

Análisis Demográfico Sobre el Riesgo de Longevidad de Hombres y Mujeres en Colombia 1950-2018

Gustavo Adolfo Gomez Moreno¹, Manuel Romero², John Edward Forigua Parra³, Jhonn Edgar Castro Montana⁴

^{1, 2, 3,4} Fundación Universitaria los Libertadores, Colombia

Resumen

La Creciente longevidad, que habitualmente se mide como el aumento de la esperanza de vida en la edad del nacimiento o de la jubilación, constituye un desafío para todas las la sociedades en el ámbito mundial. El principal objetivo de este artículo es poner a disposición las proyecciones estocásticas de mortalidad para Colombia para el periodo 1950-2018, utilizando el Modelo Lee- Carter. El método estocástico más utilizado e influyente durante los últimos años, tanto en el contexto actuarial como demográfico. Además de presentarlo y aplicarlo, se pronostican las tasas de mortalidad en Colombia para el periodo la mención utilizando el software estadístico R, el paquete ilc el cual contiene métodos para analizar 6 distintos tipos de modelos log-lineales en el marco de los GLM, como errores Poisson que incluye el modelo básico Lee-Carter. Una vez estimados los parámetros del Modelo LC α_x , K_t y B_x se toma el índice de Mortalidad K_t . A partir de este índice se proyectar el comportamiento de la mortalidad usando el modelo clásico de series de tiempo Box & Jenkins.

Por último se realiza una breve descripción de las estimaciones obtenidas y el impacto que estas pueden darse en la población Colombiana en ámbitos tan importantes como el aboral, el pensional y salud entre otros.

Palabras claves: Métodos estocásticos, Modelo Lee-Carter, Riesgo de Longevidad, Mercado Laboral, Pensiones, Salud.

3. Introducción

La región de América Latina y el Caribe ha experimentado cambios demográficos sustanciales durante las últimas décadas, que han modificado la base de la población y el funcionamiento de las instituciones que transfieren recursos entre

grupos generacionales. Una particular expresión de estos cambios demográficos, el envejecimiento de la población, está relacionada directamente con la evolución de los sistemas de seguridad social y, en la medida que la tendencia al envejecimiento se intensifique, sus efectos se expandirán y amplificarán, como lo demuestra muy claramente la experiencia histórica de los países más desarrollados.[3]

La Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL) y la Organización Internacional del Trabajo (OIT) señalaron que las personas mayores de 60 años aumentarían su proporción en la fuerza laboral de América Latina de 7,5 % en 2015 a 15 %, según el último informe de Coyuntura Laboral en América Latina y el Caribe presentado por ambas instituciones.

De acuerdo a dicha información, las causas de este indicador estarían relacionados con el envejecimiento de la población y, en menor grado, un moderado aumento de la participación laboral de los adultos mayores.

Así mismo, la tasa de ocupación para las personas de 60 años y más alcanza un 35,4 % en la región. Esta proporción es elevada aun en grupos que ya traspasaron la edad legal de jubilación, arrojando 39,3% en el grupo de 65 a 69 años y 20,4% en el 70 y más años. [7]

La secretaria ejecutiva de la CEPAL, Alicia Bárcena, y el director regional de la OIT, José Manuel Salazar, aseguraron que "es necesario ampliar la cobertura de los sistemas de pensiones y complementarlos con pensiones no contributivas, a fin de reducir la presión a la que se ven sometidas las personas mayores, que las obliga a seguir trabajando".

Los ejecutivos agregaron que las personas mayores de 60 años suelen estar empleadas generalmente en empleos de baja productividad con el fin de contar con medios mínimos de subsistencia a una edad en que "las sociedades deberían garantizarles las condiciones para disfrutar de una vejez digna".

Frente al panorama laboral de la región en 2018, tanto la CEPAL como la OIT coinciden en que se está viviendo "una fase de modesta recuperación económica" en la que se estima un crecimiento de 2,2%, frente al 1,3% alcanzado en 2017.

A su vez, la tasa de desempleo urbano registró un leve descenso por primera vez desde 2014, registrando un 9% frente al 9,3% de 2017, la cifra más alta en este rubro desde 2005.

Este análisis no solo es analizado por la Cepal y la OIT, El Banco de Desarrollo de América Latina (CAF) lanzó un nuevo Reporte de Economía y Desarrollo para 2020 en el que estima que en 30 años la población mayor de 65 años se duplicará en la región.



Para la entidad este panorama hace necesario evaluar los sistemas de pensiones, los servicios de salud y los aspectos del mercado de trabajo que condicionan la cobertura y el financiamiento de la vejez.

En Latinoamérica, el gasto público en pensiones representa 4,3% del PIB en promedio y en salud es cerca de 4,1% del PIB. Sin embargo, el gasto para estos rubros podría subir hasta 6% en países como Colombia y Argentina. La informalidad podría ser una de las mayores dificultades para la sostenibilidad de la protección social.

“Los cálculos realizados sugieren que la informalidad deteriora la base de contribuyentes en valores comparables a los que se producirán como consecuencia del proceso de envejecimiento en los próximos 40 años”, explicó Pablo Sanguinetti, vicepresidente de Conocimiento de CAF.

Actualmente, la entidad registra que 63% de las personas ocupadas en la región trabajan en un empleo informal, panorama que se habría agravado con el impacto de la pandemia, que puede causar que otros empleados que perdieron su empleo migren a la informalidad.

Los cambios tecnológicos se suman a los desafíos que señala el CAF con este incremento del envejecimiento, para la entidad esto podría favorecer la sustitución de trabajadores por máquinas o la digitalización en la realización de algunas tareas.

Al respecto, Sanguinetti comenta que los sistemas pensionales deben tener tres elementos: ingreso mínimo para todos los adultos mayores, un componente contributivo equilibrado en términos financieros y un diseño pensional que aumente la cobertura y los aportes.

Uno de los problemas es la mayor longevidad de una persona, por ejemplo para Olivares (2017) “porque vivir más y con el mismo stock de recursos implica una reducción de la renta que espera recibir un individuo, afectando su nivel de vida”. En este trabajo abarcamos uno de los problemas que presenta la población Colombiana como es, su envejecimiento y el impacto que este puede tener en calidad de vida.

De acuerdo al foro económico Mundial, realizado en mayo de 2017, en la presentación de su informe titulado Viviremos hasta los 100 años ¿Cómo podremos pagarlo? (2017). “Desde mediados del siglo pasado, la esperanza de vida ha ido aumentando rápidamente. En promedio ha aumentado en un punto porcentual año, cada cinco años. Bebés nacidos hoy en 2017, pueden esperar vivir hasta más de 101 años o, en otras palabras ellos vivirán para ver el 2117”. [23]. De acuerdo a este escenario, los retos a los que se enfrentan las sociedades para proporcionar una

calidad de vida digna a la población que se encuentra en proceso de envejecimiento y garantizarles una seguridad financiera en el momento de su jubilación es lo más difícil que enfrenta hoy en día la sociedad. En la mayoría de los países del mundo, el nivel de vida y los avances en el cuidado de la salud están permitiendo que la gente viva más tiempo.

Si bien el aumento de la longevidad es un paso positivo para los individuos y las empresas de la salud y la productividad de la sociedad, este cambio tiene un profundo impacto en la salud de la Población. El impacto en la composición tradicional de nuestras sociedades y en los sistemas de protección social que están diseñados para apoyarnos en nuestra vejez.

Sim embargo los cambios que implican una mayor Longevidad van más allá y afectan de forma esencial a todas las instituciones, desde la que probablemente sea la más antigua, el matrimonio, a una de las más recientes, las pensiones públicas [2]

En este estudio se presentan la base actuarial de Longevidad: como medirla, como es la relación con las tasas de mortalidad y de supervivencia, y cuál ha sido su evolución en Colombia durante el periodo 1950-2015. Esta medición se realiza a partir del modelo Lee-Carter (LC), el cual se estimara de dos maneras diferentes:

1. la primera manera se estima por el modelo original (Lee Carter,1992) esta realiza por descomposición singular de matrices a través de la función svd de R de la librería demography.
2. la segunda manera es por GLM –Modelos lineales generalizados a través de la librería ILC, metodología utilizada por (Renshaw & Haberm,2003).

Una vez estimados los parámetros del Modelo LC α_x , K_t y B_x se toma el índice de Mortalidad K_t . “A partir de este índice se puede proyectar el comportamiento de la mortalidad usando el modelo clásico de series de tiempo como lo es Box & Jenkins” ver [15]

Finalmente el objetivo de este trabajo es generar una crítica constructiva respecto al envejecimiento de la población colombiana en el periodo de 1950 -2018 a través del modelo de Lee- Carter, como uno de los modelos actuariales más utilizados y analizar su impacto en el país. Este análisis se realizara primero con un análisis descriptivo de la Población Colombiana para el periodo 1950 -2018, posteriormente se aplica el modelo Lee-Carter para estimar la expectativa de vida para la población colombiana en el periodo de estudio y por ultimo Proyectar a través del tiempo el índice de mortalidad (K_t) usando el modelo clásico de Box & Jenkins para la población Colombiana para el periodo 1950-2018

4. Materiales y Métodos

4.1. Diseño

Este análisis se desarrolla a partir de las tablas de Mortalidad Abreviadas para Colombia, 1950-2015, elaboradas por Naciones Unidas, Departamento de Asuntos Económicos y Sociales, División de Población (2019), edición en línea. Rev. 1. Ver (ver tabla 1). De esta tabla de Mortalidad se elabora la base de datos DEATH la cual denota el número de muertes de personas de edad x , durante el año t (ver tabla 2). Posteriormente se elabora, la siguiente base de datos EXPOSURE la cual describe la población hombre y mujeres que está expuesta al riesgo de fallecer, en la edad x , durante el año t . (ver tabla 3).

DEATH

YEAR	AGE	FEMALE	MALE	TOTAL
1950	0	-2,2064	-1,9470	-4,1534
1950	1	-4,3034	-4,1100	-8,4133
1950	5	-5,5447	-5,4684	-11,0131
1950	10	-5,9108	-5,8548	-11,7656
1950	15	-5,4919	-5,4440	-10,9359
1950	20	-5,2933	-5,1615	-10,4548
1950	25	-5,1949	-5,1483	-10,3432
1950	30	-5,1403	-5,0526	-10,1928
1950	35	-5,0448	-4,9319	-9,9766
1950	40	-4,9181	-4,6908	-9,6089
1950	45	-4,7697	-4,4536	-9,2233
1950	50	-4,4411	-4,1233	-8,5644
1950	55	-4,1152	-3,7882	-7,9035
1950	60	-3,6530	-3,4068	-7,0598
1950	65	-3,1993	-3,0243	-6,2236
1950	70	-2,6984	-2,5763	-5,2747
1950	75	-2,1577	-2,0539	-4,2116
1950	80	-1,7046	-1,6287	-3,3333
1950	85	-1,3707	-1,2491	-2,6198
1950	90	-1,0774	-,9734	-2,0508
1950	95	-,9704	-,8303	-1,8007
1950	100	-,7821	-,6242	-1,4062

Tabla 1. Fuente: Elaboración propia. **DEATH** muestra el número de Muertes de Personas de edad x , durante el año t



EXPOSURE

YEAR	AGE	MALE	FEMALE	TOTAL
1950	0	1.281	1.260	2.541
1950	1	1.210	1.193	2.404
1950	5	3.271	3.236	6.506
1950	10	4.541	4.513	9.054
1950	15	3.741	3.734	7.476
1950	20	3.236	3.243	6.478
1950	25	2.817	2.832	5.649
1950	30	2.348	2.367	4.715
1950	35	1.920	1.939	3.859
1950	40	1.646	1.665	3.311
1950	45	1.370	1.387	2.757
1950	50	1.096	1.115	2.210
1950	55	853	932	1.786
1950	60	656	759	1.415
1950	65	522	607	1.130
1950	70	381	451	832
1950	75	246	296	542
1950	80	156	190	346
1950	85	80	111	191
1950	90	24	40	64
1950	95	5	8	13
1950	100	1	1	2

Tabla 2. Fuente: Elaboración propia. **EXPOSURE** describe la población expuesta al riesgo el número de Muertes de Personas de edad x, durante el año t

DATA

YEAR	AGE
1950	0
1950	1
1950	5
1950	10
1950	15
1950	20
1950	25
1950	30
1950	35
1950	40
1950	45
1950	50
1950	55
1950	60
1950	65
1950	70
1950	75
1950	80
1950	85
1950	90
1950	95
1950	100

Tabla 3. Fuente: Elaboración propia. **DATA** describe la población por edad y año calendario desde 1950 hasta 2018

4.2. Población

Para estimar las tasas de mortalidad por edad, son necesarios datos de fallecimientos (numerador) y de población expuesta al riesgo (denominador) en el periodo bajo estudio. El presente trabajo toma como periodo base para proyectar la mortalidad el intervalo 1950-2018. Los datos de población que se utilizan son tomados de *United Nations, Department of Economic and Social Affairs, Population Division (2019). World Population Prospects 2019, Online Edition. Rev. 1.* se utiliza esta Fuente de datos dado que es necesario disponer de la población por edad y año calendario desde 1950 hasta 2018. (ver tabla 3)



Escriba el texto aquí

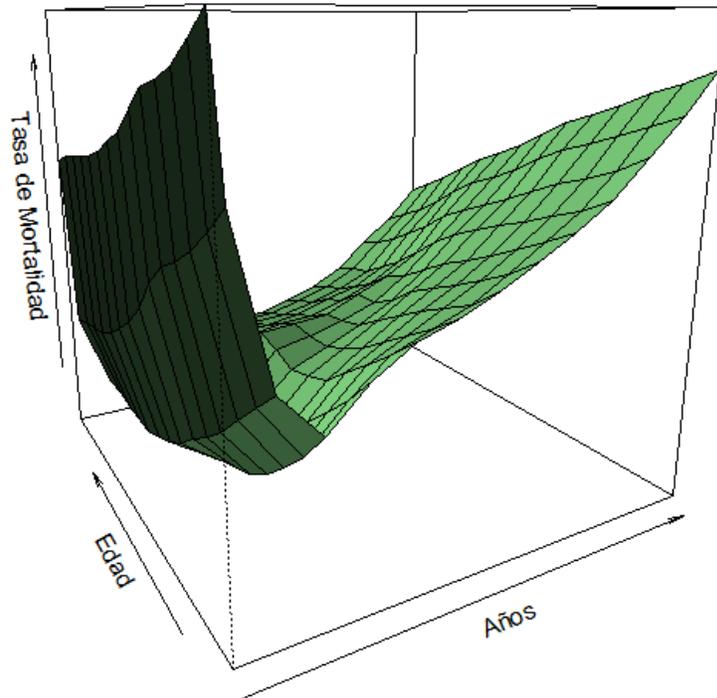


Figura 1. Fuente: elaboración propia .Tasa de Mortalidad población Colombiana periodo 1950-2018

4.3. Intervenciones

A principios de la década de 1990, Ronald Lee y Larry Carter (1992) fueron los que se interesan principalmente en modelar los cambios a lo largo del tiempo en la mortalidad de un solo país o población, en lugar de los cambios de un país a otro. (Wachter, 2006), el modelo de Lee-Carter busca predecir las tasas de mortalidad en base a la estimación de una función estocástica K_t que extrapola la tendencia temporal de la mortalidad, así como su comportamiento para cada grupo de edad. El modelo se presenta formalmente con la siguiente ecuación:

$$\text{Log}(m_{xt}) = \alpha_x + B_x K_t + \varepsilon_{xt} \quad (1)$$

En donde las variables se definen de la siguiente manera:

$\text{Log}(m_{xt})$: Es el logaritmo natural de la tasa de mortalidad en el grupo de edad x en el periodo t

α_x : Describe el efecto de cambio autónomo por cada grupo de edad por año

B_x : Mide el cambio porcentual en la tasa de mortalidad a cada edad ante un cambio de una unidad de la variable no observable K_t

K_t : Representa el nivel general de la mortalidad en el año t y no depende de la edad

ε_{xt} : Es un término error

El modelo LC, descompone el logaritmo natural de la tasa de mortalidad para cada grupo de edad en cada momento del tiempo (m_{xt}) entre parámetros específicos para cada grupo de edad (α_x, B_x) y un componente temporal o tendencial de la mortalidad que es común para todas las edades (k_t)

$$m_{xt} = \exp(\alpha_x + B_x k_t + \varepsilon_{xt}) \quad (2)$$

Dado que los componentes del lado derecho de las ecuaciones anteriores no observables, es necesario imponer las siguientes restricciones para poder implementar la estimación del modelo

$$\sum_x B_x = 1, \quad \sum_t k_t = 0$$

Así, tenemos que α_x y k_t pueden estimarse como:

$$\alpha_x = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \ln m_{xt} \quad (3)$$

$$k_t = \sum_x \ln m_{xt} - m \alpha_x \quad (4)$$

Luego podemos estimar B_x , regresionando – sin constante – separadamente para grupo ($\ln m_{xt} - \alpha_x$) sobre k_t .

Dado que la estimación de k_t . En la etapa anterior fue posible bajo la restricción de que la suma de los B_x fuera igual a 1, la ecuación (4) no es exacta ya que el error para cada grupo de edad ε_{xt} en general no suma cero.

Por lo anterior, se realiza una nueva estimación de k_t condicional a los valores de α_x y B_x , Buscando el valor que satisface la siguiente igualdad:

$$D_t = \sum_x P_{xt} [\exp(\alpha_x + B_x k_t + \varepsilon_{xt})]$$

Donde D_t es la suma observada de muertes, en el periodo t y P_{xt} es la población en el grupo de edad x en el periodo t.

Una vez estimado el modelo para la tasa de mortalidad, necesitamos un modelo que nos permita predecir hacia el futuro el valor k_t

Los modelos de series de tiempo comúnmente utilizados para proyectar k_t , pertenecen a la familia de los modelos ARIMA (p, d, q)

4.4 Análisis estadístico

Estimación de los parámetros del Modelo Lee- Carter, los cuales se estiman de dos maneras diferentes:

La primera manera de estimar los parámetros del modelo LC es por descomposición singular de matrices a través de la función SVD de R, de acuerdo [15] y [11]

La estimación del Modelo de Lee Carter se realiza minimizando la siguiente función

$$D(\alpha, \beta, k) = \sum_{xt} \log(m_{xt}) - (\alpha_x + \beta_x k_t)^2 \quad [6]$$

Donde $\alpha, \beta \in R^{nc}$, y $k \in R^{nc}$. En forma Matricial, si $M = [\log(m_{xt})] \in R^{naxnc}$, $1_{nc} =$



$(1, \dots, 1) \in R^{n_c}$, Donde la ecuación [3] se puede expresar de la siguiente manera:

$$D(\alpha, \beta, k) = \|M - \alpha \mathbf{1}'_{n_c} - \beta k\|_2^2$$

Donde:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_i \sum_j |A_{ij}|^2} \quad [7]$$

Es la norma para de Frobenius para matrices

A partir de la ecuación $\frac{\partial D}{\partial \alpha} = 0$, las restricciones planteadas en el modelo para tratar el problema de identificabilidad permite obtener como solución el vector dado por los promedios de las filas de M , $\hat{\alpha} = \frac{1}{n_c} M \mathbf{1}_{n_c}$, reemplazando esta solución en la ecuación [7] el paso siguiente consiste en minimizar con respecto a (β, k) , originando la función [8] :

$$D(\alpha, \beta, k) = \|M - \alpha \mathbf{1}'_{n_c} - \beta k\|_2^2 \quad [8]$$

La minimización de la ecuación anterior es un caso particular del problema general de aproximar una matriz dada H por otra matriz de rango menor, X , es decir se trata de encontrar \hat{X} tal que:

$$\hat{X} = \underset{\text{rank}(x) \leq r}{\text{argmin}} \|H - X\|_2 \quad [9]$$

Donde $r = \text{rank}(H)$, la solución \hat{X} se puede encontrar mediante la descomposición singular de la matriz H .

De acuerdo a De Acuerdo a (Shores, 2004, sec.5.6) establece que: dada una matriz $H \in R^{m \times n}$ se pueden definir dos matrices ortogonales (sus columnas son vectores ortogonales) $U \in R^{m \times m}$, y $V \in R^{n \times n}$, tales que $H = U \Sigma V'$, donde $\Sigma \in R^{m \times n}$, es una matriz diagonal $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$, con $p = \min(m, n)$ y $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$. Los valores σ_j se denominan valores singulares de H , las columnas de U los vectores singulares izquierdos y las V vectores singulares derechos.

Si $r \leq \min(m, n)$ es el rango H se cumple $\sigma_r > 0$ y $\sigma_{r+1} = 0$ El siguiente resultado es un colario de este teorema. Si $U = [u_1, \dots, u_m]$, $V = [v_1, \dots, v_n]$, entonces se cumple la siguiente descomposición:



$$H = \sum_{j=1}^r \sigma_j u_j v_j' [10]$$

La matriz original debe ser real, con el objetivo de no generar números complejos ya que los valores singulares σ_j son reales no negativos y los vectores u_j, v_j son reales.

La solución \hat{X} a la ecuación [9] para $\text{rank}(X) = h < r = \min(m, n)$ esta dada por la siguiente expresión que establece en Eckart y Young (1936)

$$\hat{X} = \sum_{j=1}^h \sigma_j u_j v_j' [11]$$

Escriba el texto

Aplicando este resultado a la matriz $H = M - \hat{\alpha} 1'_{nc}$, suponiendo $n_a = m < n = n_c$, con $r = n_a$ se obtiene:

$$M - \hat{\alpha} 1'_{nc} = \sum_{j=1}^h \sigma_j u_j v_j' [12]$$

Otra opción de estimar los parámetros del modelo LC es por GLM –Modelos lineales Generalizados a través de la librería ILC (Renshaw & Haberm, 2009).

Una expresión equivalente es del modelo es

$$\log(d_{x,t}) = \log(E_{x,t}) + \alpha_x + \beta_x k_t [13]$$

El termino $\log(E_{xt})$ se denomina offset. Esta diferenciación se hace ya que el termino observado es d_{xt} (muertes) y E_{xt} (Expuestos al riesgo) (Renshaw & Haberm, 2009) definen la siguiente expresión.

$D(x,t) \sim \text{Poisson}(L_{x,t} m_{x,t})$ entonces las función log-verosimilitud basada en los datos $d_{x,t}, E_{x,t}$ y haciendo $\lambda_{x,t} = E_{x,t} m_{x,t}$, está dada por :

$$l(d, \lambda) = \sum_{x,t} d_{x,t} \ln(\lambda_{x,t}) - \lambda_{x,t} - \ln(d_{x,t}!) [14]$$

Se busca encontrar los valores en la matriz $\lambda = [\lambda_{xt}]$ que maximicen

$$\lambda_{x,t} = E_{x,t} m_{x,t} = E_{x,t} e^{\alpha_x + \beta_x k_t} [15]$$

Con respecto a $\alpha_x, \beta_x, k_t, x = 1, \dots, n_a, t = 1, \dots, t_{nc}$

El estimador de máxima verosimilitud en el contexto de modelos lineales generalizados se obtiene minimizando la función deviance. Si $d_{x,t}$ es el conjunto de bajas observado y

$d_{x,t} = E_{X,t} e^{\hat{\alpha} + \hat{\beta}k}$, la función deviance se define como:

$$D(d_{x,t}, \hat{d}_{x,t}) = 2 \sum_{x,t} w_{x,t} \left(d_{x,t} \log \left(\frac{d_{x,t}}{\hat{d}_{x,t}} \right) - (d_{x,t}, \hat{d}_{x,t}) \right) \quad [17]$$

Donde:

$\omega_{x,t} = 0$ Si $d_{x,t} = 0$ y $\omega_{x,t} = 1$ si $d_{x,t} > 0$. La minimización de la función de deviance se hace mediante el método Newton-Raphson unidimensional, aplicado a cada parámetro $\theta = \alpha_x, \beta_x, k_t$ el cual actualiza el valor de θ según la expresión.

$$\theta_{j+1} = \theta_j - \frac{\frac{\partial D}{\partial \theta}}{\frac{\partial^2 D}{\partial \theta^2}} \quad [18]$$

Una vez estimados los parámetros del Modelo LC α_x, K_t y B_X se toma el índice de Mortalidad K_t . A partir de este índice se puede proyectar el comportamiento de la mortalidad usando el modelo clásico de series de tiempo como lo es Box & Jenkins de orden (p, d, q) entonces se modela de la siguiente manera:

$$\phi(\beta) = (1 - \beta)^d k_t = \theta(\beta) e_t \quad [19]$$

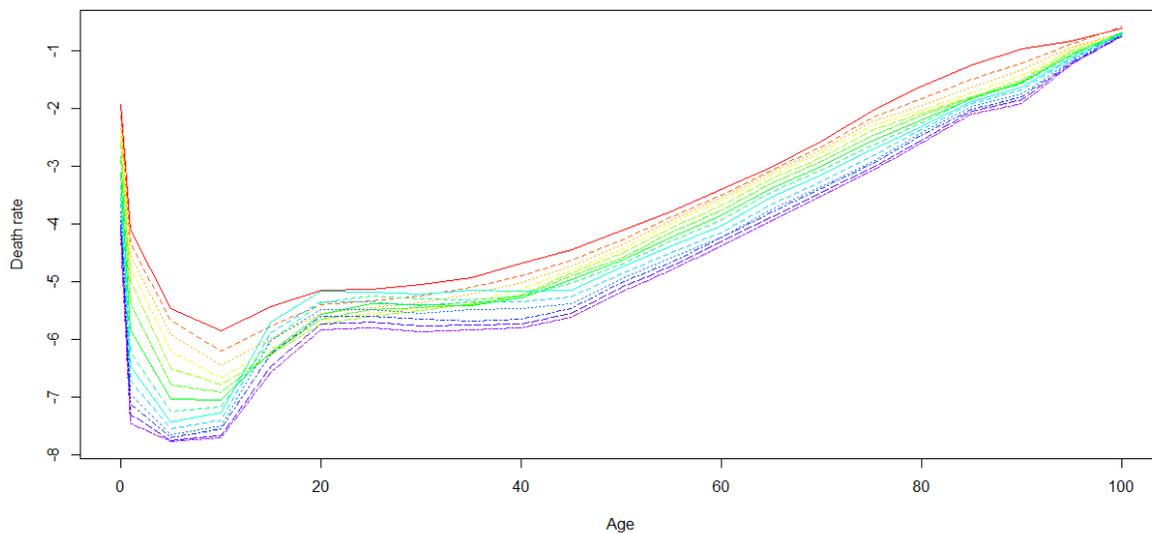
Donde $\phi(\beta)$ y $\theta(\beta)$ son polinomios de grado p y q , respectivamente.

5. Resultados

La evolución de las tasas de mortalidad en la población Colombiana en los últimos 65 años, correspondiente a los Hombres se puede observar como las tendencias son decrecientes en los diez primeros años de vida, después de estos años la tasa de mortalidad presenta un notable aumento sostenido, siendo más pronunciada para los hombres una de las causas puede ser el contexto social que ha marcado a la población masculina en los últimos 50 años. Para la tasa de mortalidad observada de las mujeres, comparándola con la de los hombres la dinámica es parecida teniendo en cuenta que en los diez primeros años presenta un decrecimiento con una pendiente menos negativa que la de los hombres, posteriormente se evidencia como presenta un aumento más lento en comparación con los hombres, lo cual va muy acorde a la literatura demográfica del país

Tasas de mortalidad de hombres para Colombia 1950-2018

Gráfico 2

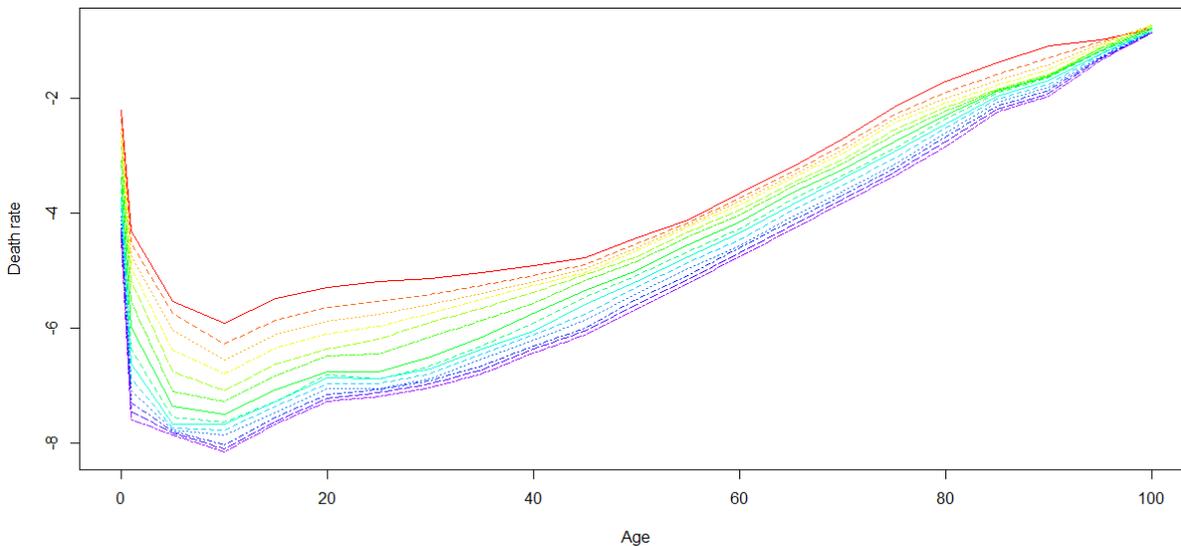


Fuente: Elaboración Propia



Tasas de mortalidad de Mujeres para Colombia 1950-2015

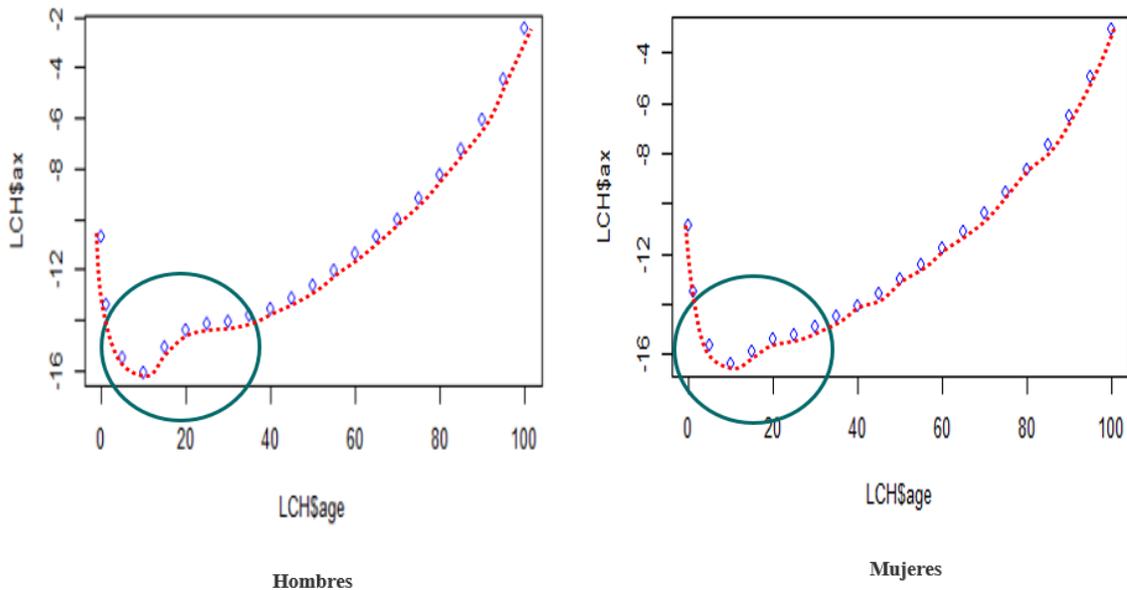
Gráfico 3



Estimación de los parámetros del modelo LC es por descomposición singular de matrices

Estimación del parámetro α_x para la población masculina y femenina

Grafico 4

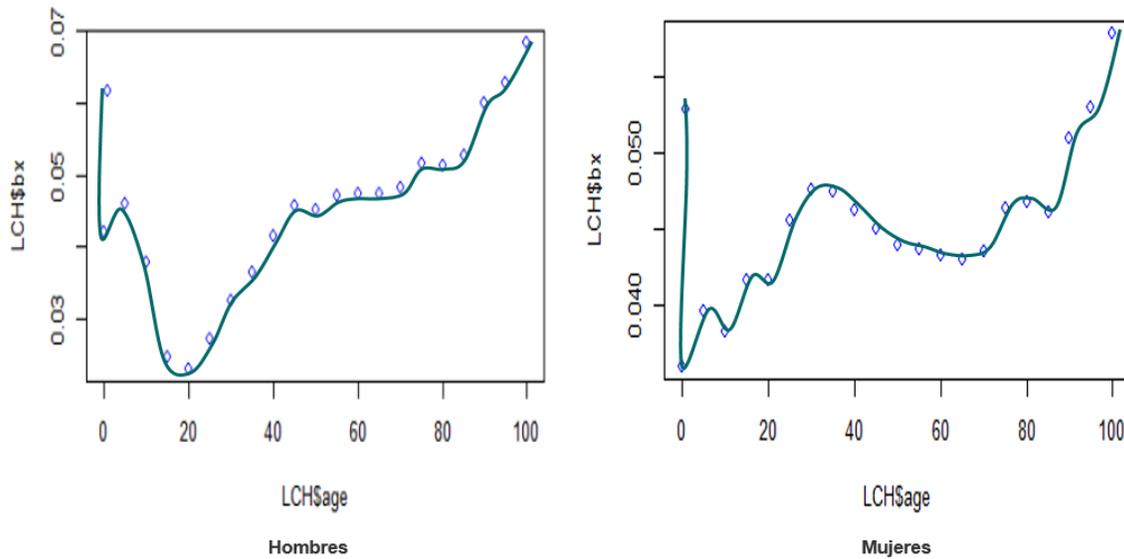




El parámetro α_x describe el patrón promedio de la mortalidad a edad x y no depende del tiempo t [16] En la Grafica 4 se evidencia el patrón de las tasa de mortalidad por sexo. La representación gráfica de estas tendencias es en forma de “U “, en los primeros años de vida la mortalidad presenta una pendiente negativa y posteriormente empieza a aumentar.

Estimación del parámetro β_x para la población masculina y femenina

Grafico 5



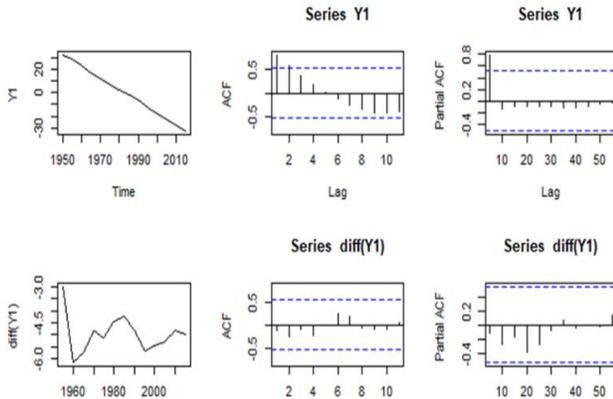
Fuente: Elaboración Propia

El parámetro B_x mide la sensibilidad cada edad x a cambios en el nivel general de la mortalidad k_t [19] En la Grafica 5 se evidencia un importante cambio en la mortalidad de los hombres y de las mujeres en Colombia, para los distintos rangos de edad, siendo más marcada para los hombres que para las mujeres



Estimación y Proyección de $k = (k_t)$'s

En el artículo de Lee Carter se propone que el índice sea modelado como una caminata aleatoria con deriva, aunque es necesario probar una buena cantidad de modelos para el elegir el más indicado. Para este estudio se utilizó el criterio de información Bayesiana (BIC) propuesto por Schwarz en (1978), este es un criterio de evaluación de modelos en términos de probabilidades posteriores. [22]



Elaboración propia: Análisis de los datos correspondiente a la población Masculina Colombiana 1950-2018 por medio de las gráficas de ACF Y PACF . Estos miden el grado de relación entre y_t y y_{t-k}

Para la población Masculina después de probar varios modelos, el que ofreció el mejor ajuste fue un ARIMA (1,1,1) con una diferencia, a continuación se describe la ecuación:

$$K_t = 0.9288y_{t-1} + 0.6559e_{t-1} + e_t \quad [20]$$

Y la varianza de los residuales es $\sigma^2 = 1.021$, Con estos valores es posible pronosticar el índice de la mortalidad masculina. Para este estudio se realizan tres proyecciones hasta el año 2025 grafico 6, año 2030 grafico 7 y año 2040 grafico 8 y los intervalos de predicción de 67 y 95 %.

Los términos del proceso AR y MA tienen un efecto en el aumento o disminución del ritmo que lleva la tendencia de la mortalidad dependiendo del valor de los parámetros para el modelo [20] el valor $\phi_0 = 0.9288$ señala que no hay incertidumbre y controlando la misma variable en el tiempo, la tendencia de la mortalidad masculina siempre aumentará a ese ritmo, y no es factible que cambie de signo dado el valor de su error estándar.

```
> summary(modelo1)
Call:
stats::arima(x = Y1, order = c(1, 1, 1), method = "ML")

Coefficients:
      ar1      ma1
    0.9288  0.6559
s.e.    0.0729  0.3828

sigma^2 estimated as 1.021: log likelihood = -20.33, aic = 46.66

Training set error measures:
      ME      RMSE      MAE      MPE      MAPE      MASE
Training set -0.323543 0.9736414 0.7282425 3.709411 7.60556 0.1465723
      ACF1
Training set -0.3939808
```

Elaboración propia: Estimación modelo para la población masculina en Colombia 1950-2018



Ahora el parámetro autorregresivo $\theta_1 = 0.6559$ revela una aceleración de la tendencia que lleva el índice y de hecho muestra que el valor obtenido en el periodo previo al pronosticado tiene más peso que el de dos periodos anteriores. Además muestra que el periodo inmediato anterior acelera la tendencia y el de dos periodos previos la frena.

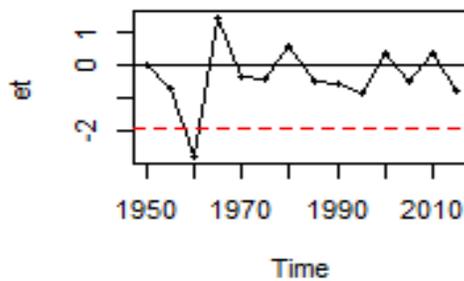
Antes de realizar la proyección se realiza un test de raíces unitarias, para analizar la propiedad de la estacionalidad, teniendo presente que cuando una serie o proceso tiene raíz unitaria, la serie no es estacionaria y los estimadores MCO no tienen distribución normal. Para el estudio se realizó El test de Dickey-Fuller Aumentado (Augmented Dickey-Fuller Test (ADF), en inglés), elimina la autocorrelación e indica si una serie es estacionaria o no

```
Augmented Dickey-Fuller Test
data: y1
Dickey-Fuller = -2.0246, Lag order = 2, p-value = 0.563
alternativa hypothesis: stationary
> parametros=auto.arima(y1)
> parametros
Series: y1
ARIMA(0,1,0) with drift
Coefficients:
drift
-4.9685
s.e. 0.2128
sigma^2 estimated as 0.6376: log likelihood=-15
AIC=34 AICc=35.2 BIC=35.13
```

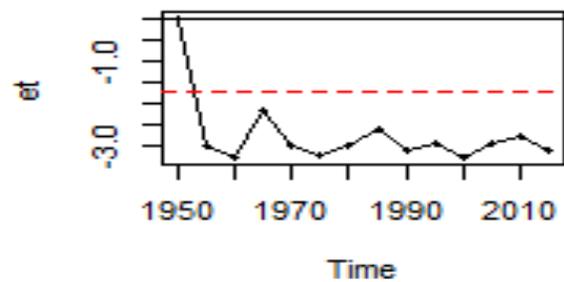
Con este test, también se obtuvo un p-valor de 0.01, por tanto, rechazamos la hipótesis nula y

Elaboración propia: Test Dickey Fuller para la población Masculina en Colombia 1950-2018, que indica si la serie es estacionaria o no. Con un p-valor inferior a 0.05, la hipótesis nula se suele rechazar.

aceptamos la alternativa, y podemos decir que la serie es estacionaria. Por último, vamos a realizar nuevamente el gráfico donde la serie esta transformada:



Elaboración propia: Datos Serie Población Masculina en Colombia 1950-2018



Elaboración propia: Datos Serie Población Femenina en Colombia 1950-2018

Una vez estimados los parámetros básicos, el paso siguiente es pronosticar el índice de mortalidad de acuerdo a l modelo de series de tiempo que mejor se ajuste, para ello se utiliza la librería (forecast) para la realizar la proyección de $(k_t)'$



Gráfico 6
Pronostico del índice de Mortalidad Masculina, 1950-2030.
Las franjas Claras representan el intervalo de 67 % de predicción,
Las oscuras el del 95% de predicción

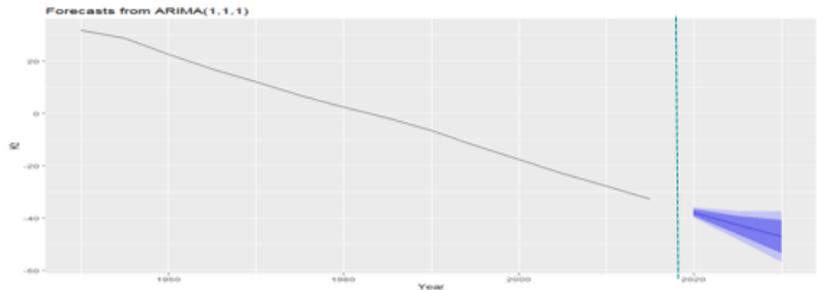
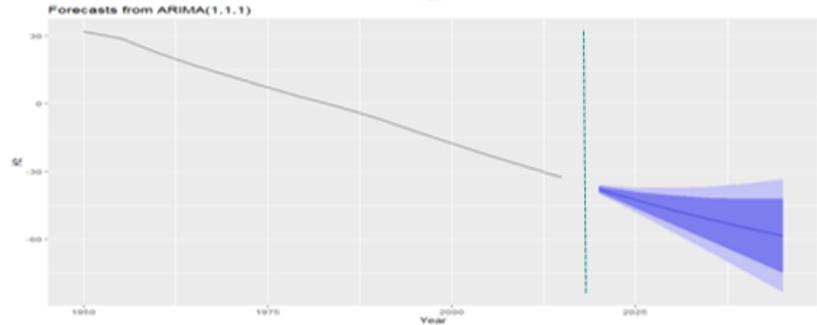
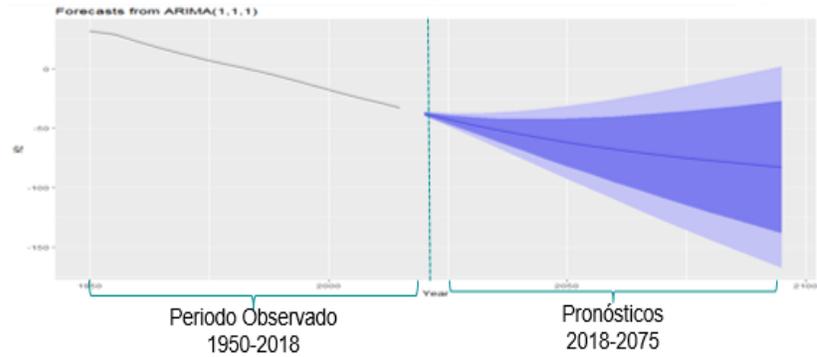


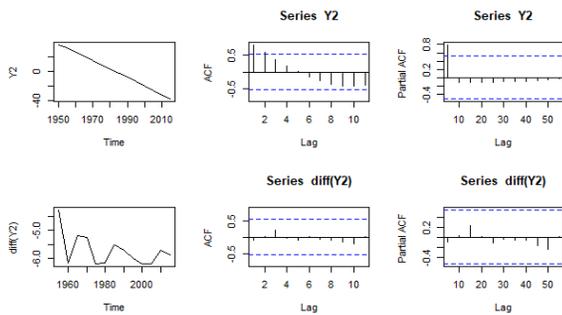
Gráfico 7
Pronostico del índice de Mortalidad Masculina, 1950-2050.
Las franjas Claras representan el intervalo de 67 % de predicción,
Las oscuras el del 95% de predicción



Grafica 8
Pronostico del índice de Mortalidad Masculina, 1950-2095.
Las franjas Claras representan el intervalo de 67 % de predicción,
Las oscuras el del 95% de predicción



Fuente: Elaboración Propia



```
> summary(modelo2)

call:
stats::arima(x = Y2, order = c(0, 1, 1), method = "ML")

Coefficients:
ma1
1.000
s.e. 0.189

sigma^2 estimated as 8.825: log likelihood = -33.92, aic = 71.84

Training set error measures:
      ME      RMSE      MAE      MPE      MAPE      MASE
Training set -2.742046 2.862604 2.747229 1.375869 27.96771 0.4791493
ACF1
Training set -0.06539254
```

Elaboración propia: Análisis de los datos correspondiente a la población Femenina Colombiana 1950-2018 por medio de las gráficas de ACF Y PACF, Estos miden el grado de relación entre y_t y y_{t-k}

Elaboración propia: Estimación modelo para la población Femenina en Colombia 1950-2018

Para la población Femenina después de probar varios modelos, el que ofreció el mejor ajuste fue un MA (0, 1,1) con una diferencia, a continuación, se describe la ecuación:

$$K_t = 1.00y_{t-1} + e_t \quad [21]$$

Y la varianza de los residuales es $\sigma^2 = 8.825$, Con estos valores es posible pronosticar el índice de la mortalidad masculina. Para este estudio se realizan tres proyecciones hasta el año 2025 grafico 6, año 2030 grafico 7 y año 2040 grafico 8 y los intervalos de predicción de 67 y 95 %.

Los términos del proceso MA tienen un efecto en el aumento o disminución del ritmo que lleva la tendencia de la mortalidad dependiendo del valor de los parámetros para el modelo [20] el valor $\theta_0 = 1.00$ señala que no hay incertidumbre y controlando la misma variable en el tiempo, la tendencia de la mortalidad femenina siempre aumentara a ese ritmo, y no es factible que cambie de signo dado el valor de su error estándar

```

Augmented Dickey-Fuller Test
data: Y2
Dickey-Fuller = -4.8858, Lag order = 2, p-value = 0.01
alternative hypothesis: stationary
Series: Y2
ARIMA(0,1,0) with drift

Coefficients:
drift
-5.7336
s.e. 0.1529

sigma^2 estimated as 0.3294: log likelihood=-10.7
AIC=25.41 AICc=26.61 BIC=26.54
    
```

Elaboración propia: Test Dickey Fuller para la población Femenina en Colombia 1950-2018, que indica si la serie es estacionaria o no. Con un p-valor inferior a 0.05, la hipótesis nula se suele rechazar.

Gráfico 9
Pronóstico del índice de Mortalidad Femenina, 1950-2030.
 Las franjas Claras representan el intervalo de 67 % de predicción,
 Las oscuras el del 95% de predicción

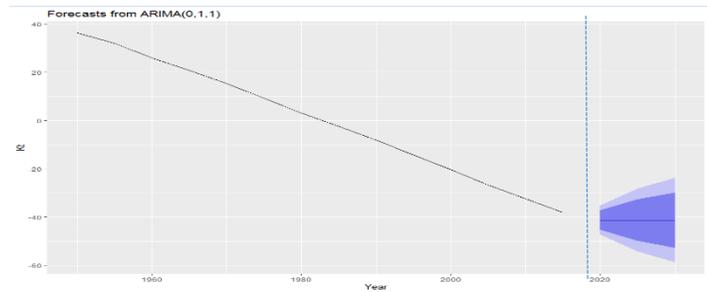


Gráfico 10
Pronóstico del índice de Mortalidad Femenina, 1950-2050.
 Las franjas Claras representan el intervalo de 67 % de predicción,
 Las oscuras el del 95% de predicción

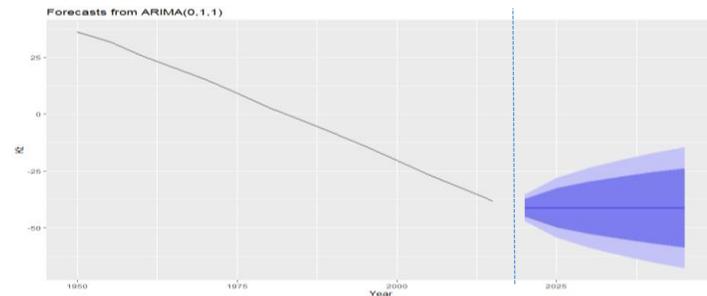
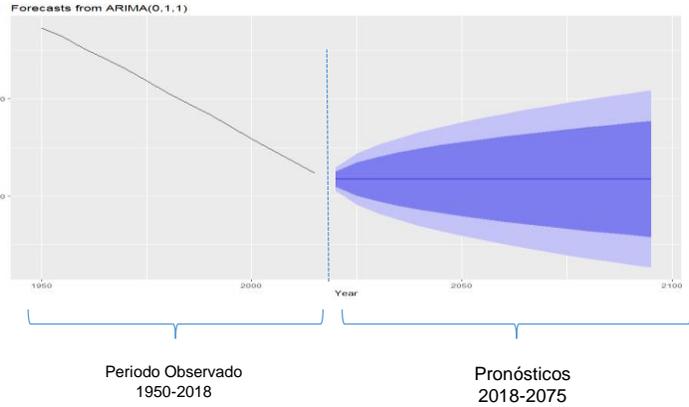




Gráfico 11
Pronóstico del índice de Mortalidad Femenina, 1950-2095.
Las franjas Claras representan el intervalo de 67 % de predicción,
Las oscuras el del 95% de predicción

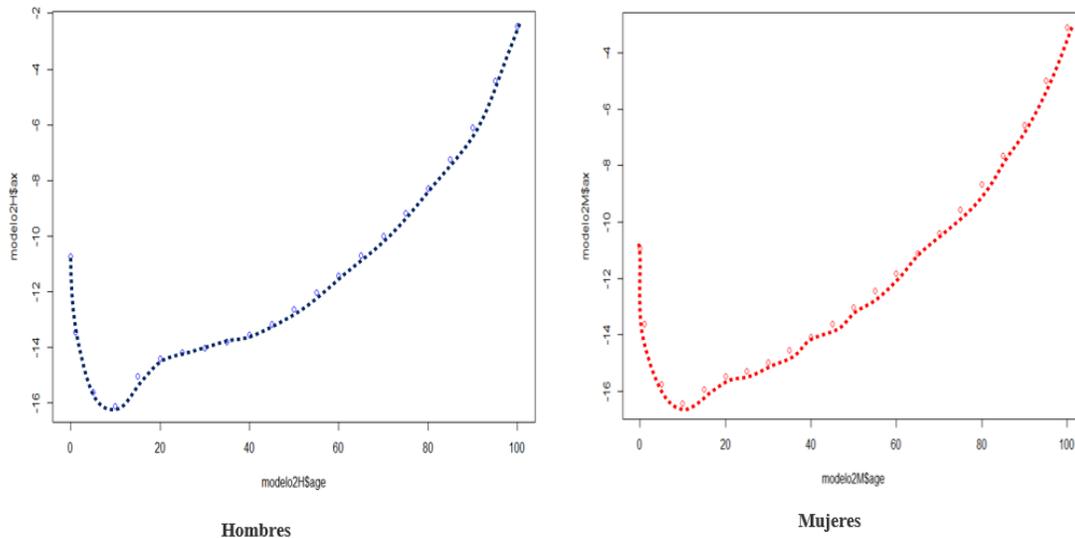


Fuente: Elaboración Propia

Estimación de los parámetros del modelo LC es por GLM –Modelos lineales generalizados a través de la librería ILC (Renshaw & Haberm, 2009).

Estimación del parámetro α_x para la población masculina y femenina

Gráfico 12



Fuente: Elaboración propia

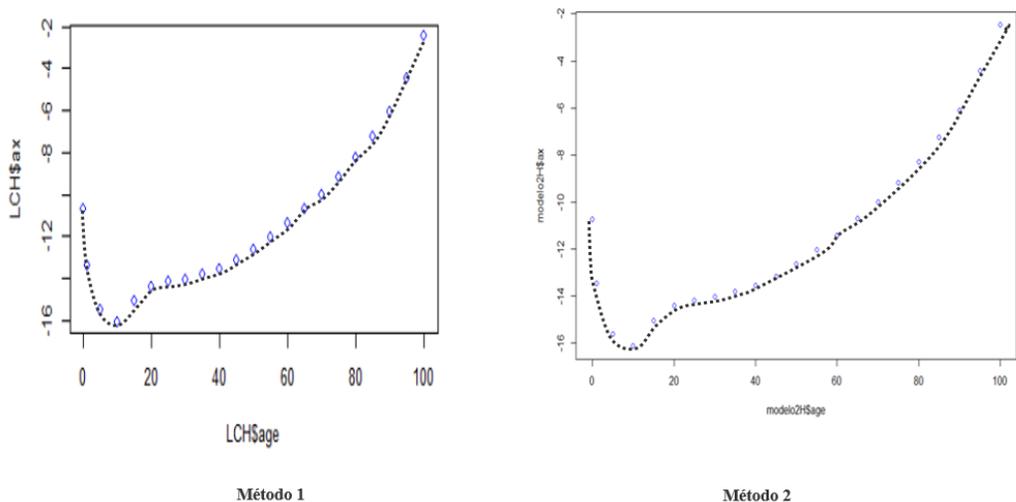
El parámetro α_x describe el patrón promedio de la mortalidad a edad x y no depende del tiempo t [21] En la Grafica 12 se evidencia el patrón de las tasa de mortalidad por sexo. La representación gráfica de estas tendencias es en forma de “U “, en los primeros años de vida la mortalidad presenta una pendiente negativa y posteriormente empieza a aumentar. Al compararlos con la estimación por descomposición de matrices singulares se evidencia que presenta el mismo patrón la tasa de mortalidad. En la parte inferior se visualiza la estimación del parámetro α_x por los dos métodos.



Comparación de la estimación del parámetro α_x , por los dos métodos de estimación

Parámetro α_x para la población masculina 1950-2018

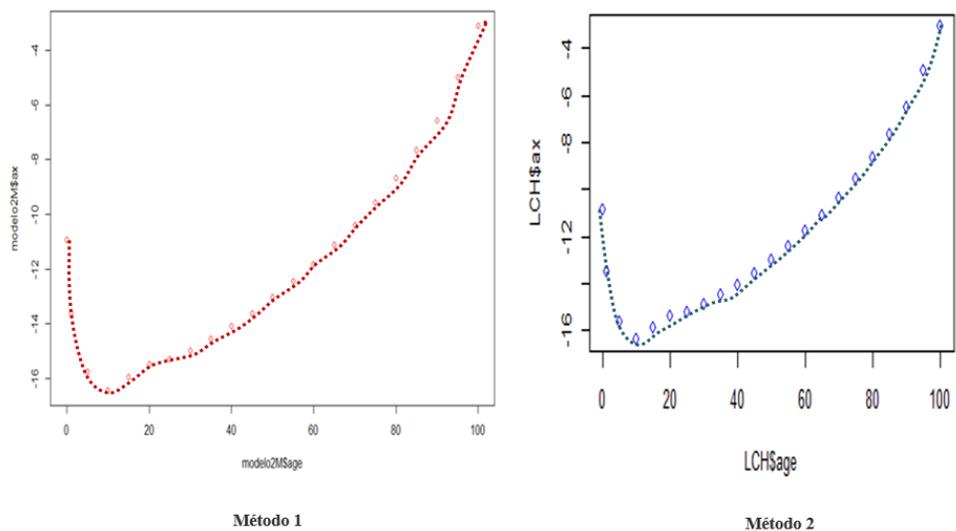
Gráfico 13



Comparación de la estimación del parámetro α_x , por los dos métodos de estimación

Parámetro α_x para la población femenina 1950-2018

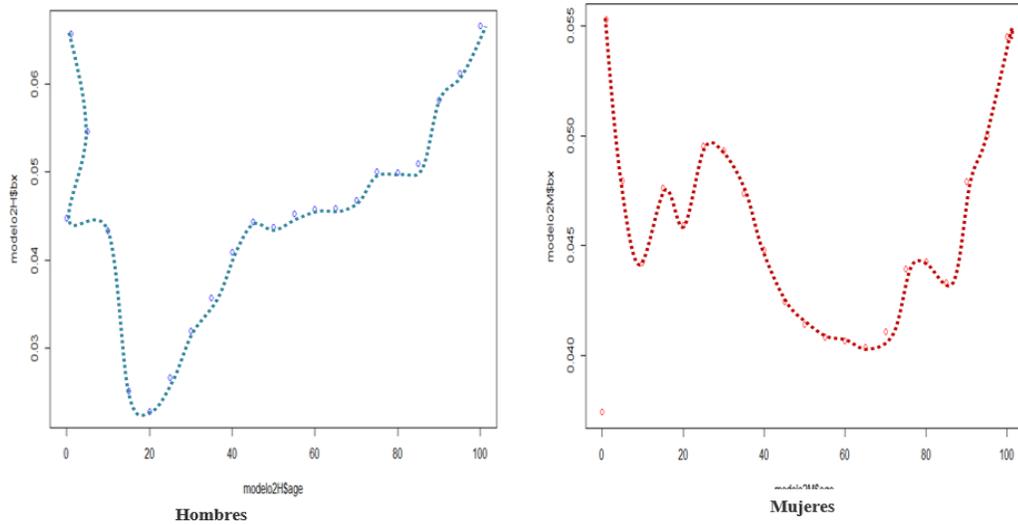
Gráfico 14





Estimación del parámetro β_x para la población masculina y femenina

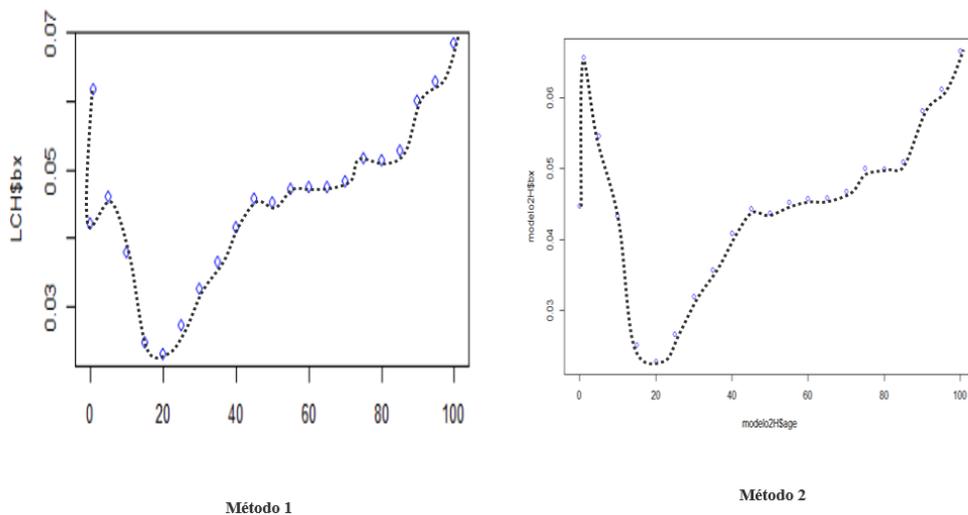
Gráfico 15



El parámetro β_x mide la sensibilidad cada edad x a cambios en el nivel general de la mortalidad k_t [21]. En la Grafica 14 se evidencia un importante cambio en la mortalidad de los hombres y de las mujeres en Colombia, para los distintos rangos de edad, siendo más marcada para los hombres que para las mujeres. . Al compararlos con la estimación por descomposición de matrices singulares se evidencia que presenta el mismo patrón en el nivel general de la mortalidad. En la parte inferior se visualiza la estimación del parámetro β_x por los dos métodos.

Parámetro β_x para la población masculina 1950-2018

Gráfico 16

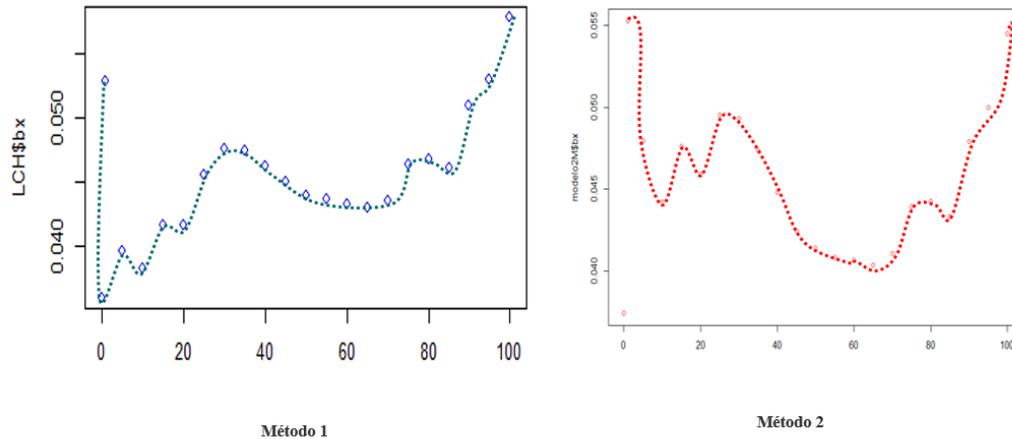




Comparación de la estimación del parámetro β_x , por los dos métodos de estimación

Parámetro β_x para la población femenina 1950-2018

Gráfico 17



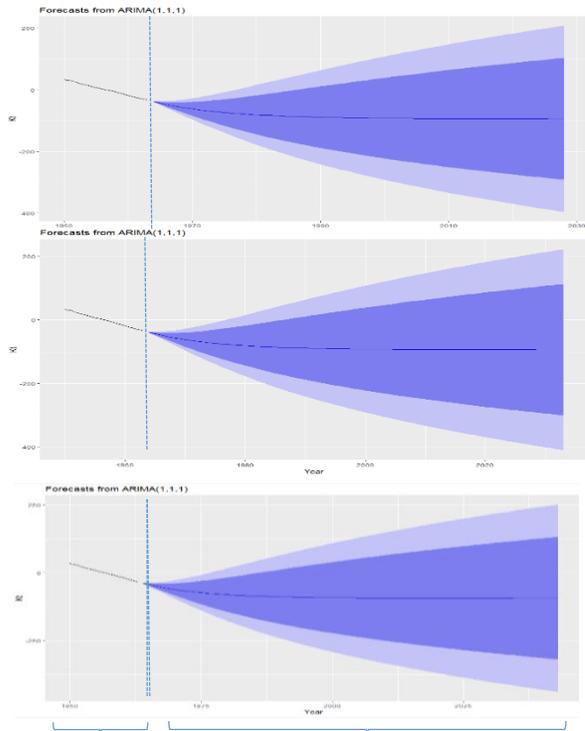
Estimación y Proyección de $k = (k_t)$'s

Una vez estimados los parámetros básicos, el paso siguiente es pronosticar el índice de mortalidad de acuerdo a l modelo de series de tiempo que mejor se ajuste, para ello se utiliza la librería (forecast) para la realizar la proyección de (k_t) 's

Grafica 17
 Pronostico del índice de Mortalidad Masculina, 1950-2025.
 Las franjas Claras representan el intervalo de 67 % de predicción,
 Las oscuras el del 95% de predicción

Grafica 18
 Pronostico del índice de Mortalidad Masculina, 1950-2030.
 Las franjas Claras representan el intervalo de 67 % de predicción,
 Las oscuras el del 95% de predicción

Grafica 19
 Pronostico del índice de Mortalidad Masculina, 1950-2075.
 Las franjas Claras representan el intervalo de 67 % de predicción,
 Las oscuras el del 95% de predicción

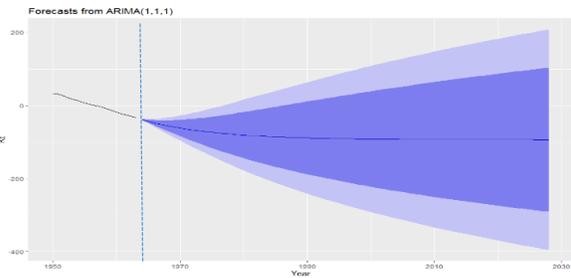


Periodo Observado
1950-2018

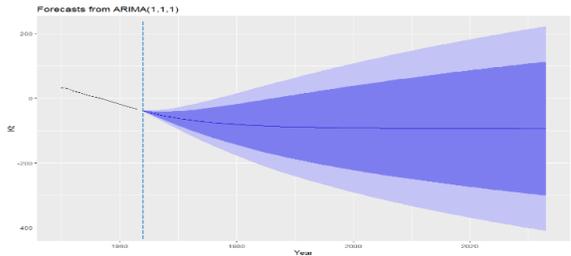
Pronósticos
2018-2075



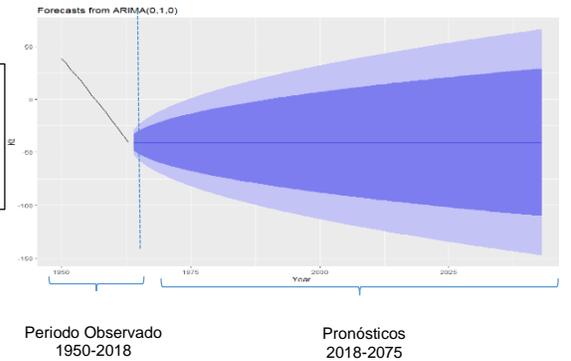
Grafica 20
Pronostico del índice de Mortalidad Femenina, 1950-2025.
Las franjas Claras representan el intervalo de 67 % de predicción,
Las oscuras el del 95% de predicción



Grafica 21
Pronostico del índice de Mortalidad Femenina, 1950-2030.
Las franjas Claras representan el intervalo de 67 % de predicción,
Las oscuras el del 95% de predicción



Grafica 22
Pronostico del índice de Mortalidad Femenina, 1950-2075.
Las franjas Claras representan el intervalo de 67 % de predicción,
Las oscuras el del 95% de predicción



6. Discusión

De acuerdo a proyección para la población Colombiana para el periodo 2018 - 2025,2018-2030 y 2018-2075 las tasa de mortalidad para para Hombres y Mujeres presenta una tendencia decreciente, siendo más significativa en mujeres que para los hombres, se calcula una esperanza de vida al nacer de 80 años para el 2030, es decir un incremento de 6 años respecto a la esperanza de vida al nacer , buenas noticias para la población Colombiana ya que se corrobora estadísticamente que tenemos la posibilidad de sobrevivir más allá de lo esperado.

Si bien esta afirmación no es nueva se valida a partir del uso del Modelo de Lee-Carter, ¿Qué implicaciones trae este aumento en la esperanza de vida? ¿La Sociedad Colombiana está preparada para esta cuarta edad? Como nos puede impactar en las Pensiones, o en el campo de la Salud e incluso el sector laboral por citar solamente algunos sectores.

Desde la óptica social, económica e individual, vivir más tiempo o que menor cantidad de niños fallezcan en edades tempranas, resulta, en sí mismo, un hecho



no menor. Pero la importancia de los resultados presentados en este trabajo se debe a las diferentes aplicaciones.

En Colombia, más del 30% de la población mayor de 60 años y el 7% de la población de 80 años o más aún trabaja. Estos porcentajes son claramente superiores a los observados en países avanzados. Aunque algunas personas mayores trabajan por el gusto de hacerlo, especialmente profesionales con altos niveles de calificación, otras deben hacerlo debido a la falta de pensiones y/o de ayuda familiar. [21]

En materia de seguridad social, los valores estimados en la proyección tocan un tema sensible como son las pensiones, teniendo en cuenta la baja cobertura que tenemos en esta área y como es común encontrar cada vez más personas en edades mayores en la extrema pobreza.

Pero este no es el único campo de investigación o área que se vea implicada directamente. Laboralmente tiene también sus implicaciones, cada individuo puede seguir siendo útil por unos años más (ceteris paribus) o por lo menos cotizar algo más para su jubilación. Y en materia de salud de largo plazo estamos preparados.

Anexo 1

Código en R para Estimación de los parámetros del modelo LC es por descomposición singular de matrices

Utilizando la librería demography se estima el modelo Lee- Carter

```
library (forecast)
```

```
library (demography)
```

```
YEAR=unique (DEATH$Year);nC=length(YEAR)
```

```
AGE =unique (DEATH$Age);nL=length(AGE)
```

```
MUF =matrix (DEATH$Female/EXPOSURE$Female,nL,nC)
```

```
MUH =matrix (DEATH$Male/EXPOSURE$Male,nL,nC)
```

```
POPF=matrix (EXPOSURE$Female,nL,nC)
```

```
POPH=matrix (EXPOSURE$Male,nL,nC)
```

Posteriormente se usa el formato demogdata

```
BASEH <- demogdata(data=MUH, pop=POPH, ages=AGE, years=YEAR,  
type="mortality", label="Colombia", name="Hombres", lambda=1)
```



```
BASEF <- demogdata(data=MUF, pop=POPF,ages=AGE, years=YEAR,  
type="mortality", label="Colombia", name="Mujeres", lambda=1)
```

Estimación de $\alpha=(\alpha_x)$ y $\beta = (\beta_X)$

El Código que se utiliza es el siguiente:

```
LCH <- lca (BASEH)
```

```
plot(LCH$AGE, LCH$ax, col="blue"); plot(LCH$age,LCH$bx,col="blue")
```

Código en R para la Estimación de los parámetros del modelo LC es por GLM –Modelos lineales generalizados a través de la librería ILC (Renshaw & Haberm, 2009).

Utilizando la librería ILC se estima el modelo Lee- Carter

```
library (ilc)
```

```
BASEH <- demogdata(data=MUH, pop=POPH, ages=AGE, years=YEAR,  
type="mortality", label="Colombia", name="Hombres", lambda=1)
```

```
BASEF <- demogdata(data=MUF, pop=POPF,ages=AGE, years=YEAR,  
type="mortality", label="Colombia", name="Mujeres", lambda=1)
```

```
modelo2H <- lca.rh (BASEH, mod= 'lc', interpolate = T, verbose = F, series =  
"HOMBRES")
```

Original sample: Mortality data for COLOMBIA

Series: HOMBRES

Years: 1950 - 2015

Ages: 0 - 100

Fitting model: [$LC = a(x)+b1(x)*k(t)$] - with poisson error structure and with deaths as weights

Iterations finished in: 11 steps

```
modelo2M <- lca.rh(BASEF, mod= 'lc', interpolate = T, verbose = F, series =  
"MUJERES")
```

Original sample: Mortality data for COLOMBIA

Series: MUJERES

Years: 1950 - 2018

Ages: 0 - 100



LOS LIBERTADORES
FUNDACION UNIVERSITARIA

Applied sample: Mortality data for COLOMBIA

Series: MUJERES

Years: 1950 - 2018

Ages: 0 - 100

Fitting model: [$LC = a(x) + b_1(x) \cdot k(t)$]- with poisson error structure and with deaths as weights

Iterations finished in: 11 steps

Estimación de $\alpha = (\alpha_x)$ y $\beta = (\beta_X)$

El Código que se utiliza es el siguiente:

```
plot(modelo2H$age,modelo2H$ax,col="blue");  
plot(modelo2H$age,modelo2H$bx,col="blue")
```



Bibliografía

- [1] Ayuso, M., & Holzmann, R. (2014). Longevidad: un breve análisis global y actuarial. *Documentos de trabajo Instituto BBVA de Pensiones*, 1, 1-14.
- [2] Ayuso, M., Bravo, J. M. V., & Holzmann, R. Abordar el carácter heterogéneo de la longevidad en lo que respecta al diseño y la reforma del sistema de pensiones.
- [3] Bárcena Alicia. (2020) Cambios Demográficos en América Latina: una ventana de oportunidad. CEPAL <https://www.cepal.org/es/articulos/cambios-demograficos-en-america-latina-una-ventana-de-oportunidad>
- [4] Belliard, M., & Williams, I. (2013). Proyección estocástica de la mortalidad: Una aplicación de Lee-Carter en la Argentina. *Revista Latinoamericana de Población*, 7(13), 129-148.
- [5] Börger, M. (2010). Choque determinista versus valor en riesgo estocástico: un análisis del enfoque del modelo estándar de Solvencia II para el riesgo de longevidad. *Blätter der DGVMF*, 31 (2), 225-259.
- [6] Cardona Arango, Doris; Pelaez, Enrique; Envejecimiento poblacional en el siglo XXI: Oportunidades, retos y preocupaciones; Universidad del Norte; Salud Uninorte; 28; 2; 12-2012; 335-348
- [7] Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL)/Organización Internacional del Trabajo (OIT), "La dinámica laboral en una crisis de características inéditas: desafíos de política", Coyuntura Laboral en América Latina y el Caribe, N° 23 (LC/TS.2020/128), Santiago, 2020.
- [8] De Mesa, AA y Mesa-Lago, C. (2006). La reforma estructural de pensiones en Chile: efectos, comparaciones con otras reformas latinoamericanas y lecciones. *Oxford Review of Economic Policy*, 22 (1), 149-167.
- [9] Debón, A. (2015). MÉTODOS RECIENTES DE GRADUACIÓN DE TABLAS DE MORTALIDAD. Indicadores de mortalidad.
- [10] Gómez Rico, Fernando (2010) Proyección de Tasas de Mortalidad y Estimación de los Riesgos de Longevidad y Mortalidad para el caso Colombiano. Pregrado tesis, Universidad del Valle.
- [11] Gómez, N. D. G., & Molina, C. O. (2015). Proyección de la población universitaria utilizando el modelo Lee-Carter. *Comunicaciones en Estadística*, 8(2), 173-192.
- [12] Guillermo Larrain, Simin Ballesteros, Sebastián García, 2017, Longevidad y Pensiones: Una propuesta de seguro para la cuarta edad.
- [13] Javier Alonso y David Tuesta. Diego Torres .Begoña Villamide,2013,Proyecciones de Tablas generacionales dinámicas y riesgo de longevidad en Chile
- [14] Larraín, G., Ballesteros, S., & García, S. (2017). Longevidad y pensiones: una propuesta de seguro para la cuarta edad. Serie de Documentos de Trabajo de la Facultad de Economía y Negocios de la Universidad de Chile, SDT, 441.
- [15] Ochoa Molina, Carlos Andrés (2015) El modelo Lee-Carter para estimar y pronosticar mortalidad: una aplicación para Colombia. Maestría thesis, Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín.
- [16] Ortiz, F., Villegas, M., & Zarruk, A. (2012). Tablas De Mortalidad (Mortality Tables). *Documentos de Matemáticas y Estadística*, (5).



- [17] Osorno Gómez, J. Análisis de solvencia en anualidades de vida con tasas de interés aleatorias. Escuela de Estadística.
- [18] Reyes Sierra, Adriana Rocío (2010) Una aproximación al costo fiscal en pensiones como consecuencia del envejecimiento de la población en Colombia y el efecto de la sobre-mortalidad masculina. Maestría tesis, Universidad Nacional de Colombia.
- [19] Zarruk, A., & CARDOSO, F. (2010). Nuevas tablas de Mortalidad de Rentistas. Revista Fasecolda, 20-24.
- [20] García Guerrero, V. M., & Ordorica Mellado, M. (2012). Proyección estocástica de mortalidad mexicana por medio del método de Lee-Carter. Estudios demográficos y urbanos, 27(2), 409-448.
- [21] Villar, L., Flórez, C. E., Valencia-López, N., Alzate, J. P., & Forero, D. (2016). Protección económica para la vejez en Colombia: ¿ estamos preparados para el envejecimiento de la población?.
- [22] Montesinos-López, A. (2011). Estudio del AIC y BIC en la selección de modelos de vida con datos censurados.
- [23] Wheeler, R. (2017, mayo). Viviremos hasta los 100, ¿cómo podemos pagarlo? En el *Foro Económico Mundial, Mercers* .