.05 \quad (B \leq 2000 \text{ mm}) \quad (31.7)$$

$$b = 0.9 \times 1.200 - 0.05 = 1.03 \text{ m}$$

$$L_1 = 0.5 \times (b - L) \quad (3 \text{ rodillos, } L = 0.465 \text{ m}) \quad (31.8)$$

$$L_1 = 0.5 \times (1.03 - 0.465) = 0.28$$

Luego substituyendo los términos por sus valores ya determinados o previamente conocidos, tendremos un valor de A (m<sup>2</sup>) igual a:

$$0.25 \times \tan 15^\circ \times (0.465 + (1.03 - 0.465) \times \cos 30^\circ)^2 + \quad (31.9)$$

$$+ 0.28 \times \sin 30^\circ \times (0.465 + 0.28 \times \cos 30^\circ) = 0.16 \quad (\text{m}^2)$$

6. Determinación del peso de la carga por unidad de longitud de cinta, m'<sub>L</sub>.

El valor del peso de la carga de mineral por unidad de longitud de cinta, m'<sub>L</sub>, se obtiene a través de la siguiente expresión:

$$m'_L = \frac{Q_m \text{ (t/h)}}{3.6 \times v \text{ (m/s)}} = \frac{495 \text{ (t/h)}}{3.6 \times 1.68 \text{ (m/s)}} = 81.85 \text{ kg/m} \quad (31.10)$$

7. Determinación del valor de la resistencia principal al movimiento, F<sub>H</sub>.

Este valor se obtendrá a través de la siguiente expresión:

$$F_H = f \times L_{\text{cinta}} \times g \times [m'_R + (2 \times m'_G + m'_L) \times \cos \delta] \quad (\text{N}) \quad (31.11)$$

El factor de fricción f toma un valor de 0.020 considerando condiciones de trabajo normales (Dunlop-Enerka, 1994), pero se multiplica por 0.80 para corregir el efecto de la velocidad de la cinta (DUNLOP (1994), pág. 55): f = 0.020 × 0.80 = 0.016.

Tabla para la obtención de factor f

<b>Instalaciones horizontales, o ligeramente inclinadas</b>	
Condiciones de trabajo muy favorables	0.017
<b>Condiciones de trabajo normales</b>	<b>0.020</b>
Condiciones de trabajo desfavorables	0.023 - 0.027
<b>Instalaciones con fuerte pendiente</b>	0.012 - 0.016

(Tomado de DUNLOP (1994), pág. 55)

Por lo que el valor de  $F_H$ , en N, sustituyendo variables por los valores ya obtenidos, valdrá:

$$F_H = 0.016 \times 900 \times 9.81 \times [(24.5 + 13) + (2 \times 30 + 81.85) \times \cos 0^\circ] = 25335.70 \text{ (N)} \quad (31.12)$$

8. Determinación del valor de la resistencia secundaria al movimiento,  $F_N$ .

Este valor se obtendrá a través de la siguiente expresión:

$$F_N = (C - 1) \times F_H \text{ (N)} \quad (31.13)$$

El coeficiente C, para una longitud de cinta de 900 metros toma un valor de 1.10.

Valor del coeficiente C

L (m)	3	4	5	6	8	10	13	16	20
C	9.0	7.6	6.6	5.9	5.1	4.5	4.0	3.6	3.0
L (m)	25	32	40	50	63	80	90	100	120
C	2.9	2.6	2.4	2.2	2.0	1.92	1.86	1.78	1.70
L (m)	140	160	180	200	250	300	350	400	450
C	1.63	1.56	1.50	1.45	1.38	1.31	1.27	1.25	1.20
L (m)	500	550	600	700	800	900	1000	1500	2000
C	1.20	1.18	1.17	1.14	1.12	1.10	1.09	1.06	1.00

(Tomado de DUNLOP (1994), pág. 54)

Por lo que el valor de  $F_N$ , en N, substituyendo variables por los valores ya obtenidos, valdrá:

$$F_N = (1.10 - 1) \times 25335.70 = 2533.57 \text{ (N)} \quad (31.14)$$

9. Determinación del valor de la resistencia por desnivel,  $F_{st}$ .

Este valor no se aplica al no haber desnivel.

10. Determinación del valor de las fuerzas resistentes especiales,  $F_s$ .

Este valor no se aplica al no haber instalados elementos especiales.

11. Determinación del valor de la fuerza resistente tangencial total,  $F_U$ .

Este valor es el resultado de sumar los valores de las dos resistencias al movimiento anteriores:

$$F_U = F_H + F_N \text{ (N)} \quad (31.15)$$

Por lo que el valor de  $F_U$  será:

$$F_U = 25335.70 + 2533.57 = 27869.27 \text{ (N)} \quad (31.16)$$

12. Determinación del valor de la potencia  $P_T$ .

Con todos los términos determinados el valor de la potencia teórica,  $P_T$ , será:

$$P_T = \frac{F_U \text{ (N)} \times v \text{ (m/s)}}{1000} = \frac{27869.27 \text{ N} \times 1.68 \text{ (m/s)}}{1000} = 46.82 \text{ kW} \quad (31.17)$$

13. Determinación del valor de la potencia  $P_M$ .

La potencia motor,  $P_M$ , considerando una eficiencia del 85% será:

$$P_M = \frac{P_T}{\eta} = \frac{46.82 \text{ kW}}{0.85} = 55.08 \text{ kW} \quad (31.18)$$

14. Determinación de la potencia estándar o normalizada  $P_N$ .

Según potencias normalizadas de fabricantes (tabla adjunta) la potencia que se podría elegir es de 55 kW (o también la de 75 kW si se quiere elegir un motor con margen de maniobra ante imprevistos de picos de producción).

**Potencias estándar de motores eléctricos (kW)**

1.5	2.2	3	4	5.5	7.5	11
15	18.5	22	30	37	45	55
75	90	110	132	160	200	250
315	400	500	630			

(Tomado de DUNLOP, pág. 41)

Referencias:

Dunlop-Enerka. (1994). *Conveyor belt technique. Design and calculation. Manual* (D.-E. Belting, Ed.)

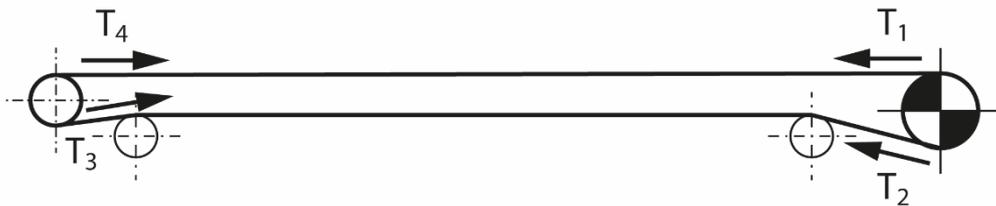
EJERCICIO 32 SOBRE CINTAS TRANSPORTADORAS

32. Determina las tensiones principales que se producen en los tambores de cabeza y cola de una cinta transportadora con accionamiento por un solo tambor motriz en cabeza (ver esquema adjunto). Sabiendo que la longitud de la cinta debe ser de 600 metros, sin desnivel, con una anchura de banda de 1200 mm, un arco de abrazado de  $210^\circ$  y un coeficiente de fricción ( $\mu$ ) igual a 0.25. La capacidad de la cinta será de 1750 t/h y su velocidad de 5.20 m/s. Además, se facilitan los datos siguientes:

Valores de los pesos por unidad de longitud de banda:

- Peso de la banda por unidad de longitud de banda,  $m'_G = 30 \text{ kg/m}$ .
- Peso de los rodamientos por unidad de longitud de banda del ramal superior  $m'_{RO} = 26.7 \text{ kg/m}$  (separación entre rodillos 1 m).
- Peso de los rodamientos por unidad de longitud de banda del ramal inferior  $m'_{RU} = 10.3 \text{ kg/m}$  (separación entre rodillos 2 m).
- Factor de fricción,  $f = 0.020$  (condiciones de trabajo normales)

Caso 1. Esquema de accionamiento por un solo tambor motriz en cabeza



PMP2022

Solución:

1. Determinación del peso de la carga por unidad de longitud de cinta,  $m'_L$ .

El valor del peso de la carga de mineral por unidad de longitud de cinta,  $m'_L$ , se obtiene a través de la siguiente expresión:

$$m'_L = \frac{Q_m \text{ (t/h)}}{3.6 \times v \text{ (m/s)}} = \frac{1750 \text{ (t/h)}}{3.6 \times 5.20 \text{ (m/s)}} = 93.48 \text{ kg/m} \quad (32.1)$$

2. Determinación de la resistencia al movimiento del ramal superior,  $F_s$ .

Para obtener el valor de esta resistencia se emplea la siguiente expresión:

$$F_s = C \times f \times L \times g \times [m'_L + m'_G + m'_{RO}] \quad (32.2)$$

Para el valor del coeficiente C, se obtiene un valor de 1.17, según la tabla siguiente:

Valor del coeficiente C

L (m)	3	4	5	6	8	10	13	16	20
C	9.0	7.6	6.6	5.9	5.1	4.5	4.0	3.6	3.0
L (m)	25	32	40	50	63	80	90	100	120
C	2.9	2.6	2.4	2.2	2.0	1.92	1.86	1.78	1.70
L (m)	140	160	180	200	250	300	350	400	450
C	1.63	1.56	1.50	1.45	1.38	1.31	1.27	1.25	1.20
L (m)	500	550	600	700	800	900	1000	1500	2000
C	1.20	1.18	1.17	1.14	1.12	1.10	1.09	1.06	1.00

(Tomado de DUNLOP (1994), pág. 54)

Por lo que sustituyendo las variables de la ecuación anterior por sus valores correspondientes se tiene un valor de la resistencia  $F_s$  de:

$$F_s = 1.17 \times 0.020 \times 600 \times 9.81 \times [93.48 + 30 + 26.7] = 20684.65 \text{ N} \quad (32.3)$$

### 3. Determinación de la resistencia al movimiento del ramal inferior, $F_I$ .

Para obtener el valor de esta resistencia se emplea la siguiente expresión:

$$F_I = C \times f \times L \times g \times [m'_G + m'_{Ru}] \quad (32.4)$$

Por lo que sustituyendo las variables de la ecuación anterior por sus valores correspondientes se tiene un valor de la resistencia  $F_I$  de:

$$F_I = 1.17 \times 0.020 \times 600 \times 9.81 \times [30 + 10.3] = 5550.62 \text{ N} \quad (32.5)$$

### 4. Determinación del valor de la resistencia total al movimiento, $F_U$ .

Este valor se obtendrá a través de la siguiente expresión:

$$F_U = C \times f \times L_{\text{cinta}} \times g \times [m'_{Ro} + m'_{Ru} + 2 \times m'_G + m'_L] \quad (\text{N}) \quad (32.6)$$

Por lo que el valor de  $F_U$ , en N, sustituyendo variables por los valores ya obtenidos, valdrá:

$$F_U = 1.17 \times 0.020 \times 600 \times 9.81 \times [26.7 + 10.3 + 2 \times 30 + 93.48] = 26235.27 \text{ (N)} \quad (32.7)$$

5. Determinación de las tensiones principales  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  y  $T_4$ .

Sus valores se obtienen con las siguientes expresiones:

$$T_1 = F_U \times \left( 1 + \frac{1}{e^{\mu\alpha} - 1} \right) \text{ (N)} \quad (32.8)$$

$$T_2 = T_1 - F_U \text{ (N)} \quad (32.9)$$

$$T_3 = T_2 + F_1 - H \times m'_G \text{ (N)} \quad (32.10)$$

$$T_4 = T_3 \text{ (N)} \quad (32.11)$$

Para el valor de  $\left( 1 + \frac{1}{e^{\mu\alpha} - 1} \right)$ , conociendo que el ángulo de abrazado ( $\alpha$ ) es  $210^\circ$  y el coeficiente de fricción ( $\mu$ ) es de 0.25, según la siguiente tabla, este valor es de 1.67:

Valores para  $C1 = 1 + \frac{1}{e^{\mu\alpha} - 1}$

Ángulo de abrazado ( $^\circ$ ) $\alpha$	Coeficiente de fricción = $\mu$								
	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
170	3.90	2.78	2.23	1.91	1.69	1.54	1.44	1.35	1.29
175	3.80	2.72	2.19	1.87	1.67	1.52	1.42	1.34	1.28
180	3.70	2.66	2.15	1.83	1.64	1.50	1.40	1.32	1.26
185	3.62	2.60	2.10	1.80	1.61	1.48	1.38	1.30	1.25
190	3.55	2.55	2.06	1.77	1.59	1.46	1.36	1.29	1.23
195	3.47	2.50	2.02	1.74	1.56	1.44	1.34	1.28	1.22
200	3.41	2.45	1.99	1.71	1.54	1.42	1.33	1.26	1.21
205	3.32	2.41	1.96	1.69	1.52	1.40	1.31	1.25	1.20
210	3.28	2.36	1.93	1.67	1.50	1.38	1.30	1.24	1.19

(Tomado de ContiTech (1994), pág. 49)

Por lo que el valor de estas tensiones, en N, sustituyendo variables por los valores ya conocidos, valdrá:

$$T_1 = 26235.27 \times 1.67 = 43812.9 \text{ (N)} \quad (32.12)$$

$$T_2 = 43812.27 - 26235.27 = 17577.63 \text{ (N)} \quad (32.13)$$

$$T_3 = 17577.63 + 5550.62 - 0 \times 30 = 23128.25 \text{ (N)} \quad (32.14)$$

$$T_4 = T_3 = 23128.25 \text{ (N)} \quad (32.15)$$

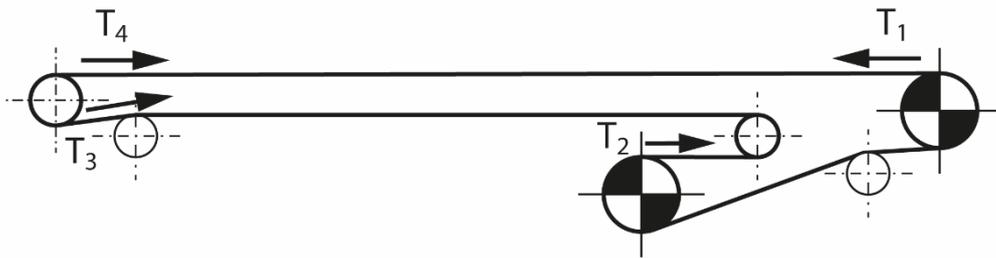
EJERCICIO 33 SOBRE CINTAS TRANSPORTADORAS

33. Determina las tensiones principales que se producen en los tambores de cabeza y cola de una cinta transportadora con accionamiento por dos tambores motrices en cabeza (ver esquema adjunto). Sabiendo que la longitud de la cinta debe ser de 600 metros, sin desnivel, una anchura de banda de 1200 mm, un arco de abrazado ( $\alpha_1$ ) de  $180^\circ$  y un coeficiente de fricción ( $\mu_1$ ) igual a 0.25 (tambor 1), un arco de abrazado ( $\alpha_2$ ) de  $210^\circ$  y un coeficiente de fricción ( $\mu_2$ ) igual a 0.25 (tambor 2). La capacidad de la cinta será de 1750 t/h y su velocidad de 5.20 m/s. Además, se facilitan los datos siguientes:

Valores de los pesos por unidad de longitud de banda:

- Peso de la banda por unidad de longitud de banda,  $m'_G = 30 \text{ kg/m}$ .
- Peso de los rodamientos por unidad de longitud de banda del ramal superior  $m'_{RO} = 26.7 \text{ kg/m}$  (separación entre rodillos 1 m).
- Peso de los rodamientos por unidad de longitud de banda del ramal inferior  $m'_{RU} = 10.3 \text{ kg/m}$  (separación entre rodillos 2 m).
- Factor de fricción,  $f = 0.020$  (condiciones de trabajo normales)

Caso 2. Esquema de accionamiento por dos tambores motrices en cabeza



PMP2022

Solución:

1. Determinación del peso de la carga por unidad de longitud de cinta,  $m'_L$ .

El valor del peso de la carga de mineral por unidad de longitud de cinta,  $m'_L$ , se obtiene a través de la siguiente expresión:

$$m'_L = \frac{Q_m \text{ (t/h)}}{3.6 \times v \text{ (m/s)}} = \frac{1750 \text{ (t/h)}}{3.6 \times 5.20 \text{ (m/s)}} = 93.48 \text{ kg/m} \quad (33.1)$$

2. Determinación de la resistencia al movimiento del ramal superior,  $F_s$ .

Para obtener el valor de esta resistencia se emplea la siguiente expresión:

$$F_s = C \times f \times L \times g \times [m'_L + m'_G + m'_{Ro}] \quad (33.2)$$

Para el valor del coeficiente C, se obtiene un valor de 1.17, según la tabla siguiente:

Valor del coeficiente C

L (m)	3	4	5	6	8	10	13	16	20
C	9.0	7.6	6.6	5.9	5.1	4.5	4.0	3.6	3.0
L (m)	25	32	40	50	63	80	90	100	120
C	2.9	2.6	2.4	2.2	2.0	1.92	1.86	1.78	1.70
L (m)	140	160	180	200	250	300	350	400	450
C	1.63	1.56	1.50	1.45	1.38	1.31	1.27	1.25	1.20
L (m)	500	550	600	700	800	900	1000	1500	2000
C	1.20	1.18	1.17	1.14	1.12	1.10	1.09	1.06	1.00

(Tomado de DUNLOP (1994), pág. 54)

Por lo que sustituyendo las variables de la ecuación anterior por sus valores correspondientes se tiene un valor de la resistencia  $F_S$  de:

$$F_S = 1.17 \times 0.020 \times 600 \times 9.81 \times [93.48 + 30 + 26.7] = 20684.65 \text{ N} \quad (33.3)$$

3. Determinación de la resistencia al movimiento del ramal inferior,  $F_I$ .

Para obtener el valor de esta resistencia se emplea la siguiente expresión:

$$F_I = C \times f \times L \times g \times [m'_G + m'_{Ru}] \quad (33.4)$$

Por lo que sustituyendo las variables de la ecuación anterior por sus valores correspondientes se tiene un valor de la resistencia  $F_I$  de:

$$F_I = 1.17 \times 0.020 \times 600 \times 9.81 \times [30 + 10.3] = 5550.62 \text{ N} \quad (33.5)$$

4. Determinación del valor de la resistencia total al movimiento,  $F_U$ .

Este valor se obtendrá a través de la siguiente expresión:

$$F_U = C \times f \times L_{\text{cinta}} \times g \times [m'_{Ro} + m'_{Ru} + 2 \times m'_G + m'_L] \quad (\text{N}) \quad (33.6)$$

Por lo que el valor de  $F_U$ , en N, sustituyendo variables por los valores ya obtenidos, valdrá:

$$F_U = 1.17 \times 0.020 \times 600 \times 9.81 \times [26.7 + 10.3 + 2 \times 30 + 93.48] = 26235.27 \text{ (N)} \quad (33.7)$$

5. Determinación de la fuerza periférica en el tambor 2,  $F_{U2}$

Para calcular esta fuerza periférica del tambor 2, se ha de obtener el valor del factor x, para las condiciones de ángulos de abrazado ( $180^\circ$  y  $210^\circ$ ) y de coeficientes de fricción (0.25). Según la tabla siguiente el valor de este factor x será de 2.0:

Factor "x" para diferentes sistemas motrices

Tambor motriz 2	Ángulo abrazado $\alpha_1$			Tambor motriz 1		
	$160^\circ$	$170^\circ$	$180^\circ$	$190^\circ$	$200^\circ$	$210^\circ$
$\mu = 0.25$						
$\alpha_2$						
$160^\circ$	2.00	2.20	2.40	2.60	2.80	3.00
$170^\circ$	1.90	2.10	2.30	2.48	2.67	2.86
$180^\circ$	1.83	2.02	2.20	2.38	2.57	2.75
$190^\circ$	1.77	1.95	2.12	2.30	2.48	2.65
$200^\circ$	1.71	1.89	2.06	2.23	2.40	2.57
$210^\circ$	1.67	1.83	2.00	2.17	2.33	2.50
$\mu = 0.3$						
$\alpha_2$						
$160^\circ$	2.31	2.53	2.76	3.00	3.26	3.53
$170^\circ$	2.22	2.43	2.66	2.89	3.14	3.40
$180^\circ$	2.15	2.35	2.57	2.79	3.03	3.28
$190^\circ$	2.08	2.28	2.48	2.70	2.93	3.18
$200^\circ$	2.02	2.21	2.41	2.62	2.85	3.08
$210^\circ$	1.97	2.15	2.35	2.55	2.77	3.00
$\mu = 0.35$						
$\alpha_2$						
$160^\circ$	2.66	2.92	3.20	3.51	3.84	4.18
$170^\circ$	2.56	2.82	3.10	3.39	3.70	4.03
$180^\circ$	2.48	2.74	3.00	3.29	3.59	3.91
$190^\circ$	2.41	2.66	2.92	3.19	3.48	3.80
$200^\circ$	2.35	2.58	2.84	3.11	3.39	3.70
$210^\circ$	2.29	2.52	2.77	3.03	3.31	3.61

Tomado de DUNLOP (1994), pág. 62

Cumpléndose para el valor de  $F_{U2}$ :

$$F_{U2} = \frac{F_U}{x + 1} \text{ (N)} \quad (33.8)$$

Luego, sustituyendo valores tenemos que:

$$F_{U2} = \frac{26235.27}{2.0 + 1} = 8745.09 \text{ (N)} \quad (33.9)$$

6. Determinación de la fuerza periférica en el tambor 1,  $F_{U1}$

Se emplea la siguiente expresión para obtener el valor de  $F_{U1}$ :

$$F_{U1} = F_U - F_{U2} = 26235.27 - 8745.09 = 17490.18 \quad (\text{N}) \quad (33.10)$$

7. Determinación de las potencias para los tambores 1 y 2,  $P_1$  y  $P_2$

La potencia total,  $P_T$  vendrá dada como:

$$P_T = \frac{Q_m \text{ (t/h)}}{3.6 \times v \text{ (m/s)}} = \frac{1750 \text{ t/h}}{3.6 \times 5.20 \text{ m/s}} = 93.48 \text{ kW} \quad (33.11)$$

Por otro lado, cuando se tienen dos tambores motrices se cumple el siguiente sistema ecuaciones formado por las potencias individuales de esos dos motores y la potencia teórica total:

$$\begin{aligned} P_T &= P_1 + P_2 \quad \text{kW} \\ P_2 &= \frac{P_T}{x + 1} \quad \text{kW} \end{aligned} \quad (33.12)$$

$$\begin{aligned} 93.48 &= P_1 + P_2 \quad \text{kW} \\ P_2 &= \frac{93.48}{2.0 + 1} = \frac{93.48}{3} = 31.16 \quad \text{kW} \\ P_1 &= 93.48 - P_2 \\ P_1 &= 93.48 - 31.16 = 62.32 \quad \text{kW} \end{aligned} \quad (33.13)$$

8. Determinación de las tensiones principales  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  y  $T_4$ .

Como se cumple la siguiente condición:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{62.32 \text{ kW}}{31.16 \text{ kW}} = 1.99 \leq x = 2.0 \quad (33.14)$$

Entonces se puede establecer la siguiente relación entre  $T_1$  y  $T_2$ :

$$\begin{aligned} T_2 &= F_{U2} \times \frac{1}{e^{\mu\alpha_2} - 1} \\ T_1 &= T_2 + F_U \end{aligned} \quad (33.15)$$

Para el valor de  $\left(\frac{1}{e^{\mu\alpha_2} - 1}\right)$ , conociendo que el ángulo de abrazado ( $\alpha_2$ ) es  $210^\circ$  y el coeficiente de fricción ( $\mu$ ) es de 0.25, según la siguiente tabla, este valor es de 0.67 (1.67-1):

Valores para  $C_1 = 1 + \frac{1}{e^{\mu\alpha} - 1}$

Ángulo de abrazado ( $^\circ$ ) $\alpha$	Coeficiente de fricción = $\mu$								
	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
170	3.90	2.78	2.23	1.91	1.69	1.54	1.44	1.35	1.29
175	3.80	2.72	2.19	1.87	1.67	1.52	1.42	1.34	1.28
180	3.70	2.66	2.15	1.83	1.64	1.50	1.40	1.32	1.26
185	3.62	2.60	2.10	1.80	1.61	1.48	1.38	1.30	1.25
190	3.55	2.55	2.06	1.77	1.59	1.46	1.36	1.29	1.23
195	3.47	2.50	2.02	1.74	1.56	1.44	1.34	1.28	1.22
200	3.41	2.45	1.99	1.71	1.54	1.42	1.33	1.26	1.21
205	3.32	2.41	1.96	1.69	1.52	1.40	1.31	1.25	1.20
210	3.28	2.36	1.93	1.67	1.50	1.38	1.30	1.24	1.19

(Tomado de ContiTech (1994), pág. 49)

Luego, los valores de  $T_1$  y  $T_2$ , valdrán:

$$T_2 = 8745.09 \times 0.67 = 5859.21 \text{ N}$$

$$T_1 = 5859.21 + 26235.27 = 32094.48 \text{ N} \quad (33.16)$$

Para los valores de  $T_3$  y  $T_4$ , se tienen las siguientes expresiones:

$$T_3 = T_2 + F_{U1} - H \times m'_G \quad (\text{N}) \quad (33.17)$$

$$T_4 = T_3 \quad (\text{N}) \quad (33.18)$$

Por lo que el valor de estas tensiones, en N, sustituyendo variables por los valores ya conocidos, valdrá:

$$T_3 = 5859.21 + 17490.18 - 0 \times 30 = 23349.39 \text{ (N)} \quad (33.19)$$

$$T_4 = T_3 = 23349.39 \text{ (N)} \quad (33.20)$$

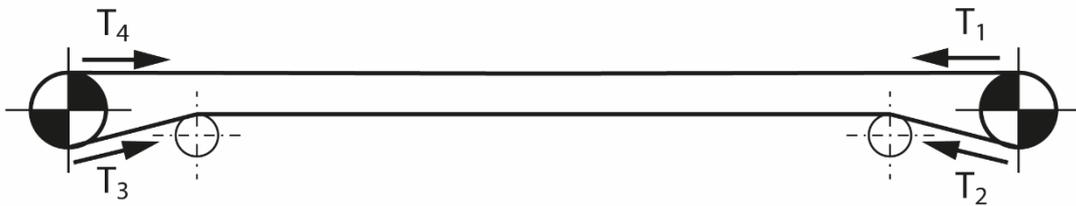
EJERCICIO 34 SOBRE CINTAS TRANSPORTADORAS

34. Determina las tensiones principales que se producen en los tambores de cabeza y cola de una cinta transportadora con accionamiento por dos tambores motrices en cabeza y cola (ver esquema adjunto). Sabiendo que la longitud de la cinta debe ser de 600 metros, sin desnivel, una anchura de banda de 1200 mm, un arco de abrazado ( $\alpha_1$ ) de  $180^\circ$  y un coeficiente de fricción ( $\mu_1$ ) igual a 0.25 (tambor cabeza), un arco de abrazado ( $\alpha_2$ ) de  $210^\circ$  y un coeficiente de fricción ( $\mu_2$ ) igual a 0.25 (tambor cola). La capacidad de la cinta será de 1750 t/h y su velocidad de 5.20 m/s. Además, se facilitan los datos siguientes:

Valores de los pesos por unidad de longitud de banda:

- Peso de la banda por unidad de longitud de banda,  $m'_G = 30 \text{ kg/m}$ .
- Peso de los rodamientos por unidad de longitud de banda del ramal superior  $m'_{RO} = 26.7 \text{ kg/m}$  (separación entre rodillos 1 m).
- Peso de los rodamientos por unidad de longitud de banda del ramal inferior  $m'_{RU} = 10.3 \text{ kg/m}$  (separación entre rodillos 2 m).
- Factor de fricción,  $f = 0.020$  (condiciones de trabajo normales)

Caso 3. Esquema de accionamiento motriz en cabeza y cola



PMP2022

Solución:

1. Determinación del peso de la carga por unidad de longitud de cinta,  $m'_L$ .

El valor del peso de la carga de mineral por unidad de longitud de cinta,  $m'_L$ , se obtiene a través de la siguiente expresión:

$$m'_L = \frac{Q_m \text{ (t/h)}}{3.6 \times v \text{ (m/s)}} = \frac{1750 \text{ (t/h)}}{3.6 \times 5.20 \text{ (m/s)}} = 93.48 \text{ kg/m} \quad (34.1)$$

2. Determinación de la resistencia al movimiento del ramal superior,  $F_s$ .

Para obtener el valor de esta resistencia se emplea la siguiente expresión:

$$F_s = C \times f \times L \times g \times [m'_L + m'_G + m'_{Ro}] \quad (34.2)$$

Para el valor del coeficiente C, se obtiene un valor de 1.17, según la tabla siguiente:

Valor del coeficiente C

L (m)	3	4	5	6	8	10	13	16	20
C	9.0	7.6	6.6	5.9	5.1	4.5	4.0	3.6	3.0
L (m)	25	32	40	50	63	80	90	100	120
C	2.9	2.6	2.4	2.2	2.0	1.92	1.86	1.78	1.70
L (m)	140	160	180	200	250	300	350	400	450
C	1.63	1.56	1.50	1.45	1.38	1.31	1.27	1.25	1.20
L (m)	500	550	600	700	800	900	1000	1500	2000
C	1.20	1.18	1.17	1.14	1.12	1.10	1.09	1.06	1.00

(Tomado de DUNLOP (1994), pág. 54)

Por lo que sustituyendo las variables de la ecuación anterior por sus valores correspondientes se tiene un valor de la resistencia  $F_s$  de:

$$F_s = 1.17 \times 0.020 \times 600 \times 9.81 \times [93.48 + 30 + 26.7] = 20684.65 \text{ N} \quad (34.3)$$

### 3. Determinación de la resistencia al movimiento del ramal inferior, $F_I$ .

Para obtener el valor de esta resistencia se emplea la siguiente expresión:

$$F_I = C \times f \times L \times g \times [m'_G + m'_{Ru}] \quad (34.4)$$

Por lo que sustituyendo las variables de la ecuación anterior por sus valores correspondientes se tiene un valor de la resistencia  $F_I$  de:

$$F_I = 1.17 \times 0.020 \times 600 \times 9.81 \times [30 + 10.3] = 5550.62 \text{ N} \quad (34.5)$$

### 4. Determinación del valor de la resistencia total al movimiento, $F_U$ .

Este valor se obtendrá a través de la siguiente expresión:

$$F_U = C \times f \times L_{\text{cinta}} \times g \times [m'_{Ro} + m'_{Ru} + 2 \times m'_G + m'_L] \quad (\text{N}) \quad (34.6)$$

Por lo que el valor de  $F_U$ , en N, sustituyendo variables por los valores ya obtenidos, valdrá:

$$F_U = 1.17 \times 0.020 \times 600 \times 9.81 \times [26.7 + 10.3 + 2 \times 30 + 93.48] = 26235.27 \text{ (N)} \quad (34.7)$$

5. Determinación de la fuerza periférica en el tambor 2,  $F_{U2}$

Para calcular esta fuerza periférica del tambor 2, se ha de obtener el valor del factor  $x$ , para las condiciones de ángulos de abrazado ( $180^\circ$  y  $210^\circ$ ) y de coeficientes de fricción (0.25). Según la tabla siguiente el valor de este factor  $x$  será de 2.0:

Factor "x" para diferentes sistemas motrices

Tambor motriz 2	Ángulo abrazado $\alpha_1$			Tambor motriz 1		
$\mu = 0.25$	<b>160°</b>	<b>170°</b>	<b>180°</b>	<b>190°</b>	<b>200°</b>	<b>210°</b>
$\alpha_2$	160°	170°	180°	190°	200°	210°
	2.00	2.20	2.40	2.60	2.80	3.00
	1.90	2.10	2.30	2.48	2.67	2.86
	1.83	2.02	2.20	2.38	2.57	2.75
	1.77	1.95	2.12	2.30	2.48	2.65
	1.71	1.89	2.06	2.23	2.40	2.57
	1.67	1.83	2.00	2.17	2.33	2.50
$\mu = 0.3$	<b>160°</b>	<b>170°</b>	<b>180°</b>	<b>190°</b>	<b>200°</b>	<b>210°</b>
$\alpha_2$	160°	170°	180°	190°	200°	210°
	2.31	2.53	2.76	3.00	3.26	3.53
	2.22	2.43	2.66	2.89	3.14	3.40
	2.15	2.35	2.57	2.79	3.03	3.28
	2.08	2.28	2.48	2.70	2.93	3.18
	2.02	2.21	2.41	2.62	2.85	3.08
	1.97	2.15	2.35	2.55	2.77	3.00
$\mu = 0.35$	<b>160°</b>	<b>170°</b>	<b>180°</b>	<b>190°</b>	<b>200°</b>	<b>210°</b>
$\alpha_2$	160°	170°	180°	190°	200°	210°
	2.66	2.92	3.20	3.51	3.84	4.18
	2.56	2.82	3.10	3.39	3.70	4.03
	2.48	2.74	3.00	3.29	3.59	3.91
	2.41	2.66	2.92	3.19	3.48	3.80
	2.35	2.58	2.84	3.11	3.39	3.70
	2.29	2.52	2.77	3.03	3.31	3.61

Tomado de DUNLOP (1994), pág. 62

Cumpléndose para el valor de  $F_{U2}$ :

$$F_{U2} = \frac{F_U}{x + 1} \text{ (N)} \quad (34.8)$$

Luego, sustituyendo valores tenemos que:

$$F_{U2} = \frac{26235.27}{2.0 + 1} = 8745.09 \text{ (N)} \quad (34.9)$$

6. Determinación de la fuerza periférica en el tambor 1,  $F_{U1}$

Se emplea la siguiente expresión para obtener el valor de  $F_{U1}$ :

$$F_{U1} = F_U - F_{U2} = 26235.27 - 8745.09 = 17490.18 \text{ (N)} \quad (34.10)$$

7. Determinación de las potencias para los tambores 1 y 2,  $P_1$  y  $P_2$

La potencia total,  $P_T$  vendrá dada como:

$$P_T = \frac{Q_m \text{ (t/h)}}{3.6 \times v \text{ (m/s)}} = \frac{1750 \text{ t/h}}{3.6 \times 5.20 \text{ m/s}} = 93.48 \text{ kW} \quad (34.11)$$

Por otro lado, cuando se tienen dos tambores motrices se cumple el siguiente sistema ecuaciones formado por las potencias individuales de esos dos motores y la potencia teórica total:

$$\begin{aligned} P_T &= P_1 + P_2 \text{ kW} \\ P_2 &= \frac{P_T}{x+1} \text{ kW} \end{aligned} \quad (34.12)$$

$$\begin{aligned} 93.48 &= P_1 + P_2 \text{ kW} \\ P_2 &= \frac{93.48}{2.0+1} = \frac{93.48}{3} = 31.16 \text{ kW} \\ P_1 &= 93.48 - P_2 \\ P_1 &= 93.48 - 31.16 = 62.32 \text{ kW} \end{aligned} \quad (34.13)$$

8. Determinación de las tensiones principales  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  y  $T_4$ .

Como se cumple la siguiente condición:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{62.32 \text{ kW}}{31.16 \text{ kW}} = 1.99 \leq x = 2.0 \quad (34.14)$$

Entonces se puede establecer la siguiente relación entre  $T_1$  y  $T_2$ :

$$\begin{aligned} T_2 &= F_{U2} \times \frac{1}{e^{\mu \cdot \alpha_2} - 1} \\ T_1 &= T_2 + F_U \end{aligned} \quad (34.15)$$

Para el valor de  $\left(\frac{1}{e^{\mu \cdot \alpha_2} - 1}\right)$ , conociendo que el ángulo de abrazado ( $\alpha_2$ ) es  $210^\circ$  y el coeficiente de fricción ( $\mu$ ) es de 0.25, según la siguiente tabla, este valor es de 0.67 (1.67-1):

$$\text{Valores para } C_1 = 1 + \frac{1}{e^{\mu \cdot \alpha} - 1}$$

Ángulo de abrazado ( $^\circ$ ) $\alpha$	Coeficiente de fricción = $\mu$								
	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
170	3.90	2.78	2.23	1.91	1.69	1.54	1.44	1.35	1.29
175	3.80	2.72	2.19	1.87	1.67	1.52	1.42	1.34	1.28
180	3.70	2.66	2.15	1.83	1.64	1.50	1.40	1.32	1.26
185	3.62	2.60	2.10	1.80	1.61	1.48	1.38	1.30	1.25
190	3.55	2.55	2.06	1.77	1.59	1.46	1.36	1.29	1.23
195	3.47	2.50	2.02	1.74	1.56	1.44	1.34	1.28	1.22
200	3.41	2.45	1.99	1.71	1.54	1.42	1.33	1.26	1.21
205	3.32	2.41	1.96	1.69	1.52	1.40	1.31	1.25	1.20
210	3.28	2.36	1.93	1.67	1.50	1.38	1.30	1.24	1.19

(Tomado de ContiTech (1994), pág. 49)

Luego, los valores de  $T_1$  y  $T_2$ , valdrán:

$$\begin{aligned} T_2 &= 8745.09 \times 0.67 = 5859.21 \text{ N} \\ T_1 &= 5859.21 + 26235.27 = 32094.48 \text{ N} \end{aligned} \quad (34.16)$$

Para los valores de  $T_3$  y  $T_4$ , se tienen las siguientes expresiones:

$$T_3 = F_{U2} \times \left(1 + \frac{1}{e^{\mu_2 \cdot \alpha_2} - 1}\right) \quad (\text{N}) \quad (34.17)$$

El valor del paréntesis se obtiene de la siguiente tabla, que da un valor de 1.67 para las condiciones del tambor motriz de cola.

$$T_4 = T_3 - F_{U2} \quad (\text{N}) \quad (34.18)$$

Valores para  $C_1 = 1 + \frac{1}{e^{\mu\alpha} - 1}$

Ángulo de abrazado (°) $\alpha$	Coeficiente de fricción = $\mu$									
	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	
170	3.90	2.78	2.23	1.91	1.69	1.54	1.44	1.35	1.29	
175	3.80	2.72	2.19	1.87	1.67	1.52	1.42	1.34	1.28	
180	3.70	2.66	2.15	1.83	1.64	1.50	1.40	1.32	1.26	
185	3.62	2.60	2.10	1.80	1.61	1.48	1.38	1.30	1.25	
190	3.55	2.55	2.06	1.77	1.59	1.46	1.36	1.29	1.23	
195	3.47	2.50	2.02	1.74	1.56	1.44	1.34	1.28	1.22	
200	3.41	2.45	1.99	1.71	1.54	1.42	1.33	1.26	1.21	
205	3.32	2.41	1.96	1.69	1.52	1.40	1.31	1.25	1.20	
210	3.28	2.36	1.93	1.67	1.50	1.38	1.30	1.24	1.19	

(Tomado de ContiTech (1994), pág. 49)

Por lo que el valor de estas tensiones, en N, sustituyendo variables por los valores ya conocidos, valdrá:

$$T_3 = 8745.09 \times (1.67) = 14604.30 \text{ (N)} \quad (34.19)$$

$$T_4 = T_3 - F_{U2} = 14604.30 - 8745.09 = 5859.21 \text{ (N)} \quad (34.20)$$

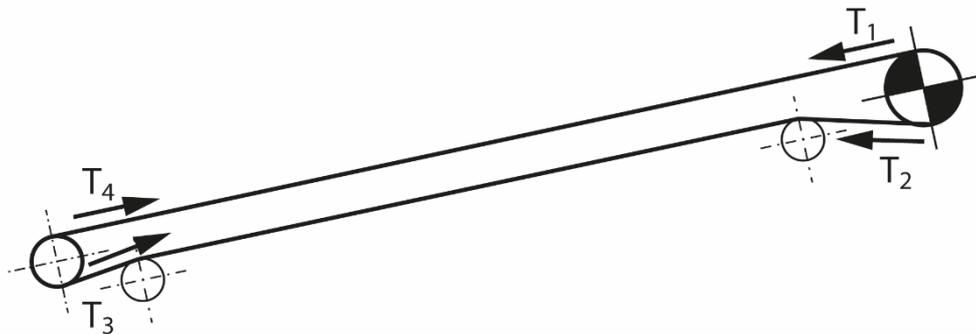
EJERCICIO 35 SOBRE CINTAS TRANSPORTADORAS

35. Determina las tensiones principales que se producen en los tambores de cabeza y cola de una cinta transportadora con accionamiento por un solo tambor motriz en cabeza (ver esquema adjunto). Sabiendo que la longitud de la cinta debe ser de 600 metros, un desnivel de 30 metros, una anchura de banda de 1200 mm, un arco de abrazado de  $210^\circ$  y un coeficiente de fricción ( $\mu$ ) igual a 0.25. La capacidad de la cinta será de 1750 t/h y su velocidad de 5.20 m/s. Además, se facilitan los datos siguientes:

Valores de los pesos por unidad de longitud de banda:

- Peso de la banda por unidad de longitud de banda,  $m'_G = 30 \text{ kg/m}$ .
- Peso de los rodamientos por unidad de longitud de banda del ramal superior  $m'_{RO} = 26.7 \text{ kg/m}$  (separación entre rodillos 1 m).
- Peso de los rodamientos por unidad de longitud de banda del ramal inferior  $m'_{RU} = 10.3 \text{ kg/m}$  (separación entre rodillos 2 m).
- Factor de fricción,  $f = 0.020$  (condiciones de trabajo normales)

Caso 4. Esquema de accionamiento por un solo tambor motriz en cabeza. Ascendente



PMP2022

Solución:

1. Determinación del peso de la carga por unidad de longitud de cinta,  $m'_L$ .

El valor del peso de la carga de mineral por unidad de longitud de cinta,  $m'_L$ , se obtiene a través de la siguiente expresión:

$$m'_L = \frac{Q_m \text{ (t/h)}}{3.6 \times v \text{ (m/s)}} = \frac{1750 \text{ (t/h)}}{3.6 \times 5.20 \text{ (m/s)}} = 93.48 \text{ kg/m} \quad (35.1)$$

2. Determinación de la resistencia al movimiento del ramal superior,  $F_s$ .

Para obtener el valor de esta resistencia se emplea la siguiente expresión:

$$F_s = C \times f \times L \times g \times \left[ (m'_L + m'_G) \times \cos \delta + m'_{Ro} \right] \quad (\text{N}) \quad (35.2)$$

Para el valor del coeficiente C, se obtiene un valor de 1.17, según la tabla siguiente:

Valor del coeficiente C

L (m)	3	4	5	6	8	10	13	16	20
C	9.0	7.6	6.6	5.9	5.1	4.5	4.0	3.6	3.0
L (m)	25	32	40	50	63	80	90	100	120
C	2.9	2.6	2.4	2.2	2.0	1.92	1.86	1.78	1.70
L (m)	140	160	180	200	250	300	350	400	450
C	1.63	1.56	1.50	1.45	1.38	1.31	1.27	1.25	1.20
L (m)	500	550	600	700	800	900	1000	1500	2000
C	1.20	1.18	1.17	1.14	1.12	1.10	1.09	1.06	1.00

(Tomado de DUNLOP (1994), pág. 54)

Por lo que sustituyendo las variables de la ecuación anterior por sus valores correspondientes se tiene un valor de la resistencia  $F_s$  de:

$$F_s = 1.17 \times 0.020 \times 600 \times 9.81 \times \left[ (93.48 + 30) \times \cos 2.9^\circ + 26.7 \right] = 20662.87 \text{ N} \quad (35.3)$$

### 3. Determinación de la resistencia al movimiento del ramal inferior, $F_I$ .

Para obtener el valor de esta resistencia se emplea la siguiente expresión:

$$F_I = C \times f \times L \times g \times \left[ m'_G \times \cos \delta + m'_{Ru} \right] \quad (\text{N}) \quad (35.4)$$

Por lo que sustituyendo las variables de la ecuación anterior por sus valores correspondientes se tiene un valor de la resistencia  $F_I$  de:

$$F_I = 1.17 \times 0.020 \times 600 \times 9.81 \times \left[ 30 \times \cos 2.9^\circ + 10.3 \right] = 5545.32 \text{ N} \quad (35.5)$$

### 4. Determinación del valor de la resistencia total al movimiento, $F_U$ .

Este valor se obtendrá a través de la siguiente expresión:

$$F_U = C \times f \times L \times g \times \left[ m'_{Ro} + m'_{Ru} + (2 \times m'_G + m'_L) \times \cos \delta \right] + H \times g \times m'_L \quad (\text{N})$$

(35.6)

Por lo que el valor de  $F_U$ , en N, substituyendo variables por los valores ya obtenidos, valdrá:

$$F_U = 1.17 \times 0.020 \times 600 \times 9.81 \times \left[ 26.7 + 10.3 + (2 \times 30 + 93.48) \times \cos 2.9^\circ \right] + 30 \times 9.81 \times 93.48 = 53719.36 \quad (\text{N})$$

(35.7)

5. Determinación de las tensiones principales  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  y  $T_4$ .

Sus valores se obtienen con las siguientes expresiones:

$$T_1 = F_U \times \left( 1 + \frac{1}{e^{\mu\alpha} - 1} \right) \quad (\text{N})$$

(35.8)

$$T_2 = T_1 - F_U \quad (\text{N})$$

(35.9)

$$T_3 = T_2 + F_I - H \times m'_G \quad (\text{N})$$

(35.10)

$$T_4 = T_3 \quad (\text{N})$$

(35.11)

Para el valor de  $\left( 1 + \frac{1}{e^{\mu\alpha} - 1} \right)$ , conociendo que el ángulo de abrazado ( $\alpha$ ) es  $210^\circ$  y el coeficiente de fricción ( $\mu$ ) es de 0.25, según la siguiente tabla, este valor es de 1.67:

Valores para  $C_1 = 1 + \frac{1}{e^{\mu\alpha} - 1}$

Ángulo de abrazado (°) $\alpha$	Coeficiente de fricción = $\mu$									
	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	
170	3.90	2.78	2.23	1.91	1.69	1.54	1.44	1.35	1.29	
175	3.80	2.72	2.19	1.87	1.67	1.52	1.42	1.34	1.28	
180	3.70	2.66	2.15	1.83	1.64	1.50	1.40	1.32	1.26	
185	3.62	2.60	2.10	1.80	1.61	1.48	1.38	1.30	1.25	
190	3.55	2.55	2.06	1.77	1.59	1.46	1.36	1.29	1.23	
195	3.47	2.50	2.02	1.74	1.56	1.44	1.34	1.28	1.22	
200	3.41	2.45	1.99	1.71	1.54	1.42	1.33	1.26	1.21	
205	3.32	2.41	1.96	1.69	1.52	1.40	1.31	1.25	1.20	
210	3.28	2.36	1.93	1.67	1.50	1.38	1.30	1.24	1.19	

(Tomado de ContiTech (1994), pág. 49)

Por lo que el valor de estas tensiones, en N, sustituyendo variables por los valores ya conocidos, valdrá:

$$T_1 = 53719.36 \times 1.67 = 89711.33 \text{ (N)} \quad (35.12)$$

$$T_2 = 89711.33 - 53719.36 = 35991.97 \text{ (N)} \quad (35.13)$$

$$T_3 = 35991.97 + 5545.32 - 30 \times 30 = 40637.29 \text{ (N)} \quad (35.14)$$

$$T_4 = T_3 = 40637.29 \text{ (N)} \quad (35.15)$$

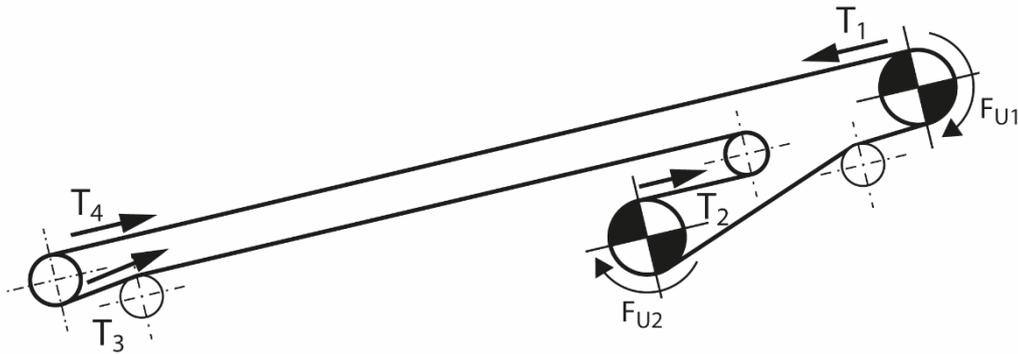
EJERCICIO 36 SOBRE CINTAS TRANSPORTADORAS

36. Determina las tensiones principales que se producen en los tambores de cabeza y cola de una cinta transportadora con accionamiento por dos tambores motrices en cabeza (ver esquema adjunto). Sabiendo que la longitud de la cinta debe ser de 600 metros, un desnivel de 30 metros, una anchura de banda de 1200 mm, un arco de abrazado ( $\alpha_1$ ) de  $180^\circ$  y un coeficiente de fricción ( $\mu_1$ ) igual a 0.25 (tambor 1), un arco de abrazado ( $\alpha_2$ ) de  $210^\circ$  y un coeficiente de fricción ( $\mu_2$ ) igual a 0.25 (tambor 2). La capacidad de la cinta será de 1750 t/h y su velocidad de 5.20 m/s. Además, se facilitan los datos siguientes:

Valores de los pesos por unidad de longitud de banda:

- Peso de la banda por unidad de longitud de banda,  $m'_G = 30 \text{ kg/m}$ .
- Peso de los rodamientos por unidad de longitud de banda del ramal superior  $m'_{RO} = 26.7 \text{ kg/m}$  (separación entre rodillos 1 m).
- Peso de los rodamientos por unidad de longitud de banda del ramal inferior  $m'_{RU} = 10.3 \text{ kg/m}$  (separación entre rodillos 2 m).
- Factor de fricción,  $f = 0.020$  (condiciones de trabajo normales)

Caso 5. Esquema de accionamiento por dos tambores motrices en cabeza. Ascendente



PMP2022

Solución:

1. Determinación del peso de la carga por unidad de longitud de cinta,  $m'_L$ .

El valor del peso de la carga de mineral por unidad de longitud de cinta,  $m'_L$ , se obtiene a través de la siguiente expresión:

$$m'_L = \frac{Q_m \text{ (t/h)}}{3.6 \times v \text{ (m/s)}} = \frac{1750 \text{ (t/h)}}{3.6 \times 5.20 \text{ (m/s)}} = 93.48 \text{ kg/m} \quad (36.1)$$

2. Determinación de la resistencia al movimiento del ramal superior,  $F_s$ .  
Para obtener el valor de esta resistencia se emplea la siguiente expresión:

$$F_s = C \times f \times L \times g \times \left[ (m'_L + m'_G) \times \cos \delta + m'_{Ro} \right] \quad (\text{N}) \quad (36.2)$$

Para el valor del coeficiente C, se obtiene un valor de 1.17, según la tabla siguiente:

Valor del coeficiente C

L (m)	3	4	5	6	8	10	13	16	20
C	9.0	7.6	6.6	5.9	5.1	4.5	4.0	3.6	3.0
L (m)	25	32	40	50	63	80	90	100	120
C	2.9	2.6	2.4	2.2	2.0	1.92	1.86	1.78	1.70
L (m)	140	160	180	200	250	300	350	400	450
C	1.63	1.56	1.50	1.45	1.38	1.31	1.27	1.25	1.20
L (m)	500	550	600	700	800	900	1000	1500	2000
C	1.20	1.18	1.17	1.14	1.12	1.10	1.09	1.06	1.00

(Tomado de DUNLOP (1994), pág. 54)

Por lo que sustituyendo las variables de la ecuación anterior por sus valores correspondientes se tiene un valor de la resistencia  $F_s$  de:

$$F_s = 1.17 \times 0.020 \times 600 \times 9.81 \times \left[ (93.48 + 30) \times \cos 2.9^\circ + 26.7 \right] = 20662.87 \text{ N} \quad (36.3)$$

### 3. Determinación de la resistencia al movimiento del ramal inferior, $F_I$ .

Para obtener el valor de esta resistencia se emplea la siguiente expresión:

$$F_I = C \times f \times L \times g \times \left[ m'_G \times \cos \delta + m'_{Ru} \right] \quad (\text{N}) \quad (36.4)$$

Por lo que sustituyendo las variables de la ecuación anterior por sus valores correspondientes se tiene un valor de la resistencia  $F_I$  de:

$$F_I = 1.17 \times 0.020 \times 600 \times 9.81 \times \left[ 30 \times \cos 2.9^\circ + 10.3 \right] = 5545.32 \text{ N} \quad (36.5)$$

### 4. Determinación del valor de la resistencia total al movimiento, $F_U$ .

Este valor se obtendrá a través de la siguiente expresión:

$$F_U = C \times f \times L \times g \times \left[ m'_{Ro} + m'_{Ru} + (2 \times m'_G + m'_L) \times \cos \delta \right] + H \times g \times m'_L \quad (\text{N}) \quad (36.6)$$

Por lo que el valor de  $F_U$ , en N, sustituyendo variables por los valores ya obtenidos, valdrá:

$$F_U = 1.17 \times 0.020 \times 600 \times 9.81 \times \left[ 26.7 + 10.3 + (2 \times 30 + 93.48) \times \cos 2.9^\circ \right] + 30 \times 9.81 \times 93.48 = 53719.36 \quad (\text{N}) \quad (36.7)$$

5. Determinación de la fuerza periférica en el tambor 2,  $F_{U2}$

Para calcular esta fuerza periférica del tambor 2, se ha de obtener el valor del factor x, para las condiciones de ángulos de abrazado ( $180^\circ$  y  $210^\circ$ ) y de coeficientes de fricción (0.25). Según la tabla siguiente el valor de este factor x será de 2.0:

**Factor "x" para diferentes sistemas motrices**

Tambor motriz 2	Ángulo abrazado $\alpha_1$			Tambor motriz 1		
$\mu = 0.25$	<b>160°</b>	<b>170°</b>	<b>180°</b>	<b>190°</b>	<b>200°</b>	<b>210°</b>
$\alpha_2$ 160°	2.00	2.20	2.40	2.60	2.80	3.00
170°	1.90	2.10	2.30	2.48	2.67	2.86
180°	1.83	2.02	2.20	2.38	2.57	2.75
190°	1.77	1.95	2.12	2.30	2.48	2.65
200°	1.71	1.89	2.06	2.23	2.40	2.57
<b>210°</b>	1.67	1.83	<b>2.00</b>	2.17	2.33	2.50
$\mu = 0.3$	<b>160°</b>	<b>170°</b>	<b>180°</b>	<b>190°</b>	<b>200°</b>	<b>210°</b>
$\alpha_2$ 160°	2.31	2.53	2.76	3.00	3.26	3.53
170°	2.22	2.43	2.66	2.89	3.14	3.40
180°	2.15	2.35	2.57	2.79	3.03	3.28
190°	2.08	2.28	2.48	2.70	2.93	3.18
200°	2.02	2.21	2.41	2.62	2.85	3.08
210°	1.97	2.15	2.35	2.55	2.77	3.00
$\mu = 0.35$	<b>160°</b>	<b>170°</b>	<b>180°</b>	<b>190°</b>	<b>200°</b>	<b>210°</b>
$\alpha_2$ 160°	2.66	2.92	3.20	3.51	3.84	4.18
170°	2.56	2.82	3.10	3.39	3.70	4.03
180°	2.48	2.74	3.00	3.29	3.59	3.91
190°	2.41	2.66	2.92	3.19	3.48	3.80
200°	2.35	2.58	2.84	3.11	3.39	3.70
210°	2.29	2.52	2.77	3.03	3.31	3.61

Tomado de DUNLOP (1994), pág. 62

Cumpléndose para el valor de  $F_{U2}$ :

$$F_{U2} = \frac{F_U}{x + 1} \quad (\text{N}) \quad (36.8)$$

Luego, sustituyendo valores tenemos que:

$$F_{U2} = \frac{53719.36}{2.0 + 1} = 17906.45 \text{ (N)} \quad (36.9)$$

6. Determinación de la fuerza periférica en el tambor 1,  $F_{U1}$

Se emplea la siguiente expresión para obtener el valor de  $F_{U1}$ :

$$F_{U1} = F_U - F_{U2} = 53719.36 - 17906.45 = 35812.91 \text{ (N)} \quad (36.10)$$

7. Determinación de las potencias para los tambores 1 y 2,  $P_1$  y  $P_2$

La potencia total,  $P_T$  vendrá dada como:

$$P_T = \frac{Q_m \text{ (t/h)}}{3.6 \times v \text{ (m/s)}} = \frac{1750 \text{ t/h}}{3.6 \times 5.20 \text{ m/s}} = 93.48 \text{ kW} \quad (36.11)$$

Por otro lado, cuando se tienen dos tambores motrices se cumple el siguiente sistema ecuaciones formado por las potencias individuales de esos dos motores y la potencia teórica total:

$$\begin{aligned} P_T &= P_1 + P_2 \text{ kW} \\ P_2 &= \frac{P_T}{x + 1} \text{ kW} \end{aligned} \quad (36.12)$$

$$\begin{aligned} 93.48 &= P_1 + P_2 \text{ kW} \\ P_2 &= \frac{93.48}{2.0 + 1} = \frac{93.48}{3} = 31.16 \text{ kW} \end{aligned} \quad (36.13)$$

$$P_1 = 93.48 - P_2$$

$$P_1 = 93.48 - 31.16 = 62.32 \text{ kW}$$

8. Determinación de las tensiones principales  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  y  $T_4$ .

Como se cumple la siguiente condición:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{62.32 \text{ kW}}{31.16 \text{ kW}} = 1.99 \leq x = 2.0 \quad (36.14)$$

Entonces se puede establecer la siguiente relación entre  $T_1$  y  $T_2$ :

$$T_2 = F_{U2} \times \frac{1}{e^{\mu \alpha_2} - 1} \quad (36.15)$$

$$T_1 = T_2 + F_U$$

Para el valor de  $(\frac{1}{e^{\mu \alpha_2} - 1})$ , conociendo que el ángulo de abrazado ( $\alpha_2$ ) es 210° y el coeficiente de fricción ( $\mu$ ) es de 0.25, según la siguiente tabla, este valor es de 0.67 (1.67-1).

Valores para  $C1 = 1 + \frac{1}{e^{\mu \alpha} - 1}$

Ángulo de abrazado (°) $\alpha$	Coeficiente de fricción = $\mu$									
	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	
170	3.90	2.78	2.23	1.91	1.69	1.54	1.44	1.35	1.29	
175	3.80	2.72	2.19	1.87	1.67	1.52	1.42	1.34	1.28	
180	3.70	2.66	2.15	1.83	1.64	1.50	1.40	1.32	1.26	
185	3.62	2.60	2.10	1.80	1.61	1.48	1.38	1.30	1.25	
190	3.55	2.55	2.06	1.77	1.59	1.46	1.36	1.29	1.23	
195	3.47	2.50	2.02	1.74	1.56	1.44	1.34	1.28	1.22	
200	3.41	2.45	1.99	1.71	1.54	1.42	1.33	1.26	1.21	
205	3.32	2.41	1.96	1.69	1.52	1.40	1.31	1.25	1.20	
210	3.28	2.36	1.93	1.67	1.50	1.38	1.30	1.24	1.19	

(Tomado de ContiTech (1994), pág. 49)

Luego, los valores de  $T_1$  y  $T_2$ , valdrán:

$$T_2 = 17906.45 \times 0.67 = 11996.32 \text{ N} \quad (36.16)$$

$$T_1 = 11996.32 + 53719.36 = 65716.68 \text{ N}$$

Para los valores de  $T_3$  y  $T_4$ , se tienen las siguientes expresiones:

$$T_3 = T_2 + F_{U1} - H \times m'_G \quad (\text{N}) \quad (36.17)$$

$$T_4 = T_3 \quad (\text{N}) \quad (36.18)$$

Por lo que el valor de estas tensiones, en N, sustituyendo variables por los valores ya conocidos, valdrá:

$$T_3 = 11996.32 + 35812.91 - 30 \times 30 = 46909.23 \quad (\text{N}) \quad (36.19)$$

$$T_4 = T_3 = 46909.23 \quad (\text{N}) \quad (36.20)$$

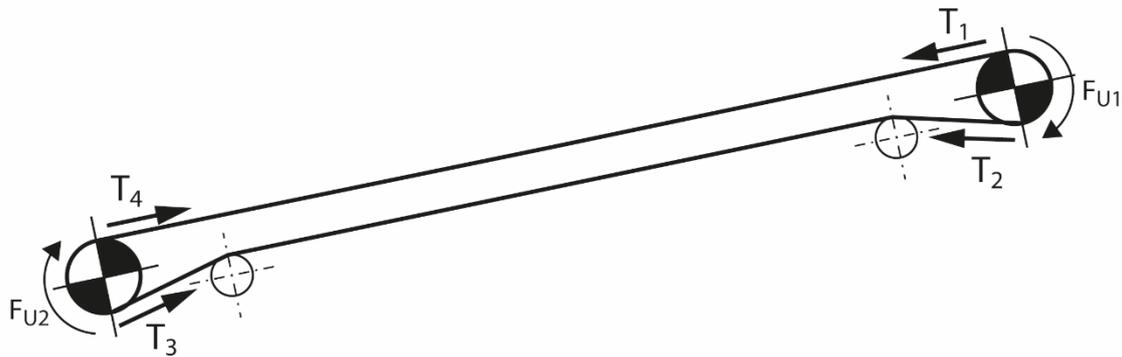
EJERCICIO 37 SOBRE CINTAS TRANSPORTADORAS

37. Determina las tensiones principales que se producen en los tambores de cabeza y cola de una cinta transportadora con accionamiento por dos tambores motrices en cabeza y cola (ver esquema adjunto). Sabiendo que la longitud de la cinta debe ser de 600 metros, un desnivel de 30 metros, una anchura de banda de 1200 mm, un arco de abrazado ( $\alpha_1$ ) de  $180^\circ$  y un coeficiente de fricción ( $\mu_1$ ) igual a 0.25 (tambor cabeza), un arco de abrazado ( $\alpha_2$ ) de  $210^\circ$  y un coeficiente de fricción ( $\mu_2$ ) igual a 0.25 (tambor cola). La capacidad de la cinta será de 1750 t/h y su velocidad de 5.20 m/s. Además, se facilitan los datos siguientes:

Valores de los pesos por unidad de longitud de banda:

- Peso de la banda por unidad de longitud de banda,  $m'_G = 30 \text{ kg/m}$ .
- Peso de los rodamientos por unidad de longitud de banda del ramal superior  $m'_{RO} = 26.7 \text{ kg/m}$  (separación entre rodillos 1 m).
- Peso de los rodamientos por unidad de longitud de banda del ramal inferior  $m'_{RU} = 10.3 \text{ kg/m}$  (separación entre rodillos 2 m).
- Factor de fricción,  $f = 0.020$  (condiciones de trabajo normales)

Caso 6. Esquema de accionamiento motriz en cabeza y cola. Ascendente



PMP2022

Solución:

1. Determinación del peso de la carga por unidad de longitud de cinta,  $m'_L$ .

El valor del peso de la carga de mineral por unidad de longitud de cinta,  $m'_L$ , se obtiene a través de la siguiente expresión:

$$m'_L = \frac{Q_m \text{ (t/h)}}{3.6 \times v \text{ (m/s)}} = \frac{1750 \text{ (t/h)}}{3.6 \times 5.20 \text{ (m/s)}} = 93.48 \text{ kg/m} \quad (37.1)$$

2. Determinación de la resistencia al movimiento del ramal superior,  $F_s$ .

Para obtener el valor de esta resistencia se emplea la siguiente expresión:

$$F_s = C \times f \times L \times g \times \left[ (m'_L + m'_G) \times \cos \delta + m'_{Ro} \right] \quad (\text{N}) \quad (37.2)$$

Para el valor del coeficiente C, se obtiene un valor de 1.17, según la tabla siguiente:

Valor del coeficiente C

L (m)	3	4	5	6	8	10	13	16	20
C	9.0	7.6	6.6	5.9	5.1	4.5	4.0	3.6	3.0
L (m)	25	32	40	50	63	80	90	100	120
C	2.9	2.6	2.4	2.2	2.0	1.92	1.86	1.78	1.70
L (m)	140	160	180	200	250	300	350	400	450
C	1.63	1.56	1.50	1.45	1.38	1.31	1.27	1.25	1.20
L (m)	500	550	600	700	800	900	1000	1500	2000
C	1.20	1.18	1.17	1.14	1.12	1.10	1.09	1.06	1.00

(Tomado de DUNLOP (1994), pág. 54)

Por lo que sustituyendo las variables de la ecuación anterior por sus valores correspondientes se tiene un valor de la resistencia  $F_s$  de:

$$F_s = 1.17 \times 0.020 \times 600 \times 9.81 \times [(93.48 + 30) \times \cos 2.9^\circ + 26.7] = 20662.87 \text{ N} \quad (37.3)$$

### 3. Determinación de la resistencia al movimiento del ramal inferior, $F_I$ .

Para obtener el valor de esta resistencia se emplea la siguiente expresión:

$$F_I = C \times f \times L \times g \times [m'_G \times \cos \delta + m'_{Ru}] \quad (\text{N}) \quad (37.4)$$

Por lo que sustituyendo las variables de la ecuación anterior por sus valores correspondientes se tiene un valor de la resistencia  $F_I$  de:

$$F_I = 1.17 \times 0.020 \times 600 \times 9.81 \times [30 \times \cos 2.9^\circ + 10.3] = 5545.32 \text{ N} \quad (37.5)$$

### 4. Determinación del valor de la resistencia total al movimiento, $F_U$ .

Este valor se obtendrá a través de la siguiente expresión:

$$F_U = C \times f \times L \times g \times [m'_{Ro} + m'_{Ru} + (2 \times m'_G + m'_L) \times \cos \delta] + H \times g \times m'_L \quad (\text{N}) \quad (37.6)$$

Por lo que el valor de  $F_U$ , en N, sustituyendo variables por los valores ya obtenidos, valdrá:

$$F_U = 1.17 \times 0.020 \times 600 \times 9.81 \times [26.7 + 10.3 + (2 \times 30 + 93.48) \times \cos 2.9^\circ] + 30 \times 9.81 \times 93.48 = 53719.36 \text{ (N)}$$

(37.7)

5. Determinación de la fuerza periférica en el tambor de cola,  $F_{U2}$

Para calcular esta fuerza periférica del tambor motriz de cola, se ha de obtener el valor del factor x, para las condiciones de ángulos de abrazado ( $180^\circ$  y  $210^\circ$ ) y de coeficientes de fricción (0.25). Según la tabla siguiente el valor de este factor x será de 2.0:

**Factor "x" para diferentes sistemas motrices**

Tambor motriz 2	Ángulo abrazado $\alpha_1$			Tambor motriz 1		
$\mu = 0.25$	<b>160°</b>	<b>170°</b>	<b>180°</b>	<b>190°</b>	<b>200°</b>	<b>210°</b>
$\alpha_2$	160°	170°	180°	190°	200°	210°
	2.00	2.20	2.40	2.60	2.80	3.00
	1.90	2.10	2.30	2.48	2.67	2.86
	1.83	2.02	2.20	2.38	2.57	2.75
	1.77	1.95	2.12	2.30	2.48	2.65
	1.71	1.89	2.06	2.23	2.40	2.57
	1.67	1.83	2.00	2.17	2.33	2.50
$\mu = 0.3$	<b>160°</b>	<b>170°</b>	<b>180°</b>	<b>190°</b>	<b>200°</b>	<b>210°</b>
$\alpha_2$	160°	170°	180°	190°	200°	210°
	2.31	2.53	2.76	3.00	3.26	3.53
	2.22	2.43	2.66	2.89	3.14	3.40
	2.15	2.35	2.57	2.79	3.03	3.28
	2.08	2.28	2.48	2.70	2.93	3.18
	2.02	2.21	2.41	2.62	2.85	3.08
	1.97	2.15	2.35	2.55	2.77	3.00
$\mu = 0.35$	<b>160°</b>	<b>170°</b>	<b>180°</b>	<b>190°</b>	<b>200°</b>	<b>210°</b>
$\alpha_2$	160°	170°	180°	190°	200°	210°
	2.66	2.92	3.20	3.51	3.84	4.18
	2.56	2.82	3.10	3.39	3.70	4.03
	2.48	2.74	3.00	3.29	3.59	3.91
	2.41	2.66	2.92	3.19	3.48	3.80
	2.35	2.58	2.84	3.11	3.39	3.70
	2.29	2.52	2.77	3.03	3.31	3.61

Tomado de DUNLOP (1994), pág. 62

Cumpléndose para el valor de  $F_{U2}$ :

$$F_{U2} = \frac{F_U}{x + 1} \text{ (N)} \quad (37.8)$$

Luego, sustituyendo valores tenemos que:

$$F_{U2} = \frac{53719.36}{2.0+1} = 17906.45 \text{ (N)} \quad (37.9)$$

6. Determinación de la fuerza periférica en el tambor de cabeza,  $F_{U1}$

Se emplea la siguiente expresión para obtener el valor de  $F_{U1}$ :

$$F_{U1} = F_U - F_{U2} = 53719.36 - 17906.45 = 35812.91 \text{ (N)} \quad (37.10)$$

7. Determinación de las potencias para los tambores 1 y 2,  $P_1$  y  $P_2$

La potencia total,  $P_T$  vendrá dada como:

$$P_T = \frac{Q_m \text{ (t/h)}}{3.6 \times v \text{ (m/s)}} = \frac{1750 \text{ t/h}}{3.6 \times 5.20 \text{ m/s}} = 93.48 \text{ kW} \quad (37.11)$$

Por otro lado, cuando se tienen dos tambores motrices se cumple el siguiente sistema ecuaciones formado por las potencias individuales de esos dos motores y la potencia teórica total:

$$\begin{aligned} P_T &= P_1 + P_2 \text{ kW} \\ P_2 &= \frac{P_T}{x+1} \text{ kW} \end{aligned} \quad (37.12)$$

$$\begin{aligned} 93.48 &= P_1 + P_2 \text{ kW} \\ P_2 &= \frac{93.48}{2.0+1} = \frac{93.48}{3} = 31.16 \text{ kW} \end{aligned} \quad (37.13)$$

$$P_1 = 93.48 - P_2$$

$$P_1 = 93.48 - 31.16 = 62.32 \text{ kW}$$

8. Determinación de las tensiones principales  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  y  $T_4$ .

Como se cumple la siguiente condición:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{62.32 \text{ kW}}{31.16 \text{ kW}} = 1.99 \leq x = 2.0 \quad (37.14)$$

Entonces se puede establecer la siguiente relación entre  $T_1$  y  $T_2$ :

$$T_2 = F_{U2} \times \frac{1}{e^{\mu \cdot \alpha_2} - 1} \quad (37.15)$$

$$T_1 = T_2 + F_U$$

Para el valor de  $\left(\frac{1}{e^{\mu \cdot \alpha_2} - 1}\right)$ , conociendo que el ángulo de abrazado ( $\alpha_2$ ) es 210° y el coeficiente de fricción ( $\mu$ ) es de 0.25, según la siguiente tabla, este valor es de 0.67 (1.67-1).

Valores para  $C1 = 1 + \frac{1}{e^{\mu \cdot \alpha} - 1}$

Ángulo de abrazado (°) $\alpha$	Coeficiente de fricción = $\mu$									
	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	
170	3.90	2.78	2.23	1.91	1.69	1.54	1.44	1.35	1.29	
175	3.80	2.72	2.19	1.87	1.67	1.52	1.42	1.34	1.28	
180	3.70	2.66	2.15	1.83	1.64	1.50	1.40	1.32	1.26	
185	3.62	2.60	2.10	1.80	1.61	1.48	1.38	1.30	1.25	
190	3.55	2.55	2.06	1.77	1.59	1.46	1.36	1.29	1.23	
195	3.47	2.50	2.02	1.74	1.56	1.44	1.34	1.28	1.22	
200	3.41	2.45	1.99	1.71	1.54	1.42	1.33	1.26	1.21	
205	3.32	2.41	1.96	1.69	1.52	1.40	1.31	1.25	1.20	
210	3.28	2.36	1.93	1.67	1.50	1.38	1.30	1.24	1.19	

(Tomado de ContiTech (1994), pág. 49)

Luego, los valores de  $T_1$  y  $T_2$ , valdrán:

$$T_2 = 17906.45 \times 0.67 = 11996.32 \text{ N} \quad (37.16)$$

$$T_1 = 11996.32 + 53719.36 = 65716.68 \text{ N}$$

Para los valores de  $T_3$  y  $T_4$ , se tienen las siguientes expresiones:

$$T_3 = F_{U2} \times \left(1 + \frac{1}{e^{\mu_2 \cdot \alpha_2} - 1}\right) \text{ (N)} \quad (37.17)$$

El valor del paréntesis se obtiene de la siguiente tabla, que da un valor de 1.67 para las condiciones del tambor motriz de cola.

$$T_4 = T_3 - F_{U2} \text{ (N)} \quad (37.18)$$

Valores para  $C1 = 1 + \frac{1}{e^{\mu\alpha} - 1}$

Ángulo de abrazado (°) $\alpha$	Coeficiente de fricción = $\mu$									
	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	
170	3.90	2.78	2.23	1.91	1.69	1.54	1.44	1.35	1.29	
175	3.80	2.72	2.19	1.87	1.67	1.52	1.42	1.34	1.28	
180	3.70	2.66	2.15	1.83	1.64	1.50	1.40	1.32	1.26	
185	3.62	2.60	2.10	1.80	1.61	1.48	1.38	1.30	1.25	
190	3.55	2.55	2.06	1.77	1.59	1.46	1.36	1.29	1.23	
195	3.47	2.50	2.02	1.74	1.56	1.44	1.34	1.28	1.22	
200	3.41	2.45	1.99	1.71	1.54	1.42	1.33	1.26	1.21	
205	3.32	2.41	1.96	1.69	1.52	1.40	1.31	1.25	1.20	
210	3.28	2.36	1.93	1.67	1.50	1.38	1.30	1.24	1.19	

(Tomado de ContiTech (1994), pág. 49)

Por lo que el valor de estas tensiones, en N, sustituyendo variables por los valores ya conocidos, valdrá:

$$T_3 = 17906.45 \times (1.67) = 29903.77 \text{ (N)} \quad (37.19)$$

$$T_4 = T_3 - F_{U2} = 29903.77 - 17906.45 = 11997.32 \text{ (N)} \quad (37.20)$$

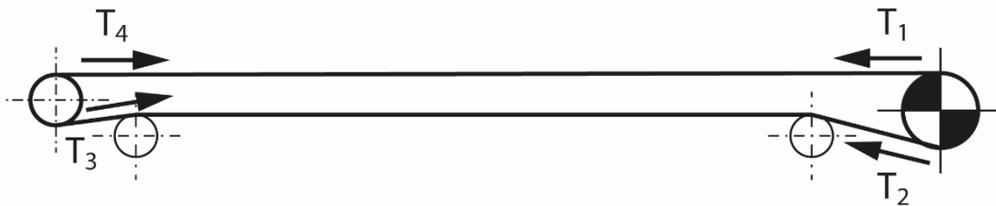
EJERCICIO 38 SOBRE CINTAS TRANSPORTADORAS

38. Determina las tensiones principales que se producen en los tambores de cabeza y cola de una cinta transportadora que transporta caliza triturada con accionamiento por un solo tambor motriz en cabeza (ver esquema adjunto). Sabiendo que la longitud de la cinta debe ser de 250 metros, sin desnivel, con una anchura de banda de 1000 mm, un arco de abrazado de  $190^\circ$  y un coeficiente de fricción ( $\mu$ ) igual a 0.40. La capacidad de la cinta será de 1800 t/h y su velocidad de 2.0 m/s. Además, se facilitan los datos siguientes:

Valores de los pesos por unidad de longitud de banda:

- Longitud del rodillo,  $L = 380$  mm (DUNLOP (1994), pág. 37)
- Peso de la banda por unidad de longitud de banda,  $m'_G = 25$  kg/m.
- Peso de los rodamientos por unidad de longitud de banda del ramal superior  $m'_{RO} = 26.3$  kg/m (separación entre rodillos 1 m).
- Peso de los rodamientos por unidad de longitud de banda del ramal inferior  $m'_{RU} = 13.2$  kg/m (separación entre rodillos 2 m).
- Eficiencia del motor = 90%
- Considerar una instalación normal.

Caso 1. Esquema de accionamiento por un solo tambor motriz en cabeza



PMP2022

Solución:

1. Determinación del peso de la carga por unidad de longitud de cinta,  $m'_L$ .

El valor del peso de la carga de mineral por unidad de longitud de cinta,  $m'_L$ , se obtiene a través de la siguiente expresión:

$$m'_L = \frac{Q_m \text{ (t/h)}}{3.6 \times v \text{ (m/s)}} = \frac{1800 \text{ (t/h)}}{3.6 \times 2.0 \text{ (m/s)}} = 250 \text{ kg/m} \quad (38.1)$$

2. Determinación de la resistencia al movimiento del ramal superior,  $F_s$ .

Para obtener el valor de esta resistencia se emplea la siguiente expresión:

$$F_s = C \times f \times L \times g \times [m'_L + m'_G + m'_{Ro}] \quad (38.2)$$

Para el valor del coeficiente C, se obtiene un valor de 1.17, según la tabla siguiente:

Valor del coeficiente C

L (m)	3	4	5	6	8	10	13	16	20
C	9.0	7.6	6.6	5.9	5.1	4.5	4.0	3.6	3.0
L (m)	25	32	40	50	63	80	90	100	120
C	2.9	2.6	2.4	2.2	2.0	1.92	1.86	1.78	1.70
L (m)	140	160	180	200	250	300	350	400	450
C	1.63	1.56	1.50	1.45	1.38	1.31	1.27	1.25	1.20
L (m)	500	550	600	700	800	900	1000	1500	2000
C	1.20	1.18	1.17	1.14	1.12	1.10	1.09	1.06	1.00

(Tomado de DUNLOP (1994), pág. 54)

Para el valor de f, considerando una instalación normal, se toma 0.020 (DUNLOP (1994), pág. 55), sin embargo, como la velocidad de la cinta será de 2.0 m/s, entonces, este valor se corrige, siendo ahora  $f = 0.020 \times 0.80 = 0.016$ .

Por lo que sustituyendo las variables de la ecuación anterior por sus valores correspondientes se tiene un valor de la resistencia  $F_s$  de:

$$F_s = 1.38 \times 0.016 \times 250 \times 9.81 \times [250 + 25 + 26.3] = 16315.76 \text{ N} \quad (38.3)$$

### 3. Determinación de la resistencia al movimiento del ramal inferior, $F_I$ .

Para obtener el valor de esta resistencia se emplea la siguiente expresión:

$$F_I = C \times f \times L \times g \times [m'_G + m'_{Ru}] \quad (38.4)$$

Por lo que sustituyendo las variables de la ecuación anterior por sus valores correspondientes se tiene un valor de la resistencia  $F_I$  de:

$$F_I = 1.38 \times 0.016 \times 250 \times 9.81 \times [25 + 13.2] = 2068.58 \text{ N} \quad (38.5)$$

4. Determinación del valor de la resistencia total al movimiento,  $F_U$ .

Este valor se obtendrá a través de la siguiente expresión:

$$F_U = C \times f \times L_{\text{cinta}} \times g \times [m'_{Ro} + m'_{Ru} + 2 \times m'_G + m'_L] \quad (\text{N}) \quad (38.6)$$

Por lo que el valor de  $F_U$ , en N, sustituyendo variables por los valores ya obtenidos, valdrá:

$$F_U = 1.38 \times 0.016 \times 250 \times 9.81 \times [26.3 + 13.2 + 2 \times 25 + 250] = 18384.33 \quad (\text{N}) \quad (38.7)$$

5. Determinación de las tensiones principales  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  y  $T_4$ .

Sus valores se obtienen con las siguientes expresiones:

$$T_1 = F_U \times \left( 1 + \frac{1}{e^{\mu\alpha} - 1} \right) \quad (\text{N}) \quad (38.8)$$

$$T_2 = T_1 - F_U \quad (\text{N}) \quad (38.9)$$

$$T_3 = T_2 + F_1 - H \times m'_G \quad (\text{N}) \quad (38.10)$$

$$T_4 = T_3 \quad (\text{N}) \quad (38.11)$$

Para el valor de  $\left( 1 + \frac{1}{e^{\mu\alpha} - 1} \right)$ , conociendo que el ángulo de abrazado ( $\alpha$ ) es  $190^\circ$  y el coeficiente de fricción ( $\mu$ ) es de 0.40, según la siguiente tabla, este valor es de 1.36:

Valores para  $C_1 = 1 + \frac{1}{e^{\mu\alpha} - 1}$

Ángulo de abrazado (°) $\alpha$	Coeficiente de fricción = $\mu$									
	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	
170	3.90	2.78	2.23	1.91	1.69	1.54	1.44	1.35	1.29	
175	3.80	2.72	2.19	1.87	1.67	1.52	1.42	1.34	1.28	
180	3.70	2.66	2.15	1.83	1.64	1.50	1.40	1.32	1.26	
185	3.62	2.60	2.10	1.80	1.61	1.48	1.38	1.30	1.25	
190	3.55	2.55	2.06	1.77	1.59	1.46	1.36	1.29	1.23	
195	3.47	2.50	2.02	1.74	1.56	1.44	1.34	1.28	1.22	
200	3.41	2.45	1.99	1.71	1.54	1.42	1.33	1.26	1.21	
205	3.32	2.41	1.96	1.69	1.52	1.40	1.31	1.25	1.20	
210	3.28	2.36	1.93	1.67	1.50	1.38	1.30	1.24	1.19	

(Tomado de ContiTech (1994), pág. 49)

Por lo que el valor de estas tensiones, en N, sustituyendo variables por los valores ya conocidos, valdrá:

$$T_1 = 18384.33 \times 1.36 = 25002.69 \text{ (N)} \quad (38.12)$$

$$T_2 = 25002.69 - 18384.33 = 6618.36 \text{ (N)} \quad (38.13)$$

$$T_3 = 6618.36 + 2068.58 - 0 \times 25 = 8686.94 \text{ (N)} \quad (38.14)$$

$$T_4 = T_3 = 8686.94 \text{ (N)} \quad (38.15)$$

Referencias:

ContiTech (1994). Conveyor Belt System Design. CONTI Conveyor Belt Service Manual, pp. 140.

Dunlop-Enerka (1994). Conveyor belt technique. Design and calculation. Technical Manual, pp. 161.

EJERCICIO 39 SOBRE CINTAS TRANSPORTADORAS

39. Determina el ancho de banda,  $B$ , y la velocidad,  $v$ , de una cinta transportadora que transporta caliza triturada. Sabiendo que el material viene caracterizado por una densidad de  $1.4 \text{ t/m}^3$ , una granulometría caracterizada por un contenido de un 10% de gruesos, y un tamaño máximo de 250 mm, y un ángulo de reposo dinámico de  $15^\circ$ . La cinta presenta una longitud de 805 metros, con un desnivel de 150m, una inclinación de  $10.73^\circ$ , un factor de reducción de la capacidad ( $\varphi_2$ ) de 0.95, un grado de llenado ( $\varphi_1$ ) igual a 1, y un ángulo de inclinación para los rodillos laterales ( $\lambda$ ) de  $35^\circ$ . La capacidad de la cinta será de 1500 t/h. (Nota: no todos los datos son necesarios).

Solución:

Para la determinación del ancho de banda,  $B$ , utilizamos la siguiente tabla (López Roa, 2002):

Ángulo de reposo dinámico	10% gruesos, 90% finos	100% gruesos
$\beta \leq 20^\circ$	3	5
$20^\circ \leq \beta < 30^\circ$	6	10

La tabla nos indica que para un material con un contenido de gruesos del 10% el ancho de banda debe ser como mínimo tres veces el tamaño máximo de dicho material, es decir:

$$B = 250 \times 3 = 750 \text{ mm} \quad (39.1)$$

Como dicho valor de anchura de banda no es un valor normalizado, seleccionaremos el inmediatamente superior basándonos en la siguiente tabla tomada de Dunlop (1994), que será de 800 mm.

**Anchuras de banda estándar (mm)**

300	-	400	-	500	-	650	-	800	-	1000
1200	-	1400	-	1600	-	1800	-	2000	-	2200

(Tomado de DUNLOP, pág. 36)

Con el valor de 800 mm de ancho de banda entramos en la siguiente tabla (ITGE, 1991) que, para un ángulo de artesa de  $35^\circ$ , nos proporciona una capacidad de  $258 \text{ m}^3/\text{h}$  por cada m/s de velocidad de la cinta transportadora.

EJERCICIOS RESUELTOS DE SISTEMAS DE TRANSPORTE CONTINUO. BOMBAS Y CINTAS TRANSPORTADORAS

Ancho de Banda (mm)	Banda plana (m <sup>3</sup> /h)	Banda en artesa DIN 22107			L <sub>1</sub> = L <sub>2</sub> (mm)	Artesa 20° (m <sup>3</sup> /h)	Artesa 25° (m <sup>3</sup> /h)	Artesa 30° (m <sup>3</sup> /h)	Artesa 35° (m <sup>3</sup> /h)	Artesa 40° (m <sup>3</sup> /h)	Artesa 45° (m <sup>3</sup> /h)
		L <sub>1</sub> (mm)	L <sub>2</sub> (rodillo central) (mm)	Artesa 20° (m <sup>3</sup> /h)							
300	12	132	132		132						
400	23	165	165		165						
500	38	200	200	74	200	74	80	87	91	95	98
650	69	250	250	133	250	133	144	156	164	172	176
800	108	315	315	208	315	208	227	244	258	269	276
1.000	173	380	380	336	380	336	365	394	415	434	445
1.200	255	465	465	494	465	494	537	580	610	638	654
1.400	351	530	530	680	530	680	738	798	840	878	900
1.600	464	530	735	850	600	898	976	1.055	1.110	1.160	1.190
1.800	592	600	800	1.085	670	1.145	1.245	1.340	1.415	1.475	1.515
2.000	735	665	870	1.350	740	1.422	1.545	1.665	1.760	1.835	1.880
2.200	893	735	930	1.675	800	1.730	1.880	2.030	2.140	2.235	2.290
2.400	1.070	800	1.000	2.010	870	2.070	2.250	2.430	2.560	2.670	2.740
2.600	1.260	870	1.060	2.390	940	2.430	2.640	2.850	3.000	3.135	3.220
2.800	1.465	930	1.140	2.770	1.000	2.840	3.085	3.330	3.510	3.660	3.760
3.000	1.683	1.000	1.200	3.200	1.070	3.270	3.550	3.830	4.040	4.210	4.320

Fuente: ITGE (1991). Manual de Arranque, Carga y Transporte en Minería a Cielo Abierto. 664 pp

Luego:

$$258 \text{ m}^3/\text{h} \times 1.4 \text{ t/m}^3 = 361.2 \text{ t/h} \quad (39.2)$$

Si ahora dividimos la capacidad exigida de 1500 t/h por la cantidad de 361.2 t/h, multiplicada por el factor de reducción de la capacidad de 0.95, entonces tendremos la velocidad necesaria que lleve la cinta transportadora para alcanzar los requerimientos de capacidad:

$$\frac{1500 \text{ t/h}}{361.2 \text{ t/h} \times 0.95} = 4.37 \text{ m/s} \quad (39.3)$$

Según la siguiente tabla (ContiTech, 1994) observamos que la velocidad requerida es demasiado elevada, ya que para una caliza esta velocidad debería estar por debajo de 4 m/s.

### Velocidades de la cinta

Valores guía a partir de instalaciones operativas

Tipos de material	1	2	3	4	5	6	7	Aplicación
Carbón (fino) Cenizas volantes								Centrales térmicas
Clínker de cemento Coque								Cementeras Siderurgias
Sal fina Sal residual (estéril) Arenas y gravas								Plantas de potasas Minas y canteras
Cemento, cal Caliza (triturada) Cereales								Plantas mineralúrgicas Silos de graneles
Carbón (triturado)								Plantas subterráneas Centrales térmicas Cementeras
Minerales Carbón								Instalaciones de carga Parques de almacenamiento
Sal triturada Bauxita Fosfato								Cintas transportadoras de gran distancia
Lignito Estériles Concentrado de fosfato								Extracción de mineral Todo-Uno Minas a Cielo Abierto
Velocidad de la cinta	1	2	3	4	5	6	7	in m/s
Velocidades de banda de la serie estándar (en m/s): 0.42 0.52 0.66 0.84 1.05 1.31 1.68 2.09 2.62 3.35 4.19 5.2 6.6 8.4								

 Velocidades estándar       Velocidades posibles

(Tomado de ContiTech, pág. 21)

Ante esta situación, escogemos el siguiente valor normalizado de ancho de banda (Dunlop, 1994) que será de 1000 mm. Para este valor ahora obtenemos, de la tabla anterior (ITGE, 1991), una capacidad de 415 m<sup>3</sup>/h por cada m/s de velocidad de la cinta transportadora.

Luego:

$$415 \text{ m}^3/\text{h} \times 1.4 \text{ t/m}^3 = 581 \text{ t/h} \quad (39.4)$$

Si ahora dividimos la capacidad exigida de 1500 t/h por la cantidad de 581 t/h, multiplicada por el factor de reducción de la capacidad de 0.95, entonces tendremos la velocidad necesaria que lleve la cinta transportadora para alcanzar los requerimientos de capacidad:

$$\frac{1500 \text{ t/h}}{581 \text{ t/h} \times 0.95} = 3.04 \text{ m/s} \quad (39.5)$$

Según la siguiente tabla (ContiTech, 1994) observamos que esta vez la velocidad estimada es adecuada, pero como no es una velocidad normalizada, seleccionaremos un valor inmediatamente superior de la siguiente tabla (Dunlop, 1994), siendo de 3.35 m/s.

### Valores estándar

Velocidades V (m/s)						
0.42	-	0.52	-	0.66	-	0.84
1.05	-	1.31	-	1.68	-	2.09
2.62	-	3.35	-	4.19	-	5.20
6.60	-	8.40	-		-	

(Tomado de DUNLOP, pág. 35)

Por lo que la cinta transportadora deberá disponer de un ancho de banda de 1000 mm y una velocidad de 3.35 m/s.

Referencias:

ContiTech (1994). Conveyor Belt System Design. CONTI Conveyor Belt Service Manual, pp. 140.

Dunlop (1994). Conveyor belt technique. Design and calculation. Technical Manual, pp. 161.

ITGE (1991). Manual de Arranque, Carga y Transporte en Minería a Cielo Abierto. pp. 664.

López Roa, Agustín (2002). Cintas transportadoras. CIE Inversiones Editoriales - Dossat 2000, pp. 383.

EJERCICIO 40 SOBRE CINTAS TRANSPORTADORAS

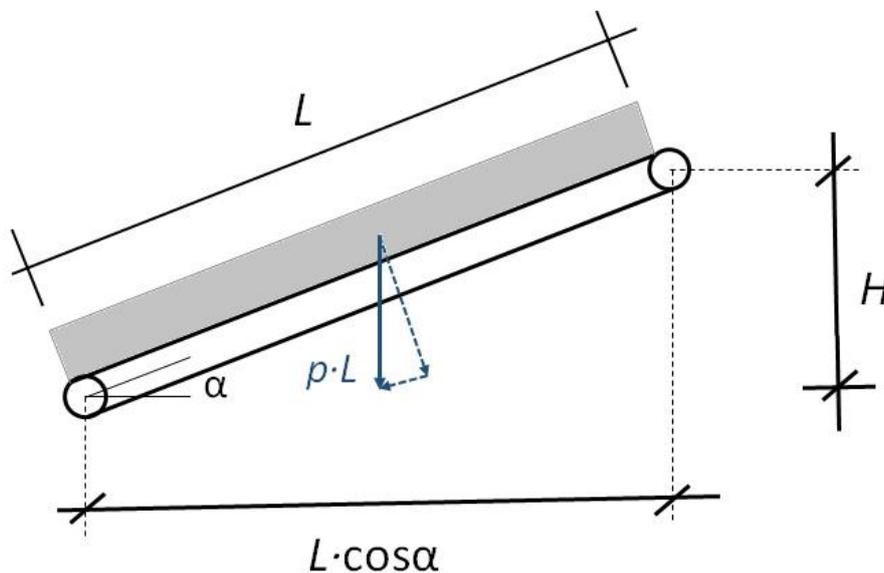
40. Calcula el máximo caudal de hormigón fresco que suministrará una cinta transportadora que tiene 30 m de longitud y que tiene que salvar un desnivel de 6 metros. Otros datos:

- El coeficiente de fricción entre la cinta y rodillos es  $\mu = 0.10$ .
- La densidad del hormigón fresco durante su transporte es de  $2.0 \text{ t/m}^3$
- El coeficiente de transmisión del motor es  $\eta = 2/3$
- La potencia del motor es de 50 C.V.

Solución:

El motor de la cinta transportadora debe de disponer de potencia suficiente para desplazar el hormigón fresco sobre la cinta, superando sus rozamientos y, además, para elevar el hormigón a la cota prevista.

La potencia mecánica se define como la rapidez con que se realiza un trabajo, o lo que es lo mismo, el producto de la fuerza resultante aplicada por la velocidad. La potencia necesaria para vencer el rozamiento de la cinta y rodillos  $\mu$ , es el producto de la fuerza normal sobre la cinta por el coeficiente de rozamiento. Dicha fuerza se desplaza a la velocidad de la cinta



Siendo  $p$  el peso del hormigón fresco por metro lineal de cinta, la potencia  $P_1$  necesaria para desplazar a una velocidad  $v$  el peso, teniendo en cuenta el rendimiento del motor  $\eta$ , sería la siguiente:

$$P_1 = \frac{v \times p \times L \times \cos \alpha}{\eta} \times \mu = \frac{\gamma \times Q \times L \times \cos \alpha}{\eta} \times \mu \quad (40.1)$$

En la expresión anterior, el producto de la velocidad  $v$  por el peso por metro lineal  $p$ , se sustituye por el producto del peso específico  $\gamma$  del hormigón fresco por el caudal  $Q$  transportado por la cinta.

Por otra parte, la potencia necesaria para vencer el desnivel es el producto del peso del material por la velocidad de ascensión, que es  $v \cdot \sin \alpha$ , quedando la siguiente expresión:

$$P_2 = \frac{v \times p \times L \times \sin \alpha}{\eta} = \frac{\gamma \times Q \times H}{\eta} \quad (40.2)$$

Por tanto, la potencia necesaria total será la suma de  $P_1$  y  $P_2$ . Se puede calcular mediante la siguiente expresión:

$$P_T = \frac{p \times v}{\eta} \times (L \times \mu \times \cos \alpha + H) = \frac{\gamma \times Q}{\eta} \times (L \times \mu \times \cos \alpha + H) \quad (40.3)$$

De esta expresión se puede despejar el caudal  $Q$ :

$$Q = \frac{P_T \times \eta}{\gamma \times (L \times \mu \times \cos \alpha + H)} \quad (40.4)$$

Expresando todas las unidades en el Sistema Internacional (1 C.V. = 735.498 W; 1 t = 9807 N), la expresión queda como sigue:

$$Q = \frac{50 \times 735.498 \times \frac{2}{3}}{2 \times 9807 \times (30 \times 0.10 \times \sqrt{30^2 - 6^2} + 6)} = 0.01327 \text{ m}^3/\text{s} = 47.78 \text{ m}^3/\text{h} \quad (40.5)$$

El motor de la cinta transportadora debe de disponer de potencia suficiente para desplazar el hormigón fresco sobre la cinta, superando sus rozamientos y, además, para elevar el hormigón a la cota prevista.

LIBROS Y ENLACES SUGERIDOS:

- ANEFA. 2020. Manual de Áridos para el Siglo XXI (ANEFA, Ed.).
- Bise, C.J. 2003. Mining engineering analysis. Society for Mining, Metallurgy, and Exploration (SME), 328 pp. [www.smenet.org](http://www.smenet.org).
- Bombas Ideal, S. A. 1985. Datos técnicos de hidráulica. Bombas. (S. L. Signo Gráfico, Ed.). Bombas Ideal, S.A.
- Bouso, J. L. 1993. Manual de bombeo de pulpas (Fueyo, Ed.). ERAL, Equipos y Procesos S.A.
- Bouso, J. L., Martínez-Pagán, P. 2023. bombeo de Pulpas Minerales. Diferentes Procedimientos de cálculo. Revista rocas y Minerales, Fueyo Editores, n° 605, pp 56-73.
- Bridgestone. Conveyor Belt Design Manual. 66 pp.
- CEMA. 2002. Belt conveyor for bulk materials. 5<sup>th</sup> Ed., Conveyor Equipment Manufacturers Association (CEMA), 484 pp. [www.cemanet.org](http://www.cemanet.org).
- ContiTech. 1994. Conveyor Belt System Design. Conveyor Belt Service Manual. 140 pp.
- Dunlop Enerka. 1994. Conveyor belt technique. Design and calculation. 161 pp.
- Dunne, R.C. 2019. Mineral processing and extractive metallurgy handbook. 2 volumes. Kawatra, K. and Young, C.A. (eds.). Society for Mining, Metallurgy, and Exploration (SME), 2258 pp. [www.smenet.org](http://www.smenet.org).
- EngineeringToolBox. 2001. Steel Pipes Schedule 40 - Pressure Loss. [https://www.engineeringtoolbox.com/pressure-loss-steel-pipes-d\\_307.html](https://www.engineeringtoolbox.com/pressure-loss-steel-pipes-d_307.html).
- Fuerstenau, M.C., Kenneth, N.H. 2003. Principles of mineral processing. Society for Mining, Metallurgy, and Exploration (SME), 584 pp. [www.smenet.org](http://www.smenet.org).
- Goodyear. 2000. Handbook of conveyor and elevator belting. 167 pp.
- Gupta A., Yan, D.S. 2006. Mineral processing design and operations. An introduction. Elsevier, 693 pp.
- Hidraulic\_Institute. 1990. Engineering Data Book (2nd ed.).
- ITGE. 1991. Manual de Arranque, Carga y Transporte en Minería a Cielo Abierto. 664 pp.
- Lisbeth O. Lozano, P. 2018. Cálculo en detalle de sistemas de bombeo de agua (I. published, Ed.).
- López Albadejo, J. 2022. Electrobombas sumergibles: Guía práctica. JUANA ZCUE, 387 pp. ISBN: 978-84-09-38299-6.

López Jimeno, C., Grande Sánchez, P., Guglieri Viñuales, S., Hernando Degea, A., Merino Zamora, A., San Narciso Sáez, V., Sebastián Baldó, I., León Sánchez, A. 2021. Manual de logística de sustancias minerales. Sistemas y equipos para el transporte y almacenamiento. E.T.S.I. Minas y Energía, Universidad Politécnica de Madrid. 537 pp.

López Roa, A. 2002. Cintas transportadoras. CIE Dossat 2000, STHIM, S.A., 383 pp.

Martínez-Pagán, P. 2011. Tecnología Mineralúrgica. Open Course Ware: <http://ocw.bib.upct.es/course/view.php?id=88>

Martínez-Pagán, P. 2014. Separación Magnética y Electrostática: Apuntes de “Tecnología Mineralúrgica”. Universidad Politécnica de Cartagena. 88 pp. ISBN: 978-84-942944-5-7.

Martínez-Pagán, P. 2015. Ejercicios Resueltos de Tecnología Mineralúrgica. Universidad Politécnica de Cartagena. 165 pp. ISBN: 978-84-16325-05-4.

Martínez-Pagán, P., Perales Agüera, A. 2020. Tecnología Mineralúrgica. Open Course Ware: <https://ocw.bib.upct.es/course/view.php?id=178>

Martínez-Pagán, P., Perales Agüera, A. 2021. Plantas de Tratamiento de Recursos Minerales. Open Course Ware: <https://ocw.bib.upct.es/course/view.php?id=184>

Martínez-Pagán, P. 2021. Ejercicios Resueltos de Plantas de Tratamiento de Recursos Minerales. Universidad Politécnica de Cartagena. 204 pp. ISBN: 978-84-17853-38-9. <http://hdl.handle.net/10317/9725>.

Metso:Outotec. 2020. Guidelines in slurry pumping. Slurry Pump Handbook (8th ed.). Metso Minerals (Sala) AB. [www.metso.com/pumps](http://www.metso.com/pumps).

Metso:Outotec. 2020. Conveyor Solutions Handbook (2nd ed.). 260 pp. [www.mogroup.com](http://www.mogroup.com).

Mular, A.L., Halbe, D.N., Barratt, D.J. (eds.). 2002. Mineral processing plant: Design, practice, and control. Society for Mining, Metallurgy, and Exploration, Inc, 2 Volumes, 2422 pp.

PHOENIX. 2004. Phoenix conveyor belt systems. Phoenix conveyor belts design fundamentals. 64 pp.

Dunne, R.C. 2019. Mineral processing and extractive metallurgy handbook. 2 volumes.

Subba Rao, D.V. 2021. The belt conveyor. A concise basic course. CRC Press, 168 pp. ISBN: 978-1-003-08931-5

Volk, M. 2013. Pump Characteristics and Applications (C. Press, Ed. 3rd ed.). <https://doi.org/https://doi.org/10.1201/b15559>.

Warman, L. 2000. Warman Slurry Pumping Handbook. Warman Slurry Pumping Handbook.

Weir Slurry Division, Weir Group PLC. Warman International LTD. 2002. Slurry Pumping Manual. Technical Application Guide For Users of Centrifugal Slurry Pumps and Slurry Pumping Systems, pp. 66.

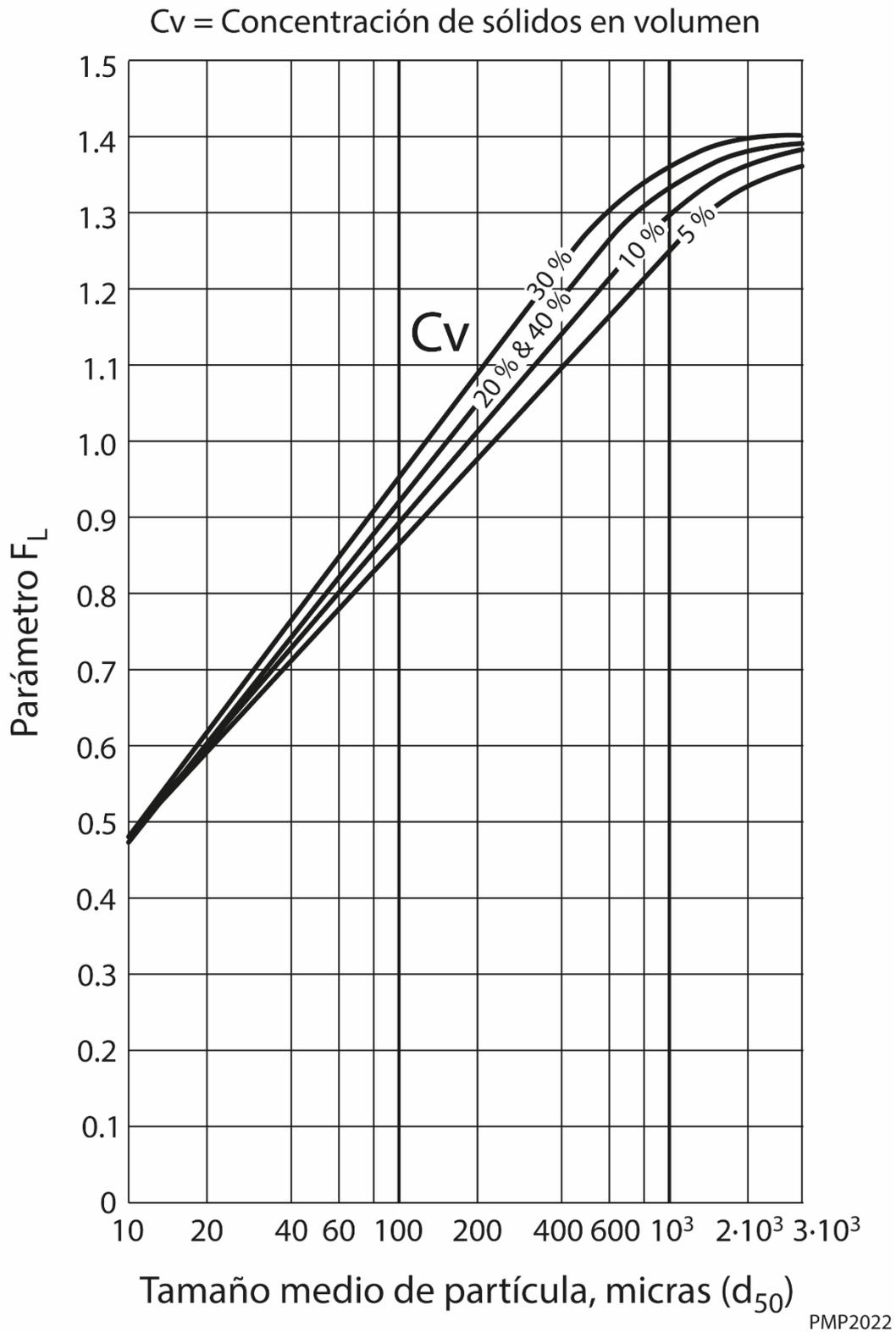
Weiss, N.L. 1985. SME Mineral processing handbook. Society for Mining, Metallurgy, and Exploration.

Wills, B.A., Napier-Munn, T.J. 2006. Will's Mineral Processing Technology. 7<sup>th</sup> edition, Elsevier, 444 pp.

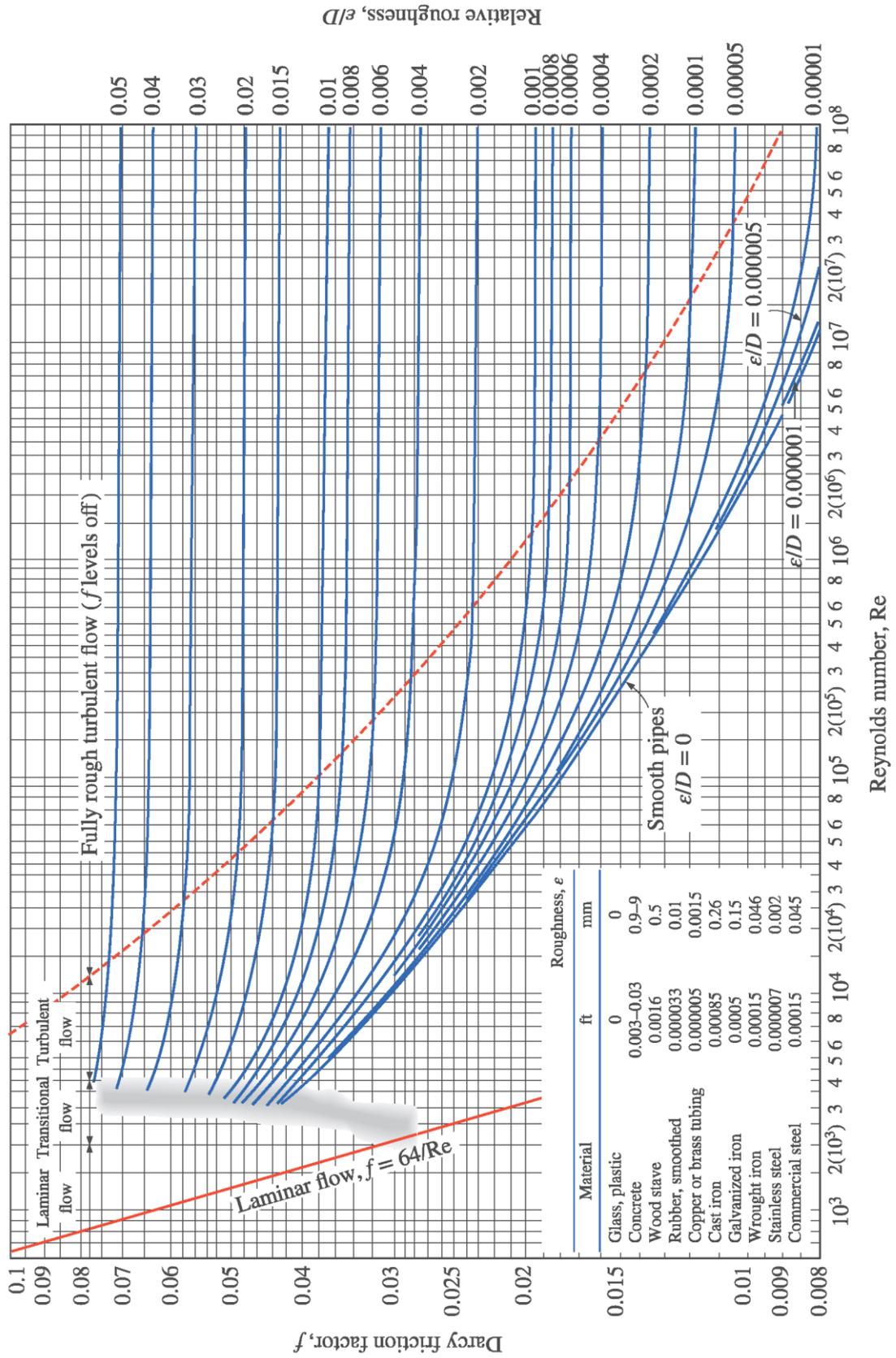
Yepes, V., Martí, J.V. 2017. Máquinas, cables y grúas empleados en la construcción. Editorial de la Universitat Politècnica de València. Ref. 814. Valencia, 210 pp.

Yepes, V. 1997. Equipos de movimiento de tierras y compactación. Problemas resueltos. Colección Libro Docente nº 97.439. Ed. Universitat Politècnica de València. Valencia, 253 pp.

ANEXO. ABACOS, GRÁFICAS Y PLANTILLAS:

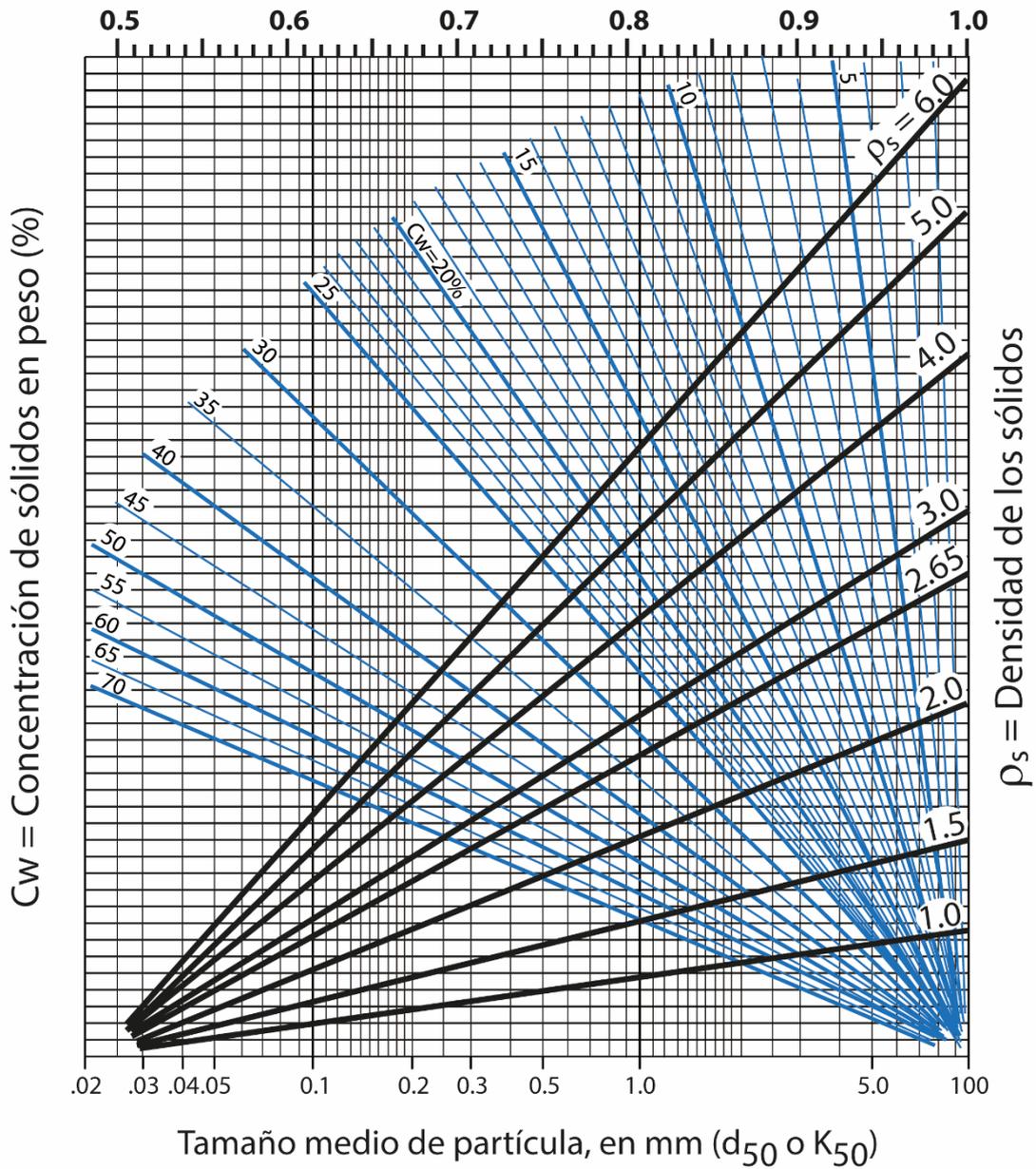


A1 -Gráfico de Durand



A2 - Ábaco de Moody

$$HR = \frac{TDH_{pulpa}}{TDH_{agua}} \quad ER = \frac{Eficiencia_{pulpa}}{Eficiencia_{agua}}$$



PMP2022

### A3 - Ábaco de Eficiencia de Bombeo $ER = HR$



Universidad  
Politécnica  
de Cartagena

**edicionesUPCT**