УДК 621:45.00.11-752

И.Л.Письменный

ПОСТРОЕНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК И ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ С ГАРМОНИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

Для исследования линейных и нелинейных динамических систем в теории автоматического управления разработаны наглядные и удобные для практического использования частотные методы, основанные на построении характеристик этих систем на плоскости комплексного переменного. Наиболее разработаны эти методы для систем с постоянными параметрами. При анализе динамических систем с переменными параметрами возникает необходимость решения либо дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, либо интегральных уравнений с ядрами, являющимися функциями двух переменных. Решение таких уравнений, как правило, связано с большими вычислительными трудностями.

Как известно, нестационарные системы также, как и стационарные, имеют ряд универсальных динамических характеристик (параметрическую передаточную функцию, параметрические частотные характеристики и др.) /1-6/.

Передаточные функции нестационарных линейных систем, в том числе линейных систем с периодическими параметрами, в /1-6/ получены в виде функций двух аргументов: оператора p и времени t. В общем случае их получение связано с применением линейных стационарных операторов типа свертки в классе обобщенных функций /5/, однако зависимость передаточных функций от времени существенно затрудняет их практическое применение. В связи с этим используют ряд приемов ("замораживание" параметрических характеристик /1/, решение интегральных уравнений методом последовательных приближений /2/, спектральный анализ и синтез линейных систем на конечных интервалах времени /3/).

В данной работе показано, что для частного случая нестационарных систем - систем с гармонически изменяющимися параметрами - частотные характеристики могут быть получены независимыми от времени t, но зависящими от амплитуд, частот и углов сдвига фаз составляющих сигнала на входе в звенья с гармонически изменяющимися параметрами. Что касается общего случая нестационарных параметров, то для линейных систем в силу принципа суперпозиции можно разложить нестационарные коэффициенты в ряд Фурье и попробовать таким образом решить задачу. При рассмотрении разомкнутых систем обычно можно считать, что сигналы на входе в звенья с периодически изменяющимися параметрами известны. Для замкнутых систем эти сигналы должны быть определены в процессе совместного рассмотрения динамических характеристик этих звеньев и остальной части системы, а также внешнего воздействия на систему.

В /6/ введено понятие передаточной функции линейного оператора следующим образом: "Предположим, что класс X входных сигналов оператора U содержит функции вида $x = e^{pt}$, $p \in D$, где p – комплексная переменная, принадлежащая некоторому множеству D на комплексной плоскости. В этом случае определено выражение $W(p,t) = e^{-pt} U(e^{pt})$, которое называется передаточной функцией линейного оператора U ". Таким образом здесь уже по самому определению введена передаточная функция $W(p,t)$ как функция двух аргументов: комплексного p и вещественного t, – но по классическому определению (см, например, /7/) $W(p) = \frac{L(y_{вых})}{L(x_{вх})}$ не должна зависеть от времени t .

С физической точки зрения получение частотных характеристик нестационарных элементов независящими от времени представляется естественным, так как целью выполнения операций над входными и выходными сигналами, приводящих к получению частотных характеристик, как раз и является переход от функций, зависящих от времени, к функциям, зависящим от частоты.

Пусть дифференциальное уравнение нестационарной системы

$$x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x + N x^{(\kappa)} \cos \omega t = H \sin(\Omega t + \alpha).$$

Разобьем левую часть этого уравнения на две части: стационарную часть системы с амплитудно-фазовой частотной характеристикой (АФЧХ)

$$W_c(j\omega) = (j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_1 j\omega + a_0$$

и нестационарное звено $R_\kappa = N x^{(\kappa)} \cos \omega t$ АФЧХ которого $W_{нз}(j\omega)$ необходимо найти.

Будем в дальнейшем под передаточной функцией нестационарных звеньев, как и в случае стационарных звеньев, понимать отношение преобразования по Лапласу – Карсону $X_{вых}(S)$ сигнала на выходе звена $x_{вых}(t)$ к преобразованию по Лапласу – Карсону $X_{вх}(S)$ сигнала на входе звена $x_{вх}(t)$ при нулевых начальных условиях /7/. Аналогично под АФЧХ нестационарных звеньев будем понимать отношение сигнала на выходе нестационарного звена к сигналу на его входе на заданной частоте.

В соответствии с этим при отыскании АФЧХ $W_{нз}(j\omega)$ откажемся от их традиционного получения путем подстановки $p=j\omega$ в преобразование по Лапласу-Карсону произведения $Nx^{(K)}\cos\omega t$, а будем предварительно находить сигнал на выходе нестационарного звена для известного сигнала на его входе, а затем для каждой частоты будем определять отношения преобразованных по Карсону-Лапласу величин составляющих сигнала на выходе и величин составляющих сигнала на входе нестационарного звена.

I. Система описывается однородным линейным дифференциальным уравнением, содержащим член с периодическим коэффициентом вида $Nx\cos 2\omega_1 t$:

$$x^{(n)}+a_{n-1}x^{(n-1)}+\ldots+a_1x'+a_0x+Nx\cos 2\omega_1 t=0 \tag{I}$$

Передаточная функция линейной стационарной части системы имеет вид

$$W_c(p)=p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1p+a_0, \tag{2}$$

а ее АФЧХ определяется в соответствии с работой /2/. Условимся заранее, что стационарная часть системы устойчива, т.е. ее годограф охватывает начало координат, проходя последовательно n квадрантов.

Для частоты $i\omega_1 (i=0,1,2,\ldots)$ вектор

$$W_c(ji\omega_1)=(ji\omega_1)^n+\ldots+a_1 ji\omega_1+a_0. \tag{3}$$

Решение уравнения (I) будем искать в виде ряда Фурье

$$x=A_0+A_1\sin(\omega_1 t+\gamma_1)+A_2\sin(2\omega_1 t+\gamma_2)+A_3\sin(3\omega_1 t+\gamma_3)+\ldots \tag{4}$$

Тогда нестационарная составляющая в дифференциальном уравнении (I)

$$Nx\cos 2\omega_1 t = NA_0\cos 2\omega_1 t + \frac{N}{2}\Big[-A_1\sin(\omega_1 t-\gamma_1)+A_1\sin(3\omega_1 t+\gamma_1)+$$
$$+A_2\sin\gamma_2+A_2\sin(4\omega_1 t+\gamma_2)+A_3\sin(\omega_1 t+\gamma_3)+A_3\sin(5\omega_1 t+\gamma_3)+\dots\Big]. \qquad (5)$$

Взяв для каждой частоты 0, ω_1, $2\omega_1$, $3\omega_1$, ... отношение сигнала на выходе нестационарного звена (5) к сигналу на его входе (4) при этой же частоте, получим АФЧХ нестационарного звена при частотах 0, ω_1, $2\omega_1$, $3\omega_1$, ...

$$W_{н3}(\omega=0)=\frac{N}{2}\frac{A_2}{A_0}e^{j\gamma_2}, \qquad (6)$$

$$W_{н3}(j\omega_1)=\frac{N}{2}\left[-1e^{-j2\gamma_2}+\frac{A_3}{A_1}e^{j(\gamma_3-\gamma_1)}\right], \qquad (7)$$

$$W_{н3}(j2\omega_1)=\frac{N}{2}\left[2j\frac{A_0}{A_2}e^{-j\gamma_2}+\frac{A_4}{A_2}e^{j(\gamma_4-\gamma_2)}\right], \qquad (8)$$

$$W_{н3}(j3\omega_1)=\frac{N}{2}\left[\frac{A_1}{A_3}e^{j(\gamma_1-\gamma_3)}+\frac{A_5}{A_3}e^{j(\gamma_5-\gamma_3)}\right], \qquad (9)$$

$$W_{н3}(jn\omega_1)=\frac{N}{2}\left[\frac{A_{n-2}}{A_n}e^{j(\gamma_{n-2}-\gamma_n)}+\frac{A_{n+2}}{A_n}e^{j(\gamma_{n+2}-\gamma_n)}\right]. \qquad (10)$$

Чтобы выполнялось одно единственное уравнение (I), записанное в виде функции времени t, необходимо чтобы выполнялось бесконечное множество уравнений

$$W_c(ji\omega_1)+W_{н3}(ji\omega_1)=0; \qquad i=0,1,2,\dots, \qquad (11)$$

в диапазоне частот от нуля до бесконечности.
Решение бесконечной системы уравнений (II) дает точное значение x в соответствии с (4).

Однако, как показывает опыт, можно определить x с любой заданной точностью, если ограничиться конечным числом слагаемых $i = 0, 1, 2, \dots, 2m+1$. Тогда подставив в (II) $W_c(ji\omega_1)$ в соответствии с (3) и $W_{н3}(ji\omega_1)$ в соответствии с (6), ..., (10) и ограничившись конечным числом уравнений (II), получаем две независимые конечные системы уравнений: одну для нечетных частот

$1\omega_1$, $3\omega_1$, ..., $(2m+1)\omega_1$:

$$
\begin{cases}
W_c(j\omega_1)-\frac{N}{2}e^{-j2\gamma_1}+\frac{N}{2}\frac{A_3}{A_1}e^{j(\gamma_3-\gamma_1)}=0,\\
W_c(j3\omega_1)+\frac{N}{2}\frac{A_1}{A_3}e^{j(\gamma_1-\gamma_3)}+\frac{N}{2}\frac{A_5}{A_3}e^{j(\gamma_5-\gamma_3)}=0,\\
W_c\left[j(2m+1)\omega_1\right]+\frac{N}{2}\frac{A_{2m-1}}{A_{2m+1}}e^{j(\gamma_{2m-1}-\gamma_{2m+1})}+\frac{N}{2}\frac{A_{2m+3}}{A_{2m+1}}e^{j(\gamma_{2m+3}-\gamma_{2m+1})}=0
\end{cases}
\tag{12}
$$

и вторую систему для четных частот $0, 2\omega_1, 4\omega_1, \ldots, 2m\omega_1$:

$$
\begin{cases}
W_c(j0)+\frac{N}{2}\frac{A_2}{A_0}e^{j\gamma_2}=0,\\
W_c(j2\omega_1)+\frac{N}{2}2j\frac{A_0}{A_2}e^{-j\gamma_2}+\frac{N}{2}\frac{A_4}{A_2}e^{j(\gamma_4-\gamma_2)}=0,\\
W_c(j2m\omega_1)+\frac{N}{2}\frac{A_{2m-2}}{A_{2m}}e^{j(\gamma_{2m-2}-\gamma_{2m})}+\frac{N}{2}\frac{A_{2m+2}}{A_{2m}}e^{j(\gamma_{2m+2}-\gamma_{2m})}=0.
\end{cases}
\tag{13}
$$

Введенное ограничение количества рассматриваемых в решении (4) частот означает, что амплитуды всех составляющих на частотах более $(2m+1)\omega_1$ принимаются равными нулю

$$A_{2m+2}=A_{2m+3}=\ldots=0.$$

Из последнего уравнения системы (12) следует

$$\frac{A_{2m+1}}{A_{2m-1}}e^{j(\gamma_{2m+1}-\gamma_{2m-1})}=\frac{-1}{\frac{2}{N}W_c\left[j(2m+1)\omega_1\right]}$$

Подставив это значение в предпоследнее уравнение системы (12), получаем

$$\frac{A_{2m-1}}{A_{2m-3}}=\frac{-1}{\frac{2}{N}W_c\left[j(2m-1)\omega_1\right]+\frac{-1}{\frac{2}{N}W_c\left[j(2m+1)\omega_1\right]}}$$

Повторив m раз эту операцию, будем иметь

$$W_c(j\omega_1)+W_{н.з}(j\omega_1)=0, \tag{14}$$

где АФЧХ стационарной части системы определяется в соответствии с (3), а АФЧХ нестационарной части системы можно представить как сумму двух составляющих

$$W_{н.з}(j\omega_1)=\widetilde{W}_{н.з}(j\omega_1)+\Delta W_{н.з}(j\omega_x). \tag{15}$$

Здесь первое слагаемое соответствует приближенной АФЧХ нестационарной части системы, полученной при пренебрежении всеми слагаемыми в (4), кроме второго:

$$\tilde{W}_{н3}(j\omega_1) = -\frac{N}{2} e^{-j2\gamma_1}, \qquad (16)$$

и второе слагаемое является поправкой к приближенной АФЧХ нестационарной части системы, если в (4) учитывать составляющие при частотах $3\omega_1$, $5\omega_1$, ..., $(2m+1)\omega_1$:

$$\Delta W_{н3}(j\omega_1) = \frac{N}{2} \cfrac{-1}{\frac{2}{N} W_c(j3\omega_1) + \cfrac{-1}{\frac{2}{N} W_c(j5\omega_1) + \cfrac{-1}{\frac{2}{N} W_c(j7\omega_1) + \ldots}}} . \qquad (17)$$

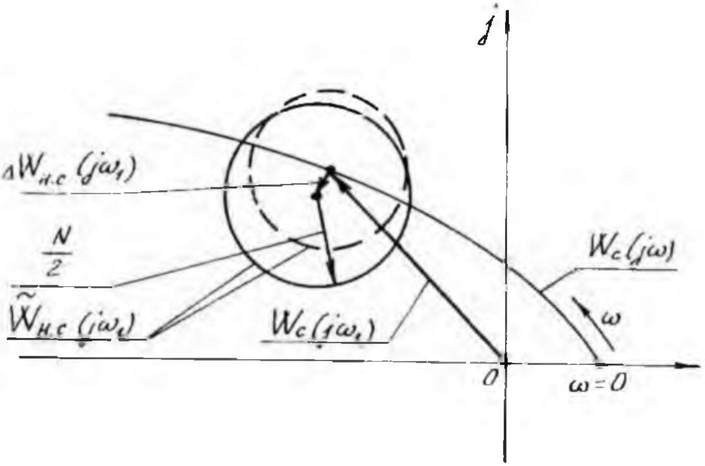
Чем быстрее с ростом частоты растет $W_c(j\omega)$, тем с меньшей погрешностью можно пренебречь составляющими при высоких частотах. В этом проявляется известное свойство фильтра стационарной линейной части системы.

Приближенная АФЧХ нестационарной части системы представляет собой окружность радиуса $\frac{N}{2}$. Поправку к АФЧХ нестационарной части системы удобно прибавлять к АФЧХ стационарной части системы. В этом случае окружность радиуса $\frac{N}{2}$ должна иметь центр в точке $W_c(j\omega_1) + \Delta W_{нс}(j\omega_1)$ как это показано на рис. I.

Если окружность радиуса $\frac{N}{2}$ не охватывает начало координат, то система, описываемая однородным линейным дифференциальным уравнением с периодическим коэффициентом, устойчива. Если окружность охватывает начало координат – система неустойчива.

Устойчивость системы в случае, если окружность не охватывает начало координат, следует из того, что уравнение (I) при частоте ω_1 выполняется в этом случае только тогда, когда $A_1 = 0$. Если же окружность проходит через начало координат, то (I) при частоте ω_1 выполняется при любой амплитуде A_1, а значит система неустойчива.

Рассмотрим теперь систему уравнений (I3). Повторив последовательно операции, примененные к системе (I2), можно получить сначала из последнего уравнения системы (I3) $(A_{2m}/A_{2m-2})e^{j(\gamma_{2m}-\gamma_{2m-2})}$, затем из предпоследнего уравнения (I3) $(A_{2m-2}/A_{2m-4})e^{j(\gamma_{2m-2}-\gamma_{2m-4})}$ и окончательно из второго уравнения системы (I3) $(A_2/A_0)e^{j\gamma_2}$. В то же время $(A_2/A_0)e^{j\gamma_2}$ может быть получено из первого уравнения системы (I3). В общем случае эти два значения $(A_2/A_0)e^{j\gamma_2}$ не будут



Р и с. I. Исследование устойчивости линейной системы с гармонически изменяющимися параметрами с помощью частотных характеристик на плоскости комплексного переменного: $W_c(j\omega)$ – АФЧХ стационарной части системы; $\tilde{W}_{нс}(j\omega_1)$ – приближенная АФЧХ нестационарной части системы; $\Delta W_{нс}(j\omega_1)$ – поправка к АФЧХ нестационарной части системы

равны друг другу. Следовательно, чтобы разрешить получившееся противоречие, следует принять

$$A_0 = A_2 = A_4 = \ldots = 0$$

Таким образом, выбранное разложение в ряд Фурье в виде (4) содержит нулевые составляющие с четными частотами и может быть записано в более простой форме

$$x = A_1 \sin(\omega_1 t + \gamma_1) + A_3 \sin(3\omega_1 t + \gamma_3) + \ldots \qquad (18)$$

2. Система описывается однородным линейным дифференциальным уравнением, содержащим член с периодическим коэффициентом вида $Nx^{(m)}\cos 2\omega_1 t$

Решение дифференциального уравнения

$$a_0 x + a_1 \dot{x} + a_2 \ddot{x} + \ldots + a_n x^{(n)} + N x^{(m)} \cos 2\omega_1 t = 0, \quad m \leq n \qquad (19)$$

будем искать в виде (I8). Тогда справедливо равенство:

$$N x^{(m)} \cos 2\omega_1 t = \frac{N}{2}\Big[-A_1\omega_1^m \sin(\omega_1 t - \gamma_1 - m\frac{\pi}{2}) + A_1\omega_1^m \sin(3\omega_1 t + \gamma_1 + m\frac{\pi}{2}) +$$
$$+ A_3(3\omega_1)^m \sin(\omega_1 t + \gamma_3 + m\frac{\pi}{2}) + A_3(3\omega_1)^m \sin(5\omega_1 t + \gamma_3 + m\frac{\pi}{2}) + \dots\Big]. \qquad (20)$$

АФЧХ нестационарной части системы получаем, взяв для каждой частоты $\omega_1, 3\omega_1, 5\omega_1, \dots$ отношение сигнала на выходе нестационарного звена (20) к сигналу на его входе (I8)

$$W_{н3}(j\omega_1) = \frac{N}{2}\Big[-(-j\omega_1)^m e^{-j2\gamma_1} + (j3\omega_1)^m \frac{A_3}{A_1} e^{j(\gamma_3-\gamma_1)}\Big], \qquad (21)$$

$$W_{н3}(j3\omega_1) = \frac{N}{2}\Big[(j\omega_1)^m \frac{A_1}{A_3} e^{j(\gamma_1-\gamma_3)} + (j5\omega_1)^m \frac{A_5}{A_3} e^{j(\gamma_5-\gamma_3)}\Big], \qquad (22)$$

$$W_{н3}(j5\omega_1) = \frac{N}{2}\Big[(j3\omega_1)^m \frac{A_3}{A_5} e^{j(\gamma_3-\gamma_5)} + (j7\omega_1)^m \frac{A_7}{A_5} e^{j(\gamma_7-\gamma_5)}\Big], \qquad (23)$$

$$W_{н3}[j(2k+1)\omega_1] = \frac{N}{2}\Big\{[j(2k-1)\omega_1]^m (A_{2k-1}/A_{2k+1}) e^{j(\gamma_{2k-1}-\gamma_{2k+1})} +$$
$$+ [j(2k+3)\omega_1]^m (A_{2k+3}/A_{2k+1}) e^{j(\gamma_{2k+3}-\gamma_{2k+1})}\Big\}, \quad k = 1, 3, 5, \dots \qquad (24)$$

Следовательно, дифференциальное уравнение (I9) может быть заменено бесконечной системой уравнений (II), где i = I, 3, 5... Вместо точного решения бесконечной системы уравнений будем отыскивать приближенное решение конечной системы уравнений (II), где i = I, 3, ..., $2k$ + I. Задаваясь различными значениями k, можно найти приближенное решение практически с любой точностью.

Таким образом, определив последовательно $\frac{A_{2k-1}}{A_{2k+1}}, \frac{A_{2k-3}}{A_{2k-1}}, \dots,$ приходим к уравнению (I4), где АФЧХ нестационарной части системы определяется в виде суммы (I5), причем приближенная АФЧХ нестационарной части системы имеет вид

$$\tilde{W}_{н3}(j\omega_1) = (-1)^{m+1}\frac{N}{2}(j\omega_1)^m e^{-j2\gamma_1}, \qquad (25)$$

а поправка к ней

$$\Delta W_{н3}(j\omega_1) = \frac{N}{2}\,\cfrac{-(j1\omega_1)^m (j3\omega_1)^m}{\frac{2}{N}W_c(j3\omega_1) + \cfrac{-(j3\omega_1)^m(j5\omega_1)^m}{\frac{2}{N}W_c(j5\omega_1) + \cfrac{-(j5\omega_1)^m(j7\omega_1)^m}{\frac{2}{N}W_c(j7\omega_1) + \dots}}} \qquad (26)$$

3. Система описывается однородным линейным дифференциальным уравнением

$$a_0 x + a_1 \dot{x} + a_2 \ddot{x} + \ldots + a_n x^{(n)} + \left[b_0 x + b_1 \dot{x} + b_2 \ddot{x} + \ldots + b_m x^{(m)} \right] \cos 2\omega_1 t = 0, \quad m \leq n. \tag{27}$$

x и $Nx^{(m)} \cos 2\omega_1 t$ определяются формулами (1.17) и (2.2). Тогда

$$W_{н.з}(j\omega_1) = \frac{1}{2} \left\{ -\left[b_0 + b_1(-j\omega_1) + b_2(-j\omega_1)^2 + \ldots + b_m(-j\omega_1)^m \right] e^{-j2\gamma_1} + \left[b_0 + b_1(j3\omega_1) + b_2(j3\omega_1)^2 + \ldots + b_m(j3\omega_1)^m \right] (A_3/A_1) e^{j(\gamma_3 - \gamma_1)} \right\}; \tag{28}$$

$$W_{нз}\left[j(2k+1)\omega_1\right] = \frac{1}{2} \left\{ \left[b_0 + b_1\left[j(2k-1)\omega_1\right] + b_2\left[j(2k-1)\omega_1\right]^2 + \ldots + b_m\left[j(2k-1)\omega_1\right]^m \right] \times (A_{2k-1}/A_{2k+1}) e^{j(\gamma_{2k-1} - \gamma_{2k+1})} + \left[b_0 + b_1\left[j(2k+3)\omega_1\right] + \ldots + b_m\left[j(2k+3)\omega_1\right]^m \right] \times (A_{2k+3}/A_{2k+1}) e^{j(\gamma_{2k+3} - \gamma_{2k+1})}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{29}$$

Обозначив

$$B(jk\omega_1) = b_0 + b_1(jk\omega_1) + b_2(jk\omega_1)^2 + \ldots + b_m(jk\omega_1)^m, \tag{30}$$

получаем

$$\tilde{W}_{н.з}(j\omega_1) = -\frac{1}{2} B(-j\omega_1) e^{-j2\gamma_1}, \tag{31}$$

$$\Delta W_{н.з}(j\omega_1) = \frac{1}{2} \cfrac{-B(j\omega_1)B(j3\omega_1)}{2W_c(j3\omega_1) + \cfrac{-B(j3\omega_1)B(j5\omega_1)}{2W_c(j5\omega_1) + \cfrac{-B(j5\omega_1)B(j7\omega_1)}{2W_c(j7\omega_1) + \ldots}}} \tag{32}$$

По тому как окружность радиуса $\frac{1}{2} B(-j\omega_1)$ с центром в точке, определяемой вектором $W_c(j\omega_1) + \Delta W_{н.з}(j\omega_1)$ проходит относительно начала координат, можно судить об устойчивости системы (27).

4. Система описывается неоднородными линейными дифференциальными уравнениями вида

$$a_0 x + a_1 \dot{x} + a_2 \ddot{x} + \ldots + a_n x^{(n)} + Nx \cos \Omega_1 t = H \sin(\Omega_2 t + \alpha), \quad m \leq n; \tag{33}$$

$$a_0x+a_1\dot{x}+a_2\ddot{x}\ \ldots+a_nx^{(n)}+Nx^{(m)}\cos\Omega_1 t=H\sin(\Omega_2 t+\alpha),\ m\leq n; \qquad (34)$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^{(i)}+\sum_{i=0}^{m} b_i x^{(i)}\cos\Omega_1 t=H\sin(\Omega_2 t+\alpha). \qquad (35)$$

Для исследования устойчивости таких систем можно использовать однородные дифференциальные уравнения (I), (I9), (27). Что касается решений таких уравнений, то они зависят от соотношений Ω_1 и Ω_2 и здесь не рассматриваются.

Пример. Исследовать устойчивость объекта управления, описываемого дифференциальным уравнением

$$x'''+x''+2x'+7x+4x\cos 4t=5\sin(3t+\frac{\pi}{6}).$$

АФЧХ стационарной части системы

$$W_c(j\omega)=7-\omega^2+2j\omega-j\omega^3.$$

При частоте $\omega_1=2$

$$W_c(j2)=3-j4, \qquad |W_c(j2)|=5.$$

Приближенная АФЧХ нестационарного звена: $\widetilde{W}_{н3}(j2)=-2e^{-j2\tau}$. Так как $\frac{N}{2}<|W_c(j2)|$, то окружность $\widetilde{W}_{н3}(j2)$ не охватывает начало координат, и система устойчива. Так как 2 < 5, то определять поправку к приближенной АФЧХ нестационарного звена не требуется. (В соответствии с (I7) $\Delta W_{н3}\approx 0{,}0029+j\,0{,}02$).

Таким образом, объект управления устойчив.

Переход от полученных АФЧХ звеньев с периодически изменяющимися по гармоническому закону параметрами к передаточным функциям можно было бы выполнить формально путем подстановки в формулы для АФЧХ p вместо $j\omega$. Однако при этом необходимо всегда помнить, что передаточные функции звеньев с гармонически изменяющимися параметрами в отличие от передаточных функций стационарных звеньев справедливы не для всей области частот, а только для дискретных значений частот $\omega_1,\ 3\omega_1,\ 5\omega_1, \ldots$.

Выводы

I. Если известны параметры сигнала на входе звена с гармонически изменяющимися параметрами и дифференциальное уравнение этого звена, то АФЧХ такого звена может быть получено в виде функции амплитуд и углов сдвига фаз составляющих сигнала на входе этого звена.

2. Если известно дифференциальное уравнение, описывающее систему, в котором имеется звено с гармонически изменяющимися параметрами, то можно определить приближенную АФЧХ нестационарной части системы, а также поправку к ней с любой степенью точности в виде функции от частотной характеристики стационарной части системы.

3. На плоскости комплексного переменного поправка к приближенной АФЧХ нестационарной части системы может быть векторно суммирована с АФЧХ стационарной части системы, а приближенная АФЧХ нестационарной части системы будет иметь вид окружности, проведенной вокруг полученного при суммировании центра.

4. По тому, как построенная таким образом окружность проходит относительно начала координат, можно судить об устойчивости исследуемой системы. Чтобы система была устойчивой, приближенная АФЧХ нестационарной части системы не должна охватывать начало координат.

Библиографический список

1. Солодовников В.В. Анализ и синтез систем автоматического регулирования с переменными параметрами при детерминированном воздействии //Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования. Кн. 3. Ч. I. – М.: Машиностроение, 1969. – С. 17–54, 56–69.

2. Бородин Ю.И., Иоаннесиан А.Б. Частотный метод анализа и синтеза нестационарных систем автоматического регулирования (метод свертки) //Там же. – С. 101–135.

3. Семенов В.В. Спектральный анализ и синтез линейных систем с переменными параметрами на конечных нестационарных интервалах времени //Там же. – С. 136–196.

4. Шаталов А.С. Параметрические частотные характеристики //Там же. – С. 54–56.

5. Розенвассер Е.Н. Периодически нестационарные системы управления. – М.: Наука, 1973. – 512 с.

6. Розенвассер Е.Н., Воловодов С.К. Операторные методы и колебательные процессы. – М.: Наука, 1985. – 312 с.

7. Солодовников В.В. Переходные функции, передаточные функции и частотные характеристики динамических элементов //Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования. Кн. I. – М.: Машиностроение, 1967. – С. 187–227.