



**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA**

**FACULTAD DE CIENCIAS DE LA ELECTRÓNICA**

**MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA ELECTRÓNICA  
OPCIÓN EN AUTOMATIZACIÓN**

**“Diseño y control de un dedo robot subactuado mediante técnicas de control de ganancias autosintonizables”**

# **T E S I S**

Presentada para obtener el título de:  
**Maestro en Ciencias de la Electrónica**

Presenta:

**Ing. Ahumada Velazquez Fernando \***

Director:

Dr. José Eligio Moisés Gutiérrez Arias (MCEA-FCE-BUAP)

Puebla, México

Enero 2022

\*BECARIO CONACYT

# Agradecimientos

Agradezco a mi familia por el apoyo incondicional que me han brindado. A mis compañeros de maestría y profesores, especialmente al Dr. Carlos Muñíz por su apoyo incondicional.

Agradezco al Conacyt, por el soporte que se me brindó para mi permanencia en Puebla.



# Resumen

En el presente documento, se abordan las actividades realizadas para el cumplimiento de objetivos establecidos para este proyecto de tesis. En el capítulo 1, se abordan los principios y fundamentos de control de robots manipuladores, autosintonización de ganancias y redes neuronales, así como la estructura general de la mano humana y su relación biomecánica con la dinámica de movimiento de un robot. Además, en esta sección se tienen los antecedentes en cuanto diseño antropomórfico y control automático. En el capítulo 2, se realiza el análisis de la estructura mecánica para un dedo de la mano robot propuesta. En primera instancia, se lleva a cabo el desarrollo analítico para la obtención del modelo dinámico de un dedo robot. Después, se emplea un modelo de regresión no lineal que permite estimar posiciones articulares para la reducción del modelo dinámico del dedo de tres a un grado de libertad. Asimismo, se describe la estrategia de control PD para regulación del movimiento y se presenta una propuesta de control no acotado. En el capítulo 3, se presenta la estrategia de autosintonización de las ganancias proporcional y derivativa. Esta estrategia consiste en la implementación de redes neuronales de base radial en el control clásico PD, lo que permite autosintonizar las ganancias para cualquier posición deseada del dedo robot. En el capítulo 4, se muestra el diseño CAD preestablecido para este proyecto de tesis, se discuten los principales aspectos de las etapas de control y de potencia, así como el método para caracterizar el actuador del dedo robot. Finalmente, se muestran los resultados del desempeño de la mano robot con un solo dedo.



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>I</b>
<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Modelo dinámico del sistema y su reducción</b>	<b>25</b>
2.1. Resumen . . . . .	25
2.2. Modelo dinámico de cada dedo con 3 GDL . . . . .	26
2.3. Subactuación del dedo robot . . . . .	34
2.4. análisis y síntesis de la estructura subactuada . . . . .	35
2.5. Aproximación no lineal del sistema subactuado . . . . .	40
2.6. Reducción del modelo dinámico de 3 a 1GDL . . . . .	44
2.7. Control de posición . . . . .	48
2.7.1. Control de posición PD . . . . .	49
2.7.2. Análisis de estabilidad Lyapunov PD . . . . .	50
2.7.3. Desempeño del sistema PD a nivel simulación . . . . .	52
2.7.4. Control de posición propuesto . . . . .	54
2.7.5. Análisis de estabilidad de regulador propuesto . . . . .	54
2.8. Comparación entre el sistema de 3gdl y el subactuado . . . . .	57
<b>3. Establecimiento de la técnica de ganancias autosintonizables</b>	<b>59</b>
<b>4. Integración del sistema</b>	<b>69</b>
4.1. Introducción diseño CAD . . . . .	69
4.2. CAD de la mano robótica . . . . .	70
4.3. Caracterización . . . . .	72

4.3.1. Metodología de caracterización . . . . .	73
4.4. Etapa de control . . . . .	77
4.5. Etapa de potencia . . . . .	80
4.6. Implementación física y resultados . . . . .	82
<b>Conclusiones</b>	<b>93</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>49</b>
<b>Dibujos técnicos</b>	<b>53</b>
<b>Participación en congresos</b>	<b>63</b>

# Índice de figuras

1.1. Cadenas cinématicas de los dedos humanos [18]. . . . .	4
1.2. Rango de movimiento de las articulaciones de los dedos [18]. . . . .	4
1.3. Concepto básico del mecanismo de enlaces de cuatro: (a) y (b) la secuencia de flexión similar a la humana; (c) su principal inconveniente es que ya no puede moverse mientras está en contacto con el objeto; y (d) con agarre autoadaptativo [3]. . . . .	9
1.4. Estructura esquemática del mecanismo de dedo: (a) primera interacción de mecanismo; (b) segunda interacción de mecanismo; y (c) tercera interacción de mecanismo. El principio de funcionamiento de la subactuación con las tres manivelas deslizantes propuestas y los dos resortes lineales cuando el actuador lineal se encuentra funcionando [3]. . . . .	10
1.5. Modelo renderizado en 3D del mecanismo del dedo propuesto en [4]. . . . .	11
1.6. Rendimiento del prototipo de dedo [4]. . . . .	11
1.7. Diseño del dedo protésico [14]. . . . .	13
1.8. Estado inicial del dedo protésico [14]. . . . .	14
1.9. Flexión del dedo con mecanismo de cuatro barras [14]. . . . .	14
1.10. Complejos articulares subactuados de la estructura mecánica [14]. . . . .	15
1.11. Diseño mecánico del dedo pulgar con múltiples grados de libertad [15]. . . . .	16
1.12. Estructura interna de la mano robótica [15]. . . . .	16
1.13. Agarre de pinza fina [15]. . . . .	17
1.14. Agarre de potencia de diversos objetos utilizando el pulgar opuesto al resto de los dedos [15]. . . . .	17
1.15. Agarre lateral de una llave convencional [15]. . . . .	17
1.16. Mano mecatrónica [23]. . . . .	18
1.17. Estructura mecánica de la mano mecatrónica [23]. . . . .	19

1.18. interfaz de control de la mano mecatrónica [23]. . . . .	19
1.19. Diseño mecánico de la mano robótica propuesta por Zhicheng Teng et. al [17]. . . . .	20
1.20. Diseño mecánico del dedo índice [17]. . . . .	21
1.21. Punto de referencia del diseño de los dedos antropomórficos en plano tridimensional [17]. . . . .	22
1.22. Articulación en estado flexionado [17]. . . . .	22
1.23. Diseño mecánico del dedo índice [17] . . . . .	23
1.24. Acción de apuntar, agarre de pinza fina y agarre de potencia de la mano protésica propuesta [17]. . . . .	23
2.1. Modelo geométrico del servomecanismo tipo péndulo triple. . . . .	26
2.2. Propuesta de cadena cinemática para el dedo robot [21]. . . . .	35
2.3. Actuador lineal Actuonix PQ12-P. . . . .	35
2.4. Primer eslabón; interpretación y esquema de transmisión [21]. . . . .	36
2.5. Trayectoria del efector final del primer eslabón [21]. . . . .	37
2.6. Conexión y trayectoria del segundo eslabón [21]. . . . .	37
2.7. Optimización de trayectorias para la palanca 2 y 3 con respecto al punto E [21]. . . . .	38
2.8. Espacio de trabajo del dedo robot [21]. . . . .	38
2.9. Aproximación de las posiciones angulares $q_2$ y $q_3$ respecto a $q$ . . . . .	41
2.10. Aproximación de las posiciones angulares $q_2$ y $q_3$ respecto a $q$ . . . . .	44
2.11. Comparación de desempeño del regulador PD utilizando una función $f_k$ lineal vs no lineal. . . . .	53
2.12. Comparación de desempeño del regulador PD utilizando una función $f_k$ lineal vs no lineal. . . . .	53
2.13. Comparación de posición y velocidad articulares del regulador exponen- cial utilizando una función $f_k$ lineal vs no lineal. . . . .	56
2.14. Comparación de error de posición y par aplicado del regulador exponen- cial utilizando una función $f_k$ lineal vs no lineal. . . . .	56
2.15. Posición y velocidad del sistema de 3gdl y subactuado. . . . .	57
2.16. Error de posición y par tursor del sistema de 3gdl y subactuado. . . . .	58
3.1. Tabla de cálculo de centros Gaussianos. . . . .	60
3.2. Tabla de ganancias. . . . .	61

3.3. Tabla de pesos. . . . .	61
3.4. Estructura de la red neuronal de base radial. . . . .	62
3.5. Comparación posición y velocidad entre regulador PD y PD neuronal a 90 grados. . . . .	64
3.6. Comparación de error de posición y torque aplicado entre regulador PD y PD neuronal a 90 grados. . . . .	64
3.7. Comparación posición y velocidad entre regulador PD y PD neuronal de 90 a 30 grados. . . . .	65
3.8. Comparación torque entre regulador PD y PD neuronal de 90 a 30 grados.	65
3.9. Comparación posición y velocidad entre regulador PD y PD neuronal de 30 a 90 grados. . . . .	66
3.10. Comparación torque entre regulador PD y PD neuronal de 30 a 90 grados.	66
4.1. Diseño CAD del dedo en flexión [21]. . . . .	70
4.2. Dimensiones del primer eslabón (actuado) del dedo índice [21]. . . . .	71
4.3. Movimiento de pinza fina [21]. . . . .	71
4.4. diseño CAD de la estructura de soporte para los motores. . . . .	71
4.5. Conexión del dinamómetro al rotor del motor. . . . .	72
4.6. Datos de eficiencia en función del voltaje. . . . .	74
4.7. Relación de eficiencia en función del voltaje. . . . .	74
4.8. Aproximación lineal del par motor en función de frecuencia. . . . .	75
4.9. Aproximación lineal del par motor en función del ciclo de trabajo. . . . .	75
4.10. Arreglo Darlington. . . . .	76
4.11. Diagrama mecánico de actuación del motoreductor [21]. . . . .	77
4.12. Diagrama de entradas y salidas del dsPIC30F4013. . . . .	78
4.13. Diagrama de conexiones básicas con dsPIC30F4013 [21]. . . . .	80
4.14. Diagrama de entradas y salidas del L298. . . . .	80
4.15. Principio de operación del Puente H. . . . .	81
4.16. Esquema de control de cada dedo robot. . . . .	82
4.17. Posición y velocidad del sistema de 3gdl y subactuado. . . . .	83
4.18. Comparación posición y velocidad entre regulador PD y PD neuronal de 90 a 30 grados. . . . .	84
4.19. Estructura subactuada (perfil 1). . . . .	85
4.20. Estructura subactuada (perfil 2). . . . .	85

4.21. Conexión de actuador a falange proximal del dedo robot. . . . .	85
4.22. falanges del dedo índice interconectadas a actuador. . . . .	85
4.23. Respuesta del robot a 0.28 radianes (16 grados). . . . .	86
4.24. Respuesta del robot a 0.82 radianes (47 grados). . . . .	87
4.25. Resultados de las pruebas experimentales. . . . .	87
4.26. Resultados de las pruebas experimentales. . . . .	88
4.27. Resultados de las pruebas experimentales (0.16 radianes). . . . .	88
4.28. Resultados de las pruebas experimentales (0.82 radianes). . . . .	89
4.29. Resultados de las pruebas experimentales (0.19 radianes). . . . .	89
4.30. Resultados de las pruebas experimentales (0.54 radianes). . . . .	89
4.31. Resultados de las pruebas experimentales (0.28 radianes). . . . .	90
4.32. Resultados de las pruebas experimentales (0.57 radianes). . . . .	90
4.33. Resultados de las pruebas experimentales (0.30 radianes). . . . .	90
4.34. Diseño de mano robótica [21]. . . . .	62

# Capítulo 1

## Introducción

Las destrezas de agarre y manipulación de la mano humana, son tareas básicas que empleamos día a día a lo largo de nuestras vidas. Por ser la mano, una de las partes mas importantes y versátiles del cuerpo humano para interactuar con el medio circundante, desde hace décadas ha sido utilizada como fuente de inspiración para desarrollar modelos funcionales y adaptivos, que conciernen en teoría de control, hasta la implementación robótica y mecatrónica. Por ello, el antropomorfismo es la meta que se pretende alcanzar en el diseño de una mano robótica.

No obstante, la extensa capacidad de la mano humana, sigue siendo difícil de biomimetizar debido a la complejidad del modelo cinemático que describe su movimiento, la complejidad mecánica que involucra los elementos de transmisión de fuerzas y, la cantidad de actuadores que se requieren en este tipo de proyectos, por mencionar algunas de las consideraciones fundamentales de diseño. Es importante mencionar, que el diseño antropomórfico no debe limitarse a imitar la anatomía humana, sino a comprender la funcionalidad y relación existente entre los elementos que conforman la mano y la descripción de su comportamiento dinámico, para proponer un adecuado diseño mecánico y algoritmo de control.

La línea de investigación que se sigue en el presente documento, propicia el desarrollo de sistemas robóticos con elementos subactuados y pretende aportar innovación en cuestiones de diseño estructural y desempeño de movimiento, por medio de subsistemas asociados con complejos articulares que transmiten las fuerzas que requiere el robot para desplazarse adecuadamente. Asimismo, se propone la incorporación de un sistema

de control de posición con ganancias autosintonizables, como solución ha aspectos de eficiencia y calibración de la mano robótica.

## Marco teórico

Hoy en día, el impulso que motiva la investigación de las dimensiones del cuerpo humano, proviene de las necesidades de desarrollo tecnológico, especialmente en el diseño de interfaces hombre-máquina: espacio de trabajo, diseño, cabinas, trajes a presión, armaduras, etc. Aun así, la mayoría de estas necesidades son alcanzadas con medidas básicas lineales, de área y de volumen. Asimismo, el análisis del movimiento humano, requiere de medidas cinéticas: masas, momentos de inercia, así como sus ubicaciones, parámetros fundamentales para comprender el comportamiento del cuerpo humano en cuestiones dinámicas. También, existe todo un estudio circundante a las articulaciones centrales de rotación, el origen y la inserción de los músculos, los ángulos del tirón de los tendones, la longitud y el área transversal de los huesos [13].

## Anatomía básica de la mano humana

La estructura de la mano humana, consta de 29 huesos conectados por una numerosa cantidad de complejos articulares. Existen tres partes fundamentales que describen su forma [18]:

- La muñeca.
- La palma.
- Los dedos.

Entre los huesos de la mano, se encuentran los metacarpianos, clasificados como huesos largos. En total se tienen cinco, uno por cada dedo, y son aquellos que fungen como base de articulación junto con los huesos carpianos, el cuerpo y la cabeza, conectados a cada dedo [18]. Los dedos de la mano poseen tres falanges; desde el dedo índice al meñique, se tienen tres falanges por cada uno, que son la proximal, intermedia y distal. Por otro lado, el pulgar únicamente tiene dos falanges, ya que no tiene falange intermedia. Entre los huesos carpiano y metacarpiano, hay cinco articulaciones

---

carpometacarpianas (CMC) y sólo una de ellas que corresponde a la CMC del pulgar, permite realizar los movimientos de flexión y extensión, abducción y aducción y, circunducción y oposición [18].

En la base de cada falange proximal, se encuentra la articulación metacarpofalángica, que permite los movimientos de flexión, extensión, abducción, aducción y circunducción. Las articulaciones entre falanges se denominan articulaciones interfalángicas, de las cuales, cada dedo de la mano cuenta con dos de éstas, a excepción del pulgar. En la falange proximal, se tiene una articulación interfalángica y entre la falange intermedia y distal se tiene la segunda, mientras que en el pulgar, la articulación ocurre solo entre proximal y distal, ya que carece de la falange intermedia como se mencionó con anterioridad. Estas articulaciones, son las responsables de facilitar a los dedos los movimientos de flexión y extensión de sus falanges.

## **Estudio de biomecánica de la mano humana**

En tarea de movimiento articular, la mano es una cadena cinemática abierta que comienza desde la articulación de la muñeca y termina en las articulaciones de los dedos. Debido a la específica y sofisticada estructura de las articulaciones humanas, únicamente son posibles los movimientos de rotación. En cuanto al análisis de la forma de la mano y desde un punto de vista biomecánico, los huesos se pueden considerar como el diseño estructural, e individualmente como partes móviles, y sus articulaciones como los complejos cinemáticos a estudiar [18].

Cada estudio científico, aborda el tema de la biomecánica de la mano humana y su análisis cinemático, dependiendo del ámbito de estudio y la aplicación que se pretende llevar a cabo. Los resultados y descripciones en pruebas experimentales, varían principalmente en función del número de grados de libertad del modelo, así como de la estructura antropomórfica que se desea desarrollar. La reducción en grados de libertad de un sistema, se lleva a cabo por medio de mecanismos subactuados, los cuales permiten a una estructura dada realizar movimientos de algunas o todas sus articulaciones, por medio de un número de actuadores siempre menor al número de articulaciones que se tienen.

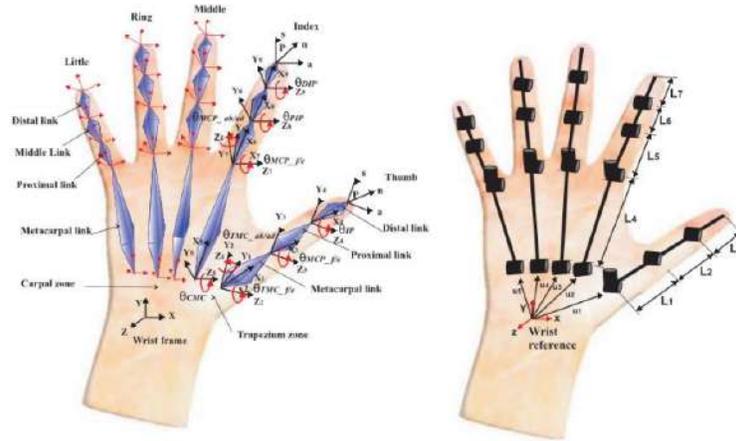


Figura 1.1: Cadenas cinemáticas de los dedos humanos [18].

Lukasz Jaworski y Robert Karpinski, llevaron a cabo una investigación en la cual delimitan el rango de movimiento en cada articulación de la mano humana, como se muestra en la Figura 2. Ciertamente, el valor de cada parámetro puede variar según el sujeto. Estos varían de acuerdo a la estructura corporal, sexo y origen racial para cada individuo, por mencionar algunos factores.

Finger	Flexion	Extension	Abduction/adduction
<b>Thumb</b>			
Trapeziometacarpal	50° - 90°	15°	45° - 60°
Metacarpophalangeal(MCM)	75° - 80°	0°	0°
Interphalangeal (IP)	75° - 80°	5° - 10°	0°
<b>Index</b>			
Carpometacarpal (CMC)	5°	0°	0°
MCP	90°	30° - 40°	60°
Proximal interphalangeal (PIP)	110°	0°	0°
Distal interphalangeal (DIP)	80° - 90°	5°	0°
<b>Middle</b>			
CMC	5°	0°	0°
MCP	90°	30° - 40°	45°
PIP	110°	0°	0°
DIP	80° - 90°	5°	0°
<b>Ring</b>			
CMC	10°	0°	0°
MCP	90°	30° - 40°	45°
PIP	120°	0°	0°
DIP	80° - 90°	5°	0°
<b>Little</b>			
CMC	15°	0°	0°
MCP	90°	30° - 40°	50°
PIP	135°	0°	0°
DIP	90°	5°	0°

Figura 1.2: Rango de movimiento de las articulaciones de los dedos [18].

## Modelo dinámico de sistemas robóticos

Un robot es un sistema mecánico complejo, cuya descripción analítica requiere de ecuaciones diferenciales. La naturaleza no lineal, multivariable y acoplada de su comportamiento dinámico, ofrece un amplio espectro de formulaciones en cuanto a teoría de control y aplicaciones prácticas. El modelo dinámico de un robot, es aquel que describe todos los fenómenos físicos presentes que se encuentran en su estructura mecánica, tales como el efecto inercial, fuerzas centrípetas y el fenómeno de Coriolis, el efecto de gravedad y fricción viscosa, todos ellos, fenómenos físicos intrínsecos o propios de la naturaleza de la estructura robótica. Comprender la relación entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo y el movimiento que en él se origina, es posible a través del análisis de las ecuaciones diferenciales que describen al sistema para formar su modelo dinámico [19]. Cabe mencionar, que para propósitos de diseño y simulación de un sistema mecánico y de algoritmos de control, la obtención del modelo dinámico es fundamental.

El estudio de la cinemática directa de robots, proporciona elementos al usuario para analizar y diseñar su desplazamiento, así como la orientación de la herramienta de trabajo, en el caso de los manipuladores. Dependiendo del tipo de articulaciones que se tengan en la estructura del robot (lineales o rotacionales), el análisis cinemático y el comportamiento dinámico general, varía, ya que los fenómenos físicos presentes tienen un efecto distinto con base en conceptos como gravedad, energía, efecto inercial, etc [19].

El cálculo de los parámetros dinámicos de un sistema dado, puede realizarse por medio de diversas metodologías, Una de ellas, y la abordada en el presente protocolo de tesis, es la de *las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange*. Dichas ecuaciones, están dadas por:

$$\tau = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(\theta, \dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}} \right] - \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(\theta, \dot{\theta})}{\partial \theta} \right] \quad (1.1)$$

donde  $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T \in \mathbb{R}^n$ , representa el vector de posiciones articulares, o bien, coordenadas generalizadas,  $\dot{q} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T \in \mathbb{R}^n$  es el vector de velocidades articulares y  $\tau \in \mathbb{R}^n$  es el vector de pares aplicados [19]. De acuerdo a Fernando Reyes, es posible obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange con base en una metodología que consiste de cuatro pasos,

- 1. Obtener el modelo de cinemática directa de cada eslabón con base en sus respectivos centros de masa.
- 2. Obtener el modelo de cinemática diferencial, del cual se obtiene la velocidad de cada centro de masa por eslabón. La cinemática diferencial refiere a la derivada de las componentes calculadas en el paso anterior. Así [19],

$$v_i = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$$

La rapidez está dada por [19]:

$$v_i^T v_i = \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2$$

- 3. Obtener el modelo de energía. Esto implica calcular las energías cinética y potencial gravitatoria presentes en el sistema. La energía cinética se define como  $\mathcal{K}_\gamma(q_i, \dot{q}_i) = \frac{1}{2}m_i v_i^T v_i + \frac{1}{2}I_i \left[ \sum_i^n q_i \right]^2$ . Ésta incluye los movimientos de traslación y rotación de los centros de masa e involucra el efecto inercial en cada uno de ellos [19].

La energía potencial gravitatoria  $U(q)$ , depende de la propia estructura del robot. Se define como  $U_i(q) = m_i g y_i$ .

Una vez obtenidas ambas energías, se obtiene la función del lagrangiano, la cual está dada por:  $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{K}(q, \dot{q}) - U(q)$ . La función de lagrangiano, describe la energía presente en el sistema.

- 4. El cuarto y final paso a seguir, es el de obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange con base en el lagrangiano. Por medio de la ecuación [1], se obtiene el modelo que describe el comportamiento dinámico del sistema.

## Control de posición

Hasta el día de hoy, los sistemas de control son un tópico constantemente investigado y mejorado en pos de la comunidad científica y el desarrollo de nuevas y mejores tecnologías. En área industrial, existen aplicaciones de sistemas tales como pintado de materiales, extrusión de plásticos, remachado de superficies, etc. entre dichos sistemas, existe el control de posición, en el cual no hay referencia variante en el tiempo de la que el robot pueda hacer uso, sino un punto constante en el tiempo al que se le denomina posición deseada [19]. El objetivo del control de posición, es el de colocar el extremo final o efector final del robot en una posición deseada y que permanezca en ella de manera indefinida [19]. Esta aplicación, abre paso a la interpolación de una serie de puntos para describir una curva o un trayecto que permita al robot desplazarse desde un punto a otro contantemente, de acuerdo al diseño y propósito que se le encomiende.

En el control de robots manipuladores, el controlador más sencillo de implementar es el denominado *Control Proporcional* (P) con retroalimentación de velocidad. El control proporcional, es un tipo de control de la posición angular para motores de corriente continua. La ecuación del controlador Proporcional con retroalimentación de velocidad viene dada por [20]:

$$\tau = K_p \tilde{q} - K_v \dot{q}$$

donde  $K_p, K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices definidas positivas y corresponden a las ganancias proporcional y derivativa, respectivamente [20]. El principio básico de aplicación de los controladores de posición, está dado por  $\tilde{q} = q_d - q$ , donde  $\tilde{q}$  corresponde al error de posición de la articulación del robot,  $q_d$  corresponde a la posición en la que se desea que la articulación se posicione, y  $q$ , que es la posición actual de la articulación. Además,  $\tilde{q}$ ,  $q_d$  y  $q \in \mathbb{R}^n$ .

El control Proporcional-Derivativo (PD), el cual puede considerarse como un derivado del control Proporcional con retroalimentación de velocidad, es aquel cuya ley de control está conformada por un término de ganancia proporcional al error de posición y un segundo término proporcional asociado a su derivada, es decir, al error de velocidad. su expresión matemática está dada por [20]:

$$\tau = K_p \tilde{q} - K_v \dot{\tilde{q}}$$

donde también  $K_p, K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices definidas positivas y por tanto simétricas elegidas por el diseñador del sistema por el diseñador.

## Ganancias autosintonizables

El concepto de sintonización refiere al ajuste de las ganancias en un sistema de control, con el objetivo de obtener una respuesta aceptable de la variable controlada. La sintonización de controladores, es necesaria cuando en un sistema físico se presentan perturbaciones y la respuesta del propio sistema se aleja de un comportamiento deseado. Si las condiciones de operación cambian, la acción de corrección del controlador también cambia. Podría volverse lenta, lo que conlleva a que la corrección del error tome más tiempo del requerido, o bien, la corrección es demasiado rápida y el proceso se vuelve inestable. En estas situaciones, es conveniente sintonizar las ganancias del controlador. En algunas ocasiones, la sintonización de ganancias es una tarea manual, donde se requiere que un operador realice mediciones, y empíricamente, lleve a cabo los ajustes necesarios para que el proceso siga su curso de manera relativamente adecuada. Para resolver este inconveniente, se introduce el concepto de autosintonización.

En teoría de control, la autosintonización es un método que permite optimizar los parámetros de un sistema de control automáticamente. El objetivo de la autosintonización, es ajustar las ganancias de un controlador, a modo que el error medido sea corregido sin necesidad de un operador externo, es decir, el ajuste de parámetros se lleva a cabo por el propio sistema de control. Las técnicas de autosintonización, generalmente se rigen por los siguientes conceptos: valor deseado, valor medido, análisis y acción correctiva.

- Valor de la variable física deseada. Este valor es preestablecido por el diseñador, y describe cuál es la respuesta que se espera que el sistema alcance conforme evoluciona el tiempo.
- Valor de la variable física medida. Este valor es el resultado de la recolección de datos que conciernen a las condiciones y comportamiento del sistema.

- Análisis. La capacidad de análisis de un sistema de control, permite llevar a cabo una toma de decisiones, respecto a las acciones que deben llevarse a cabo.
- Acción correctiva. Es la manera en que el sistema responde de acuerdo al análisis de la variable física deseada y la variable física medida.

## Antecedentes

El departamento de Ingeniería de Sistemas Electrónicos, de la Universidad de Hanyang, Ansan de Corea del Sur, propone un sistema para activar el dedo con un actuador, para el cual, se usa un conjunto interconectado de enlaces para un mecanismo de cuatro barras para reducir el número de grados de libertad (GDL) a uno (el número de grados de actuador (GDA)). La Fig. 3, ilustra el concepto básico del mecanismo de dedo, y su secuencia de movimiento. Antes de entrar en contacto con el objeto, dos falanges se flexionan simultáneamente por los enlaces apilados de cuatro barras cuando un actuador lineal está funcionando, ver Fig. 3: (a) y (b). Después de que la falange proximal entra en contacto con el objeto, la falange distal ya no puede moverse porque el mecanismo está atascado, ver Fig. 3: (c) [3].

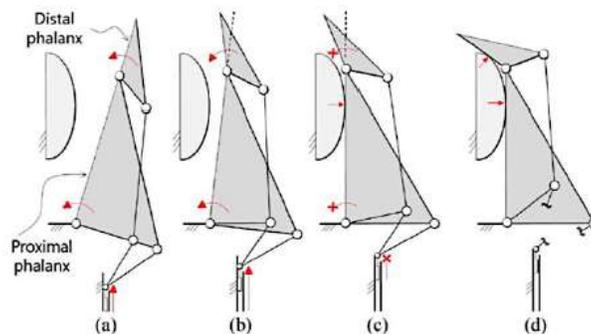


Figura 1.3: Concepto básico del mecanismo de enlaces de cuatro: (a) y (b) la secuencia de flexión similar a la humana; (c) su principal inconveniente es que ya no puede moverse mientras está en contacto con el objeto; y (d) con agarre autoadaptativo [3].

Por lo tanto, este dedo solo pudo realizar una tarea de agarre limitada. El mecanismo propuesto por Choi, puede realizar flexión y extensión de tipo humano sin

ninguna deformación del resorte, así como el agarre autoadaptativo, ver Fig. 3: (d). Cabe señalar que la falange distal no tiene una orientación constante en la tarea de prensión del objeto de agarre [3].

El análisis cinetostático de los dedos subactuados en el mecanismo para evaluar la fuerza de agarre utiliza demasiados parámetros, ya que este es analizado desde el punto de partida de cadena cinemática cerrada. Estos parámetros cinemáticos se describen gráficamente, (ver Fig. 4). Debe observarse que el sistema de coordenadas de la base está unido al origen  $O$ , y la coordenada absoluta se aplica a todas las uniones. Los ángulos proximal, medio y distal están indicados por  $\theta_i$  desde el eje  $X_0$  a los enlaces  $l_1$ ,  $l_2$  y  $l_3$ .

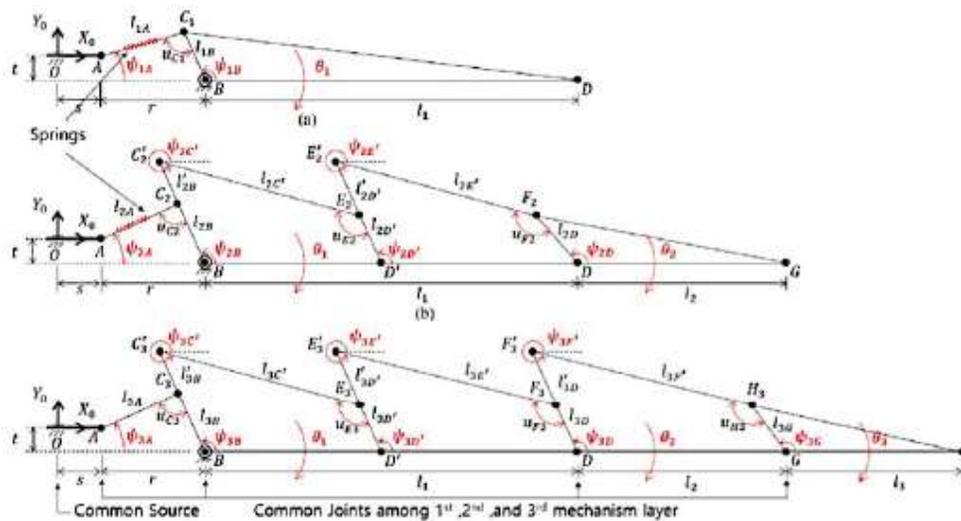


Figura 1.4: Estructura esquemática del mecanismo de dedo: (a) primera interacción de mecanismo; (b) segunda interacción de mecanismo; y (c) tercera interacción de mecanismo. El principio de funcionamiento de la subactuación con las tres manivelas deslizantes propuestas y los dos resortes lineales cuando el actuador lineal se encuentra funcionando [3].

El departamento de Robótica y Mecatrónica, de la Universidad de Nazarbayev, Astana, Kazajstán, propone un diseño de dedo mediante un método de generación de punto de ruta basado en las dimensiones geométricas y el movimiento de un dedo humano índice típico, (ver Fig. 5).



Figura 1.5: Modelo renderizado en 3D del mecanismo del dedo propuesto en [4].

Siguiendo la descripción del diseño y su análisis cinemático, la evaluación experimental del rendimiento de agarre con los dedos se presenta a través de la subactuación del dedo, la cual, se logra utilizando un sistema de enlace mecánico, que consiste en dos mecanismos de enlace de cuatro barras cruzadas [4].

Sin embargo, a nivel de implementación el diseño propuesto por el departamento de Robótica y Mecatrónica, de la Universidad de Nazarbayev, no cumple al 100 con un diseño antropométrico, en el cual, se puede observar que algunas articulaciones sobresalen con mayor pronunciación que otras, ver Fig. 6, lo que significa, si bien no afecta la manipulación y agarre de objetos, sí podría representar repercusiones para otras tareas de manipulación e interacción de los dedos en una mano robótica para tareas primarias de manera cotidiana.



Figura 1.6: Rendimiento del prototipo de dedo [4].

Estas no son las únicas propuestas existentes en función de utilizar un solo actuador lineal en conjunto de una cadena cinemática para la articulación de un dedo robótico,

existen algunas otras, como las mencionadas en [9], [10], [11] y [12]; sin embargo, estos realizan el análisis cinemático y dinámico, mediante el uso de métodos analíticos de una cadena cinemática cerrada, lo cual, conlleva a un análisis de mayor complejidad y una gran cantidad de parámetros presentes para las propuestas del uso de técnicas de control aplicadas a un control de posición.

Diferentes grupos de investigación han estudiado diversas técnicas de control para realizar el control de seguimiento de los sistemas subactuados. Además, se debe llevar a cabo el modelado de los dedos subactuados para obtener una comprensión suficiente de la idoneidad de los controladores basados en modelos que pueden adoptarse para el propósito de control. Ante esto, existen propuestas para la modelación de un sistema subactuado en función del modelo dinámico para un robot manipulador de  $n$  grados de libertad como se menciona en [5], [7] y [8].

Sin embargo, las articulaciones de cada dedo están restringidas debido al uso de un eslabón de empuje. Por lo tanto, la actuación del primer enlace (falange proximal) de cada dedo creará un movimiento relacional de los otros enlaces (falanges medias y distales).

## Estado del arte

### Prótesis robótica de dedos pulgar e índice

Gu-Cheol Jeong et al., presentan una novedosa prótesis de dedo robótica para pacientes con los dedos pulgar e índice parcialmente amputados (Fig. 7). Los objetivos de diseño que se cubren en este proyecto, son [14]:

- 1. El diseño de un mecanismo subactuado de tres grados de libertad (GDL), que imitara los movimientos de los dedos sin perder calidad biomecánica, incluidos los perfiles de movimiento y la autoadaptación para restricciones desconocidas.
- 2. Un diseño ergonómico y práctico que permitiera colocarse y desprenderse la prótesis con relativa facilidad.
- 3. La implementación de los componentes seleccionados, incluido un actuador lineal, enlaces y sensores en un espacio relativamente limitado, evitando la interferencia de movimiento con otros dedos y la muñeca.



Figura 1.7: Diseño del dedo protésico [14].

El dedo protésico de tres GDL propuesto, puede generar una fuerza de pinza fina de  $4.6N$  y una velocidad angular de  $99.4$  grados por segundo en las articulaciones MCP. Para las señales de comando, se utilizaron sensores de electromiograma de superficie (sEMG) [14]. Esto permite a los usuarios operar los dedos con cierta configuración y fuerza de agarre.

La mano protésica propuesta consiste en un dedo índice con las articulaciones MCP, PIP, DIP, siguiendo el diseño antropomórfico de un dedo humano. El complejo articular de la junta MCP, facilita el movimiento de rotación de la junta PIP a través de un mecanismo de enlace de cuatro barras (Fig. 9). Asimismo, provee la rotación de la articulación DIP, usando un mecanismo de enlace de cinco barras. Las dimensiones de los enlaces y las constantes de resorte, se determinaron mediante análisis cineoelástico para sintetizar el movimiento natural de los dedos subactuados [14].

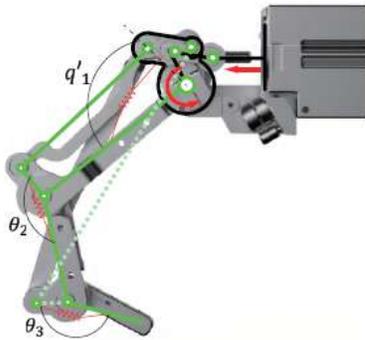


Figura 1.8: Estado inicial del dedo protésico [14].

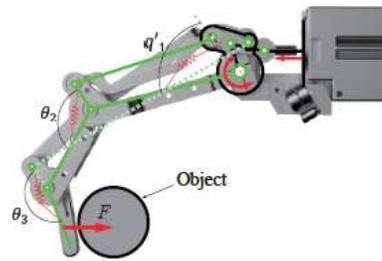


Figura 1.9: Flexión del dedo con mecanismo de cuatro barras [14].

El sistema de control propuesto, permite realizar los movimientos de agarre del dedo protésico, los cuales se controlan mediante señales sEMG del antebrazo del paciente, que corresponden a la flexión y extensión del dedo pulgar. Esto debido a la amputación parcial del dedo índice del paciente en el que se probó el modelo, por lo que se utiliza el dedo pulgar para adquisición de señales EMG. Para ello, se implementó un módulo sensorial sEMG (Myo, Thalmic) con una frecuencia de muestreo de 200 Hz [14].

Cuando el paciente objetivo realizó la flexión y extensión del pulgar, la señal EMG se midió a partir de electrodos de 8 canales, y se estableció el rango de amplitud de acuerdo con cada movimiento. Se utilizó un controlador ARM para los comandos de comunicación y control de Bluetooth, con lo que se obtiene un cambio en la velocidad de movimiento del dedo en proporción a la amplitud de la señal sEMG medida [14].

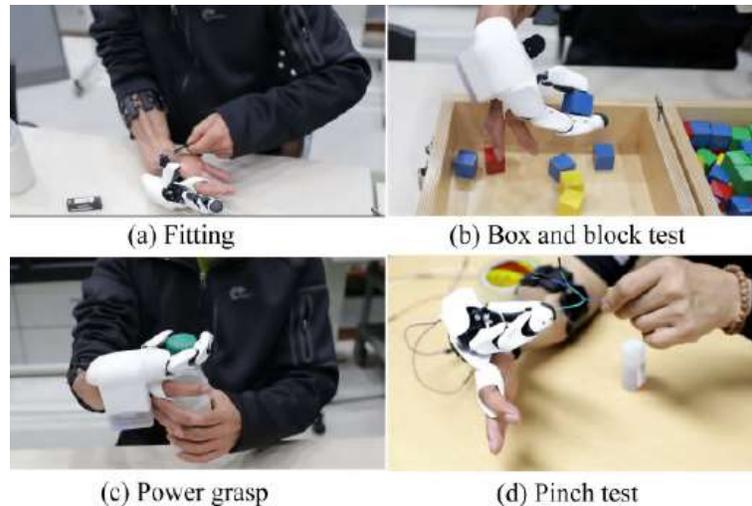


Figura 1.10: Complejos articulares subactuados de la estructura mecánica [14].

Los resultados por medio de pruebas experimentales que llevaron a cabo estos autores, muestran un desempeño de agarre adecuado al propósito del diseño.

## Diseño de pulgar de mano robótica

El pulgar de una mano humana o una mano protésica, juega un papel importante en la acción de agarre y manipulación de objetos. Lograr estos movimientos, requiere de un diseño mecánico en manos protésicas que permita que su pulgar sea capaz de realizar tanto los movimientos de aducción y abducción, así como de flexión y extensión, que son necesarios para imitar el comportamiento natural de la mano humana [15].

Los autores Hao Zhou et. al, proponen un pulgar robótico para una antropomórfica y transradial mano protésica. Asimismo, se fabrica la mano completa utilizando tecnología de impresión tridimensional procurando el tamaño promedio de una mano adulta pero mucho más ligera. Basados en los conceptos de robótica suave y mecanismos subactuados, estos autores proponen un pulgar capaz de realizar agarres con potencia, de precisión y agarres laterales de objetos con diversas formas y tamaños. La presente propuesta pretende reducir el número de actuadores presentes en el sistema, el consumo de energía y el tamaño de la mano robótica, lo cual favorece al desarrollo a bajo costo sin pérdida general de calidad de desempeño [15].

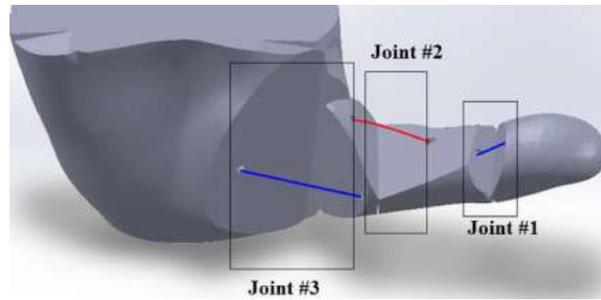


Figura 1.11: Diseño mecánico del dedo pulgar con múltiples grados de libertad [15].

La propuesta de mano protésica contiene actuadores ensamblados en su palma, cuyo consumo de espacio y de energía, por diseño, son mínimos. En la figura 11, se muestra el diseño asistido por computadora (CAD) de la articulación múltiple del pulgar robótico propuesto. Obsérvese que la estructura de la mano es monolítica, es decir, no requiere de ensamblaje. La longitud total del pulgar es de 90 mm. Por diseño, el dedo pulgar tiene un rango de movimiento de 0 a 100 grados [15]. Si bien se utilizan tres bisagras de flexión para las tres articulaciones del pulgar, ninguna de estas juntas comparte el mismo eje de rotación. Así, el pulgar que se propone tiene tres grados de libertad (*GDL*) cuya rotación se da a partir de tendones enlazados y accionados por una polea (Fig. 12).

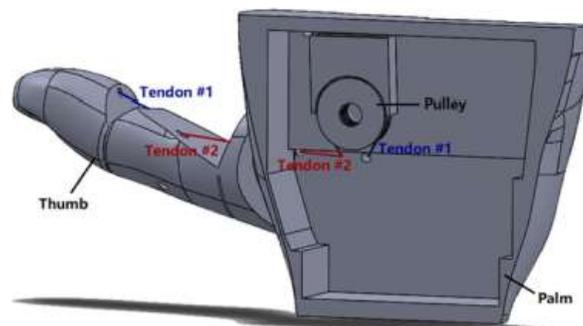


Figura 1.12: Estructura interna de la mano robótica [15].

La presencia de la articulación 3 (ver Fig. 11) permite la abducción y aducción del pulgar. Su función imita a la del metacarpo trapecoidal de la mano humana. El eje de rotación está en la conexión de la palma y el pulgar. Además, esta articulación permite al pulgar tomar una postura opuesta y no opuesta al resto de los dedos de la mano, lo

cual se requiere para precisión de agarre y agarre lateral, respectivamente [15]. La mano propuesta, es capaz de realizar acciones comúnmente utilizadas por la mano humana, como pellizcar o el agarre de pinza, asociado con los movimientos del dedo índice y / o el dedo medio en conjunto con el pulgar (Fig. 13).

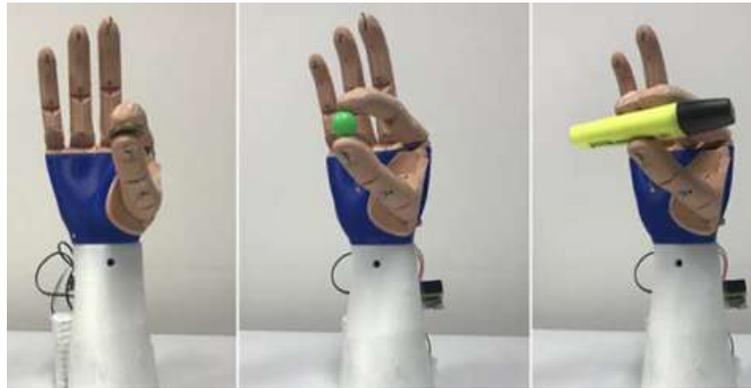


Figura 1.13: Agarre de pinza fina [15].

No obstante, la versatilidad de esta mano protésica abarca más posibilidades, extendiéndose al agarre de potencia y lateral de objetos con diversas formas y tamaños, como puede observarse en la figura 14 y 15.



Figura 1.14: Agarre de potencia de diversos objetos utilizando el pulgar opuesto al resto de los dedos [15].



Figura 1.15: Agarre lateral de una llave convencional [15].

Las estructuras del pulgar y la mano protésica, fueron fabricadas utilizando una impresora tridimensional. Mediante el uso de los conceptos de robótica blanda y elementos subactuados, el pulgar muestra autonomía mecánica y se desempeña adecuadamente en diversos tipos de agarre. El diseño monolítico de la mano y el pulgar, permite realizar abducción, aducción, flexión y extensión en paralelo, mediante el uso de un único

actuador [15]. Todo esto, convierte a esta propuesta en una alternativa muy adecuada para reducir la complejidad mecánica de la estructura de la mano protésica; se disminuye el número de actuadores, se reduce el consumo de energía, se tiene menor peso y el costo es relativamente bajo, sin perder robustez y versatilidad de desempeño.

## Diseño de mano mecatrónica para un robot humanoide

Fernando Herrera presenta el diseño y desarrollo de una mano mecatrónica para un robot humanoide con cinco gdl (grados de libertad). Los aspectos principales de la mano, son los siguientes:

1. La mano cuenta con cuatro dedos y un dedo pulgar.
2. El movimiento de la mano se efectúa por medio de hilos y un sistema de poleas.
3. El sistema trabaja en tiempo real.
4. La estructura cuenta con un mecanismo automático de apagado seguro y uno de seguridad que evita daños en los servomecanismos.



Figura 1.16: Mano mecatrónica [23].

En el diseño de los dedos mediante el uso de la plataforma SolidWorks se tomaron como base las medidas de las falanges proximal, medial y distal humanas para cada

dedo, así como los ángulos de flexión para el acoplamiento mecánico entre los eslabones de los dedos y la palma. En el armado de los dedos, el ligamento de cada dedo se insertó desde la falange distal hasta la palma de la mano, dentro del conducto extensor y el hilo flexor en el conducto correspondiente desde la falange distal hasta la polea que está acoplada al motorreductor.

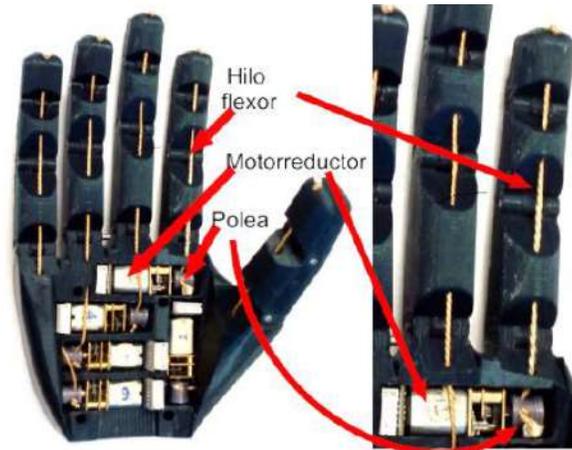


Figura 1.17: Estructura mecánica de la mano mecatrónica [23].

Previo al diseño y construcción del sistema mecánico, el autor realizó el estudio del modelo cinemático y dinámico de un dedo de la mano realizada, con base en las ecuaciones de Euler-Lagrange, para comprender las relaciones de movimiento y proponer un control de posición adecuado. De igual forma, se realizó el diseño y construcción de la etapa de potencia para el movimiento de cada uno de los dedos, así como la caracterización de los motores garantizando que trabajen en zona lineal.

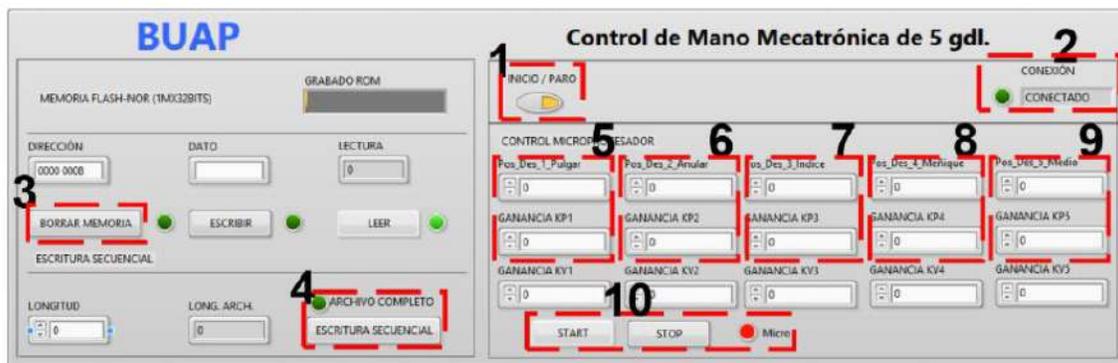


Figura 1.18: interfaz de control de la mano mecatrónica [23].

El algoritmo de control es procesado por un microprocesador desarrollado por el autor, en el software QUARTUS-II para la comunicación de las diferentes etapas de control conectadas a una tarjeta FPGA. Asimismo, el autor realizó en LabView una interfaz de control que permite enviar los datos de posición y ganancias a los actuadores, proporcionando el movimiento de los dedos de la mano.

## Diseño estructural de mano robótica

Realizar funciones complejas con una estructura relativamente simple, de menor peso, bajo costo y con un sistema de control sencillo e intuitivo, sigue siendo un gran desafío para el desarrollo de prótesis humanas. Zhicheng Teng et. al, proponen una mano protésica subactuada, cuya estructura se compone de múltiples articulaciones flexibles por dedo. La mano consta de cinco dedos con movimiento independiente entre ellos, e impulsados por un motor lineal en cada uno. El diseño de cada dedo, se realiza con base en el método de modelado paramétrico. Las falanges adyacentes están conectadas con juntas flexibles y, por medio de una lámina de acero elástica, se lleva a cabo la rotación de las articulaciones. De acuerdo a los resultados experimentales que llevaron a cabo estos autores, se demuestra que la mano robótica puede realizar movimientos básicos como señalar, pellizcar y sostener. El algoritmo de control implementado en este sistema, se basa en el control de electroencefalograma (EEG) [17].

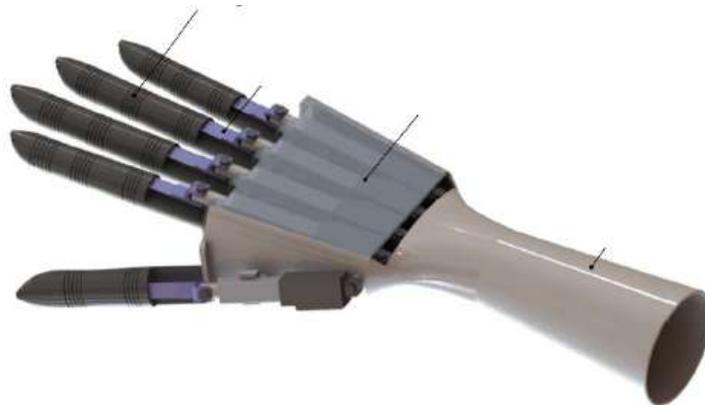


Figura 1.19: Diseño mecánico de la mano robótica propuesta por Zhicheng Teng et. al [17].

En vista de las diferentes dimensiones antropométricas de personas con extremidades completa o parcialmente amputadas, el método de modelado paramétrico empleado

por estos autores, es utilizado para diseñar y construir un modelo acorde a las especificaciones geométricas, según sea el caso. Primero, el modelo estructural de cada parte de la mano propuesta se construye con el software de diseño asistido por computadora, SolidWorks, cuyas dimensiones y configuraciones, son almacenadas y modificadas en el software Excel mediante una tabla de diseño de piezas en serie (SPDT), la cual es una función en el repertorio de SolidWorks.

Cada dedo para esta mano protésica, está diseñado con base en la estructura y funciones de los dedos humanos. La fabricación de todos los dedos se lleva a cabo con una impresora 3D. El material con el que fueron fabricados es *NinjaFlex*, que es un material elastómero termoplástico (TPE) [17]. En la figura 20, se muestra el mecanismo del dedo índice. El pulgar tiene la misma estructura flexible que los cuatro dedos restantes, con la diferencia de que éste sólo posee dos articulaciones.

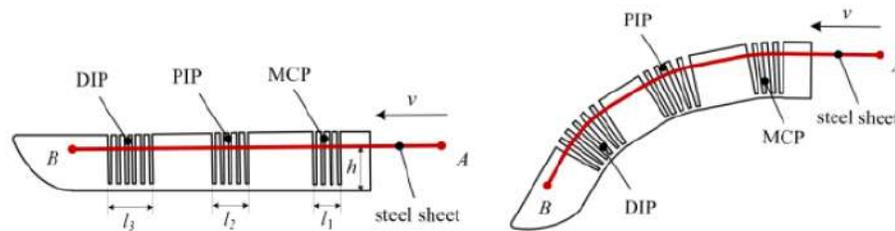


Figura 1.20: Diseño mecánico del dedo índice [17].

Cada articulación posee una estructura flexible que consiste en láminas de múltiples capas conectadas en la parte inferior del dedo, y separadas de la parte superior. una lámina delgada de acero con longitud fija, pasa a través de la parte superior del dedo, la cual transmite las fuerzas para obtener movimiento entre las articulaciones del dedo. La hoja de acero está conectada con actuador lineal desde uno de sus extremos; el otro extremo está conectado a la punta del dedo. Esta lámina, hace el papel de los tendones en una mano humana, y se desempeña como un elemento subactuado con movimientos articulados acoplados. Cuando el motor lineal impulsa la hoja de acero hacia adelante, la parte inferior flexible la estructura es forzada a producir deformación elástica por el segmento insertado de la chapa de acero [17].

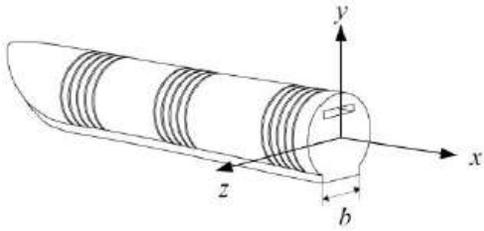


Figura 1.21: Punto de referencia del diseño de los dedos antropomórficos en plano tridimensional [17].

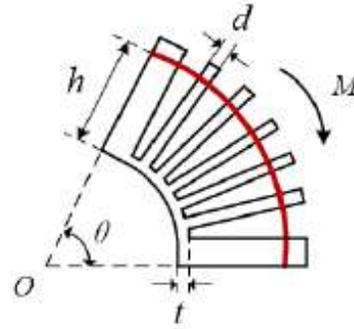


Figura 1.22: Articulación en estado flexionado [17].

Como resultado, las capas de cada junta se abrirán en un ángulo determinado, y el dedo se moverá a partir de un estado extendido al estado flexionado.

La rigidez articular y el alargamiento del dedo son parámetros fundamentales en relación con el ángulo de rotación de la articulación y la distancia de conducción determinada por el actuador, respectivamente. Como se muestra en la figura 22, la rigidez rotacional de cada articulación alrededor del eje  $x$  y el eje  $y$ , es más alta que en el eje  $z$ , en el cual las tareas de flexión y extensión, son más fáciles de lograr por diseño. Como se muestra en la figura 22, cuando se aplica un momento de rotación a la articulación del dedo, el ángulo formado se puede describir como sigue [17]:

$$\theta_i = \frac{M_i}{EI(x)} dx = \frac{3M_i}{2Eb(x)} \int \frac{1}{f^3(x)} dx$$

donde  $E$  refiere al módulo elástico del material,  $b$  es el ancho de la articulación,  $M_i$  es el momento de rotación y  $f(x)$  es la función que describe la forma de la sección flexionada.

En cuanto al sistema de control, los autores del presente documento proponen una combinación de un sistema informático maestro basado en EEG y un esclavo, con programación embebida en un microcontrolador Arduino MEGA 2560. La configuración de dicho sistema se muestra en la figura 23.

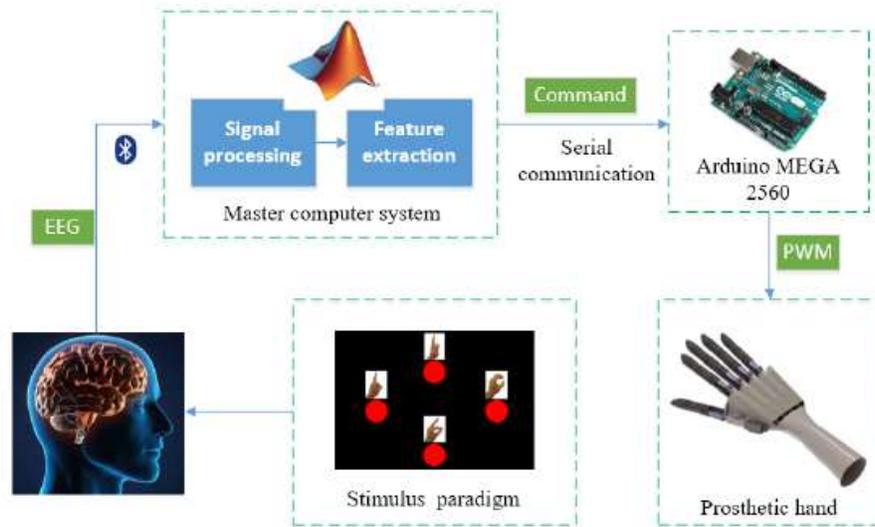


Figura 1.23: Diseño mecánico del dedo índice [17]

En la figura 24, se observan los movimientos que la mano robótica pueda realizar, mediante pruebas experimentales llevadas a cabo por estos autores.

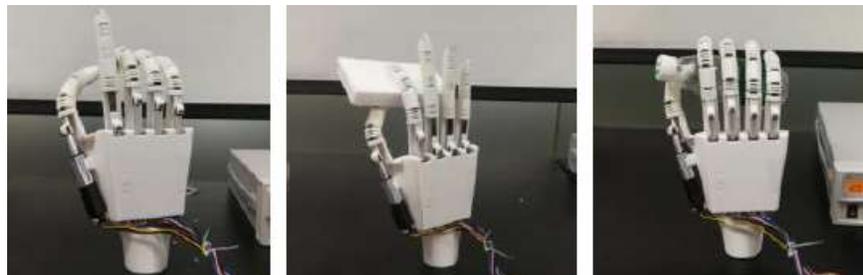


Figura 1.24: Acción de apuntar, agarre de pinza fina y agarre de potencia de la mano protésica propuesta [17].

Tanto el modelo mecánico como la programación en este proyecto, fueron exitosas, ya que la mano cumplió con los objetivos que se propusieron. Las acciones de apuntar con el dedo índice, el agarre de pinza fina con dos dedos y el agarre de potencia con los cinco dedos, fueron llevadas a cabo como se muestra en la figura 23.



# Capítulo 2

## Modelo dinámico del sistema y su reducción

### 2.1. Resumen

En este capítulo, se cubrió la síntesis de la estructura mecánica subactuada para cada dedo robot. Con base en esta síntesis, se obtiene una función de regresión no lineal que conlleva a la reducción del modelo dinámico. Se provee el desarrollo analítico para la obtención del modelo dinámico reducido. Además, se hace la propuesta de un regulador nuevo, se describe su análisis de estabilidad y se lleva a simulación. Finalmente, se describe el diseño CAD preestablecido para este proyecto.

## 2.2. Modelo dinámico de cada dedo con 3 GDL

El modelo dinámico de un dedo robótico, puede describirse partiendo del análisis de un péndulo triple (Fig. 2.1), pero no limitándose a éste.

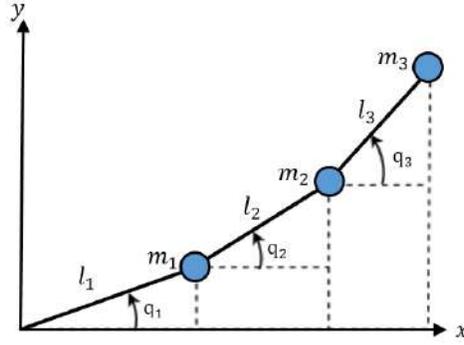


Figura 2.1: Modelo geométrico del servomecanismo tipo péndulo triple.

Comenzando por el modelo cinemático directo de cada centro de masa del péndulo triple, se tiene que:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c1} \cos(q_1) \\ l_{c1} \sin(q_1) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) \\ l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) + l_{c3} \cos(q_1 + q_2 + q_3) \\ l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) + l_{c3} \sin(q_1 + q_2 + q_3) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

donde los vectores de  $x \in \mathbb{R}^n$ , y sus elementos son los valores de las componentes en los ejes coordenados  $x$  y  $y$ .

La obtención de la velocidad de los eslabones, está dada por la derivada temporal de los modelos cinemáticos, los cuales representan la posición de las partículas en el espacio [19]. Entonces:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{c1} \text{sen}(q_1) \dot{q}_1 \\ l_{c1} \text{cos}(q_1) \dot{q}_1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \text{sen}(q_1) \dot{q}_1 - l_{c2} \text{sen}(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ l_1 \text{cos}(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \text{cos}(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \text{sen}(q_1) \dot{q}_1 - l_2 \text{sen}(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - l_{c3} \text{sen}(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ l_1 \text{cos}(q_1) \dot{q}_1 + l_2 \text{cos}(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l_{c3} \text{cos}(q_1 + q_2 + q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Un paso previo al cálculo de la energía cinética del sistema dado, consiste en obtener el cuadrado de las velocidades articulares, operación que corresponde a  $v^T v$  [19], o bien, su norma euclidiana expresada como  $\|v\|^2 = v^T v$ . Así,

$$\begin{aligned} \|v_1\|^2 &= l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 \\ \|v_2\|^2 &= l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_{c2}^2 \dot{q}_1^2 + 2l_1 l_{c2} \text{cos}(q_2) \dot{q}_1^2 + l_{c2}^2 \dot{q}_2^2 + 2[l_1 l_{c2} \text{cos}(q_2) l_{c2}^2] \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ \|v_3\|^2 &= [l_1^2 + l_2^2 + l_{c3}^2 + 2l_1 l_2 \text{cos}(q_2) + 2l_1 l_{c3} \text{cos}(q_2 + q_3) + 2l_2 l_{c3} \text{cos}(q_3)] \dot{q}_1^2 \\ &\quad + [l_2^2 + 2l_2 l_{c3} \text{cos}(q_3) + l_{c3}^2] \dot{q}_2^2 + [l_{c3}^2] \dot{q}_3^2 + [2l_1 l_2 \text{cos}(q_2) + 2l_1 l_{c3} \text{cos}(q_2 + q_3) \\ &\quad + 2l_2^2 + 4l_2 l_{c3} \text{cos}(q_3) + 2l_{c3}^2] \dot{q}_1 \dot{q}_2 + [2l_1 l_{c3} \text{cos}(q_2 + q_3) + 2l_2 l_{c3} \text{cos}(q_3) \\ &\quad + 2l_{c3}^2] \dot{q}_1 \dot{q}_3 + [2l_2 l_{c3} \text{cos}(q_3) + 2l_{c3}^2] \dot{q}_2 \dot{q}_3 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Sabiendo que la energía cinética está dada por  $\mathcal{K} = \frac{1}{2} m \|v\|^2 + \frac{1}{2} I \dot{q}^2$ , se obtienen tres modelos de energía cinética  $\mathcal{K}_1$ ,  $\mathcal{K}_2$  y  $\mathcal{K}_3$ , que corresponden a la energía en las masas  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$ , respectivamente [19]. Por tanto:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_1(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2}m_1 \left( l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 \right) + \frac{1}{2}I_1 \dot{q}_1^2 \\
\mathcal{K}_2(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2}m_2 \left[ l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_{c2}^2 \dot{q}_1^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(q_2) \dot{q}_1^2 + l_{c2}^2 \dot{q}_2^2 + 2[l_1 l_{c2} \cos(q_2) l_{c2}^2] \dot{q}_1 \dot{q}_2 \right] \\
&\quad + \frac{1}{2}I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \\
\mathcal{K}_3(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2}m_3 \left[ l_1^2 + l_2^2 + l_{c3}^2 + 2l_1 l_2 \cos(q_2) + 2l_1 l_{c3} \cos(q_2 + q_3) \right. \\
&\quad \left. + 2l_2 l_{c3} \cos(q_3) \right] \dot{q}_1^2 \left[ l_2^2 + 2l_2 l_{c3} \cos(q_3) + l_{c3}^2 \right] \dot{q}_2^2 + [l_{c3}^2] \dot{q}_3^2 \\
&\quad + [2l_1 l_2 \cos(q_2) + 2l_1 l_{c3} \cos(q_2 + q_3) + 2l_2^2 + 4l_2 l_{c3} \cos(q_3) + 2l_{c3}^2] \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\
&\quad + [2l_1 l_{c3} \cos(q_2 + q_3) + 2l_2 l_{c3} \cos(q_3) + 2l_{c3}^2] \dot{q}_1 \dot{q}_3 \\
&\quad + [2l_2 l_{c3} \cos(q_3) + 2l_{c3}^2] \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \frac{1}{2}I_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2
\end{aligned} \tag{2.8}$$

El cálculo de la energía potencial gravitatoria, se realiza a partir del análisis del efecto que la gravedad tiene en los centros de masa de los eslabones. Por ello, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
U_1(q) &= m_1 g [l_{c1} \text{sen}(q_1)] \\
U_2(q) &= m_2 g [l_1 \text{sen}(q_1) + l_{c2} \text{sen}(q_1 + q_2)] \\
U_3(q) &= m_3 g [l_1 \text{sen}(q_1) + l_2 \text{sen}(q_1 + q_2) + l_{c3} \text{sen}(q_1 + q_2 + q_3)]
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Una vez calculadas las energías que se encuentran en el sistema (sin considerar fricción), se procede a obtener la función lagrangiano, que se define como la diferencia entre las energías cinética y potencial gravitatoria total del robot. Su expresión matemática está dada por  $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{K}(q, \dot{q}) - U(q)$  [19]. Por tanto:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(q, \dot{q}) = & \frac{1}{2}m_1 \left( l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 \right) + \frac{1}{2}I_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 [l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_{c2}^2 \dot{q}_1^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(q_2) \dot{q}_1^2 + l_{c2}^2 \dot{q}_2^2 \\
& + 2[l_1 l_{c2} \cos(q_2) l_{c2}^2] \dot{q}_1 \dot{q}_2] + \frac{1}{2}I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \frac{1}{2}m_3 [ l_1^2 + l_2^2 + l_{c3}^2 + 2l_1 l_2 \cos(q_2) \\
& + 2l_1 l_{c3} \cos(q_2 + q_3) + 2l_2 l_{c3} \cos(q_3) ] \dot{q}_1^2 + [l_2^2 + 2l_2 l_{c3} \cos(q_3) + l_{c3}^2] \dot{q}_2^2 + [l_{c3}^2] \dot{q}_3^2 \\
& + [ 2l_1 l_2 \cos(q_2) + 2l_1 l_{c3} \cos(q_2 + q_3) + 2l_2^2 + 4l_2 l_{c3} \cos(q_3) + 2l_{c3}^2 ] \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\
& + [ 2l_1 l_{c3} \cos(q_2 + q_3) + 2l_2 l_{c3} \cos(q_3) + 2l_{c3}^2 ] \dot{q}_1 \dot{q}_3 + [ 2l_2 l_{c3} \cos(q_3) + 2l_{c3}^2 ] \dot{q}_2 \dot{q}_3 \\
& + \frac{1}{2}I_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 - m_1 g [l_{c1} \cos(q_1)] - m_2 g [l_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2)] \\
& - m_3 g [l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) + l_{c3} \cos(q_1 + q_2 + q_3)]
\end{aligned} \tag{2.10}$$

donde  $I$ , es el fenómeno de inercia presente en cada uno de los centros de masa. A partir de la función del lagrangiano, es posible obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange, que describen la energía que se inyecta al sistema robótico. Dichas ecuaciones, se definen como [19]:

$$\tau = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} \right] + f_f(b, \dot{q}) \tag{2.11}$$

Donde  $f_f$  es el modelo de fricción. Como en el péndulo triple se tienen tres grados de libertad, así mismo se obtienen tres ecuaciones de Euler-Lagrange. Con base en la ecuación (1.11), se tiene:

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_1} \right] &= [m_1 l_{c1}^2 + I_1 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2 + m_3 l_1^2 + m_3 l_2^2 + m_3 l_{c3}^2 \\
&\quad + 2m_3 l_1 l_2 \cos(q_2) + 2m_3 l_1 l_{c3} \cos(q_2 + q_3) + 2m_3 l_2 l_{c3} \cos(q_3) + I_3] \dot{q}_1 \\
&\quad + [m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + m_3 l_1 l_2 \cos(q_2) + m_3 l_1 l_{c3} \cos(q_2 + q_3) + m_3 l_2^2 \\
&\quad + m_3 l_{c3}^2 + 2m_3 l_2 l_{c3} \cos(q_3) + I_2 + I_3] \dot{q}_2 + [m_3 l_1 l_{c3} \cos(q_2 + q_3) + m_3 l_2 l_{c3} \cos(q_3) \\
&\quad + m_3 l_{c3}^2 + I_3] \dot{q}_3 \\
\left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_2} \right] &= [m_2 l_1 l_2 \cos(q_2) + m_2 l_{c2}^2 + I_2 + m_3 l_1 l_2 \cos(q_2) + m_3 l_1 l_{c3} \cos(q_2 + q_3) + m_3 l_2^2 \\
&\quad + 2m_3 l_2 l_{c3} \cos(q_3) + m_3 l_{c3}^2 + I_3] \dot{q}_1 + [m_2 l_{c2}^2 + I_2 + m_3 l_2^2 + 2m_3 l_2 l_{c3} \cos(q_3) \\
&\quad + m_3 l_{c3}^2 + I_3] \dot{q}_2 + [m_3 l_2 l_{c3} \cos(q_3) + m_3 l_{c3}^2 + I_3] \dot{q}_3 \\
\left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_3} \right] &= [m_3 l_1 l_{c3} \cos(q_2 + q_3) + m_3 l_2 l_{c3} \cos(q_3) + m_3 l_{c3}^2 + I_3] \dot{q}_1 + m_3 l_2 l_{c3} \cos(q_3) \\
&\quad + m_3 l_{c3}^2 + I_3] \dot{q}_2 + [m_3 l_{c3}^2 + I_3] \dot{q}_3
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Se procede a calcular las derivadas temporales del lagrangiano:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_1} \right] &= [m_1 l_{c1}^2 + I_1 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2 + m_3 l_1^2 + m_3 l_2^2 + m_3 l_{c3}^2 \\
&\quad + 2m_3 l_1 l_2 \cos(q_2) + 2m_3 l_1 l_{c3} \cos(q_2 + q_3) + 2m_3 l_2 l_{c3} \cos(q_3) + I_3] \ddot{q}_1 \\
&\quad + [m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + m_3 l_1 l_2 \cos(q_2) + m_3 l_1 l_{c3} \cos(q_2 + q_3) + m_3 l_2^2 \\
&\quad + m_3 l_{c3}^2 + 2m_3 l_2 l_{c3} \cos(q_3) + I_2 + I_3] \ddot{q}_2 + [m_3 l_1 l_{c3} \cos(q_2 + q_3) + m_3 l_2 l_{c3} \cos(q_3) \\
&\quad + m_3 l_{c3}^2 + I_3] \ddot{q}_3 + [-2m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) - 2m_3 l_1 l_2 \sin(q_2) \\
&\quad - 2m_3 l_1 l_{c3} \sin(q_2 + q_3)] \dot{q}_1 \dot{q}_2 + [-2m_3 l_1 l_{c3} \sin(q_2 + q_3) - 2m_3 l_2 l_{c3} \sin(q_3)] \dot{q}_1 \dot{q}_3 \\
&\quad + [-m_3 l_1 l_2 \sin(q_2) - m_3 l_1 l_{c3} \sin(q_2 + q_3) - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2)] \dot{q}_2 \dot{q}_2 \\
&\quad + [-2m_3 l_1 l_{c3} \sin(q_2 + q_3) - 2m_3 l_2 l_{c3} \sin(q_3)] \dot{q}_2 \dot{q}_3 + [-m_3 l_1 l_{c3} \sin(q_2 + q_3) \\
&\quad - m_3 l_2 l_{c3} \sin(q_3)] \dot{q}_3 \dot{q}_3
\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_2} \right] &= [m_2 l_1 l_2 \cos(q_2) + m_2 l_{c2}^2 + I_2 + m_3 l_1 l_2 \cos(q_2) + m_3 l_1 l_{c3} \cos(q_2 + q_3) + m_3 l_2^2 \\
&\quad + 2m_3 l_2 l_{c3} \cos(q_3) + m_3 l_{c3}^2 + I_3] \ddot{q}_1 + [m_2 l_{c2}^2 + I_2 + m_3 l_2^2 + 2m_3 l_2 l_{c3} \cos(q_3) \\
&\quad + m_3 l_{c3}^2 + I_3] \ddot{q}_2 + [m_3 l_2 l_{c3} \cos(q_3) + m_3 l_{c3}^2 + I_3] \ddot{q}_3 + [-m_2 l_1 l_2 \text{sen}(q_2) \\
&\quad - m_3 l_1 l_2 \text{sen}(q_2) - m_3 l_1 l_{c3} \text{sen}(q_2 + q_3)] \dot{q}_1 \dot{q}_2 + [-m_3 l_1 l_{c3} \text{sen}(q_2 + q_3) \\
&\quad - m_3 l_2 l_{c3} \text{sen}(q_3)] \dot{q}_1 \dot{q}_3 + [-2m_3 l_2 l_{c3} \text{sen}(q_3)] \dot{q}_2 \dot{q}_3 \\
&\quad + [-m_3 l_2 l_{c3} \text{sen}(q_3)] \dot{q}_3 \dot{q}_3
\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_3} \right] &= [m_3 l_1 l_{c3} \cos(q_2 + q_3) + m_3 l_2 l_{c3} \cos(q_3) + m_3 l_{c3}^2 + I_3] \ddot{q}_1 + [m_3 l_2 l_{c3} \cos(q_3) \\
&\quad + m_3 l_{c3}^2 + I_3] \ddot{q}_2 + [m_3 l_{c3}^2 + I_3] \ddot{q}_3 + [-m_3 l_1 l_{c3} \text{sen}(q_2 + q_3)] \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\
&\quad + [-m_3 l_1 l_{c3} \text{sen}(q_2 + q_3) - m_3 l_2 l_{c3} \text{sen}(q_3)] \dot{q}_1 \dot{q}_3 + [-m_3 l_2 l_{c3} \text{sen}(q_3)] \dot{q}_2 \dot{q}_3 \\
&\quad + [-m_3 l_2 l_{c3} \text{sen}(q_3)] \dot{q}_3 \dot{q}_3
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Ahora, se procede a calcular las derivadas parciales respecto a  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_1} \right] &= -m_1 g l_{c1} \cos(q_1) - m_2 g [l_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2)] \\
&\quad - m_3 g [l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) + l_{c3} \cos(q_1 + q_2 + q_3)] \\
\left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_2} \right] &= [-m_2 l_1 l_{c2} \text{sen}(q_2) - m_3 l_1 l_2 \text{sen}(q_2) - m_3 l_1 l_{c3} \text{sen}(q_2 + q_3)] \dot{q}_1 \dot{q}_1 \\
&\quad + [-m_3 l_1 l_2 \text{sen}(q_2) - m_3 l_1 l_{c3} \text{sen}(q_2 + q_3) - m_2 l_1 l_{c2} \text{sen}(q_2)] \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\
&\quad + [-m_3 l_1 l_{c3} \text{sen}(q_2 + q_3)] \dot{q}_1 \dot{q}_3 - m_2 g l_{c2} \cos(q_1 + q_2) - m_3 g [l_2 \cos(q_1 + q_2) \\
&\quad + l_{c3} \cos(q_1 + q_2 + q_3)] \\
\left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_3} \right] &= [-m_3 l_1 l_{c3} \text{sen}(q_2 + q_3) - m_3 l_2 l_{c3} \text{sen}(q_3)] \dot{q}_1 \dot{q}_1 + [-m_3 l_1 l_{c3} \text{sen}(q_2 + q_3) \\
&\quad - 2m_3 l_2 l_{c3} \text{sen}(q_3)] \dot{q}_1 \dot{q}_2 + [-m_3 l_1 l_{c3} \text{sen}(q_2 + q_3) - m_3 l_2 l_{c3} \text{sen}(q_3)] \dot{q}_1 \dot{q}_3 \\
&\quad + [m_3 l_2 l_{c3} \text{sen}(q_3)] \dot{q}_2 \dot{q}_2 + [-m_3 l_2 l_{c3} \text{sen}(q_3)] \dot{q}_2 \dot{q}_3 - m_3 g l_{c3} \cos(q_1 + q_2 + q_3)
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Ahora, del modelo dinámico del péndulo triple se obtiene su forma compacta, definida de la siguiente manera [20]:

$$M(\theta)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + f_f(b, \dot{q}) = \tau \quad (2.17)$$

donde  $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercias, la cual es definida positiva y por tanto simétrica,  $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  corresponde a la matriz de Coriolis y fuerzas centrífugas,  $g(q) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de pares gravitatorios, y  $f_f(b, \dot{q})$  es el modelado de fricción [19]. La matriz  $M(q)$ , está dada por las aceleraciones de los eslabones. Para cuestiones prácticas, se agrupan los términos de la matriz de inercias de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} M_{11} &= m_1 l_{c1}^2 + I_1 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2 + m_3 l_1^2 + m_3 l_2^2 + m_3 l_{c3}^2 \\ &\quad + 2m_3 l_1 l_2 \cos(q_2) + 2m_3 l_1 l_{c3} \cos(q_2 + q_3) + 2m_3 l_2 l_{c3} \cos(q_3) + I_3 \\ M_{12} &= m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + m_3 l_1 l_2 \cos(q_2) + m_3 l_1 l_{c3} \cos(q_2 + q_3) + m_3 l_2^2 \\ &\quad + m_3 l_{c3}^2 + 2m_3 l_2 l_{c3} \cos(q_3) + I_2 + I_3 \\ M_{13} &= m_3 l_1 l_{c3} \cos(q_2 + q_3) + m_3 l_2 l_{c3} \cos(q_3) + m_3 l_{c3}^2 + I_3 \\ M_{21} &= m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + m_3 l_1 l_2 \cos(q_2) + m_3 l_1 l_{c3} \cos(q_2 + q_3) + m_3 l_2^2 \\ &\quad + m_3 l_{c3}^2 + 2m_3 l_2 l_{c3} \cos(q_3) + I_2 + I_3 \\ M_{22} &= m_2 l_{c2}^2 + I_2 + m_3 l_2^2 + 2m_3 l_2 l_{c3} \cos(q_3) \\ &\quad + m_3 l_{c3}^2 + I_3 \\ M_{23} &= m_3 l_2 l_{c3} \cos(q_3) + m_3 l_{c3}^2 + I_3 \\ M_{31} &= m_3 l_1 l_{c3} \cos(q_2 + q_3) + m_3 l_2 l_{c3} \cos(q_3) + m_3 l_{c3}^2 + I_3 \\ M_{32} &= m_3 l_2 l_{c3} \cos(q_3) + m_3 l_{c3}^2 + I_3 \\ M_{33} &= m_3 l_{c3}^2 + I_3 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Por tanto, la matriz de inercias es la siguiente:

$$M(q)\ddot{q} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Para la matriz de Coriolis, se tienen los siguientes elementos:

$$\begin{aligned}
C_{11} &= 0 \\
C_{12} &= [-2m_2l_1l_{c2}\text{sen}(q_2) - 2m_3l_1l_2\text{sen}(q_2) - 2m_3l_1l_{c3}\text{sen}(q_2 + q_3)]\dot{q}_1 + [-m_3l_1l_2\text{sen}(q_2) \\
&\quad - m_3l_1l_{c3}\text{sen}(q_2 + q_3) - m_2l_1l_{c2}\text{sen}(q_2)]\dot{q}_2 \\
C_{13} &= [-2m_3l_1l_{c3}\text{sen}(q_2 + q_3) - 2m_3l_2l_{c3}\text{sen}(q_3)]\dot{q}_1 + [-2m_3l_1l_{c3}\text{sen}(q_2 + q_3) \\
&\quad - 2m_3l_2l_{c3}\text{sen}(q_3)]\dot{q}_2 + [-m_3l_1l_{c3}\text{sen}(q_2 + q_3) - m_3l_2l_{c3}\text{sen}(q_3)]\dot{q}_3 \\
C_{21} &= [m_2l_1l_{c2}\text{sen}(q_2) + m_3l_1l_2\text{sen}(q_2) + m_3l_1l_{c3}\text{sen}(q_2 + q_3)]\dot{q}_1 \\
C_{22} &= 0 \\
C_{23} &= [-2m_3l_2l_{c3}\text{sen}(q_3)]\dot{q}_1 + [-2m_3l_2l_{c3}\text{sen}(q_3)]\dot{q}_2 + [-m_3l_2l_{c3}\text{sen}(q_3)]\dot{q}_3 \\
C_{31} &= [m_3l_1l_{c3}\text{sen}(q_2 + q_3) + m_3l_2l_{c3}\text{sen}(q_3)]\dot{q}_1 \\
C_{32} &= [2m_3l_2l_{c3}\text{sen}(q_3)]\dot{q}_1 + [m_3l_2l_{c3}\text{sen}(q_3)]\dot{q}_2 \\
C_{33} &= 0
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Por tanto:

$$C(q, \dot{q})\dot{q} = \begin{bmatrix} 0 & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & 0 & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

El vector de pares gravitatorios se define de la siguiente manera:

$$g(q) = \begin{bmatrix} [m_1l_{c1} + m_2l_1 + m_3l_1]\cos(q_1) + [m_2l_{c2} + m_3l_2]\cos(q_1 + q_2) + m_3l_{c3}\cos(q_1 + q_2 + q_3) \\ [m_2l_{c2} + m_3l_2]\cos(q_1 + q_2) + m_3l_{c3}\cos(q_1 + q_2 + q_3) \\ m_3l_{c3}\cos(q_1 + q_2 + q_3) \end{bmatrix} g \tag{2.22}$$

Finalmente, se define el modelado de fricción considerando la fricción viscosa  $b$ , de la siguiente manera:

$$f_f(b, \dot{q}) = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

Donde los coeficientes  $b$ , corresponden al fenómeno de fricción presente en cada eslabón. Así, la energía total que se inyecta al péndulo triple, está dada por lo siguiente:

$$F = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & 0 & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} + g(q) + f_f(b, \dot{q}) \quad (2.24)$$

### 2.3. Subactuación del dedo robot

La reducción del modelo dinámico del servomecanismo tipo péndulo triple, se lleva a cabo mediante el análisis de su estructura mecánica como un conjunto de elementos subactuados por palancas y un único actuador. Asimismo, se utiliza una función de correspondencia no lineal con el objetivo de aproximar los valores de salida del sistema propuesto, y reducirlo de tres a un GDL. Para este propósito, se propone emplear una función cuadrática por sus propiedades no lineales. La correspondencia de valores que se obtiene, es una aproximación de la propia naturaleza no lineal del dedo robótico.

La propuesta de diseño del dedo robot subactuado, conlleva a la reducción de su modelo dinámico de tres grados de libertad a la actuación de un solo grado  $q$  [21]. Para lograr esto, se propone obtener una *función de correspondencia no lineal* que permita aproximar la respuesta de posición de los eslabones  $q_2$  y  $q_3$ , respecto al eslabón actuado  $q$ , es decir, el modelo de cinemática directa contempla lo siguiente:

$$\begin{aligned} q_1 &= q \\ q_2 &= f_k(q) \\ q_3 &= f_k(q) \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde  $f_k = Aq^2 + Bq + C$  es la función de correspondencia no lineal. Observe que las variables  $q_2$  y  $q_3$ , que corresponden a los ángulos del segundo y tercer eslabón respectivamente, están en función de la variable  $q$ . Esto permite analizar el sistema como un robot de un solo grado de libertad (Ver Fig. 2.2).

En la figura 2.2, se muestra el esquema de diseño con los elementos de subactuación en color rojo (palancas). Observe que cuando el vástago del motor lineal se desplaza en

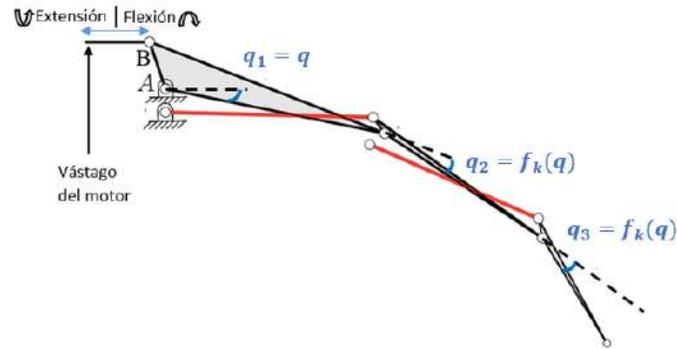


Figura 2.2: Propuesta de cadena cinemática para el dedo robot [21].

cualquier sentido, se generará movimiento en el primer eslabón. Asimismo, del movimiento del primer eslabón, se generará movimiento en los demás eslabones por medio de los elementos de subactuación; si el vástago del motor se desplaza hacia la izquierda, el dedo se extenderá, y si el vástago se desplaza hacia la derecha, el dedo se flexionará.

Con base en lo anterior, se pretende dar a entender lo primordial que es determinar la relación de movimiento angular del primer eslabón del dedo, respecto al resto de sus eslabones, considerando que cada elemento subactuado (palancas) juega un papel importante en la dinámica de cada grado de libertad.

## 2.4. análisis y síntesis de la estructura subactuada

La biomimetización del dedo robot subactuado, parte de la incorporación de un actuador lineal *Actuonix PQ12-P*, cuyo desplazamiento lineal, proporciona la energía necesaria para llevar a cabo el movimiento angular del dedo, es decir, el movimiento lineal del vástago del motor cumple con la misma función que el hueso metacarpiano en la mano humana [21].



Figura 2.3: Actuador lineal Actuonix PQ12-P.

El diseño del sistema subactuado, parte de un brazo de potencia y un brazo de resistencia. El movimiento articular en el punto de conexión B, se genera por medio del desplazamiento del vástago del actuador lineal, y con la fuerza de oposición por parte del punto A, se origina movimiento en el primer eslabón. El punto de conexión A, que funge como la articulación metacarpofalángica (MCP), al punto de conexión D, conforman el brazo de resistencia descrito por el segmento A-D [21].

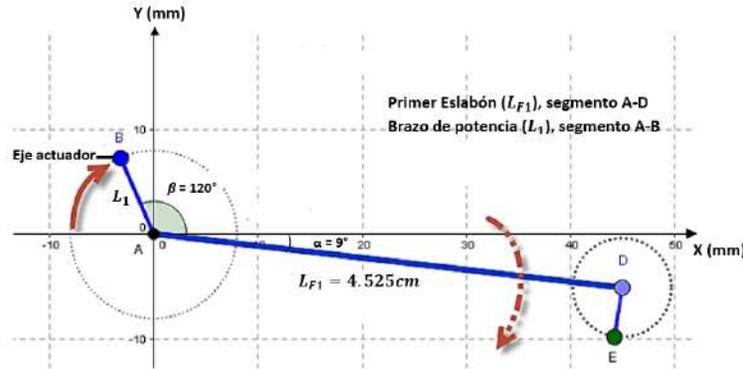


Figura 2.4: Primer eslabón; interpretación y esquema de transmisión [21].

En la figura 2.4, observe que el brazo de potencia definido como el segmento A-B, se encuentra separado por un ángulo de  $120^\circ$  grados del brazo de resistencia (segmento A-D); tomando  $L_1 = 0.8$  cm y  $L_{F1} = 4.525$ cm, se define la posición de los siguientes puntos [21]:

$$\begin{aligned} B &= (L_1 \cos(\alpha - 120^\circ), -L_1 \sen(\alpha - 120^\circ)) \\ D &= (L_{F1} \cos(\alpha - 2.5^\circ), -L_{F1} \sen(\alpha - 2.5^\circ)) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Donde  $\alpha = 9^\circ$ . Con esto se permite al brazo de resistencia desplazarse en función del movimiento lineal del motor, generando una trayectoria describe el espacio de trabajo para el punto D. Asimismo, se describe la trayectoria para un punto E, que forma un segmento D-E perpendicular al segmento A-D (ver Fig. 2.5).

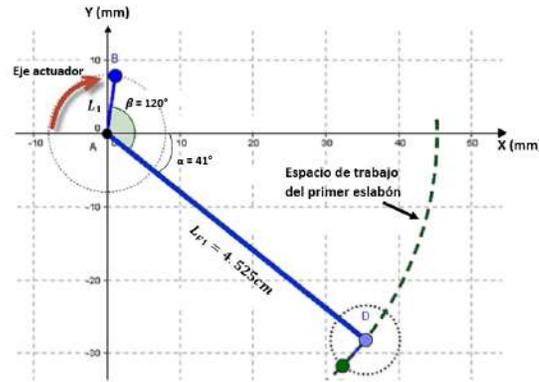


Figura 2.5: Trayectoria del efector final del primer eslabón [21].

Para la generación de movimiento en el segundo eslabón, se anexa una palanca C-G con una longitud de  $LS2 = 1.131\text{cm}$  y un ángulo  $a = 45^\circ$  respecto al punto de apoyo A. La palanca C-G tiene el objetivo de transmitir hacia el segundo eslabón, ahora tomando como punto de apoyo a D. Observe que el punto D tiene la función de la articulación interfalángica proximal (PIP) para el segundo eslabón (Ver Fig. 2.6). Las coordenadas del punto C, son las siguientes [21]:

$$C = (L_{2S}\cos(a), -L_{2S}\sin(a)) \quad (2.27)$$

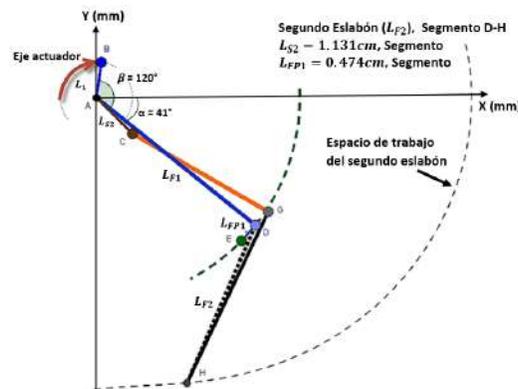


Figura 2.6: Conexión y trayectoria del segundo eslabón [21].

Para la transmisión de fuerza al tercer eslabón, se propone utilizar al punto fijo E, que conforma el segmento D-E con longitud  $LF1P = 0.474\text{ cm}$ . Su posición en el espacio está dada por las siguientes coordenadas [21]:

$$E = (LF1\cos(\alpha - 2.5^\circ) + LF1P\cos(\alpha + 90^\circ), -LF1\sin(\alpha - 2.5^\circ) - LF1P\sin(\alpha + 90^\circ)) \quad (2.28)$$

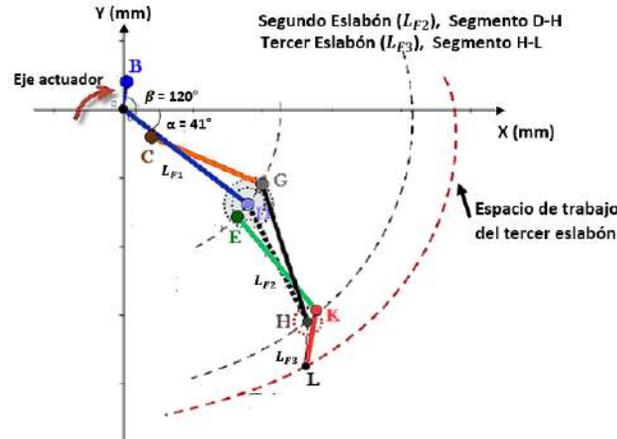


Figura 2.7: Optimización de trayectorias para la palanca 2 y 3 con respecto al punto E [21].

En la figura 2.7, se observe que el punto E conforma el segmento E-K, segmento encargado de transmitir la fuerza necesaria al tercer eslabón para generar movimiento. Además, se conforma un nuevo segmento G-H, donde el punto H tiene la función de la articulación interfalángica distal (DIP) para la palanca 3, es decir, H es la articulación del tercer eslabón definido por el segmento K-L. Dadas las longitudes para los brazos de potencia y de resistencia respecto a sus puntos de apoyo, se obtienen las distancias biomecánicas para el caso particular del dedo índice. De esta manera, se concluye con la síntesis de la estructura mecánica subactuada por medio de un solo actuador.

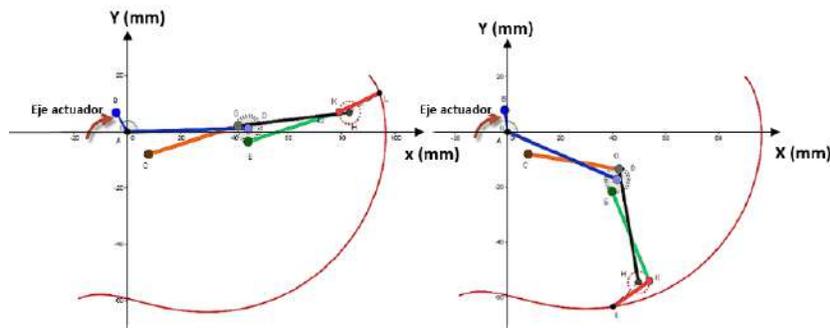


Figura 2.8: Espacio de trabajo del dedo robot [21].

Una vez realizada la síntesis de la estructura mecánica subactuada, se define un rango para las longitudes de cada falange del dedo. Tomando las longitudes de los brazos de resistencia, y sumándolos con los radios que conciernen a los puntos de transmisión de fuerza, se obtienen las longitudes de las falanges del dedo índice (ver Cuadro 2.1). Asimismo, se exhibe el número de puntos de apoyo por eslabón, que habilitan el movimiento del siguiente.

Núm. de eslabón	Núm. uniones	Falange	Longitud(cm)
1	4	Proximal	5.323
2	3	Media	4.223
3	2	Distal	1.71

Cuadro 2.1: Parámetros generales del dedo robot índice [21].

Ya que se obtienen los parámetros de cada palanca para el dedo índice, se determinan los parámetros para el resto de los dedos de la mano robot. En la siguiente tabla (Cuadro 2.2), se muestran las relaciones bioparamétricas entre los dedos de una mano, por medio de la cual se obtienen los parámetros para los dedos meñique, anular y medio.

Dedo	Proximal(%)	Media(%)	Distal(%)
Pulgar	17.1	-	12.1
Índice	21.8	14.1	8.6
Medio	24.5	15.8	9.8
Anular	22.2	15.3	9.7
Meñique	17.2	10.8	8.6

Cuadro 2.2: Tabla de proporción para las falanges de los dedos humanos [13].

Con base en estas proporciones (Cuadro 2.3), se obtienen las longitudes para el resto de los dedos robóticos:

Dedo	Proximal( <i>cm</i> )	Media( <i>cm</i> )	Distal( <i>cm</i> )
Pulgar	4.179	-	2.406
Índice	5.323	4.223	1.710
Medio	5.987	4.732	1.949
Anular	5.425	4.582	1.929
Meñique	4.203	3.235	1.710

Cuadro 2.3: Longitudes para los dedos de la mano robótica antropomórfica.

## 2.5. Aproximación no lineal del sistema subactuado

Al referirse al concepto de aproximación lineal del comportamiento de salida de un sistema dinámico invariante en el tiempo, el objetivo del análisis de regresión es determinar la relación que existe entre una variable dependiente, y una o más variables independientes. Para poder realizar esta relación, se debe postular una relación funcional entre dichas variables. No debe entenderse como la modificación de los parámetros dinámicos de la planta, sino analizar el espacio de trabajo del sistema contemplando sus restricciones mecánicas, mediante las cuales, se determina un rango de operación local tomado del espacio de trabajo total del sistema robótico, en el que se realiza la aproximación a un comportamiento lineal [19].

Para casos no lineales, un enfoque más adecuado para la estimación de una trayectoria es el modelo de regresión no lineal, debido a la semejanza en respuesta con un sistema dinámico no lineal. Entre los diversos modelos de regresión no lineal, el analizado en este documento es el cuadrático, debido a la estructura cuadrática del modelo dinámico del dedo robot propuesto. La propuesta de regresión cuadrática tiene la siguiente forma:

$$f_k = Aq^2 + Bq + C \quad (2.29)$$

Donde  $A$ ,  $B$  y  $C$  son constantes generalmente desconocidas, y la variable  $q$  corresponde al valor de la  $i$ -ésima observación de la variable independiente. El modelo de regresión cuadrático, es una alternativa cuando el modelo lineal no permite obtener una estimación adecuada para el sistema en estudio, o cuando el objeto de estudio tiene un comportamiento que puede considerarse como parabólico, o bien, cuando se tiene una respuesta como la del sistema propuesto.

La forma más simple de establecer una aproximación es a través de un *diagrama de dispersión* o *nube de puntos*, de la siguiente manera:

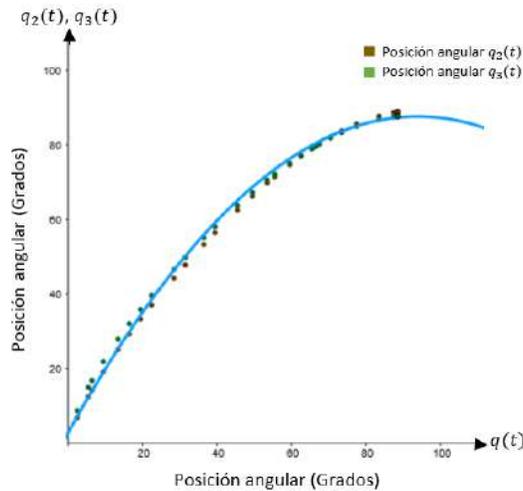


Figura 2.9: Aproximación de las posiciones angulares  $q_2$  y  $q_3$  respecto a  $q$ .

Se procede a sustituir las variables dependiente e independiente por sus respectivos estimadores como sigue:

$$y_i = Ax_i^2 + Bx_i + C \quad (2.30)$$

Para el caso particular del dedo robótico subactuado propuesto, el modelo de regresión no lineal tiene como propósito el estimar la posición angular  $q_2$ ,  $q_3$  respecto a  $q$ , a modo de encontrar una función tal que, de manera aproximada, describa la dinámica de movimiento. De esta manera, las posiciones angulares  $q_2$  y  $q_3$ , pueden expresarse en términos de la función estimada por el método de regresión, o bien, se obtiene una relación matemática estimada entre las posiciones angulares  $q_2$  y  $q_3$ , y la posición  $q$ .

La función de regresión no lineal se determina con base en una serie de observaciones de la variable independiente  $x$ , así como la respuesta de  $f_k$  para cada observación (véase Fig. 2.9). De este modo, se obtiene la siguiente tabla:

$x_{q2}$	$y_{q2}$	$x_{q3}$	$y_{q3}$	$\bar{x}_q$	$\bar{y}_q$
0.46	2.57	0.46	3.52	0.46	3.05
0.96	3.68	0.96	4.91	0.96	4.30
1.46	4.75	1.46	6.22	1.46	5.49
1.96	5.79	1.96	7.46	1.96	6.63
2.46	6.80	2.46	8.65	2.46	7.73
2.96	7.79	2.96	9.78	2.96	8.79
3.46	8.75	3.46	10.88	3.46	9.82
17.96	31.23	17.96	33.91	17.96	32.57
21.96	36.40	21.96	38.91	21.96	37.66
22.46	37.03	22.46	39.52	22.46	38.28
22.96	37.65	22.96	40.12	22.96	38.89
23.46	38.27	23.46	40.71	23.46	39.49
39.46	56.37	39.46	57.97	39.46	57.17
39.96	56.89	39.96	58.45	39.96	57.67

Cuadro 2.4: Parámetros observados y medidos.

donde:

- $x_{q2}$  son los valores observados de  $q_2$ .       $y_{q2}$  son los valores medidos de  $q_2$ .
- $x_{q3}$  son los valores observados de  $q_3$        $y_{q3}$  son los valores medidos de  $q_3$ .
- $\bar{x}_q$  es el promedio de la suma de  $q_2 + q_3$        $\bar{y}_q$  es el promedio de la suma de  $q_2 + q_3$ .

Para obtener los valores de  $A$ ,  $B$  y  $C$  de la ecuación 2.29, se tienen las siguientes expresiones:

$$B_1 = \left[ \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)}{n} \right] \quad B_2 = \left[ \sum_{i=1}^n x_i^4 - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^4}{n} \right] \quad (2.31)$$

$$B_3 = - \left[ \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i - \frac{\left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)}{n} \right] \quad B_4 = \left[ \sum_{i=1}^n x_i^3 - \frac{\left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)}{n} \right] \quad (2.32)$$

$$B_5 = \left[ \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} \right] \left[ \sum_{i=1}^n x_i^4 - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^4}{n} \right] - \left[ \sum_{i=1}^n x_i^3 - \frac{\left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)}{n} \right]^2 \quad (2.33)$$

$$A_1 = \left[ \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} \right] \quad A_2 = \left[ \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i - \frac{\left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)}{n} \right] \quad (2.34)$$

$$A_3 = - \left[ \sum_{i=1}^n x_i^3 - \frac{\left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)}{n} \right] \quad A_4 = \left[ \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)}{n} \right] \quad (2.35)$$

$$A_5 = B_5$$

Una vez realizadas todas estas operaciones, se obtienen los parámetros  $A$ ,  $B$  y  $C$  de la siguiente manera:

$$A = \frac{A_1 A_2 - A_3 A_4}{A_5}$$

$$B = \frac{B_1 B_2 - B_3 B_4}{B_5}$$

$$C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - B \sum_{i=1}^n x_i - A \sum_{i=1}^n x_i^2}{n} \quad (2.36)$$

Finalmente, la función de regresión no lineal que se obtiene, se define como:

$$f_k = 0.0135q^2 + 1.4747q + 2.0589; \quad (2.37)$$

El error asociado a la estimación de  $q_2$  y  $q_3$  respecto a la función  $f_k$ , se muestra a continuación:



Figura 2.10: Aproximación de las posiciones angulares  $q_2$  y  $q_3$  respecto a  $q$ .

## 2.6. Reducción del modelo dinámico de 3 a 1GDL

Una vez hecha la síntesis de la estructura mecánica subactuada, como se abordó en el capítulo anterior, se obtiene una función de regresión no lineal, dada por:

$$\begin{aligned} f_k(q) &= Aq^2 + Bq + C \\ \dot{f}_k(q) &= 2Aq + B \\ \ddot{f}_k(q) &= 2A \end{aligned} \quad (2.38)$$

Esta función cuadrática, es obtenida a partir del análisis de las relaciones de movimiento que se tienen entre los eslabones del robot, y permite expresar las coordenadas de posición (de cada GDL) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
q_1 &= q \\
q_2 &= f_k(q) \\
q_3 &= f_k(q)
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Observe que las coordenadas  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$ , que describen los tres grados de libertad del dedo robótico, están en función de una sola coordenada generalizada  $q$ , lo que conlleva al análisis de tres eslabones con solo un GDL. Dicho lo anterior, se procede a obtener el modelo dinámico del dedo robótico subactuado, partiendo del modelo de cinemática directa de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c1} \cos(q) \\ l_{c1} \text{sen}(q) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q) + l_{c2} \cos(q + f_k) \\ l_1 \text{sen}(q) + l_{c2} \text{sen}(q + f_k) \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q) + l_2 \cos(q + f_k) + l_{c3} \cos(q + 2f_k) \\ l_1 \text{sen}(q) + l_2 \text{sen}(q + f_k) + l_{c3} \text{sen}(q + 2f_k) \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

La velocidad con la que se desplazan los eslabones del sistema, corresponde al cálculo de la derivada temporal del modelo de cinemática directa, con lo cual se obtiene:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -l_{c1} \text{sen}(q) \dot{q} \\ l_{c1} \cos(q) \dot{q} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -l_1 \text{sen}(q) \dot{q} - l_{c2} \text{sen}(q + f_k) (\dot{q} + \dot{f}_k) \\ l_1 \cos(q) \dot{q} + l_{c2} \cos(q + f_k) (\dot{q} + \dot{f}_k) \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -l_1 \text{sen}(q) \dot{q} - l_2 \text{sen}(q + f_k) (\dot{q} + \dot{f}_k) - l_{c3} \text{sen}(q + 2f_k) (\dot{q} + 2\dot{f}_k) \\ l_1 \cos(q) \dot{q} + l_2 \cos(q + f_k) (\dot{q} + \dot{f}_k) + l_{c3} \cos(q + 2f_k) (\dot{q} + 2\dot{f}_k) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.42}$$

La rapidez de los eslabones está dada por el cuadrado de la norma euclidiana definida por  $\|v\|^2 = v^T v$ . Entonces,

$$\|v_1\|^2 = l_{c1}^2 \dot{q}^2 \tag{2.43}$$

$$\|v_2\|^2 = l_1^2 \dot{q}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(f_k) [\dot{q}^2 + \dot{q} \dot{f}_k] + l_{c2}^2 [\dot{q}^2 + 2\dot{q} \dot{f}_k + \dot{f}_k^2] \tag{2.44}$$

$$\begin{aligned}
\|v_3\|^2 &= l_1^2 \dot{q}^2 + l_2^2 [\dot{q}^2 + 2\dot{q}\dot{f}_k + \dot{f}_k^2] + l_{c3}^2 [\dot{q}^2 + 4\dot{q}\dot{f}_k + 4\dot{f}_k^2 \\
&\quad + 2l_1 l_2 \cos(f_k)(\dot{q}^2 + \dot{q}\dot{f}_k) + 2l_1 l_{c3} \cos(2f_k)(\dot{q}^2 \\
&\quad + 2\dot{q}^2 \dot{f}_k) + 2l_2 l_{c3} \cos(f_k)(\dot{q}^2 + 2\dot{q}\dot{f}_k + \dot{q}\dot{f}_k + 2\dot{f}_k^2)]
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Se procede a obtener los modelos de energía cinética  $\mathcal{K}_1$ ,  $\mathcal{K}_2$  y  $\mathcal{K}_3$  correspondientes a la energía en las masas  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$ , respectivamente. Por tanto:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{q}^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{q}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(f_k) [\dot{q}^2 + \dot{q}\dot{f}_k] + l_{c2}^2 (\dot{q}^2 + 2\dot{q}\dot{f}_k + \dot{f}_k^2)] \\
&\quad + \frac{1}{2} I_2 \dot{q}^2 + \frac{1}{2} m_3 [l_1^2 \dot{q}^2 + l_2^2 [\dot{q}^2 + 2\dot{q}\dot{f}_k + \dot{f}_k^2] + l_{c3}^2 [\dot{q}^2 + 4\dot{q}\dot{f}_k + 4\dot{f}_k^2 \\
&\quad + 2l_1 l_2 \cos(f_k)(\dot{q}^2 + \dot{q}\dot{f}_k) + 2l_1 l_{c3} \cos(2f_k)(\dot{q}^2 + 2\dot{q}\dot{f}_k) \\
&\quad + 2l_2 l_{c3} \cos(f_k)(\dot{q}^2 + 2\dot{q}\dot{f}_k + \dot{q}\dot{f}_k + 2\dot{f}_k^2)] + \frac{1}{2} I_3 \dot{q}^2
\end{aligned} \tag{2.46}$$

La energía potencial gravitatoria, que describe el efecto que la gravedad tiene en los centros de masa de cada eslabón, se define como sigue:

$$\begin{aligned}
U_1(q) &= m_1 g [l_{c1} \text{sen}(q)] \\
U_2(q) &= m_2 g [l_1 \text{sen}(q) + l_{c2} \text{sen}(q + f_k)] \\
U_3(q) &= m_3 g [l_1 \text{sen}(q) + l_2 \text{sen}(q + f_k) + l_{c3} \text{sen}(q + 2f_k)]
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Una vez calculadas las energías cinética y potencial gravitatoria, se procede a obtener la función lagrangiano, que está dada por la siguiente expresión:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{K}(q, \dot{q}) - U(q) \tag{2.48}$$

A partir del lagrangiano, se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.11), por medio de las cuales se describe la energía que se inyecta al robot. Así:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} &= m_1 l_{c1}^2 \dot{q} + I_1 \dot{q} + m_2 l_1^2 \dot{q} + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(f_k) \dot{q} + m_2 l_1 l_{c2} \cos(f_k) \dot{f}_k + m_2 l_{c2}^2 \dot{q} + m_2 l_{c2}^2 \dot{f}_k \\
&\quad + I_2 \dot{q} + m_3 l_1^2 \dot{q} + m_3 l_2^2 \dot{q} + m_3 l_2^2 \dot{f}_k + m_3 l_{c3}^2 \dot{q} + 2m_3 l_{c3}^2 \dot{f}_k + 2m_3 l_1 l_2 \cos(f_k) \dot{q} \\
&\quad + m_3 l_1 l_2 \cos(f_k) \dot{f}_k + 2m_3 l_1 l_{c3} \cos(2f_k) \dot{q} + 2m_3 l_1 l_{c3} \cos(2f_k) \dot{f}_k \\
&\quad + 2m_3 l_2 l_{c3} \cos(f_k) (\dot{q} + \dot{f}_k) + m_3 l_2 l_{c3} \cos(f_k) \dot{f}_k + I_3 \dot{q}
\end{aligned} \tag{2.49}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] &= [m_1 l_{c1}^2 + I_1 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(f_k) + m_2 l_{c2}^2 + I_2 + m_3 l_1^2 + m_3 l_2^2 + m_3 l_{c3}^2 \\
&+ 2m_3 l_1 l_2 \cos(f_k) + 2m_3 l_1 l_{c3} \cos(2f_k) + 2m_3 l_2 l_{c3} \cos(f_k) + I_3] \ddot{q} \\
&+ [-2m_2 l_1 l_{c2} \sin(f_k) \dot{f}_k - 2m_3 l_1 l_2 \sin(f_k) \dot{f}_k - m_3 l_1 l_{c3} \sin(2f_k) \dot{f}_k \\
&- 2m_3 l_1 l_{c3} \sin(f_k) \dot{f}_k] \dot{q} - m_2 l_1 l_{c2} \sin(f_k) \dot{f}_k^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(f_k) \ddot{f}_k + m_2 l_{c2}^2 \ddot{f}_k \\
&+ m_3 l_2^2 \ddot{f}_k + 2m_3 l_{c3}^2 \ddot{f}_k + m_3 l_1 l_2 \cos(f_k) \ddot{f}_k - m_3 l_1 l_2 \sin(f_k) \dot{f}_k^2 + 2m_3 l_1 l_{c3} \cos(2f_k) \ddot{f}_k \\
&- m_3 l_1 l_{c3} \sin(2f_k) \dot{f}_k^2 + 2m_3 l_2 l_{c3} \cos(f_k) \dot{f}_k - 2m_3 l_2 l_{c3} \sin(f_k) \dot{f}_k^2 + m_3 l_2 l_{c3} \cos(f_k) \ddot{f}_k \\
&- m_3 l_2 l_{c3} \sin(f_k) \dot{f}_k^2
\end{aligned} \tag{2.50}$$

La derivada parcial de la función lagrangiano respecto a  $q$ , está dada por lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} \right] &= m_1 g l_{c1} \cos(q) + m_2 g l_1 \cos(q) + m_2 g l_{c2} \cos(q + f_k)(1 + f_k) + m_3 g l_1 \cos(q) \\
&+ m_3 g l_2 \cos(q + f_k)(1 + f_k) + m_3 g l_{c3} \cos(q + 2f_k)(1 + 2f_k)
\end{aligned} \tag{2.51}$$

El número de ecuaciones de Euler-Lagrange que describen el modelo dinámico de un robot, es igual al número de grados de libertad que posee. Con base en los resultados anteriores, observe que a pesar de tenerse tres articulaciones en el dedo robot, la reducción de tres GDL a uno, permite obtener una sola ecuación de movimiento que describe su modelo dinámico. De forma compacta, el modelo dinámico se describe de la siguiente manera [19]:

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(\dot{q}, q)\dot{q} + g(q) + f_f(b, \dot{q})$$

En el modelo dinámico de robots de dos o más GDL, los términos  $M(q)$  y  $C(\dot{q}, q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices, y el término de pares gravitatorios  $g(q) \in \mathbb{R}^n$  es un vector. Esto da como resultado un vector  $\tau$  que describe la dinámica del sistema. Por otro lado, en el modelo dinámico obtenido anteriormente, solo se considera un GDL, por lo que la ecuación de Euler-Lagrange  $\tau$ , es una función cuadrática. Entonces,

Término de inercias:

$$\begin{aligned}
M(q) = & [m_1 l_{c1}^2 + I_1 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(f_k) + m_2 l_{c2}^2 + I_2 + m_3 l_1^2 + m_3 l_2^2 + m_3 l_{c3}^2 \\
& + 2m_3 l_1 l_2 \cos(f_k) + 2m_3 l_1 l_{c3} \cos(2f_k) + 2m_3 l_2 l_{c3} \cos(f_k) + I_3] \ddot{q}
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Término de Coriolis y fuerzas centrípetas:

$$\begin{aligned}
C(q, \dot{q})\dot{q} = & [-2m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(f_k) \dot{f}_k - 2m_3 l_1 l_2 \operatorname{sen}(f_k) \dot{f}_k - m_3 l_1 l_{c3} \operatorname{sen}(2f_k) \dot{f}_k \\
& - 2m_3 l_1 l_{c3} \operatorname{sen}(f_k) \dot{f}_k] \dot{q}
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Término de pares gravitatorios:

$$\begin{aligned}
g(q) = & -m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(f_k) \dot{f}_k^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(f_k) \ddot{f}_k + m_2 l_{c2}^2 \ddot{f}_k + m_3 l_2^2 \ddot{f}_k + 2m_3 l_{c3}^2 \ddot{f}_k \\
& + m_3 l_1 l_2 \cos(f_k) \ddot{f}_k - m_3 l_1 l_2 \operatorname{sen}(f_k) \dot{f}_k^2 + 2m_3 l_1 l_{c3} \cos(2f_k) \ddot{f}_k - m_3 l_1 l_{c3} \operatorname{sen}(2f_k) \dot{f}_k^2 \\
& + 2m_3 l_2 l_{c3} \cos(f_k) \dot{f}_k - 2m_3 l_2 l_{c3} \operatorname{sen}(f_k) \dot{f}_k^2 + m_3 l_2 l_{c3} \cos(f_k) \ddot{f}_k - m_3 l_2 l_{c3} \operatorname{sen}(f_k) \dot{f}_k^2 \\
& - m_1 g l_{c1} \cos(q) - m_2 g l_1 \cos(q) - m_2 g l_{c2} \cos(q + f_k)(1 + f_k) - m_3 g l_1 \cos(q) \\
& - m_3 g l_2 \cos(q + f_k)(1 + f_k) - m_3 g l_{c3} \cos(q + 2f_k)(1 + 2f_k)
\end{aligned} \tag{2.54}$$

El término de fricción viscosa, se reduce a lo siguiente:

$$f_f(b, \dot{q}) = b\dot{q} \tag{2.55}$$

Donde el coeficiente  $b$ , corresponde a la fricción viscosa, o bien, la disipación de energía ocasionada por el único eslabón del sistema subactuado. Con esto, se concluye la reducción del modelo dinámico de tres a un solo grado de libertad.

## 2.7. Control de posición

El modelo dinámico, permite analizar de forma completa y detallada el comportamiento no lineal del robot propuesto. Sin embargo, para lograr que el robot se desplace hacia un punto deseado  $q_d$  desde cualquier punto inicial, o bien, para cualquier condición inicial  $[q(0), \dot{q}(0)]^T \in \mathbb{R}^n$ , es necesario implementar un control de posición.

Matemáticamente, el problema de regulación o control de posición para un robot, implica diseñar un regulador tal que la velocidad de movimiento  $\dot{q}$  y el error de posición  $\tilde{q} = q_d - q$ , converjan asintóticamente a cero, sin importar las condiciones iniciales que se tengan [19], es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{q}(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \geq 0 \quad (2.56)$$

donde el vector de ceros corresponde al punto de equilibrio del sistema. Es posible diseñar un regulador empleando una técnica conocida como *moldeo de energía*. Esta técnica, permite diseñar una familia extensa de esquemas de control, y está definida de la siguiente manera [19]:

$$\tau = \nabla \mathcal{U}_a(k_p, \tilde{q}) - f_v(k_v, \dot{q}) + g(q) \quad (2.57)$$

donde

- $\nabla \mathcal{U}_a(k_p, \tilde{q}) = \frac{\partial}{\partial \tilde{q}} \mathcal{U}_a(k_p, \tilde{q})$  es la energía potencial artificial (energía diseñada) que representa el esquema de control y físicamente es el moldeo de la energía.
- $k_p \in \mathbb{R}_+$  es una constante positiva conocida como ganancia proporcional.
- $k_v \in \mathbb{R}_+$  es una constante positiva conocida como ganancia derivativa.
- $f_v(k_v, \dot{q})$  es una función que representa la acción de control derivativa y facilita el amortiguamiento o freno mecánico del robot.

El moldeo de energía se lleva a cabo utilizando algunos controles clásicos, a modo de verificar y comparar el comportamiento dinámico de cada dedo del sistema propuesto conforme evoluciona el tiempo.

### 2.7.1. Control de posición PD

Se parte de la implementación del control clásico PD más compensación de gravedad, definido por [20]:

$$\tau = k_p \tilde{q} + k_v \dot{q} + g(q) \quad (2.58)$$

Observe que en este control, el término  $k_p \tilde{q}$  corresponde a la energía potencial artificial, es decir, a la energía de diseño  $\nabla \mathcal{U}_a(k_p, \tilde{q})$ . Dado el modelo dinámico de un robot de un GDL, la ecuación del sistema en lazo cerrado está dada por lo siguiente [20]:

$$\begin{aligned} k_p \tilde{q} + k_v \dot{q} + g(q) &= M(q) \ddot{q} + C(\dot{q}, q) \dot{q} + g(q) + b \dot{q} \\ M(q) \ddot{q} &= k_p \tilde{q} - k_v \dot{q} - C(\dot{q}, q) \dot{q} - b \dot{q} \\ \ddot{q} &= M(q)^{-1} [k_p \tilde{q} - k_v \dot{q} - C(\dot{q}, q) \dot{q} - b \dot{q}] \end{aligned} \quad (2.59)$$

Sabiendo que el error de posición está dado por  $\tilde{q} = q_d - q$ , donde  $q_d \in \mathbb{R}$  es una constante, es posible reescribir la ecuación en lazo cerrado como un vector de estados de la siguiente manera [20]:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ M(q)^{-1} [k_p \tilde{q} - k_v \dot{q} - C(\dot{q}, q) \dot{q} - b \dot{q}] \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

La demostración de existencia y unicidad del punto de equilibrio, implica encontrar las condiciones necesarias para que el vector de estados sea igual a cero. El primer término del vector de estados solo depende de  $\dot{q}$ , por tanto:

$$-\dot{q} = 0 \iff \dot{q} = 0 \quad (2.61)$$

Para el segundo término, observe que  $M(q)^{-1}$  multiplica al resto de las variables; como  $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz definida positiva por diseño, y de acuerdo a sus propiedades, su inversa  $M(q)^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  existe, y también es definida positiva. Por lo tanto, solo es necesario analizar los términos contenidos entre paréntesis. Se observa que el segundo término depende de  $\tilde{q}$  y  $\dot{q}$ , por lo cual se concluye lo siguiente [20]:

$$M(q)^{-1} [k_p \tilde{q} - k_v \dot{q} - C(\dot{q}, q) \dot{q} - b \dot{q}] = 0 \iff \tilde{q}, \dot{q} = 0 \quad (2.62)$$

### 2.7.2. Análisis de estabilidad Lyapunov PD

Para la demostración de estabilidad del punto de equilibrio del dedo robótico propuesto, se parte de la proposición de una función de energía candidata en el sentido

de Lyapunov. Con base en la técnica de moldeo de energía (ec. 2.57), se busca que la función candidata tenga la siguiente forma [19]:

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = \frac{1}{2}M(q)\dot{q}^2 + \mathcal{U}_a(k_p, \tilde{q}) \quad (2.63)$$

Considerando que el control implementado es un PD más compensación de gravedad, entonces:

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = \frac{1}{2}M(q)\dot{q}^2 + \frac{1}{2}k_p\tilde{q}^2 \quad (2.64)$$

cuya potencia está dada por:

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = M(q)\dot{q}\ddot{q} + k_p\tilde{q}\dot{\tilde{q}} \quad (2.65)$$

Con base en el vector de estados (2.60), se sustituyen los valores de  $\dot{\tilde{q}}$  y  $\ddot{q}$ :

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) &= \dot{q} \underline{M(q)} [M(q)^{-1} [k_p\tilde{q} - k_v\dot{q} - C(\dot{q}, q)\dot{q} - b\dot{q}]] - k_p\tilde{q}\dot{\tilde{q}} \\ &= \dot{q}k_p\tilde{q} - \dot{q}k_v\dot{q} - \dot{q}C(\dot{q}, q)\dot{q} - b\dot{q} - k_p\tilde{q}\dot{\tilde{q}} \\ &= -[k_v + C(\dot{q}, q) + b]\dot{q}^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (2.66)$$

Observe que la función (2.66) es semidefinida negativa, debido a que sí y solo sí para  $\dot{q} = 0$ , y para cualquier valor de  $\tilde{q} \neq 0$ , la función  $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = 0$ . Por lo tanto, se demuestra estabilidad global del punto de equilibrio del sistema [20].

Para el análisis de estabilidad asintótica, se emplea el teorema de LaSalle. De acuerdo a este teorema, existe un conjunto invariante  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  respecto al sistema dinámico propuesto, donde  $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) \leq 0$  (calculada anteriormente) pertenece a  $\Omega$  [20].

Ahora, se define un subconjunto  $\Omega_\epsilon$  que engloba todos los puntos del conjunto  $\Omega$  donde  $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = 0$ , es decir, el subconjunto  $\Omega_\epsilon$  es el *atractor* del punto de equilibrio del sistema. Además, existe un subconjunto invariante más grande  $\Omega_M \subseteq \Omega_\epsilon$ , el cual únicamente contiene al punto de equilibrio del sistema u origen de estados, donde las

únicas trayectorias que permanecen en  $\Omega_M$  son las soluciones  $\dot{q} = 0$  y  $\tilde{q} = 0$ , entonces el origen es asintóticamente estable [19]. Esto indica que todas las trayectorias de  $\dot{q}$  y  $\tilde{q}$  que comiencen en  $\Omega_\epsilon$  (atractor) convergen en  $\Omega_M$ , o bien,  $\tilde{q}, \dot{q} \rightarrow \Omega_M$  conforme  $t \rightarrow \infty$ , hecho que coincide con el teorema de estabilidad asintótica de Lyapunov, lo que demuestra estabilidad asintótica del punto de equilibrio [20].

### 2.7.3. Desempeño del sistema PD a nivel simulación

Teóricamente, se ha demostrado estabilidad global del punto de equilibrio. Ahora, se procede a desarrollar un algoritmo en el software **MATLAB** que permita obtener la respuesta del sistema subactuado en lazo cerrado, y analizar su comportamiento a nivel simulación. Para fines de comparación de desempeño, la simulación se lleva a cabo empleando una función de correspondencia lineal  $f_k = Ax + B$ , y la  $f_k = Ax^2 + B + C$  no lineal propuesta, con el objetivo de observar en qué caso se tiene una mejor respuesta. Asimismo, es necesario establecer ciertas reglas para la sintonización de ganancias.

Cuando se trabaja con controles de posición, se requieren reglas de sintonización de ganancias para no saturar el servoamplificador, debido a que los servomotores no pueden proporcionar un par torsor de magnitud infinita. Cuando el servoamplificador se satura, es posible que se origine vibración en la estructura mecánica del robot. Por ello, es conveniente establecer un método para trabajar en la región activa en todo instante del tiempo. Tomando en cuenta que el control PD es de tipo no acotado, se propone utilizar la siguiente regla de sintonización de ganancias descrita en [19]:

$$k_p \leq 0.9 \frac{\tau_{max}}{q_d} \quad k_v = 0.4k_p \quad (2.67)$$

por lo que la sintonización de la ganancia proporcional está en función del torque máximo sin llegar a rebasarlo, y la ganancia  $k_v$  está en función de  $k_p$ . Una vez que se tienen todos los parámetros, pertinentes al control del sistema subactuado propuesto, se realiza la simulación y se obtienen los siguientes resultados:

En la figura 2.10, observe que la respuesta del sistema reducido mediante una fun-

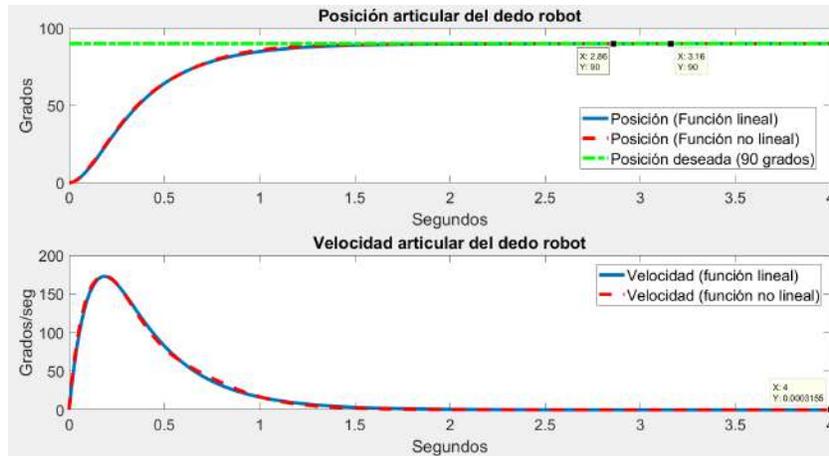


Figura 2.11: Comparación de desempeño del regulador PD utilizando una función  $f_k$  lineal vs no lineal.

ción de regresión lineal, tarda 3.16 segundos en llegar a la posición deseada  $q_d = 90$  grados. Con la función no lineal propuesta, el sistema llega a la posición deseada en 2.857 segundos. Para ambos casos, los parámetros de control son los mismos, por lo tanto se concluye que la función no lineal propuesta es una mejor alternativa de aproximación para este sistema particular.

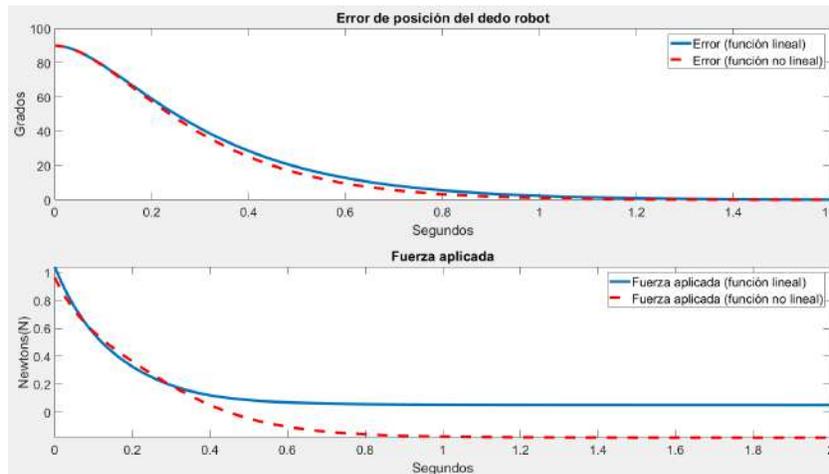


Figura 2.12: Comparación de desempeño del regulador PD utilizando una función  $f_k$  lineal vs no lineal.

Las respuestas de velocidad articular y error de posición, tienden asintóticamente a

cero conforme evoluciona el tiempo. Con estos resultados, se concluye que el regulador PD más compensación de gravedad, es adecuado para su implementación en los dedos subactuados.

#### 2.7.4. Control de posición propuesto

Con base en lo anterior, se propone la siguiente estructura de control:

$$\tau = k_p \tilde{q} e^{\tilde{q}^2} - k_v \dot{q} e^{\dot{q}^2} + g(q) \quad (2.68)$$

Dado el modelo dinámico del sistema subactuado propuesto, se tiene la siguiente ecuación en lazo cerrado:

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(\dot{q}, q)\dot{q} + g(q) + b\dot{q} \quad (2.69)$$

Igualando ambas expresiones (2.68)(2.69) y despejando  $\ddot{q}$ , se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} M(q)\ddot{q} + C(\dot{q}, q) + b\dot{q} + g(q) &= k_p \tilde{q} e^{\tilde{q}^2} - k_v \dot{q} e^{\dot{q}^2} + g(q) \\ M(q)\ddot{q} &= k_p \tilde{q} e^{\tilde{q}^2} - k_v \dot{q} e^{\dot{q}^2} - C(\dot{q}, q)\dot{q} - b\dot{q} \\ \ddot{q} &= M(q)^{-1} \left( k_p \tilde{q} e^{\tilde{q}^2} - k_v \dot{q} e^{\dot{q}^2} - C(\dot{q}, q)\dot{q} - b\dot{q} \right) \end{aligned} \quad (2.70)$$

Sabiendo que el error de posición está definido por  $\tilde{q} = q_d - q(t)$ , donde  $q_d$  es la posición deseada, se puede definir el siguiente vector de estados:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ M(q)^{-1} \left( k_p \tilde{q} e^{\tilde{q}^2} - k_v \dot{q} e^{\dot{q}^2} - C(\dot{q}, q)\dot{q} - b\dot{q} \right) \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

#### 2.7.5. Análisis de estabilidad de regulador propuesto

Retomando la técnica de moldeo de energía, el análisis de estabilidad se lleva a cabo proponiendo la siguiente función candidata:

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = \frac{1}{2}M(q)\dot{q}^2 + \frac{1}{2}k_p(e^{\tilde{q}^2} - 1) \quad (2.72)$$

donde  $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) > 0$  es una función definida positiva, y su derivada temporal debe ser  $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \leq 0$  para demostrar que el punto de equilibrio del sistema es estable. Entonces:

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = M(q)\dot{q}\ddot{q} + k_p\tilde{q}e^{\tilde{q}^2}\dot{\tilde{q}} \quad (2.73)$$

Sustituyendo los valores de  $\dot{\tilde{q}}$  y  $\ddot{q}$  por los del vector de estados, se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) &= \dot{q} \underbrace{M(q)M(q)^{-1}}_{=1} \left( k_p\tilde{q}e^{\tilde{q}^2} - k_v\dot{q}e^{\dot{q}^2} - C(\dot{q}, q)\dot{q} - b\dot{q} \right) + k_p\tilde{q}e^{\tilde{q}^2}(-\dot{q}) \\ &= \cancel{k_p\tilde{q}e^{\tilde{q}^2}\dot{q}} - k_v\dot{q}^2e^{\dot{q}^2} - C(\dot{q}, q)\dot{q}^2 - b\dot{q} - \cancel{k_p\tilde{q}e^{\tilde{q}^2}\dot{q}} \\ &= -[k_v e^{\dot{q}^2} - C(\dot{q}, q) - b]\dot{q}^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (2.74)$$

De la expresión anterior, se concluye que el punto de equilibrio del sistema es estable. Además, observe que  $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q})$  es una función semidefinida negativa de acuerdo a los siguientes puntos [19].

- Cuando  $\dot{q} = 0$  y para todo  $\tilde{q}$ ,  $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = 0$ .
- Cuando  $\dot{q} \neq 0$  y para todo  $\tilde{q}$ ,  $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) < 0$
- Cuando  $\dot{q} \rightarrow \infty$ ,  $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) \rightarrow -\infty$

A nivel simulación, a continuación se muestra la respuesta que se obtiene del sistema subactuado empleando el control exponencial propuesto. Asimismo, se lleva a cabo una comparación entre el desempeño del sistema con una función de correspondencia lineal y una no lineal.

En la figura 2.13, observe que la respuesta del sistema reducido mediante una función de regresión lineal, tarda 3.422 segundos en llegar a la posición deseada  $q_d = 90$  grados. Con la función no lineal propuesta, el sistema llega a la posición deseada en 2.938 segundos. Para ambos casos, los parámetros de control son los mismos, por lo

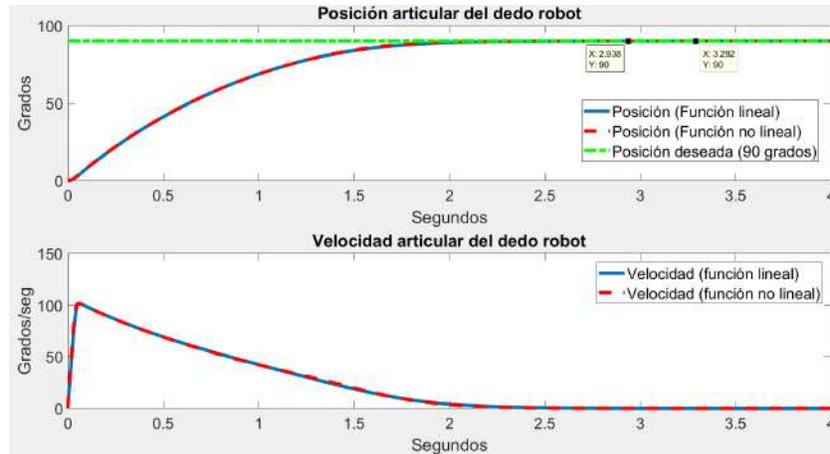


Figura 2.13: Comparación de posición y velocidad articulares del regulador exponencial utilizando una función  $f_k$  lineal vs no lineal.

tanto se concluye que la función no lineal propuesta es una mejor alternativa de aproximación para este sistema particular. Las respuestas de velocidad articular y error de posición, tienden asintóticamente a cero conforme evoluciona el tiempo. Con estos resultados, se concluye que la propuesta del regulador no acotado es adecuada para su implementación en los dedos subactuados.

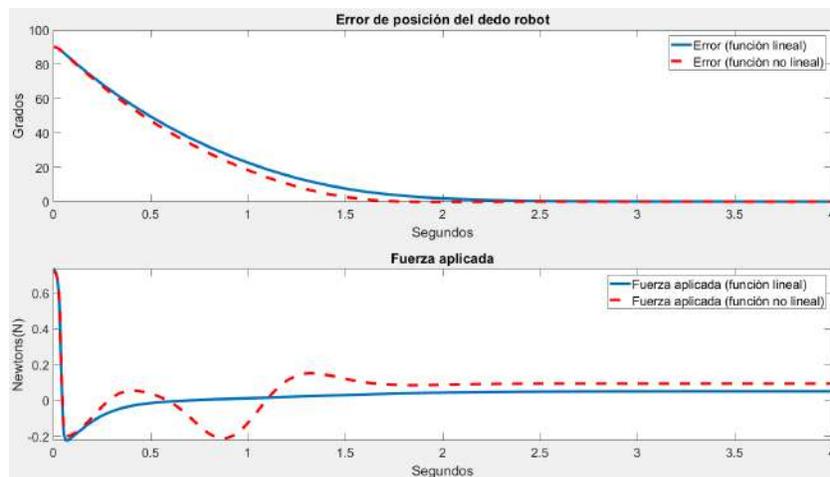


Figura 2.14: Comparación de error de posición y par aplicado del regulador exponencial utilizando una función  $f_k$  lineal vs no lineal.

## 2.8. Comparación entre el sistema de 3gdl y el subactuado

Con el objetivo de evaluar el desempeño del sistema subactuado propuesto, a continuación se lleva a cabo la comparación del desempeño del regulador PD en los sistemas subactuado y de 3gdl, por medio de simulación en MATLAB. Se utiliza la función de regresión cuadrática para aproximar la respuesta del sistema subactuado, a la obtenida del sistema de 3gdl. Los resultados obtenidos son los siguientes (fig. 2.15 - 2.16).

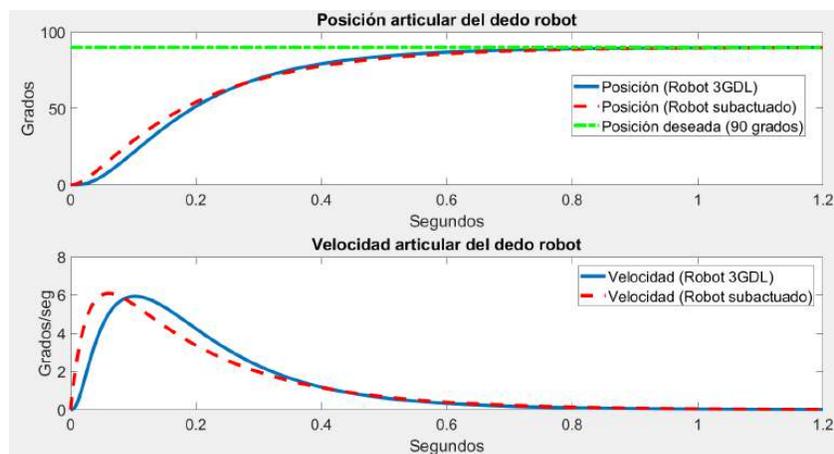


Figura 2.15: Posición y velocidad del sistema de 3gdl y subactuado.

En la figura 2.15, se muestra el comportamiento de la posición y velocidad articulares del sistema subactuado y del sistema de tres grados de libertad. Observe que las respuestas de ambos sistemas, son muy similares en sus estados transitorios y estables. En ambos casos, se alcanza la posición deseada de 90 grados, y la velocidad tiende asintóticamente a cero.

Por lo anterior, se concluye que el modelo de regresión cuadrático empleado, para aproximar la respuesta del sistema subactuado al del sistema de tres grados de libertad, es adecuado con base en los resultados a nivel simulación.

En la figura 2.16, se muestra el error de posición y fuerza aplicada del sistema subactuado y del sistema de tres grados de libertad. En ambos casos, el error de posición tiende a cero con un comportamiento muy similar. En cuanto a la fuerza aplicada, en

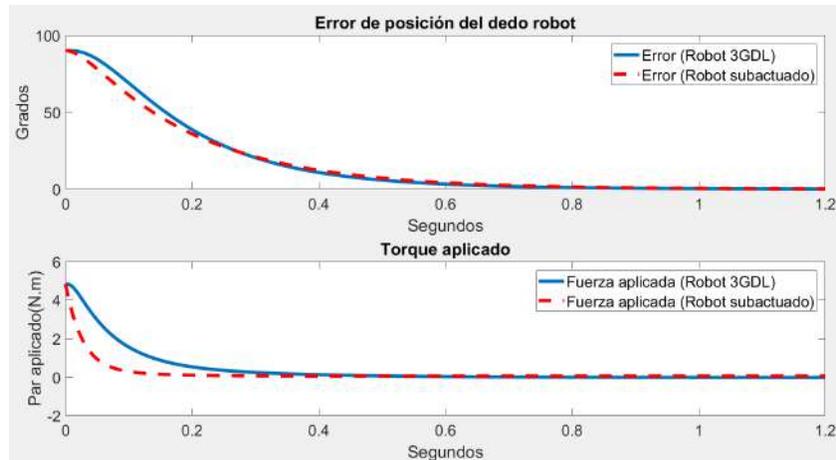


Figura 2.16: Error de posición y par torsor del sistema de 3gdl y subactuado.

ambos sistemas se tiene una respuesta que no satura el servoamplificador, considerando que la fuerza máxima del motor es de  $5Nm$ . Sin embargo, la respuesta de fuerza aplicada en el sistema subactuado, se aproxima a cero con mayor velocidad que la respuesta del sistema de tres grados de libertad. Lo anterior indica, que el sistema subactuado propuesto requiere de menos energía que el sistema de tres grados de libertad, lo cual representa una de las numerosas ventajas de la subactuación de movimiento aplicada en robots.

# Capítulo 3

## Establecimiento de la técnica de ganancias autosintonizables

A continuación, se propone una variante del regulador PD, cuyo desempeño permite la autosintonización de las ganancias proporcional y derivativa en cada instante de tiempo.

Se propone sustituir la expresión matemática del regulador PD,

$$\tau = k_p \tilde{q} + k_v \dot{q} + g(q) \quad (3.1)$$

por lo siguiente [22]:

$$\tau = k_{pi}(q_d) \tilde{q} + k_{vi}(q_d) \dot{q} + gq \quad (3.2)$$

donde  $k_{pi}(q_d)$  y  $k_{vi}(q_d)$ , son ganancias variables que dependen de la posición deseada del efector final del robot. Estas ganancias son matrices diagonales para  $i = 1, 2, \dots, n$  donde  $n$  corresponde al número de GDL del sistema. Sin embargo, para el sistema subactuado propuesto, de un grado de libertad por dedo, las ganancias  $k_p(q_d)$  y  $k_v(q_d)$  son funciones escalares.

Cada ganancia ( $k_p(q_d)$  y  $k_v(q_d)$ ) corresponde a la salida de una red neuronal de base radial (RBFNN). La red neuronal de base radial, está conformada por una capa de entrada, una capa oculta de funciones de activación gaussianas  $\phi_{i,j}^{P,V}(q_d)$ , y una capa de salida cuyo propósito es sumar las funciones de activación, multiplicadas por factores

de ponderación  $w_{i,j}^{P,V}$ , conocidos como pesos [22].

Las funciones de activación gaussianas, son expresadas matemáticamente como [22]:

$$\phi_{i,j}^{P,V}(q_d) = e^{\left[-\left(\frac{\|q_d - C_k\|}{\sigma}\right)^2\right]} \leq 0.5 \quad (3.3)$$

donde  $j = 1, 2, \dots, m$ , y  $m$  corresponde al número de muestras que representan los centros de las funciones gaussianas;  $C_k = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_m]$  corresponde a los centros de las funciones gaussianas para  $k = 1, 2, \dots, h$ , donde  $h$  es el total de neuronas que conforman la capa oculta. La constante  $\sigma$ , controla el ancho de las funciones gaussianas. Para este trabajo,  $\sigma = 0.04$

Los valores para los centros de las funciones gaussianas, son obtenidos directamente de la respuesta del dedo robot. Estos valores corresponden a las posiciones, en coordenadas cartesianas, que cubren uniformemente el espacio de trabajo del efector final. Con estas coordenadas, cuya cantidad queda a criterio del diseñador, se forma una base de datos de entrenamiento que permite modelar neuronalmente las ganancias proporcional  $k_p(q_d)$  y derivativa  $k_v(q_d)$ .

Funciones Gaussianas									
CENTROS	10	20	30	40	50	60	70	80	90
10	0.5000	0.2335	0.0238	0.0011	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
20	0.2335	0.5000	0.2335	0.0238	0.0011	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
30	0.0238	0.2335	0.5000	0.2335	0.0238	0.0011	0.0000	0.0000	0.0000
40	0.0011	0.0238	0.2335	0.5000	0.2335	0.0238	0.0011	0.0000	0.0000
50	0.0000	0.0011	0.0238	0.2335	0.5000	0.2335	0.0238	0.0011	0.0000
60	0.0000	0.0000	0.0011	0.0238	0.2335	0.5000	0.2335	0.0238	0.0011
70	0.0000	0.0000	0.0000	0.0011	0.0238	0.2335	0.5000	0.2335	0.0238
80	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0011	0.0238	0.2335	0.5000	0.2335
90	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0011	0.0238	0.2335	0.5000

Figura 3.1: Tabla de cálculo de centros Gaussianos.

Los factores de ponderación  $w_{i,j}^{P,V}$ , son calculados resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones por medio de matlab:

$$\begin{bmatrix} \phi_{1,1}^{P,V}(q_d) & \phi_{1,2}^{P,V}(q_d) & \cdots & \phi_{1,m}^{P,V}(q_d) \\ \phi_{2,1}^{P,V}(q_d) & \phi_{2,2}^{P,V}(q_d) & \cdots & \phi_{2,j}^{P,V}(q_d) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{k,1}^{P,V}(q_d) & \phi_{k,2}^{P,V}(q_d) & \cdots & \phi_{k,m}^{P,V}(q_d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{i,1}^{P,V} \\ w_{i,2}^{P,V} \\ \vdots \\ w_{n,m}^{P,V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{i1}^{P,V} \\ k_{i2}^{P,V} \\ \vdots \\ k_{n,m}^{P,V} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

donde  $k_{n,m}^{P,V}$  son los elementos contenidos en las ganancias  $k_p(q_d)$  y  $k_v(q_d)$ , es decir:

$$k_{pi} = \begin{bmatrix} k_{i,j} & k_{1,2} & \cdots & k_{n,m} \end{bmatrix} \quad y \quad k_{vi} = \begin{bmatrix} k_{i,j} & k_{1,2} & \cdots & k_{n,m} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

PARÁMETROS BASE			
qd	Centros (rad)	Ganancia proporcional (kp)	Ganancia derivativa (kv)
10	0.17453	5.4431	0.8165
20	0.34907	2.7215	0.4082
30	0.52360	1.8144	0.2722
40	0.69813	1.3608	0.2041
50	0.87267	1.0886	0.1633
60	1.04720	0.9072	0.1361
70	1.22173	0.7776	0.1166
80	1.39626	0.6804	0.1021
90	1.57080	0.6048	0.0907

Figura 3.2: Tabla de ganancias.

PESOS SINÁPTICOS	
w(kp)	w(kv)
11.4665	1.7201
-1.6105	-0.2418
3.5936	0.5393
0.361	0.054
1.5031	0.2255
0.626	0.094
0.9382	0.1405
0.4427	0.0667
0.9568	0.1434

Figura 3.3: Tabla de pesos.

Observe que para el caso particular del sistema subactuado propuesto de un GDL, se requieren dos redes neuronales; una cuya salida es  $k_p(q_d)$ , y la segunda cuya salida es  $k_v(q_d)$ . Por lo tanto, introduciendo las redes neuronales a las ganancias proporcional y derivativa del regulador PD, se tiene:

$$k_p(q_d) = \sum_{k=1}^h w_{i,j}^P \phi_{i,j}^P(q_d) \geq 0 \quad (3.6)$$

$$k_v(q_d) = \sum_{k=1}^h w_{i,j}^V \phi_{i,j}^V(q_d) \geq 0 \quad (3.7)$$

donde  $w_{i,j}^P$  y  $w_{i,j}^V$  son los pesos de las capas ocultas de las redes neuronales  $k_p(q_d)$  y  $k_v(q_d)$ , respectivamente. La estructura de cada red neuronal, puede observarse en la figura 3.4.

Observe que ambas ganancias (3.6 y 3.7) son funciones escalares, por lo que el análisis de estabilidad del regulador PD con redes neuronales, conlleva a la misma conclusión

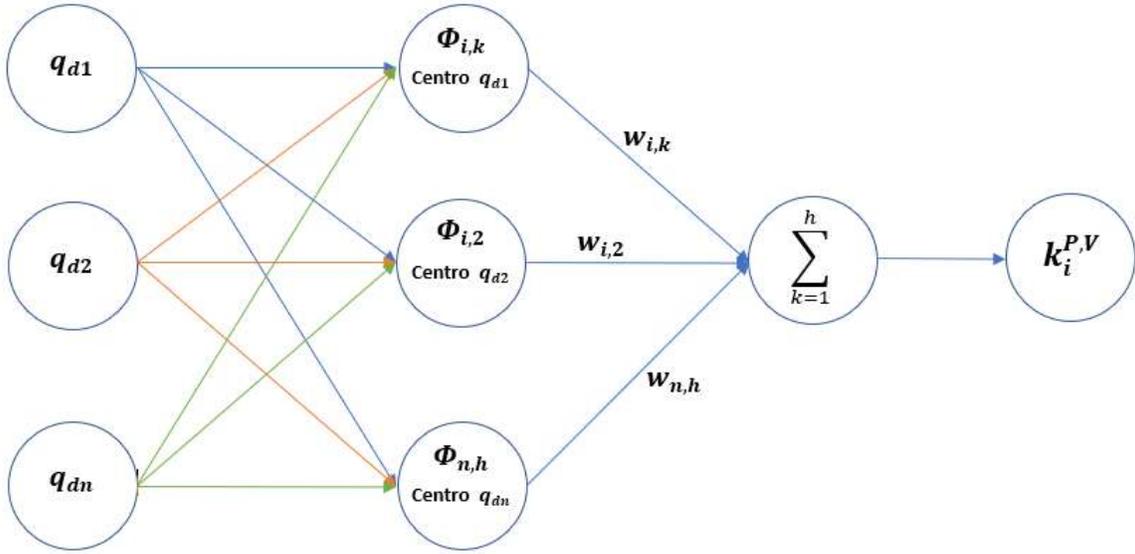


Figura 3.4: Estructura de la red neuronal de base radial.

que el análisis del regulador PD convencional; en ambos casos se presenta estabilidad y estabilidad asintótica del punto de equilibrio del sistema. Para demostrarlo, considere la ecuación (3.2) y el modelo dinámico de un robot de  $n$  GDL; la ecuación en lazo cerrado está dada por:

$$\begin{aligned}
 k_p(q_d)\tilde{q} + k_v(q_d)\dot{q} + g(q) &= M(q)\ddot{q} + C(\dot{q}, q)\dot{q} + g(q) + b\dot{q} \\
 M(q)\ddot{q} &= k_p(q_d)\tilde{q} - k_v(q_d)\dot{q} - C(\dot{q}, q)\dot{q} - b\dot{q} \\
 \ddot{q} &= M(q)^{-1} [k_p(q_d)\tilde{q} - k_v(q_d)\dot{q} - C(\dot{q}, q)\dot{q} - b\dot{q}]
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Sabiendo que el error de posición está dado por  $\tilde{q} = q_d - q$ , la ecuación en lazo cerrado puede expresarse como el siguiente vector de estados [3.9]:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ M(q)^{-1} [k_p(q_d)\tilde{q} - k_v(q_d)\dot{q} - C(\dot{q}, q)\dot{q} - b\dot{q}] \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

La demostración de existencia y unicidad del punto de equilibrio, se lleva a cabo de la misma manera que en el análisis del PD convencional (ec. 2.61 - 2.62).

El análisis de estabilidad para el PD con redes neuronales, provee las mismas conclusiones que en el caso del PD convencional, ya que, en esencia, ambos reguladores tienen la misma estructura matemática. Dicho lo anterior, se propone la siguiente función candidata de Lyapunov [19]:

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = \frac{1}{2}M(q)\dot{q}^2 + \frac{1}{2}k_p(q_d)\tilde{q}^2 \quad (3.10)$$

cuya potencia está dada por:

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = M(q)\dot{q}\ddot{q} + k_p(q_d)\tilde{q}\dot{\tilde{q}} \quad (3.11)$$

Con base en el vector de estados (3.9), se sustituyen los valores de  $\dot{\tilde{q}}$  y  $\ddot{q}$ :

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) &= \dot{q} \underline{M(q)[M(q)]^{-1}[k_p(q_d)\tilde{q} - k_v(q_d)\dot{q} - C(\dot{q}, q)\dot{q} - b\dot{q}]} - k_p(q_d)\tilde{q}\dot{q} \\ &= \dot{q} \underline{k_p(q_d)\tilde{q}} - \dot{q}k_v(q_d)\dot{q} - \dot{q}C(\dot{q}, q)\dot{q} - b\dot{q} - \underline{k_p(q_d)\tilde{q}\dot{q}} \\ &= -[k_v(q_d) + C(\dot{q}, q) + b]\dot{q}^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Observe que  $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q})$  es semidefinida negativa. Con base en el principio de LaSalle, cuando se tiene que  $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) \leq 0$ , entonces el punto de equilibrio presenta estabilidad asintótica.

Una vez calculados todos los parámetros que requieren las redes neuronales para la autosintonización, se procede a simular la respuesta del sistema con el regulador neuronal PD. Asimismo, se realiza una comparación del control PD clásico y neuronal con el objetivo de comprobar los beneficios en respuesta que se tienen con la autosintonización.

Se utiliza el software Matlab para llevar a cabo simulaciones. Los resultados obtenidos con el regulador PD neuronal (ec. 3.5 - 3.6) implementado, son los siguientes:

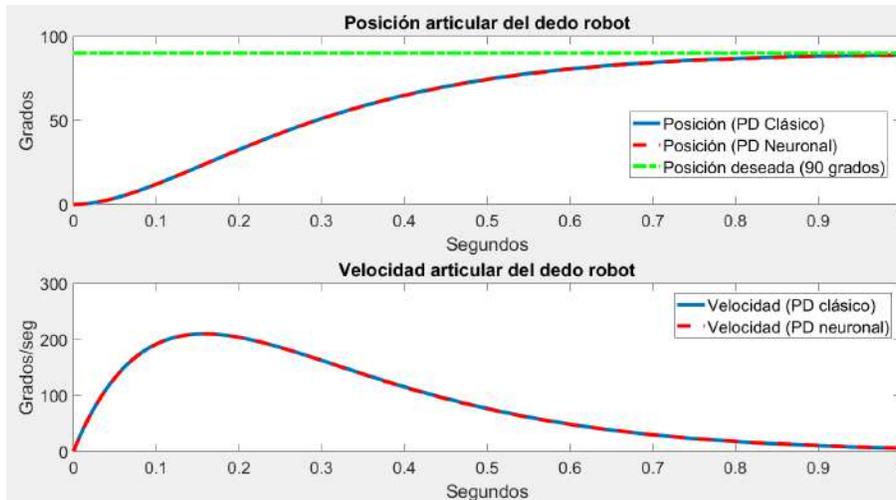


Figura 3.5: Comparación posición y velocidad entre regulador PD y PD neuronal a 90 grados.

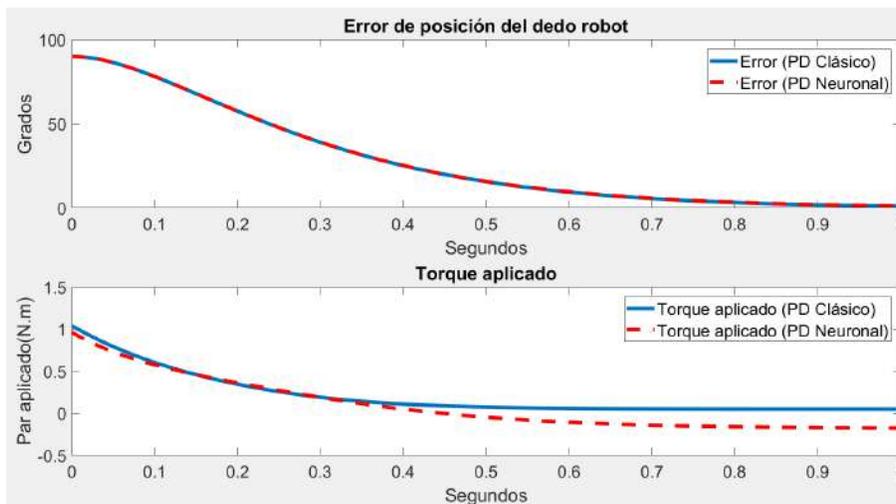


Figura 3.6: Comparación de error de posición y torque aplicado entre regulador PD y PD neuronal a 90 grados.

En las figuras 3.5 y 3.6, el comportamiento de ambos esquemas de control es muy similar. Esto se debe a que ambos esquemas tienen como objetivo la posición deseada de 90 grados y los parámetros  $k_p(q_d)$  y  $k_v(q_d)$  son iguales. Ahora, si se cambia la posición deseada de ambos esquemas a 30 grados, se obtienen los siguientes resultados:

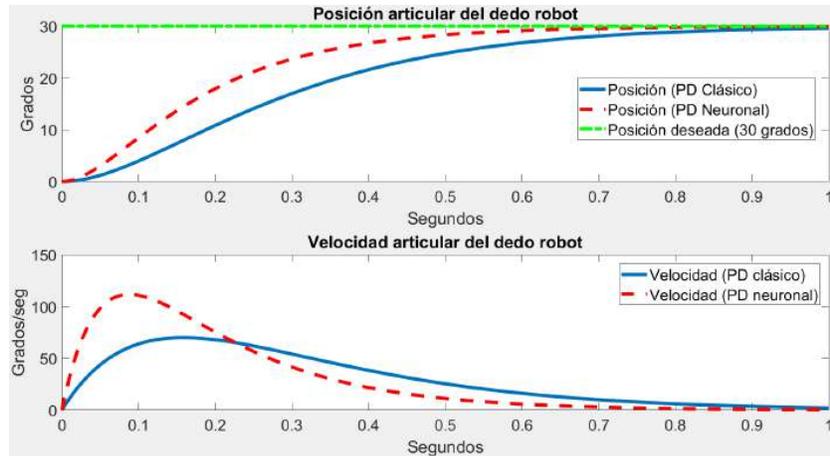


Figura 3.7: Comparación posición y velocidad entre regulador PD y PD neuronal de 90 a 30 grados.

En la figura 3.7, ambos esquemas tienen como objetivo la posición deseada de 30 grados. Sin embargo, los parámetros del PD neuronal se autosintonizaron para la posición de 30 grados, mientras que los del PD clásico permanecieron iguales para la anterior posición deseada de 90 grados.

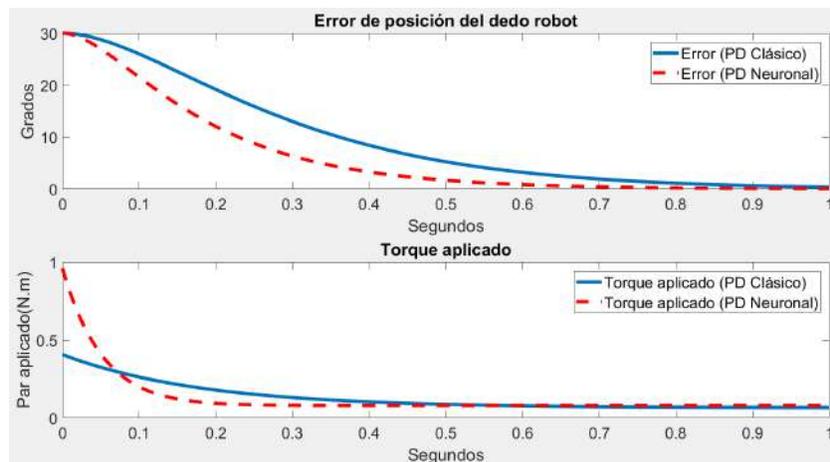


Figura 3.8: Comparación torque entre regulador PD y PD neuronal de 90 a 30 grados.

Evidentemente, el PD neuronal tiene una respuesta más veloz que el PD clásico. Además, una ventaja de utilizar el PD neuronal, es que al auto ajustar sus ganancias, el torque empleado siempre será del 95%. A modo de ejemplo, tómesese de referencia la figura 3.8. Observe que el torque del PD neuronal es más alto que el torque obtenido

con el PD clásico. Esto se debe a que el PD neuronal realiza una interpolación de ganancias a modo que siempre se obtenga un 95% del torque.

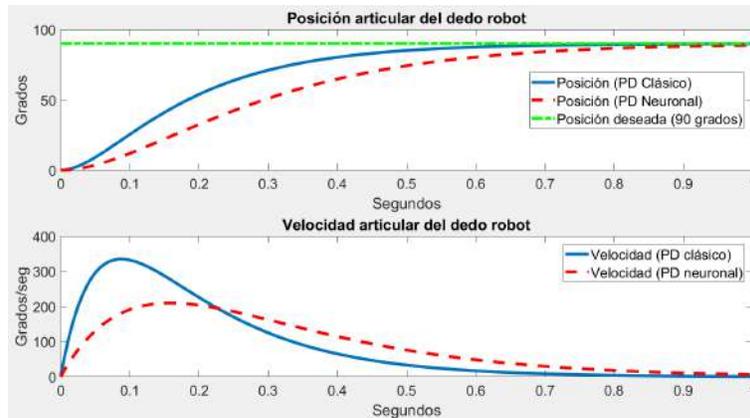


Figura 3.9: Comparación posición y velocidad entre regulador PD y PD neuronal de 30 a 90 grados.

Otra ventaja de emplear el PD neuronal, es que garantiza que nunca se excederá el torque máximo del actuador. Tómese de referencia la figura 3.9. Observe que la respuesta del PD clásico es más rápida que la del PD neuronal. Esto se debe a que el PD clásico se quedó con los valores de las ganancias para la posición de 90 grados, mientras que el PD neuronal se ajustó a 30 grados.

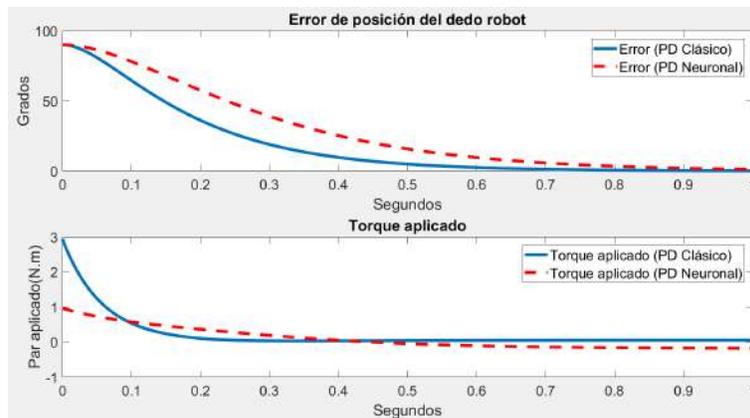


Figura 3.10: Comparación torque entre regulador PD y PD neuronal de 30 a 90 grados.

Sin embargo, considerando que el torque máximo del actuador es de 1 N.m, el esquema de control PD clásico excede el torque hasta 3 N.m, mientras que el esquema

PD neuronal permanece por debajo de 1 N.m, lo que garantiza que no habrá ruido mecánico en el servomotor al no verse forzado a exceder su torque máximo.



# Capítulo 4

## Integración del sistema

### 4.1. Introducción diseño CAD

Una mano robótica antropomórfica, es un sistema mecatrónico cuyo objetivo primordial es biomimetizar la dinámica de movimiento que rige a la mano humana. Debido a su versatilidad y destreza, el diseño de estos sistemas es objeto de estudio y desarrollo ampliamente abordado en la comunidad científica. Con base en diversas metodologías, se buscan nuevas propuestas de diseño de acuerdo a la aplicación que se pretende cumplir, donde el desarrollo de sistemas subactuados permite; reducir costos de fabricación, número de componentes y peso, así como simplificar la electrónica y mecánica asociadas al sistema, entre otras ventajas.

En este capítulo, se aborda la propuesta de diseño del dedo robótico antropomórfico con base en un conjunto de elementos de subactuación, con el propósito de generar movimiento a través de un solo actuador lineal. Este único actuador, habilita la facultad de movimiento a cada una de las articulaciones del dedo robot, en función de un subsistema de palancas con relaciones angulares bien definidas. Además, el movimiento articular de cada dedo es completamente independiente del resto, es decir, la apertura y cierre de cada uno de los dedos se lleva a cabo utilizando un solo actuador lineal, lo que permite estudiar cada dedo como un robot de un solo grado de libertad.

## 4.2. CAD de la mano robótica

Con base en la síntesis de la estructura mecánica subactuada para el dedo índice, se obtienen las dimensiones de todos los complejos articulares que lo conforman. Asimismo, se obtienen las dimensiones del resto de los dedos, según la tabla de proporciones antropomórficas de la mano humana. Con estos datos, se propone el diseño de cada dedo de la siguiente manera [21]:

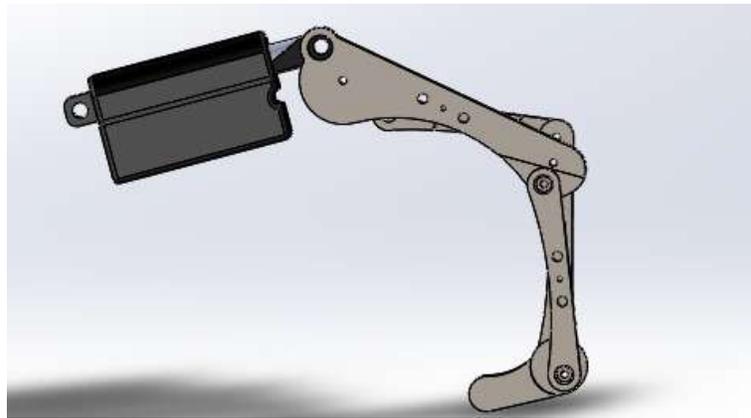


Figura 4.1: Diseño CAD del dedo en flexión [21].

Observe que un único actuador permite la completa movilidad del dedo robot. El complejo de elementos subactuados, permite que el movimiento lineal del vástago origine movimiento rotacional en todas las articulaciones del dedo, proporcionando la capacidad de flexionarse y extenderse según sea el sentido en que el vástago se desplaza. El principio de subactuación se cumple, por lo que se desarrolla el mismo diseño para el resto de los dedos. Cabe mencionar, que los dedos robóticos tienen restricciones de movimiento; al alcanzarse un estado de máxima flexión o extensión, un tope mecánico impide que el mecanismo siga su trayectoria.

Para el CAD de cada una de las piezas que conforman las palancas del dedo subactuado, se tomaron en cuenta diversas consideraciones. El diseño otorgado a cada pieza, tiene una determinada forma geométrica que permite un mejor agarre al realizar la función de prensión y manipulación de objetos. Se implementan baleros, contemplados para la reducción de disipación de energía. para todos los dedos de la mano robótica, se tiene el siguiente concepto de diseño:

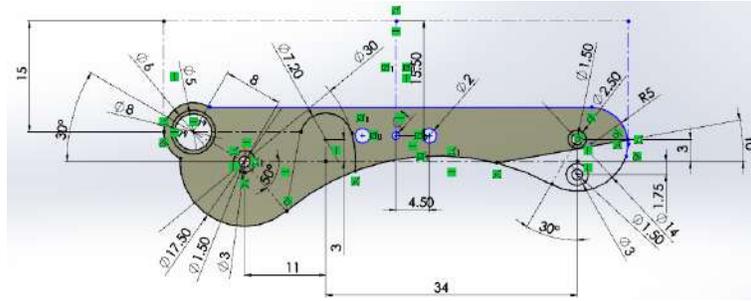


Figura 4.2: Dimensiones del primer eslabón (actuado) del dedo índice [21].

Se elige la herramienta CAD Solidworks para el diseño de la mano, debido a su versatilidad, compatibilidad con distintos programas, herramientas de análisis estructural y diseño, herramientas de simulación de movimiento, así como por su capacidad de creación y/o modificación de elementos de manera amigable con el usuario. La oportunidad de observar los elementos diseñados desde distintos ángulos con un alto grado de realismo, permite tener una mejor perspectiva en toma de decisiones. Además, el propio software brinda información que concierne a la optimización de diseño, peso, efecto inercial, disipación de energía, y permite encontrar los centros de masa, entre otras cualidades. Teniendo en mente todas estas consideraciones, se presenta el diseño de la mano robótica antropomórfica:

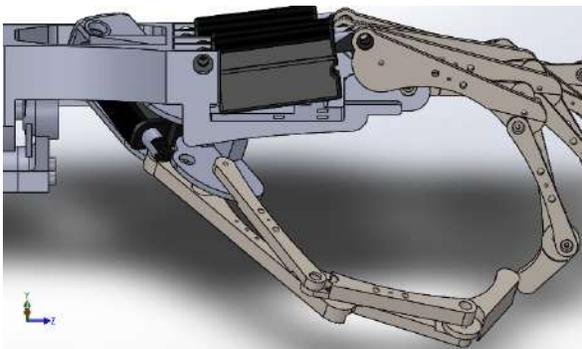


Figura 4.3: Movimiento de pinza fina [21].

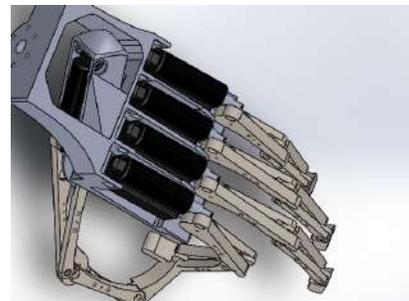


Figura 4.4: diseño CAD de la estructura de soporte para los motores.

Entre las ventajas de esta propuesta de diseño con base en elementos de subactuación de movimiento, se tiene una reducción considerable de costos, ya que el material y los componentes empleados para la fabricación se reduce por tener un único actuador.

Se disminuye el peso de toda la estructura, lo que conlleva a un diseño más portable y ergonómico . Asimismo, se reducen los tiempos de fabricación, se facilitan los mantenimientos preventivos que requiera la mano y en general se tiene mayor control en el proceso de diseño.

### 4.3. Caracterización

La caracterización del actuador juega un papel muy importante en la implementación física para la transmisión de movimiento, ya que con esto se obtienen los parámetros mecánicos y eléctricos propios del actuador, necesarios para su modelación de manera ideal.

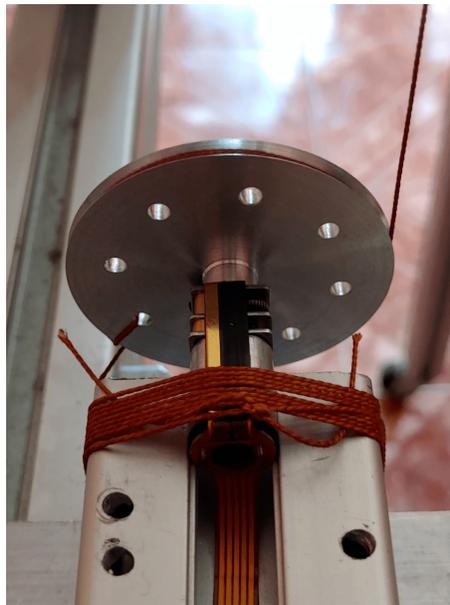


Figura 4.5: Conexión del dinamómetro al rotor del motor.

Para la caracterización del actuador lineal propuesto (fig.2.3), se desarma el actuador para acceder al rotor del motor. Se fabrica una polea de 5mm para medir la fuerza del motor como se muestra en la figura 4.5.

El actuador se conecta de forma directa al dinamómetro para el registro de la fuerza generada en kilogramos. En primera instancia, se necesita un arreglo eléctrico

que permita llevar de un sistema lógico de baja potencia a la actuación del mismo, mediante una etapa de generación de alta potencia (driver de control).

### 4.3.1. Metodología de caracterización

1. Encontrar el voltaje nominal al que opera el motor. Para ello, es necesario hacer un barrido de voltaje, sin exceder el voltaje máximo al que opera el motor de acuerdo al fabricante (12V), hasta alcanzar el máximo valor del par motor [23].
2. Calcular la potencia, par motor y eficiencia con las ecuaciones [23]. La distancia del eje del motor al punto de aplicación de la fuerza es de 0.01 metros.

La eficiencia es la relación que hay entre el par motor y la potencia del motor. La eficiencia se expresa de la siguiente manera:

$$\eta = \frac{\tau}{P} \quad (4.1)$$

donde:

$\eta$  es la eficiencia energética del motor.

$\tau$  es el par motor.

$P$  es la potencia eléctrica del motor.

El par motor se calcula de la siguiente manera:

$$\tau = rF \quad (4.2)$$

donde:

$\tau$  es el par motor.

$r$  es la distancia del eje del motor al punto de aplicación de fuerza.

$F$  es la fuerza aplicada por acción del motor.

La potencia eléctrica se expresa de la siguiente manera:

$$P = VI \quad (4.3)$$

donde:

$V$  es el voltaje aplicado al motor.

$\tau$  es la corriente que circula por el motor.

$P$  es la potencia del motor.

- En la gráfica de eficiencia en función del voltaje, se elige el voltaje nominal donde la eficiencia no varía drásticamente y el torque es mayor [23].

Voltaje (V)	Corriente (mA)	Fuerza (lbs.f)	Fuerza Newtons	Torque(N.m)	Potencia	Eficiencia
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0100	0.0500	0.2224	0.0056	0.0100	0.5560
1.5	0.0200	0.1600	0.7117	0.0178	0.0300	0.5931
2	0.0300	0.1800	0.8007	0.0200	0.0600	0.3336
2.5	0.0400	0.2500	1.1121	0.0278	0.1000	0.2780
3	0.0500	0.2900	1.2900	0.0322	0.1500	0.2150
3.5	0.0700	0.3600	1.6014	0.0400	0.2450	0.1634
4	0.0700	0.4000	1.7793	0.0445	0.2800	0.1589
4.5	0.0900	0.4500	2.0017	0.0500	0.4050	0.1236
5	0.0900	0.4900	2.1796	0.0545	0.4500	0.1211
5.5	0.1100	0.6200	2.7579	0.0689	0.6050	0.1140
6	0.1200	0.7300	3.2472	0.0812	0.7200	0.1127
6.5	0.1300	0.8600	3.8255	0.0956	0.8450	0.1132
7	0.1400	1.0100	4.4927	0.1123	0.9800	0.1146
7.5	0.1500	1.0900	4.8485	0.1212	1.1250	0.1077
8	0.1600	1.1300	5.0265	0.1257	1.2800	0.0982
8.5	0.1700	1.2000	5.3378	0.1334	1.4450	0.0924
9	0.1800	1.2300	5.4713	0.1368	1.6200	0.0844
9.5	0.1900	1.3600	6.0496	0.1512	1.8050	0.0838
10	0.2000	1.3700	6.0940	0.1524	2.0000	0.0762
<b>10.5</b>	<b>0.2100</b>	<b>1.5000</b>	<b>6.6723</b>	<b>0.1668</b>	<b>2.2050</b>	<b>0.0756</b>
11	0.2200	1.5600	6.9392	0.1735	2.4200	0.0717
11.5	0.2300	1.6700	7.4285	0.1857	2.6450	0.0702
12	0.2400	1.7500	7.7844	0.1946	2.8800	0.0676

Figura 4.6: Datos de eficiencia en función del voltaje.

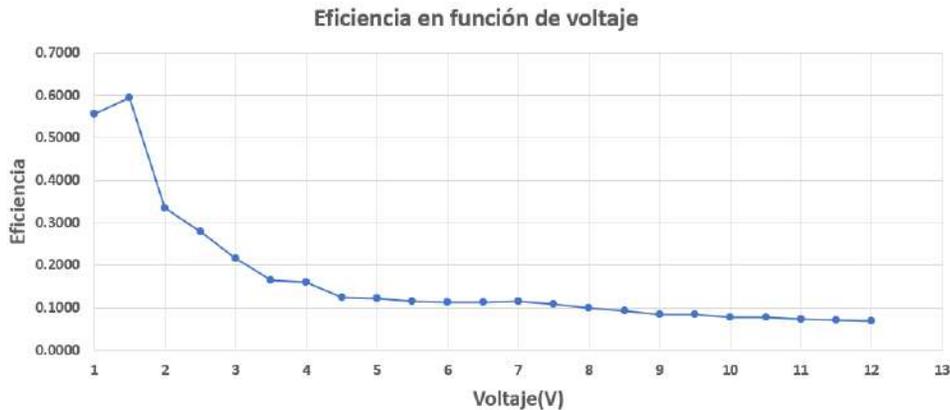


Figura 4.7: Relación de eficiencia en función del voltaje.

- Se realiza un barrido de frecuencia sometiendo al motor con una señal cuadrada al 50 %, y empleando un arreglo Darlington. La frecuencia de operación adecuada, es aquella que proporcione la mitad del torque a emplear [23].

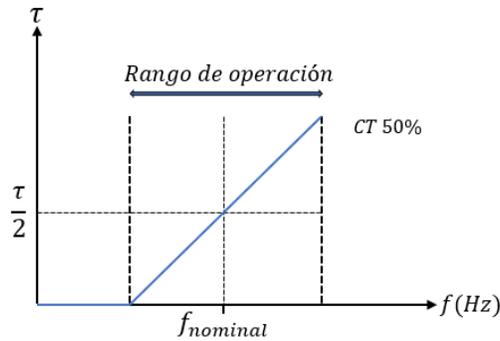


Figura 4.8: Aproximación lineal del par motor en función de frecuencia.

5. Una vez elegida la frecuencia de operación, se varía el ancho de pulso de la señal desde el 10 % hasta el 90 % y se realiza la gráfica torque/ciclo de trabajo, a modo de obtener una respuesta con un comportamiento lo más lineal posible. De este modo, se tiene como resultado un motor CD operando de manera similiar a la de un motor de transmisión directa. De no ser así, se repite el paso 4 y 5 de esta metodología [23].

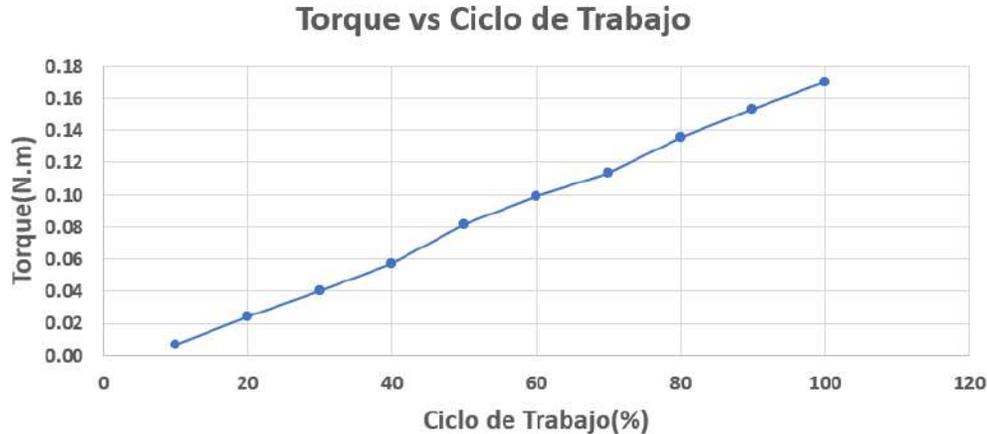


Figura 4.9: Aproximación lineal del par motor en función del ciclo de trabajo.

Para realizar la caracterización de los motores, se utilizó un arreglo Darlington para llevar a cabo el barrido por frecuencia.

Una vez hecha la caracterización, se procede a encontrar el modelo dinámico propio del actuador con base en los parámetros físicos que en él intervienen. Estos parámetros son aproximados para el actuador lineal Firingelli, y son empleados para el actuador

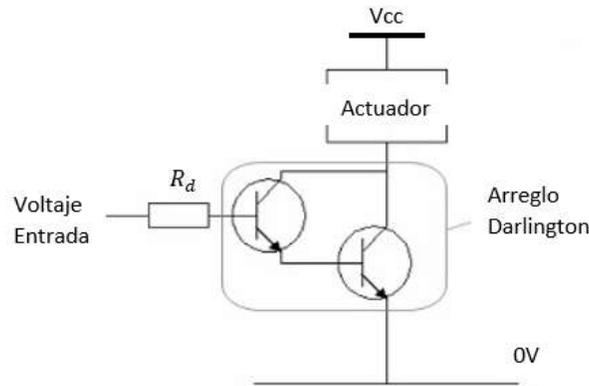


Figura 4.10: Arreglo Darlington.

PQ12-P por la semejanza entre ambos motores. En la siguiente tabla, se presentan los parámetros mecánicos y eléctricos que conciernen al modelo dinámico del actuador:

Parámetro	Valor numérico
Momento inercial ( $j_m$ )	$7.2 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$
Coefficiente de fricción ( $f_m$ )	$0.92 \text{ N} \cdot \text{m}$
Constante par-motor ( $k_a$ )	$1.5 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{A}$
Contrareacción electromotriz ( $k_b$ )	$0.46 \text{ V} \cdot \text{s}/\text{rad}$
Resistencia de armadura ( $R_a$ )	$3.6 \text{ Ohms}$

Cuadro 4.1: Tabla de parámetros físicos del actuador.

Partiendo del diagrama esquemático del motor (Fig. 4.10), se obtienen las ecuaciones eléctrica y mecánica propias del actuador. Partiendo de las relaciones [21],

$$\tau_m = k_a i_a \quad e_b = k_b \dot{q}_m \quad q_m = r\theta \quad (4.4)$$

y considerando las ecuaciones eléctrica(ec. 4.5) y mecánica (ec. 4.6):

$$v = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_b \quad (4.5)$$

$$j_m \ddot{q}_m = \tau_m - f_m(\dot{q}_m) - \frac{\tau}{r} \quad (4.6)$$

se obtiene la ley de control que gobierna sobre el motor, y está dada por [21]:

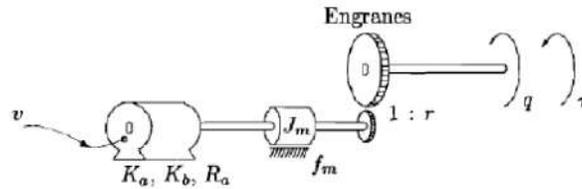


Figura 4.11: Diagrama mecánico de actuación del motoreductor [21].

$$\tau = \left( \frac{k_a}{r \cdot R_a} \right) V - j_m \cdot q_a - \left( \frac{1}{r} \cdot f_m \cdot r \cdot q_v \right) - \left( \left( \frac{k_a \cdot k_b}{R_a} \right) q_v \right) r^2 \quad (4.7)$$

donde  $r$  es la relación de engranaje,  $q_v$  es la velocidad articular y  $q_a$  es la aceleración articular.

## 4.4. Etapa de control

El sistema de control, también conocido como controlador en robótica, es el factor fundamental para la generación de movimiento de una manera específica en estructuras mecánicas, que abarca funcionalidad y capacidad lógica reprogramable. El controlador permite llevar a implementación y experimentación de nuevas propuestas de robots. Además, permiten expandir la acción de nuevos algoritmos y estrategias de control empleando elementos de sensado y transducción, entre otros. Dada la importancia del controlador en un sistema, la selección del dispositivo electrónico para su diseño, está basada en los recursos que se requieren para cumplir con los objetivos del sistema propuesto; capacidad y velocidad de procesamiento, puertos para lectura analógica, puertos para generación de señales PWM (modulación por ancho de pulso), etc.

El microcontrolador elegido para implementar el sistema de control de la mano robótica propuesta, es el dsPIC30F4013, encargado de generar la acción de control para cada dedo de manera independiente. Además, se agrega una pantalla LCD (16x2) cuya función es desplegar los valores más relevantes del dedo robot. Los parámetros son voltaje PWM, posición actual, posición deseada, torque y error de posición.

Para programar el dsPIC, es utilizado el dispositivo Pickit3, el cual se encarga de introducir el código de control hecho en el software MPLABX.

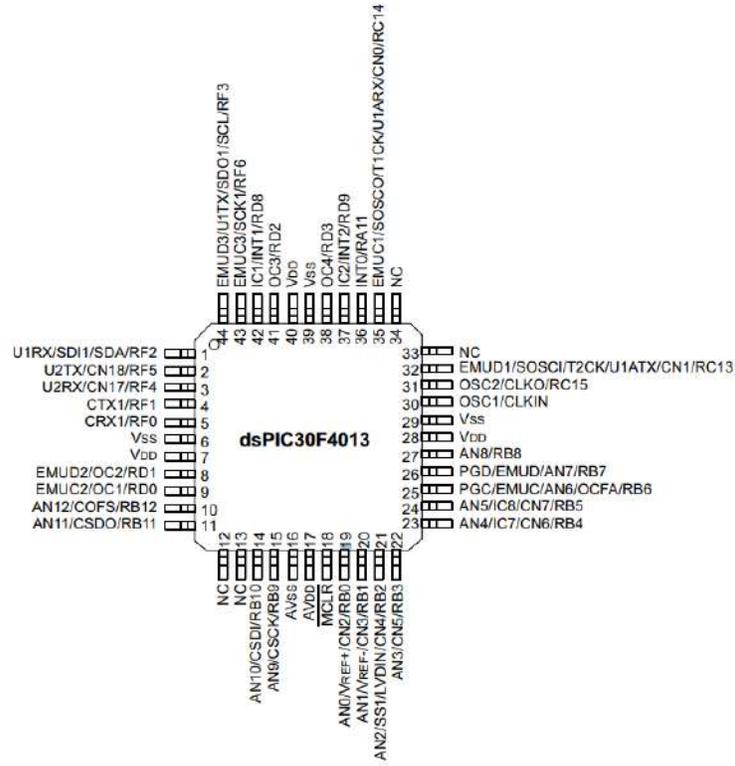


Figura 4.12: Diagrama de entradas y salidas del dsPIC30F4013.

Dado que los motores lineales propuestos incorporan sensores de posición, se reduce el número de componentes a incorporar. Estos sensores, son potenciómetros que arrojan un voltaje de acuerdo a la posición del vástago del motor. Esta señal de voltaje es adquirida por el controlador utilizando sus puertos analógicos, para posteriormente ser convertida en una señal digital. Una vez determinada la posición actual del motor, el controlador la compara con la posición deseada y se obtiene el error de posición.

Para calcular la velocidad articular, que es requerida por la ley de control, se emplea el método de diferenciación numérica de Euler, la cual hace uso de la posición obtenida por los sensores del motor. Este método, consiste en aproximar la derivada de la función de posición que provee el motor. La derivada representa la razón de cambio respecto al tiempo, o bien, la velocidad. La derivada está definida de la siguiente manera [21]:

$$\dot{f}(t_k) \simeq \frac{f(t_k) - f(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} = \frac{f(t_k) - y(t_{k-1})}{h} \quad (4.8)$$

Sustituyendo  $y(s)$ , se tiene que:

$$\begin{aligned}
y(s)[s] &= u(s) \\
sy(s) + y(s) &= u(s) \\
sy(s) &= u(s) - y(s)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Expresando la ecuación (4.9) en dominio del tiempo continuo y bajo condiciones iniciales cero, se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{y}(t) = u(t) - y(t) \tag{4.10}$$

La ecuación (4.10) representa el vector de velocidad articular. Para calcular los elementos de este vector en todo instante de tiempo, se emplea un método de diferenciación numérica. Las técnicas de diferenciación numérica estiman la derivada de una función  $y$  en un punto  $t_k$  y aproximan la pendiente de la línea tangente en  $t_k$ , usando valores de la función en puntos cercanos a  $t_k$ . Si denotamos un intervalo de tiempo  $\Delta t$  como la diferencia entre dos puntos consecutivos,  $\Delta t = t_k - t_{k-1} = h$ , donde  $h$  es la longitud de  $\Delta t$ , es decir [19]:

$$\dot{y}(k) \simeq \frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} = \frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{h} \tag{4.11}$$

Sustituyendo la ecuación 4.10 en 4.11, se tiene:

$$u_k - y_k = \frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{h} \tag{4.12}$$

Despejando  $y_k$  de la ecuación 4.12:

$$y_k = \frac{hu_k + y_{k-1}}{1 + h} \tag{4.13}$$

Finalmente, si se sustituye la ecuación 4.13 en 4.10,

$$\dot{y}(k) = u_k - \left[ \frac{hu_k + y_{k-1}}{1 + h} \right] \tag{4.14}$$

La ecuación (4.14) es implementada en el controlador propuesto, que calcula, de manera digital, todos los valores del vector velocidad en cada tiempo de muestreo  $h$ . Asimismo, se implementa el regulador PD en el controlador, y la señal que se genera, es enviada a la etapa de potencia.

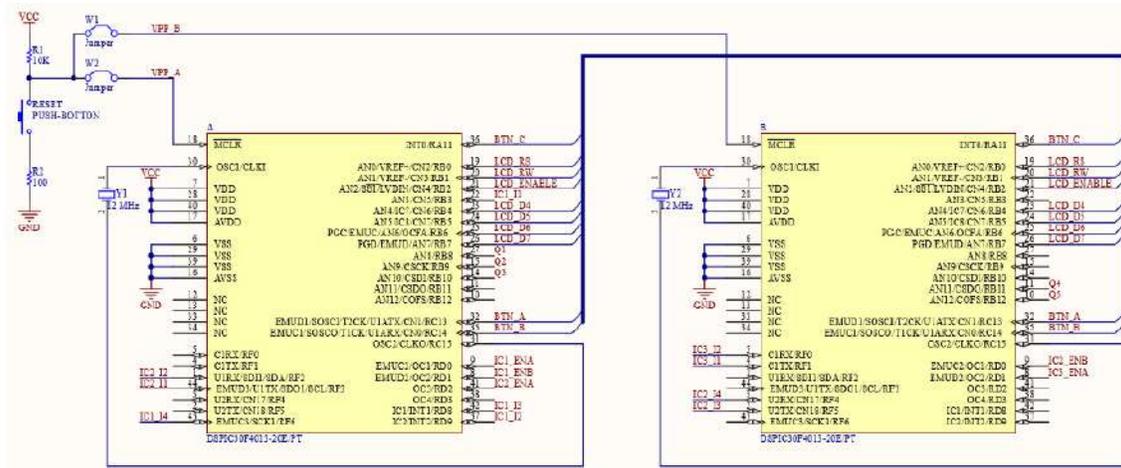


Figura 4.13: Diagrama de conexiones básicas con dsPIC30F4013 [21].

### 4.5. Etapa de potencia

Para la etapa de potencia, se selecciona el circuito integrado L298 (ver fig. 4.14). Este dispositivo, suministra a los actuadores la corriente necesaria para generar el par torsor de acuerdo a la ley de control implementada, y permite controlar la dirección de movimiento del vástago. Además, el dispositivo L298 vincula la etapa de control del sistema, con la de alta potencia, y permite controlar dos actuadores en un solo circuito integrado.

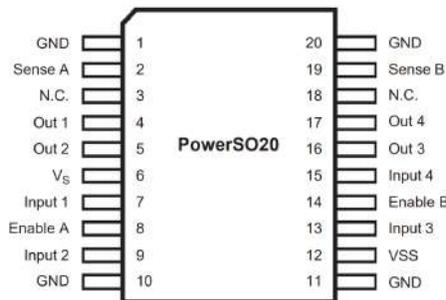


Figura 4.14: Diagrama de entradas y salidas del L298.

El dispositivo L298 se desempeña como un *punte H*. El puente H, de manera general, consta de cuatro interruptores cuyo estado indica el funcionamiento del motor. Dependiendo de qué interruptores cierran el circuito y permiten el paso de la corriente, se aplica una tensión al actuador haciéndolo girar en un sentido u otro.

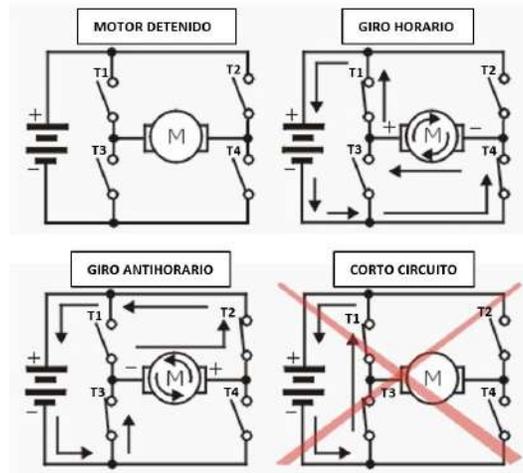


Figura 4.15: Principio de operación del Puente H.

En la figura 4.15, se muestra el principio básico de funcionamiento del puente H. Cuando los interruptores T1 y T4 se encuentran cerrados, el motor será polarizado y girará en sentido horario. Cuando los interruptores T2 y T3 se encuentran cerrados, de igual modo el motor será polarizado, pero girará en sentido antihorario. Asimismo, si todos los interruptores se encuentran abiertos, el motor no tendrá movimiento. Además, si todos los interruptores se encuentran cerrados, podrían ocasionarse problemas en el motor. De acuerdo a cómo se polariza el motor, la actuación del motor tendrá un comportamiento específico, que implica el movimiento lineal de extensión o retracción del vástago, según la siguiente tabla.

T1	T2	T3	T4	Estado del motor
1	0	0	1	El vástago sale
0	1	1	0	El vástago entra
1	0	1	0	El motor frena
0	0	0	0	El motor se detiene

Cuadro 4.2: Tabla de estados del motor.

La etapa de potencia comienza a operar cuando recibe la señal proveniente de la etapa de control. En la figura 4.16, se muestra el sistema de control con mayor claridad. La entrada del sistema es la posición deseada del dedo robot. Posteriormente, la posición

deseada es comparada con la posición actual adquirida por el sensor y decodificada para calcular el error de posición, todo ello hecho por el controlador. El error de posición es evaluado en el modelo dinámico del motor, y la respuesta pasa a la etapa de potencia para suministrar la energía al motor por medio del puente H. Este proceso se repite iterativamente hasta que el error sea cero, es decir, hasta que el dedo robot alcance la posición deseada.

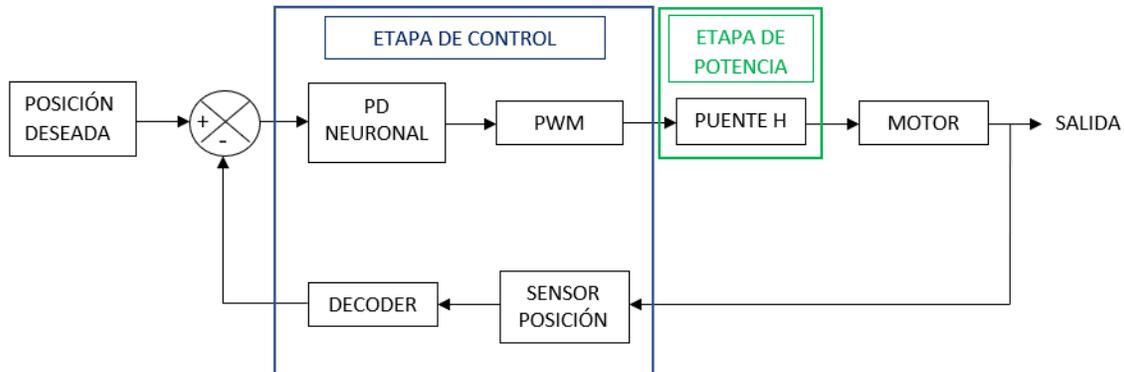


Figura 4.16: Esquema de control de cada dedo robot.

## 4.6. Implementación física y resultados

En este documento, se provee una solución al problema de generación de movimiento de robots, así como a la sintonización de ganancias con base en ajustes automáticos utilizando redes neuronales de base radial. En el estudio de sistemas antropomórficos, existe una serie de propuestas con subactuación de movimiento, de las cuales se eligió el empleado en este trabajo por su robustez y simplicidad. Los criterios para la elección del diseño, conciernen a los parámetros involucrados en la dinámica del sistema, materiales empleados para la fabricación, peso de la estructura mecánica, costos y principios de actuación y control; todo ello dirigido a optimizar tiempos y desempeño del sistema propuesto. Con base en lo anterior, a continuación se presentan los resultados obtenidos

en cuanto al movimiento de la estructura mecánica y el desempeño de los sistemas de control utilizados y el propuesto.

Con el propósito de comparar el desempeño de la estructura subactuada respecto al desempeño de la misma estructura, pero con sus tres grados de libertad, se realiza una simulación en Matlab. Los resultados obtenidos se muestran a continuación:

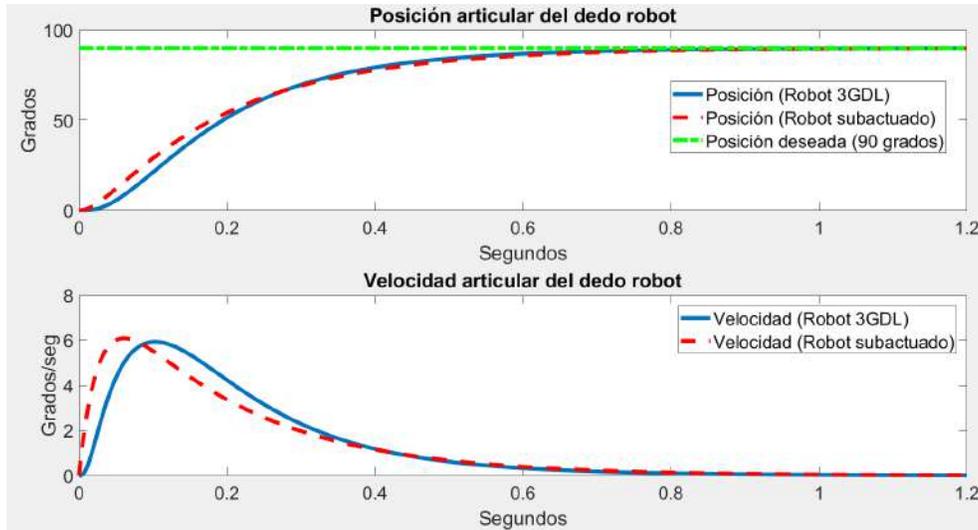


Figura 4.17: Posición y velocidad del sistema de 3gdl y subactuado.

El esquema de control utilizado para la comparación es el PD más compensación de pares de gravedad. Observe en la figura 4.17 que el sistema subactuado y el de tres grados de libertad, tienen un comportamiento muy similar en posición y velocidad. Esto se debe a que la respuesta del sistema subactuado, es una estimación hecha con base en el movimiento de la segunda y tercera articulación respecto al movimiento de la primera, es decir, el sistema subactuado es una aproximación del sistema de tres grados de libertad. Por lo anterior, se determina que la dinámica de movimiento del sistema subactuado es adecuada para el propósito de este trabajo.

Considerando la dinámica de movimiento de la estructura subactuada del robot, se diseña e implementa un sistema de control de posición adecuado a sus parámetros. Este controlador, permite alcanzar la posición deseada requerida por el usuario del robot. La propuesta de control se basa en un controlador PD más compensación de pares gravitacionales, en el que se implementan redes neuronales de base radial (PD neuronal), las

cuales permiten la autosintonización de ganancias en función de la posición deseada. Con base en los teoremas de estabilidad de Lyapunov y La Salle, el punto de equilibrio es definido como asintóticamente estable de manera global. Además, realizando una simulación en Matlab (ver Fig. 4.18), se determina que la respuesta generada por el controlador PD neuronal, supera la respuesta del PD clásico.

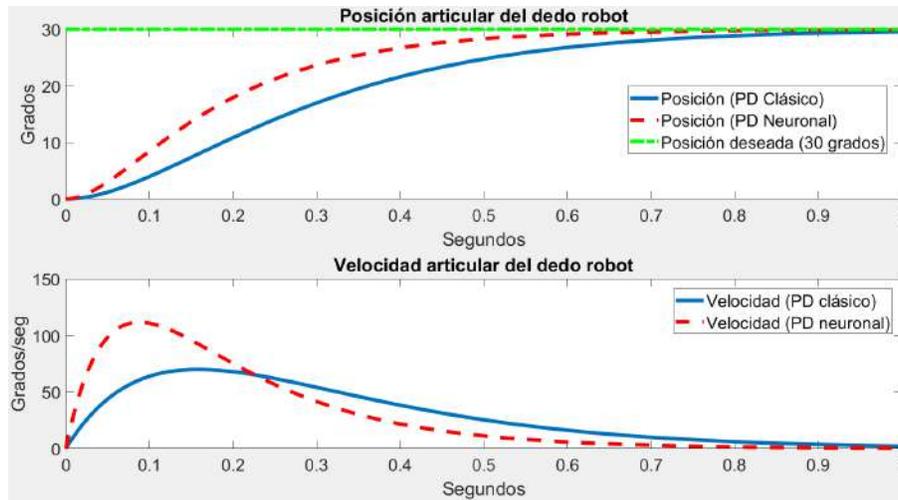


Figura 4.18: Comparación posición y velocidad entre regulador PD y PD neuronal de 90 a 30 grados.

Observe en la figura 4.18, que las respuestas de posición y velocidad del PD neuronal son más rápidas que las del PD clásico. Esto se debe a que el PD neuronal autosintoniza sus ganancias al cambiarse la posición deseada del robot, mientras que el PD clásico mantiene las mismas ganancias para cualquier posición deseada si no son sintonizadas manualmente.

el proceso de manufactura de la mano robótica con el dedo índice, se llevó a cabo mediante la impresión 3D de cada pieza. Es aconsejable que antes de la fabricación de la estructura mecánica, se realice un análisis de esfuerzos y puntos críticos. Por ejemplo, en el caso de este proyecto, se determinó empíricamente que la fabricación del dedo idealmente debe ser de un material rígido como el aluminio, ya que al haber sido fabricado de resina, una de las articulaciones no soportó el peso del dedo y se fracturó, comprometiendo con ello la robustez de movimiento.

De la estructura mecánica, se realizó una serie de pruebas para verificar que el uso de tres palancas con la interacción de un solo actuador, permitiera a las tres articulaciones rotar sin inconvenientes. Sin considerar el parámetro de fricción y estudiando el comportamiento de la subactuación de las tres falanges artificiales, es viable determinar que la estructura mecánica del dedo índice, puede ser replicada para el resto de los dedos de la mano robot.

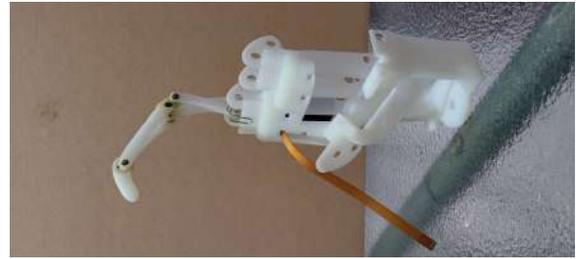
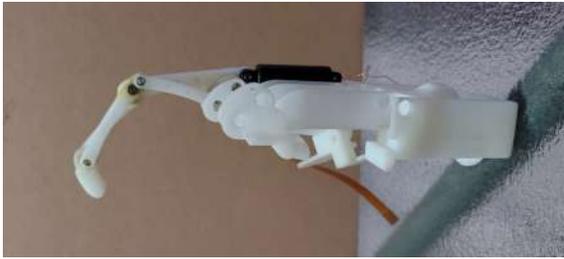


Figura 4.19: Estructura subactuada (perfil 1).      Figura 4.20: Estructura subactuada (perfil 2).

Observe en la figura 4.21, que el actuador está conectado directamente a la primera palanca (metacarpiano). Al desplazarse el actuador, el metacarpiano comienza a desplazarse y al mismo tiempo lleva a cabo la transmisión de fuerza a las dos falanges restantes de manera natural, es decir, el desplazamiento del efector final del dedo robot se encuentra en función del movimiento de la primera articulación. Esta relación de movimiento entre articulaciones, que conlleva a utilizar un modelo de regresión no lineal, se describe a detalle en el capítulo 1.



Figura 4.21: Conexión de actuador a falange proximal del dedo robot.

Figura 4.22: falanges del dedo índice interconectadas a actuador.

Si bien el diseño permite realizar las conexiones de manera correcta, el material del

que está hecha la mano y el dedo (resina) no es adecuado para un proyecto de mayor nivel como una prótesis. El empleo de otro tipo de material más rígido es imprescindible. De acuerdo al tipo de proyecto, se recomienda escoger materiales de acuerdo a sus propiedades físicas como rigidez y elasticidad, entre otros. El hecho de tener presente fricción en el estructura, afecta la respuesta del robot, cuyo sistema compensa perturbaciones mediante la acción de control. La señal de referencia es programada en el robot utilizando la computadora y un módulo Pickit3. Además, se anexa un módulo LCD en el que se despliegan los parámetros de: señal de referencia ( $q$ ), señal de error ( $e$ ), ganancias  $k_p$  y ganancia  $k_v$ . Estos parámetros permiten monitorear el comportamiento del robot y demostrar que el sistema de control es adecuado para su implementación, así como su replicación de el resto de los dedos. Además, se monitorean las ganancias para cerciorarse de que la autosintonización hecha por las redes neuronales se desarrolle correctamente. A modo de ejemplo, se tiene la siguiente imagen:



Figura 4.23: Respuesta del robot a 0.28 radianes (16 grados).

Observe en la figura 4.23, que a una posición deseada de 0.28 radianes ( $q$ ), se tiene una señal de error ( $e$ ) de 0.024 radianes (1.38 grados). Conforme el efector final avanza, no se muestra sobretiro en la respuesta del robot. Si bien existe error, el efector final en ningún momento sobrepasa la posición deseada. Sin embargo, se tuvieron complicaciones en las pruebas experimentales debido a que una articulación del dedo quedó fracturada, lo que provocó que el error creciera. Aun así, se verifica que de la acción de control dada por el sistema PD con redes neuronales de base radial, se obtienen resultados favorables con algunas perturbaciones. Dichas perturbaciones como lo son

la fricción, la falta de rigidez en la estructura mecánica y el juego mecánico entre los elementos de conexión, ocasionan la existencia de un error en estado estable, el cual, puede minimizarse al autosintonizar el controlador implementado.



Figura 4.24: Respuesta del robot a 0.82 radianes (47 grados).

En la figura 4.24, se muestra que el error en estado estable es de 0.05 radianes (2.86 grados) y no afecta directamente a las acciones de manipulación de la mano robótica. Sin embargo, de acuerdo a la aplicación que se pretenda para un sistema robótico, este error puede representar una variación significativa. A continuación se muestran los resultados obtenidos:

RESULTADOS EXPERIMENTALES DEL DEDO ROBOT				
Posición deseada (radianes)	Posición deseada (grados)	Posición actual (grados)	Error de posición (radianes)	Error de posición (grados)
0.30	17.19	17.19	0.000	0.00
0.54	30.94	28.65	-0.040	-2.29
0.19	10.89	10.89	0.000	0.00
0.82	46.98	42.40	0.080	4.58
0.16	9.17	8.48	0.012	0.69
0.28	16.04	14.73	0.023	1.32
0.57	32.66	30.94	-0.030	-1.72

Figura 4.25: Resultados de las pruebas experimentales.

Observe en la figura 4.25 que el mayor error alcanzado fue de 4.58 grados. Ciertamente, las perturbaciones del sistema juegan un papel importante en el desempeño del

PD neuronal, por lo que se recomienda para futuros trabajos utilizar materiales con mejores propiedades físicas. El error de posición se encuentra entre los 0 y 5 grados para una referencia dada y el error tiende a un valor más elevado conforme se extiende el actuador del motor. Además de estas variables, otras importantes a considerar son las ganancias neuronales  $k_p$  y  $k_v$ . A continuación se muestran los valores obtenidos de estas ganancias.

RESULTADOS EXPERIMENTALES DEL DEDO ROBOT			
Posición deseada (grados)	Posición deseada (radianes)	Valor de $k_p$ neuronal	Valor de $k_v$ neuronal
17.19	0.30	3.63	0.54
30.94	0.54	1.81	0.27
10.89	0.19	5.38	0.80
46.98	0.82	1.12	0.16
9.17	0.16	5.44	0.82
16.04	0.28	3.63	0.54
32.66	0.57	1.81	0.27

Figura 4.26: Resultados de las pruebas experimentales.

Los valores de las ganancias  $k_p$  neuronal y  $k_v$  neuronal concuerdan con los datos que se proveen en el capítulo 3 de los centros elegidos para las funciones gaussianas, con lo que se concluye que la interpolación hecha por las redes neuronales funciona de manera correcta. Entre las pruebas que se realizaron (ver Figura 4.25), se obtuvieron los siguientes desplazamientos:

Posición deseada de 0.16 radianes:



Figura 4.27: Resultados de las pruebas experimentales (0.16 radianes).

Posición deseada de 0.82 radianes:



Figura 4.28: Resultados de las pruebas experimentales (0.82 radianes).

Posición deseada de 0.19 radianes:



Figura 4.29: Resultados de las pruebas experimentales (0.19 radianes).

Posición deseada de 0.54 radianes:



Figura 4.30: Resultados de las pruebas experimentales (0.54 radianes).

Posición deseada de 0.28 radianes:

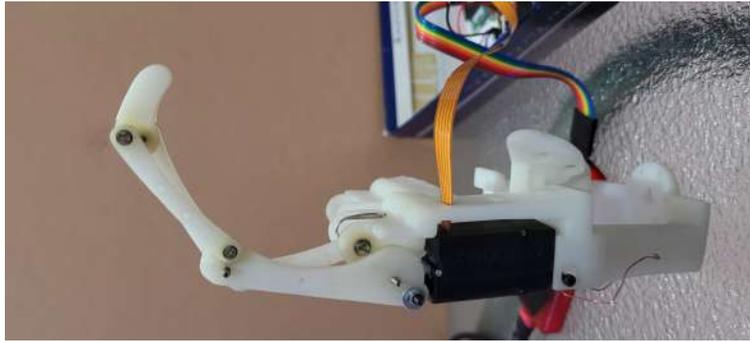


Figura 4.31: Resultados de las pruebas experimentales (0.28 radianes).

Posición deseada de 0.57 radianes:

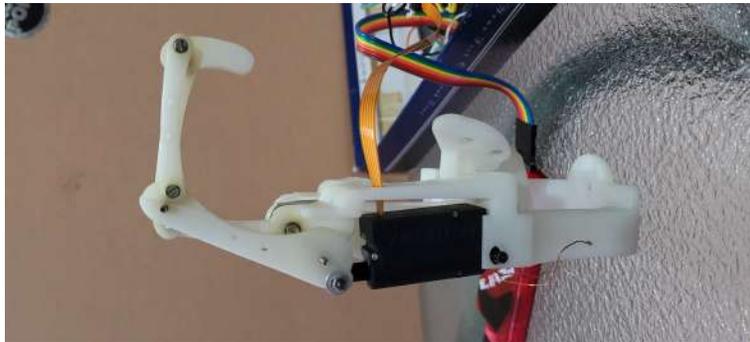


Figura 4.32: Resultados de las pruebas experimentales (0.57 radianes).

Posición deseada de 0.30 radianes:



Figura 4.33: Resultados de las pruebas experimentales (0.30 radianes).

Las variaciones que se tienen en el error de posición del dedo robot, no afectan de manera significativa en un prototipo como el presentado en este trabajo, ya que la posición de referencia es alcanzada, o bien, el error de posición es muy pequeño. Sin embargo, es importante tener presente que, tanto los puntos críticos, como la fricción entre componentes y las conexiones entre elementos, pueden ser grandes contribuyentes en que se presenten perturbaciones significativas y pueden afectar el desempeño del robot. Además, la relación de posición entre palancas es otra variable a considerar. Si bien la aproximación de movimiento hecha con base en el modelo de regresión lineal es adecuada, la estructura mecánica puede diferir con los datos teóricos. No obstante, se llevó a cabo una serie de pruebas en las que se determinó que las posiciones deseadas eran alcanzadas o con un margen de error pequeño.



# Conclusiones

Partiendo del modelo dinámico de un robot tipo péndulo triple, utilizado para representar la dinámica de movimiento de un dedo, se logró obtener su reducción de tres grados de libertad a uno solo. Esta reducción fue posible con base en un modelo de regresión no lineal. Sin embargo, pudo haberse utilizado algún otro método de aproximación lineal como lo son mínimos cuadrados recurrente, trazadores, modelo de Newton o cualquiera que estime la respuesta de un sistema a partir de datos de diseño.

La respuesta del sistema reducido a un grado de libertad, no presentó diferencias significativas respecto al modelo dinámico del péndulo triple. Para llevar a cabo dicha comparación, se utilizó el software Matlab para simular la respuesta del sistema subactuado empleando un controlador PD clásico. La comparación se realizó entre el efector final del sistema de tres grados de libertad y el único eslabón actuado del sistema subactuado. Asimismo, se encontró que un modelo de regresión no lineal, es más eficiente que uno lineal por algunas décimas de segundo en el sistema subactuado. Esto se debe a que la respuesta del robot subactuado es de tipo no lineal, por lo cual resulta lógico que la regresión no lineal presente ventajas por encima de la lineal. En este documento, se propone una estrategia de control basada en una función exponencial con buenos resultados. Tanto el control PD como el control exponencial, pueden ser utilizados para la implementación de redes neuronales de base radial.

El propósito fundamental de este proyecto, es lograr la autosintonización de ganancias en función de la posición deseada que se indique para el efector final. La autosintonización fue exitosa utilizando redes neuronales de base radial. Estas redes neuronales, permiten recalcular los valores de las ganancias al interpolar los datos de entrada que se proveen en el capítulo 3. Para este trabajo, se tomaron como datos de entrada diez centros para las funciones gaussianas. Sin embargo, el desempeño de las

redes neuronales puede variar su desempeño en función del tipo de sistema, cantidad de posiciones de entrada y la función utilizada para el aprendizaje de las redes. Asimismo, el entrenamiento de las redes neuronales puede ser supervisado o no supervisado, siendo el primero el empleado en este trabajo de tesis.

En cuanto al diseño predeterminado de la mano robótica para este proyecto, si bien es funcional, tiene muchas desventajas por lo que no es recomendable utilizarse para futuros proyectos. La mayor desventaja de este diseño, son los puntos de conexión entre elementos. Los puntos de conexión (articulaciones del dedo robot) están hechos para inserción de baleros. Sin embargo, los baleros solo están fijados a los puntos de conexión por el tipo de ajuste que se haga. No hay ningún elemento que evite juego mecánico una vez unidas las palancas, por lo que se tuvo que colocar un pequeño mecanismo para reducir en la medida de lo posible el balanceo horizontal del dedo. Otra desventaja es el grosor de algunos elementos del dedo. Al ser tan delgados, son complicados de maquinar, sin mencionar que con tal grosor, solo es posible maquinar el dedo con materiales rígidos como el aluminio para evitar fracturas. Entre otros, esos fueron los mayores defectos de diseño encontrados. Además, el motor no se encuentra fijo. Cada vez que el actuador se extiende o se retrae, el motor gira sobre su propio eje, lo que se vuelve una variable más a controlar si se desea una robustez superior.

Finalmente, las pruebas experimentales fueron satisfactorias. Si bien existe un error en estado estable, el robot llega a la posición deseada o se acerca a ésta con un error de máximo cinco grados. En futuros trabajos que consideren como apoyo este documento, podría robustecerse el diseño. Asimismo, el controlador neuronal puede robustecerse, ya que el propuesto en este trabajo recalcula valores en función de la posición deseada. Podría implementarse un control con redes neuronales que se encuentre en función de la articulación actuada siguiendo el mismo principio que se explica a detalle en el capítulo 3.

# Bibliografía

- [1] E. Soto, Modeling, Design and Construction of Articulated Hand for use in prosthetics, with adaptive control Neural Networks based on mathematical model for finger. (Art.), Instituto Tecnológico de Puebla, 978-0-7695-4284-3/10 IEEE DOI 10.1109, 2010.
  
- [2] J. Belter, J. Segil, A. Dollar, R. Weir, Mechanical design and performance specifications of anthropomorphic prosthetic hands: A review. (Art.), J Rehabil, pp. 599-618, 2013.
  
- [3] Dukchan Yoon and Youngjin Choi, Underactuated Finger Mechanism Using Contractible Slider-Cranks and Stackable Four-Bar Linkages. (Art.), IEEE/ASME TRANSACTIONS ON MECHATRONICS, VOL. 22, NO. 5, OCTOBER 2017.
  
- [4] Nurdos Omarkulov, Kuat Telegenov, Maralbek Zeinullin, Ainur Begalinova and Almas Shintemirov, Design and Analysis of an Underactuated Anthropomorphic Finger for Upper Limb Prosthetics. (Art.), 978-1-4244-9270-1/15/ IEEE, 2015.
  
- [5] J. Jalani G. Herrmann, C. Melhuish, Robust Trajectory Following for Underactuated Robot Fingers. (Art.), IEEE, 2015.
  
- [6] J. L. Meza, V. Santibáñez, R. Soto, and M. A. Llama, Fuzzy Self-Tuning PID Semiglobal Regulator for Robot Manipulators. (Art.), IEEE TRANSACTIONS ON INDUSTRIAL ELECTRONICS, VOL. 59, NO. 6, JUNE 2012.

- 
- [7] Jesús Alberto Ordaz Rivera, Emilio Miguel Soto García, José Eligio Moisés Gutierrez Arias, José Eladio Flores Mena, María Monserrat Morín Castillo, Análisis Cinemático y Síntesis de un Sistema de Palancas para la Sub-actuación de un Dedo Artificial con 3 Articulaciones. (Art.), ISSN 1405-1249, Pistas Educativas, Vol.112, pp.1134-1154, 2015.
- [8] J. Ordaz-Rivera, E. Soto-García, J. Gutiérrez-Arias, E. Flores-Mena, M. Morín-Castillo, Modelo Matemático y Control PD para un Dedo Robótico Articulado incorporando un Sistema de Palancas. (Art.), ISSN 2007-7394, Vol.3, pp. 388-392, Revistas Arbitradas, 2015.
- [9] M. Suarez-Escobar, J. Gallego-Sanchez, E. Rendon-Velez, Mechanisms for linkage-driven underactuated hand exoskeletons: conceptual design including anatomical and mechanical specifications. (Art.), SPRINGER Int J Interact Des Manuf, 2015.
- [10] R. Hussain, M.A. Shahid, J. Khan, M. Tiwana, J. Iqbal, N. Rashid, Development of a Low-Cost Anthropomorphic Manipulator for Commercial Usage. (Art.), Department of Mechatronics Engineering, National University of Sciences and Technology, Islama- bad, Pakistan, 2015.
- [11] K. Dong, P. Hyung, Thumb Joint Angle Estimation for Soft Wearable Hand Robotic Devices. (Art.), IEEE International Conference on Rehabilitation Robotics (ICORR), 2015.
- [12] Alessandro Battezzato, Towards an underactuated finger exoskeleton: An optimization process of a two-phalange device based on kinetostatic analysis. (Art.), ELSE- VIER Mechanism and Machine Theory 78, pp. 116-130, 2014.
- [13] W. David, 2009, "Biomechanics and Motor Control of Human Movement", Fourth Edition, John Wiley and Sons, New Jersey, United States, pp. 82-100.

- [14] G. Jeong et al., "On the Design of a Novel Underactuated Robotic Finger Prosthesis for Partial Hand Amputation," 2019 IEEE 16th International Conference on Rehabilitation Robotics (ICORR), Toronto, ON, Canada, 2019, pp. 861-867.
- [15] H. Zhou, A. Mohammadi, D. Oetomo and G. Alici, "A Novel Monolithic Soft Robotic Thumb for an Anthropomorphic Prosthetic Hand," in IEEE Robotics and Automation Letters, vol. 4, no. 2, pp. 602-609, April 2019.
- [16] C. Li, X. Gu, X. Xiao, G. Zhu, A. V. Prituja and H. Ren, "Transcend Anthropomorphic Robotic Grasping With Modular Antagonistic Mechanisms and Adhesive Soft Modulations," in IEEE Robotics and Automation Letters, vol. 4, no. 3, pp. 2463-2470, July 2019.
- [17] Z. Teng et al., "Design of an Underactuated Prosthetic Hand with Flexible Multi-Joint Fingers and EEG-Based Control\*," 2018 IEEE International Conference on Cyborg and Bionic Systems (CBS), Shenzhen, 2018, pp. 647-651.
- [18] Jaworski, Lukasz, and Karpiński, R. (2017). BIOMECHANICS OF THE HUMAN HAND. Journal of Technology and Exploitation in Mechanical Engineering, 3(1), 28-33.
- [19] Reyes, J., F., 2011, Robótica. Control de robots manipuladores, Alfaomega, D.F., pp. 302-303.
- [20] Kelly, R., 2003, Control de Movimiento de Robots Manipuladores, Prentice Hall, Madrid, pp. 127-139
- [21] J. A. Ordaz, "Diseño, construcción y control del pulgar de una mano robótica antropomórfica con movimiento de pinza fina" M.S. tesis, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, Puebla, México, 2016.
- [22] M. M., Carlos, Universidad Politécnica de Puebla, Puebla, México, 2015.

- 
- [23] H. A., Fernando, "Desarrollo de una mano mecatrónica de bajo costo para un robot Humanoide" Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México, 2017.
- [24] Mohsen Farahani et al., "A self-Tuning PID Design Based on Wavelet Neural Network Using Lyapunov Method", 2011 IEEE International Conference on Control, Instrumentation and Automation.
- [25] Cereso L. F, Campos, E., Ramos, J. C., Marquéz, M. A. y Chan, I. A. "Comparación experimental de controladores PID clásico, PID no lineal y PID difuso para el caso de regulación", 2011 Research in Computing Science 135, México, 2017.
- [26] David M. L., Timothy C. K. y Mark L. B., Estadística para Administración, 2011, Departamento de Matemáticas ITESM, México.

## Dibujos técnicos

En este apéndice se muestran todos los dibujos técnicos y especificaciones generales de los dispositivos que se ocuparon para implementar la mano robótica subactuada.



PQ12 Actual Size

### Benefits

- Compact miniature size
- Precise position feedback
- Limit switches
- Simple control
- Low voltage
- Equal push/pull force
- Easy mounting

### Applications

- Robotics
- Consumer appliances
- Toys
- RC vehicles
- Automotive
- Industrial Automation



## Miniature Linear Motion Series · PQ12

Actuonix Motion Devices unique line of Miniature Linear Actuators enables a new generation of motion-enabled product designs, with capabilities that have never before been combined in a device of this size. These tiny linear actuators are a superior alternative to designing your own push/pull mechanisms. Their low cost and easy availability make them attractive to hobbyists and OEM designers alike.

The PQ12 actuators are complete, self contained linear motion devices with position feedback for sophisticated position control capabilities, or end of stroke limit switches for simple two position automation. Driving them couldn't be easier, simply apply a DC voltage to extend the actuator, and reverse the polarity to retract it. Several gear ratios and voltage options are available to give you varied speed/force configurations.

### PQ12 Specifications

Gearing Option	30:1	63:1	100:1
Peak Power Point	15N@15mm/s	30N @ 8mm/s	40N @ 6mm/s
Peak Efficiency Point	8N @ 20mm/s	12N@12mm/s	20N @ 8mm/s
Max Speed (no load)	28mm/s	15mm/s	10mm/s
Max Force (lifted)	18N	45N	50N
Max Side Load	5N	10N	10N
Back Drive Force	9N	25N	35N
Stroke	20 mm		
Input Voltage	6 or 12 VDC		
Stall Current	550mA @ 6V, 210mA @ 12V		
Mass	19g (P,S) 21g (R)		
Operating Temperature	-10°C to +50°C		
Positional Repeatability	±0.1mm		
Mechanical Backlash	0.25 mm		
Audible Noise	55dB @ 45cm		
Ingress Protection	IP-54		
Feedback Potentiometer	5kΩ±50%		
Limit Switches	Max. Current Leakage: 8uA		
Maximum Duty Cycle	20%		

### Basis of Operation

The PQ12 is designed to push or pull a load along its full stroke length. The speed of travel is determined by the load applied (see load curves). When power is removed the actuator will hold its position, unless the applied load exceeds the back drive force. Repeated stalling of the actuator against a fixed load will shorten the life of the actuator. Since application conditions (Environmental, loading, duty cycle, vibration, etc) vary so widely, we advise application specific testing to determine the expected life of the actuator.

### Ordering

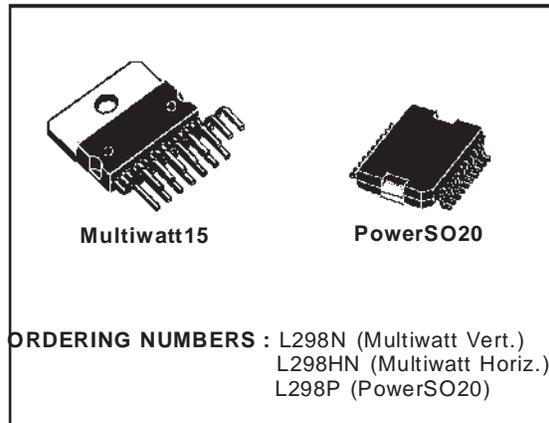
Small quantity orders can be placed directly online at [www.Actuonix.com](http://www.Actuonix.com). Each actuator ships with two mounting brackets, M3 mounting hardware, and one FPC ribbon cable connector. To extend the length of the ribbon cable you can purchase one of our PQ12 cable adapters and extension cable, or solder wires directly to the ribbon cable. Contact [sales@Actuonix.com](mailto:sales@Actuonix.com) for volume quotes and customization options for OEM's.

## DUAL FULL-BRIDGE DRIVER

- OPERATING SUPPLY VOLTAGE UP TO 46 V
- TOTAL DC CURRENT UP TO 4 A
- LOW SATURATION VOLTAGE
- OVERTEMPERATURE PROTECTION
- LOGICAL "0" INPUT VOLTAGE UP TO 1.5 V (HIGH NOISE IMMUNITY)

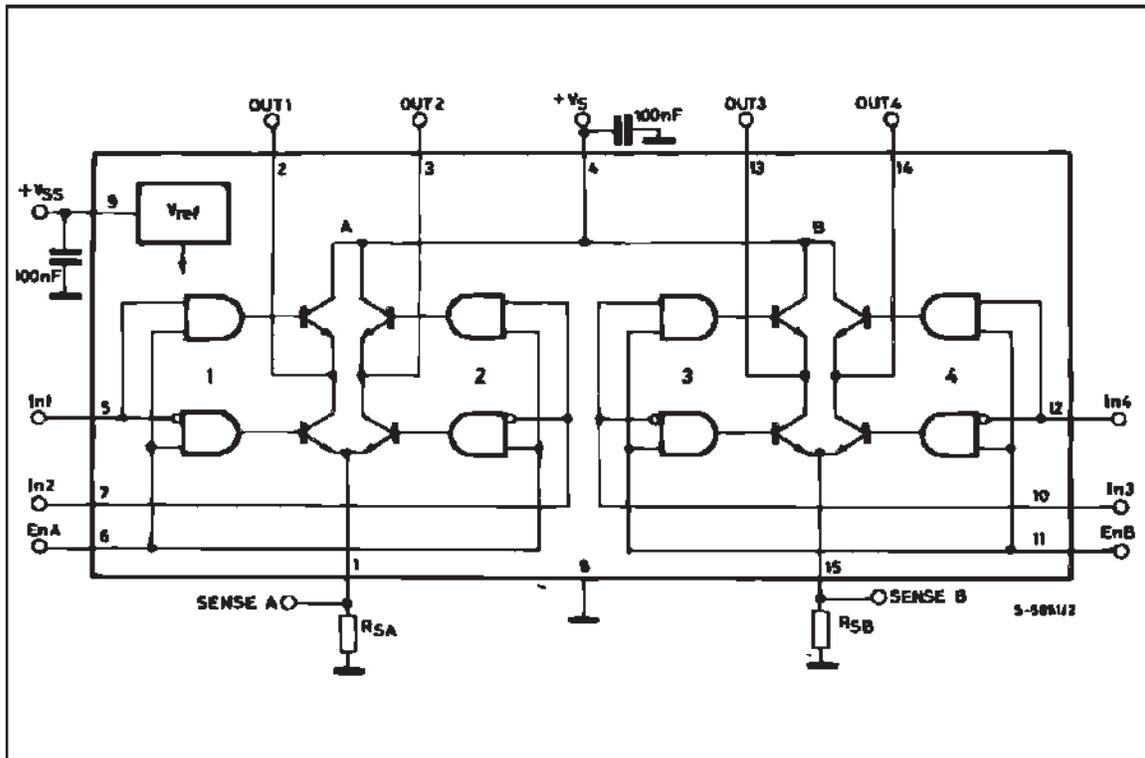
### DESCRIPTION

The L298 is an integrated monolithic circuit in a 15-lead Multiwatt and PowerSO20 packages. It is a high voltage, high current dual full-bridge driver designed to accept standard TTL logic levels and drive inductive loads such as relays, solenoids, DC and stepping motors. Two enable inputs are provided to enable or disable the device independently of the input signals. The emitters of the lower transistors of each bridge are connected together and the corresponding external terminal can be used for the con-



nection of an external sensing resistor. An additional supply input is provided so that the logic works at a lower voltage.

### BLOCK DIAGRAM

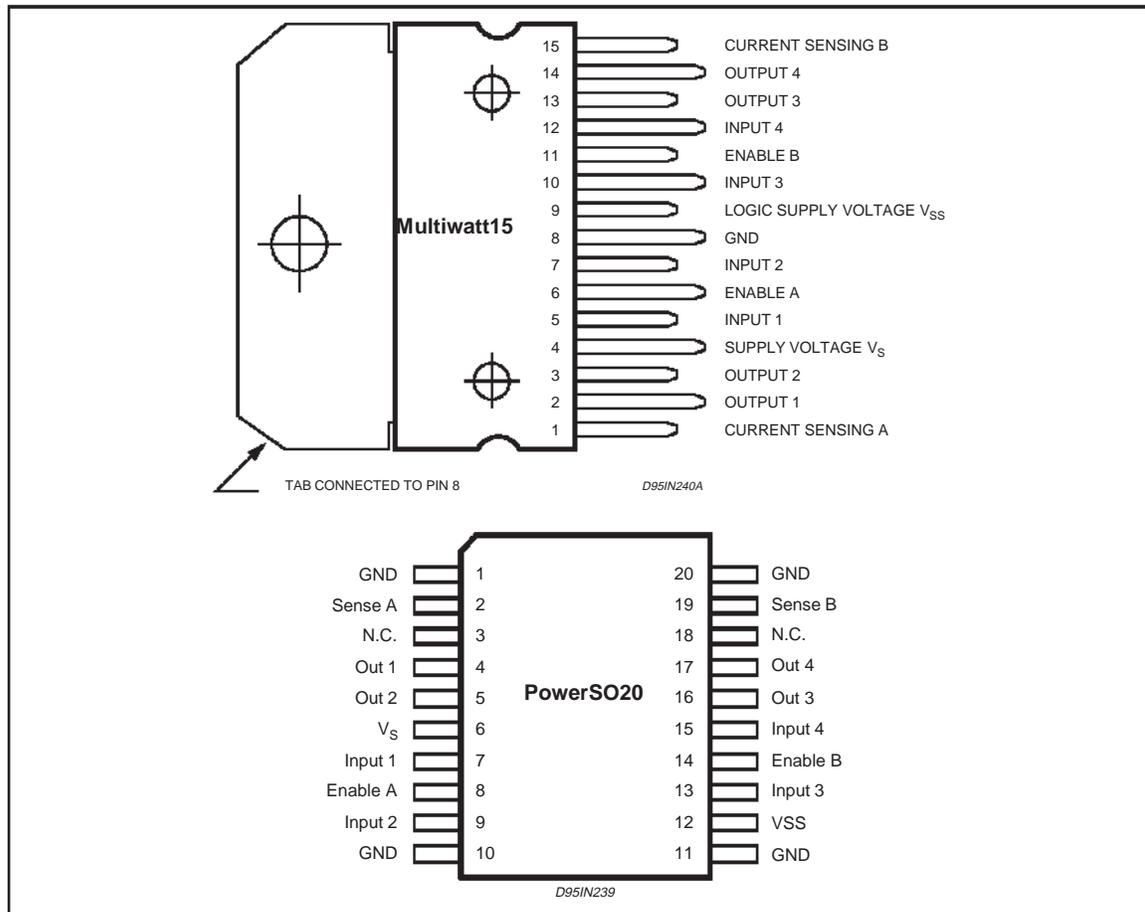


## L298

### ABSOLUTE MAXIMUM RATINGS

Symbol	Parameter	Value	Unit
$V_S$	Power Supply	50	V
$V_{SS}$	Logic Supply Voltage	7	V
$V_I, V_{en}$	Input and Enable Voltage	-0.3 to 7	V
$I_O$	Peak Output Current (each Channel)		
	- Non Repetitive ( $t = 100\mu s$ )	3	A
	- Repetitive (80% on -20% off; $t_{on} = 10ms$ )	2.5	A
	-DC Operation	2	A
$V_{sens}$	Sensing Voltage	-1 to 2.3	V
$P_{tot}$	Total Power Dissipation ( $T_{case} = 75^\circ C$ )	25	W
$T_{op}$	Junction Operating Temperature	-25 to 130	$^\circ C$
$T_{stg}, T_j$	Storage and Junction Temperature	-40 to 150	$^\circ C$

### PIN CONNECTIONS (top view)



### THERMAL DATA

Symbol	Parameter	PowerSO20	Multiwatt15	Unit
$R_{th\ j-case}$	Thermal Resistance Junction-case	Max.	3	$^\circ C/W$
$R_{th\ j-amb}$	Thermal Resistance Junction-ambient	Max.	35	$^\circ C/W$

(\*) Mounted on aluminum substrate

## PIN FUNCTIONS (refer to the block diagram)

MW.15	PowerSO	Name	Function
1;15	2;19	Sense A; Sense B	Between this pin and ground is connected the sense resistor to control the current of the load.
2;3	4;5	Out 1; Out 2	Outputs of the Bridge A; the current that flows through the load connected between these two pins is monitored at pin 1.
4	6	V <sub>S</sub>	Supply Voltage for the Power Output Stages. A non-inductive 100nF capacitor must be connected between this pin and ground.
5;7	7;9	Input 1; Input 2	TTL Compatible Inputs of the Bridge A.
6;11	8;14	Enable A; Enable B	TTL Compatible Enable Input: the L state disables the bridge A (enable A) and/or the bridge B (enable B).
8	1,10,11,20	GND	Ground.
9	12	V <sub>SS</sub>	Supply Voltage for the Logic Blocks. A100nF capacitor must be connected between this pin and ground.
10; 12	13;15	Input 3; Input 4	TTL Compatible Inputs of the Bridge B.
13; 14	16;17	Out 3; Out 4	Outputs of the Bridge B. The current that flows through the load connected between these two pins is monitored at pin 15.
–	3;18	N.C.	Not Connected

ELECTRICAL CHARACTERISTICS (V<sub>S</sub> = 42V; V<sub>SS</sub> = 5V, T<sub>j</sub> = 25°C; unless otherwise specified)

Symbol	Parameter	Test Conditions	Min.	Typ.	Max.	Unit
V <sub>S</sub>	Supply Voltage (pin 4)	Operative Condition	V <sub>IH</sub> +2.5		46	V
V <sub>SS</sub>	Logic Supply Voltage (pin 9)		4.5	5	7	V
I <sub>S</sub>	Quiescent Supply Current (pin 4)	V <sub>en</sub> = H; I <sub>L</sub> = 0	V <sub>i</sub> = L	13	22	mA
			V <sub>i</sub> = H	50	70	mA
		V <sub>en</sub> = L	V <sub>i</sub> = X		4	mA
I <sub>SS</sub>	Quiescent Current from V <sub>SS</sub> (pin 9)	V <sub>en</sub> = H; I <sub>L</sub> = 0	V <sub>i</sub> = L	24	36	mA
			V <sub>i</sub> = H	7	12	mA
		V <sub>en</sub> = L	V <sub>i</sub> = X		6	mA
V <sub>iL</sub>	Input Low Voltage (pins 5, 7, 10, 12)		–0.3		1.5	V
V <sub>iH</sub>	Input High Voltage (pins 5, 7, 10, 12)		2.3		V <sub>SS</sub>	V
I <sub>iL</sub>	Low Voltage Input Current (pins 5, 7, 10, 12)	V <sub>i</sub> = L			–10	μA
I <sub>iH</sub>	High Voltage Input Current (pins 5, 7, 10, 12)	V <sub>i</sub> = H ≤ V <sub>SS</sub> –0.6V		30	100	μA
V <sub>en</sub> = L	Enable Low Voltage (pins 6, 11)		–0.3		1.5	V
V <sub>en</sub> = H	Enable High Voltage (pins 6, 11)		2.3		V <sub>SS</sub>	V
I <sub>en</sub> = L	Low Voltage Enable Current (pins 6, 11)	V <sub>en</sub> = L			–10	μA
I <sub>en</sub> = H	High Voltage Enable Current (pins 6, 11)	V <sub>en</sub> = H ≤ V <sub>SS</sub> –0.6V		30	100	μA
V <sub>CEsat(H)</sub>	Source Saturation Voltage	I <sub>L</sub> = 1A	0.95	1.35	1.7	V
		I <sub>L</sub> = 2A		2	2.7	V
V <sub>CEsat(L)</sub>	Sink Saturation Voltage	I <sub>L</sub> = 1A (5)	0.85	1.2	1.6	V
		I <sub>L</sub> = 2A (5)		1.7	2.3	V
V <sub>CEsat</sub>	Total Drop	I <sub>L</sub> = 1A (5)	1.80		3.2	V
		I <sub>L</sub> = 2A (5)			4.9	V
V <sub>sens</sub>	Sensing Voltage (pins 1, 15)		–1 (1)		2	V



# dsPIC30F3014/4013

## dsPIC30F3014/4013 High-Performance Digital Signal Controllers

**Note:** This data sheet summarizes features of this group of dsPIC30F devices and is not intended to be a complete reference source. For more information on the CPU, peripherals, register descriptions and general device functionality, refer to the *dsPIC30F Family Reference Manual* (DS70046). For more information on the device instruction set and programming, refer to the *dsPIC30F Programmer's Reference Manual* (DS70030).

### High-Performance Modified RISC CPU:

- Modified Harvard architecture
- C compiler optimized instruction set architecture
- Flexible addressing modes
- 84 base instructions
- 24-bit wide instructions, 16-bit wide data path
- Up to 48 Kbytes on-chip Flash program space
- 2 Kbytes of on-chip data RAM
- 1 Kbyte of non-volatile data EEPROM
- 16 x 16-bit working register array
- Up to 30 MIPs operation:
  - DC to 40 MHz external clock input
  - 4 MHz-10 MHz oscillator input with PLL active (4x, 8x, 16x)
- Up to 33 interrupt sources:
  - 8 user selectable priority levels
  - 3 external interrupt sources
  - 4 processor traps

### DSP Features:

- Dual data fetch
- Modulo and Bit-reversed modes
- Two 40-bit wide accumulators with optional saturation logic
- 17-bit x 17-bit single cycle hardware fractional/integer multiplier
- All DSP instructions are single cycle
  - Multiply-Accumulate (MAC) operation
- Single cycle  $\pm 16$  shift

### Peripheral Features:

- High current sink/source I/O pins: 25 mA/25 mA
- Up to five 16-bit timers/counters; optionally pair up 16-bit timers into 32-bit timer modules
- Up to four 16-bit Capture input functions
- Up to four 16-bit Compare/PWM output functions
- Data Converter Interface (DCI) supports common audio Codec protocols, including I<sup>2</sup>S and AC'97
- 3-wire SPI™ module (supports 4 Frame modes)
- I<sup>2</sup>C™ module supports Multi-Master/Slave mode and 7-bit/10-bit addressing
- Up to two addressable UART modules with FIFO buffers
- CAN bus module compliant with CAN 2.0B standard

### Analog Features:

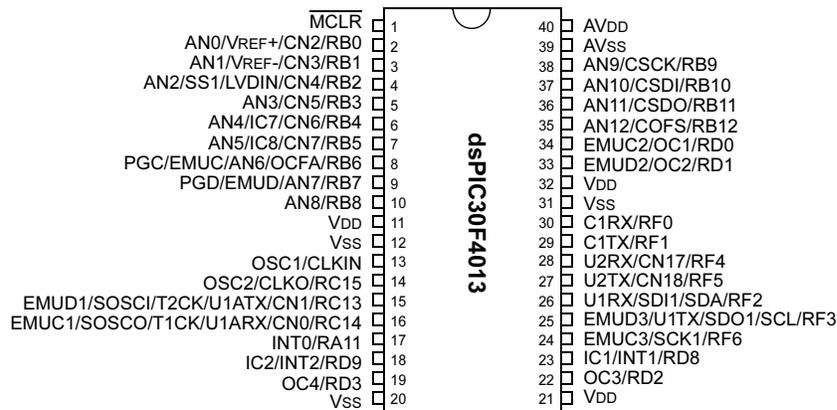
- 12-bit Analog-to-Digital Converter (A/D) with:
  - 100 Ksps conversion rate
  - Up to 13 input channels
  - Conversion available during Sleep and Idle
- Programmable Low Voltage Detection (PLVD)
- Programmable Brown-out Detection and Reset generation

### Special Microcontroller Features:

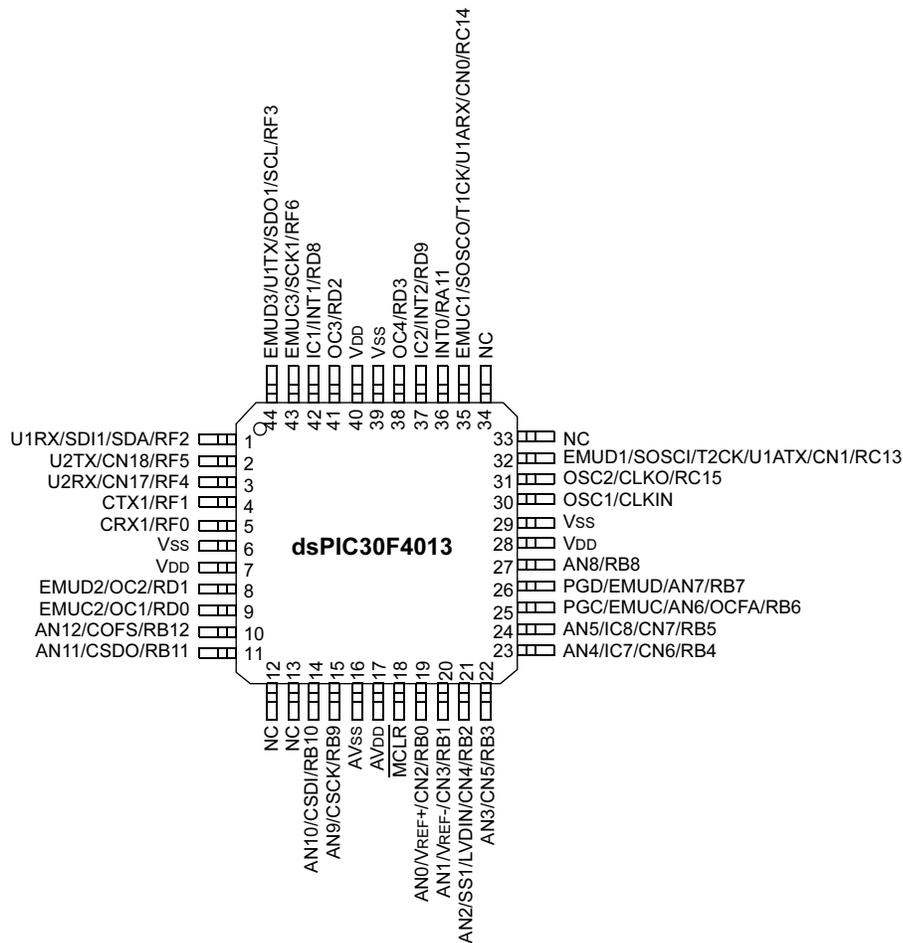
- Enhanced Flash program memory:
  - 10,000 erase/write cycle (min.) for industrial temperature range, 100K (typical)
- Data EEPROM memory:
  - 100,000 erase/write cycle (min.) for industrial temperature range, 1M (typical)
- Self-reprogrammable under software control
- Power-on Reset (POR), Power-up Timer (PWRT) and Oscillator Start-up Timer (OST)
- Flexible Watchdog Timer (WDT) with on-chip low power RC oscillator for reliable operation
- Fail-Safe Clock Monitor operation:
  - Detects clock failure and switches to on-chip low power RC oscillator

## Pin Diagrams (Continued)

### 40-Pin PDIP



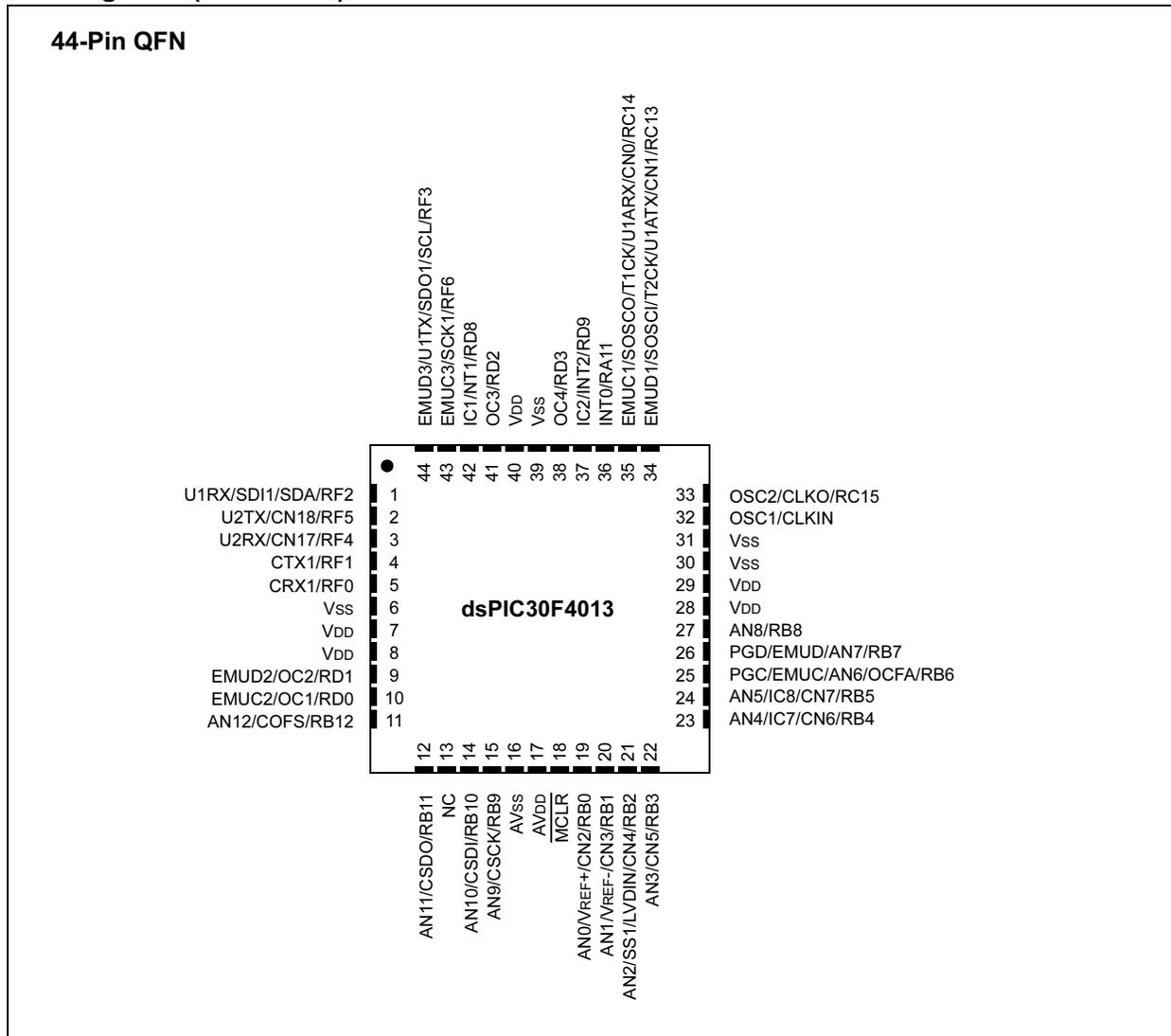
### 44-Pin TQFP



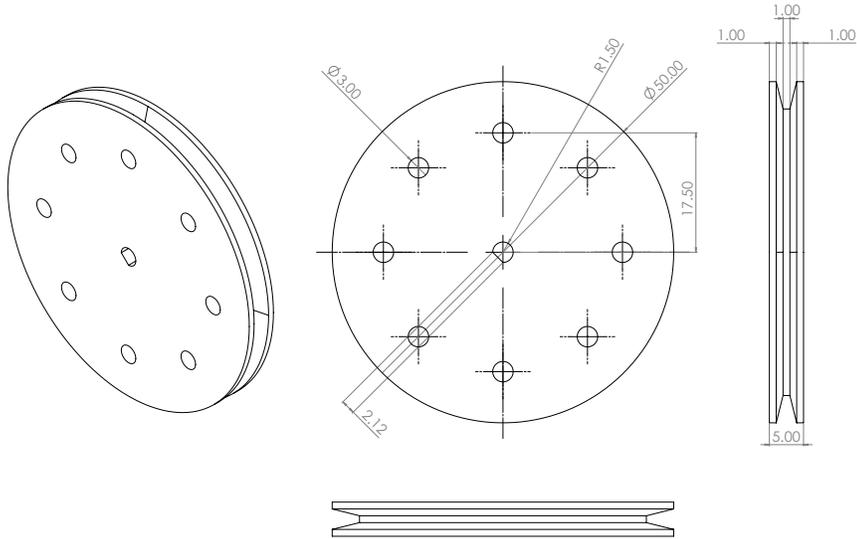
**Note:** For descriptions of individual pins, see Section 1.0.

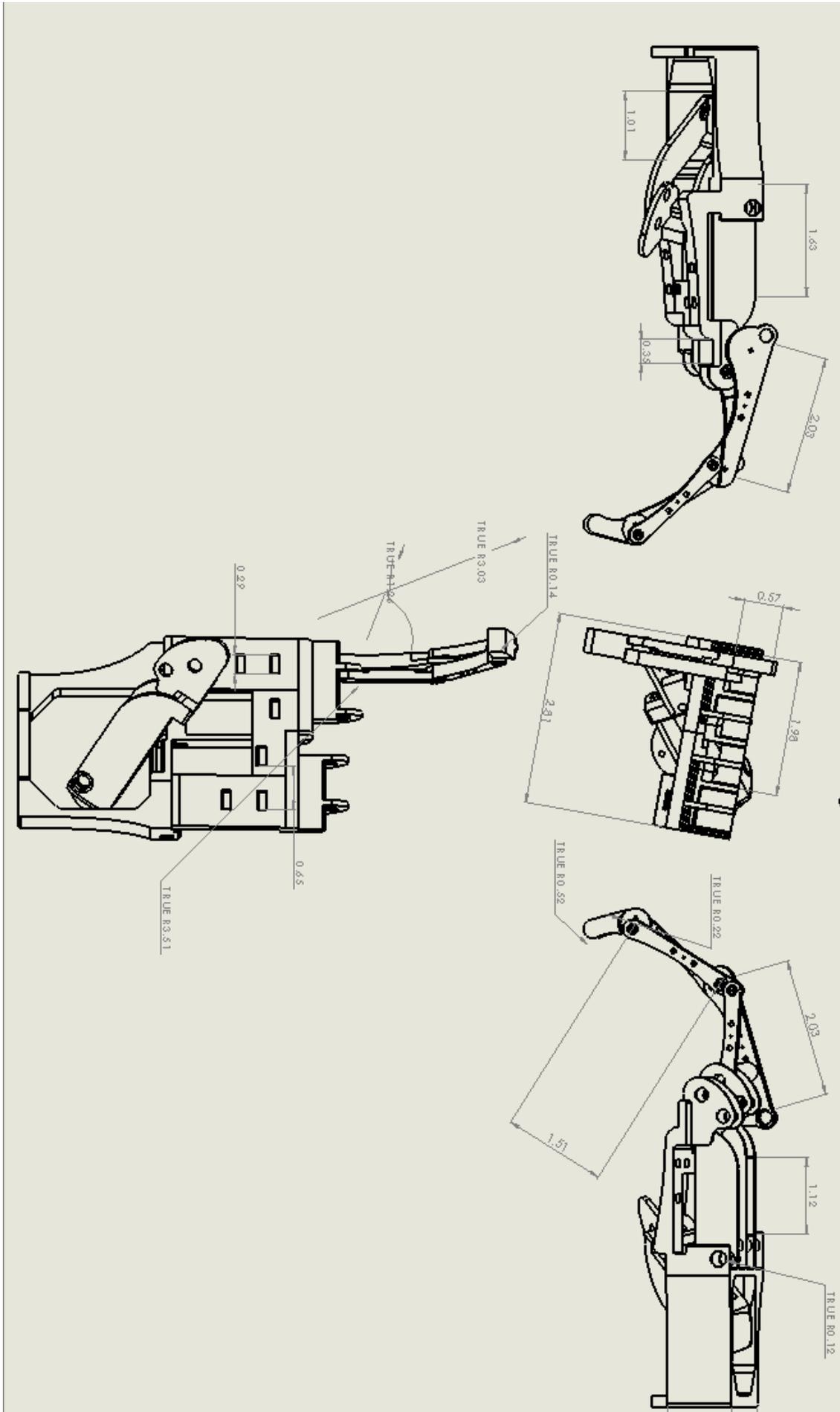
# dsPIC30F3014/4013

## Pin Diagrams (Continued)



For descriptions of individual pins, see Section 1.0.





# Participación en congresos

En este apéndice se muestran los certificados de participación en congresos así como el documento publicado.

## CONGRESO INTERNACIONAL DE INVESTIGACIÓN ACADEMIA JOURNALS MORELIA 2021

# CERTIFICADO

otorgado a

**Ing. Fernando Ahumada Velazquez**  
**Dr. José Eligio Moisés Gutiérrez Arias**  
**MC Jesús Alberto Ordaz Rivera**

por su artículo titulado

**Diseño y Control de Dedo Robot Subactuado Mediante PD con Redes Neuronales  
para Autosintonización de Ganancias**

(Artículo No. MOR291)

La ponencia de este artículo fue presentada en el congreso que tuvo como sede la Universidad Nova Spania de Morelia, Michoacán, México los días 12 al 14 de mayo de 2021. El artículo en extenso ha sido publicado en las siguientes modalidades: (1) en el portal de Internet *AcademiaJournals.com*, con [ISSN 1946-5351](https://doi.org/10.24018/academijournals.13.4.2021), Vol. 13, No. 4, 2021 online e indización en la base de datos [Fuente Académica Plus de EBSCOHost](https://www.ebscohost.com) de Ipswich, Massachusetts y (2) en el libro electrónico intitulado *Trabajos de Investigación en la Educación Superior - Morelia 2021*, mismo que tiene asignado el [ISBN 978-1-939982-65-0](https://doi.org/10.24018/academijournals.13.4.2021).



Rector Gilberto Agatón Cuevas  
Universidad Nova Spania



Dr. Rafael Moras  
Director, Academia Journals



Dr. Pedro López Eiroá  
Director General, PYSEIP



# Diseño y Control de Dedo Robot Subactuado Mediante PD con Redes Neuronales para Autosintonización de Ganancias

Ing. Fernando Ahumada Velazquez<sup>1</sup>, Dr. José Eligio Moisés Gutiérrez Arias<sup>2</sup>,  
MC Jesús Alberto Ordaz Rivera<sup>3</sup>

**Resumen**—En el presente documento, se estudia el diseño de un dedo robot antropomórfico cuya estructura de tres articulaciones es subactuada por un solo motor. La subactuación parte de un modelo de regresión cuadrático para estimar la respuesta de las articulaciones MIP y DIP respecto a la única articulación actuada, PIP por medio de un actuador lineal. Asimismo, se emplea un regulador PD con redes neuronales de base radial integradas para la autosintonización de las ganancias proporcional y derivativa. Se proveen resultados obtenidos por medio de simulación usando Matlab.

**Palabras clave**—Subactuación, PD, autosintonización, redes, neuronales.

## Introducción

De acuerdo a Ordaz (2016), un robot manipulador subactuado, es un tipo de sistema no lineal que requiere de menos actuadores que grados de libertad para poder desplazarse en su espacio de trabajo. Entre las ventajas de una estructura subactuada, se tienen; menor peso del sistema, menor consumo de energía para llevar a cabo movimiento y menor costo de componentes y fabricación, entre otros. El desempeño de movimiento de los robots subactuados, depende tanto de su estructura mecánica como del algoritmo de control que se emplee para dicho propósito.

La robustez de un robot manipulador, depende en gran medida del algoritmo de control que se utilice para regular su capacidad de movimiento. Debido a la continua evolución de procesos y creciente demanda de nuevas aplicaciones, que requieren de un cierto grado de precisión, el desarrollo de nuevos esquemas de control se ha convertido en una tarea imprescindible en la comunidad científica.

En este documento, se propone utilizar un esquema de regulación con ganancias auto sintonizables para controlar el movimiento de un dedo antropomórfico subactuado de tres articulaciones por medio de un único actuador, es decir, el análisis dinámico de la estructura de tres grados de libertad, se reduce a un solo grado de libertad actuado.

En primera instancia, se analiza la estructura mecánica del dedo y se determina cómo es el movimiento de las tres articulaciones conforme el motor se mueve. Con base en las coordenadas por las que se desplaza el dedo robot, se emplea un modelo de regresión para estimar una función que describa el movimiento de las tres articulaciones respecto al único eslabón actuado. Después, se obtiene el modelo dinámico del robot subactuado empleando las ecuaciones de Euler-Lagrange. Para la regulación de movimiento, se emplea un control clásico PD y se le integran dos redes neuronales de base radial (RBNN) que permiten la autosintonización de las ganancias proporcional y derivativa. Se proveen los resultados obtenidos por medio de simulaciones realizadas usando el software Matlab.

## Descripción del Método

### *Análisis de la estructura mecánica del dedo subactuado*

En la Figura 1, se muestra el esquema general de diseño del dedo robot subactuado propuesto por Ordaz (2016). Para mover este robot, es implementado un micro actuador PQ12-P, cuyo vástago se desplaza de manera lineal. Cuando el vástago del actuador se desplaza, se genera movimiento en el primer eslabón. Asimismo, los elementos en color rojo tienen la función de generar el movimiento subactuado del segundo y tercer eslabón, con base en el movimiento del primero.

La propuesta de diseño del dedo robot subactuado dada por Ordaz (2016), conlleva a la reducción de su modelo dinámico de tres a un grado de libertad. Esta reducción se debe a que, si bien la estructura del robot es de tres articulaciones, únicamente la articulación  $q_1$  es actuada por el motor, mientras que el movimiento de las articulaciones  $q_2$  y  $q_3$  depende de  $q_1$ . Es decir, la posición angular de los tres eslabones del dedo, depende únicamente de la articulación  $q_1$ , o bien, de un solo grado de libertad.

Para llevar a cabo la reducción del modelo dinámico, se emplea la metodología de regresión no lineal cuadrática, que permite obtener una función de estimación no lineal. En el caso particular del dedo robótico subactuado

<sup>1</sup> Ing. Fernando Ahumada Velazquez es alumno de la Maestría en Ciencias de la Electrónica Opción Automatización en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México. [ahumadavel@gmail.com](mailto:ahumadavel@gmail.com) (autor corresponsal)

<sup>2</sup> Dr. José Eligio Moisés Gutiérrez Arias es Profesor e Investigador en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México. [arigutmses5@gmail.com](mailto:arigutmses5@gmail.com)

<sup>3</sup> MC Jesús Alberto Ordaz Rivera es Profesor e Investigador en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México. [jesus.ordaz@correo.buap.mx](mailto:jesus.ordaz@correo.buap.mx)

propuesto, esta función de estimación tiene como propósito el describir, de manera aproximada, la posición angular de las articulaciones  $q_2$  y  $q_3$  respecto a la articulación  $q_1$ , de modo que el estudio de movimiento de la estructura mecánica se realiza considerando solo un grado de libertad. La estimación de la respuesta del robot está dada por la siguiente expresión (Bouza, 2018):

$$f_k = Aq^2 + Bq + C \tag{1}$$

donde los términos  $A$ ,  $B$  y  $C$  son constantes calculadas y  $f_k$  corresponde la función de estimación no lineal, obtenida por el modelo de regresión cuadrática. Esta función, permite analizar el modelo dinámico del dedo robot de tres articulaciones, considerando únicamente la variable generalizada  $q_1$ .

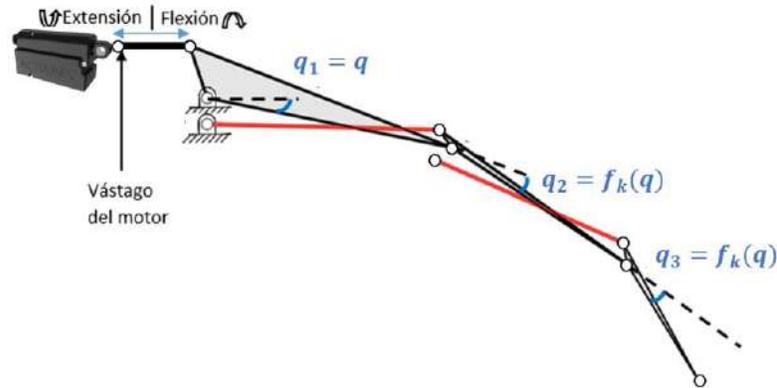


Figura 1. Estructura subactuada del dedo robot.

Para aplicar el modelo de regresión a este sistema, primero es necesario analizar las relaciones de movimiento entre las articulaciones del dedo utilizando un diagrama de dispersión (véase Fig. 2). En este diagrama de dispersión (también conocido como nube de puntos), se muestra una serie de datos; los puntos de color café representan los valores medidos de la articulación  $q_2$  respecto a los valores observados de  $q_1$ , y los puntos en color verde representan los valores medidos de la articulación  $q_3$  respecto a los valores observados de  $q_1$  (Ordaz, 2016). Las coordenadas en que se encuentran estos puntos, representan los datos de entrada para el modelo de regresión cuadrático, con el que se obtiene la función de estimación (curva en color azul).

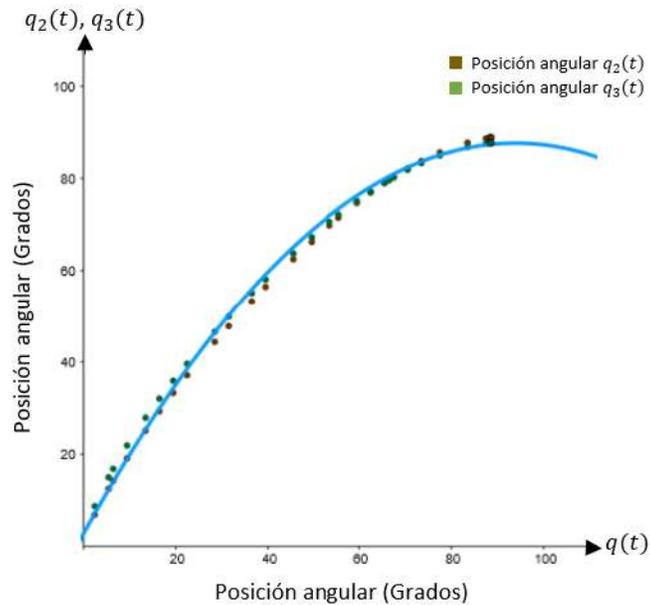


Figura 2. Diagrama de dispersión para el cálculo de la función de estimación.

### Reducción del modelo dinámico

Una vez obtenida la función de estimación (1), se procede al análisis y reducción del modelo dinámico del dedo robot subactuado. El modelo dinámico de un robot manipulador con eslabones rígidos  $n$  grados de libertad, es representado de forma general de la siguiente manera:

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) + f_f(b,\dot{q}) \quad (2)$$

donde  $\tau \in \mathbb{R}^n$  es el vector de pares aplicados y corresponde a la señal de control,  $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercias,  $C(q,\dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de Coriolis y fuerzas centrípetas,  $g(q) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de pares gravitatorios y  $f_f(b,\dot{q}) \in \mathbb{R}^n$  corresponde al modelado de fricción viscosa. Las variables  $q$ ,  $\dot{q}$  y  $\ddot{q} \in \mathbb{R}^n$  son vectores que denotan posición, velocidad y aceleración articular, respectivamente (Reyes, 2011).

La reducción del modelo dinámico de tres a un grado de libertad, consiste en utilizar la función de estimación  $f_k$ , tal que las posiciones articulares  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$  se encuentren en función de una sola variable  $q$ , es decir, la cinemática directa del dedo subactuado contempla lo siguiente:

$$q_1 = q \quad (3)$$

$$q_2 = f_k(q) \quad (4)$$

$$q_3 = f_k(q) \quad (5)$$

Observe en las ecuaciones (4) y (5), que las variables  $q_2 = q_3$ , correspondientes a las posiciones angulares del segundo y tercer eslabón, respectivamente, se encuentran en función de una sola variable  $q$ , o bien, de la posición angular del primer eslabón. Así, el modelo de cinemática directa está dado por:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c1} \cos(q) \\ l_{c1} \sin(q) \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q) + l_{c2} \cos(q + f_k) \\ l_1 \sin(q) + l_{c2} \sin(q + f_k) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q) + l_2 \cos(q + f_k) + l_{c3} \cos(q + 2f_k) \\ l_1 \sin(q) + l_2 \sin(q + f_k) + l_{c3} \sin(q + 2f_k) \end{bmatrix} \quad (8)$$

En las ecuaciones (7) y (8), la variable  $q_1$  es sustituida por  $q$ , y las variables  $q_2$  y  $q_3$  son sustituidas por la función de estimación  $f_k$ . Con ello, la cinemática directa de cada uno de los eslabones del dedo, están en función de una sola variable generalizada  $q$ , lo que permite obtener una sola ecuación de movimiento de Euler-Lagrange:

$$\tau = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} \quad (9)$$

Según Reyes (2011), el total de ecuaciones de Euler-Lagrange que describen la dinámica de un sistema, es igual al número de grados de libertad que posee, o bien, al número de articulaciones que están siendo actuadas. Con esta estrategia, se reduce el modelo dinámico del dedo robot subactuado a un grado de libertad.

### Ley de control PD con redes neuronales de base radial

Para la regulación de movimiento del dedo robot subactuado, se propone implementar el esquema de control clásico PD, el cual se define de la siguiente manera (Kelly, 2003):

$$\tau = k_p q - k_v \dot{q} + g(q) \quad (10)$$

donde  $k_p, k_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices definidas positivas que corresponden a las ganancias proporcional y derivativa, respectivamente. La estrategia de control autosintonizable, consiste en sustituir las ganancias proporcional y derivativa de la ecuación (10), por ganancias  $k_{pi}(q_d)$  y  $k_{vi}(q_d)$  para  $i = 1, 2 \dots n$  donde  $n$  es el número de grados de libertad del sistema. Estas ganancias se definen como:

$$k_{pi}(q_d) = \sum_{j=1}^h w_j \phi_{i,j} \quad (11)$$

$$k_{vi}(q_d) = \sum_{j=1}^h w_j \phi_{i,j} \quad (12)$$

$$\phi_{i,j} = \frac{1}{2} \exp \left[ - \left( \frac{\|q_d - C_j\|^2}{\sigma} \right) \right] \quad (13)$$

donde  $w_j$  es el factor de ponderación o peso,  $\phi_{i,j}$  es la función gaussiana,  $C_j$  corresponde a los centros de las funciones gaussianas, y  $\sigma$  es una constante positiva que determina el ancho de las funciones gaussianas (Muñiz, 2008). Las ganancias  $k_{pi}(q_d)$  y  $k_{vi}(q_d)$ , se desempeñan como funciones variables, las cuales son recalculadas automáticamente en función de la posición deseada ( $q_d$ ) que sea requerida para el dedo robot subactuado. Cada una de estas ganancias variables, corresponde al valor salida de una red neuronal de base radial (RBNN por sus siglas en inglés), cuya estructura matemática puede observarse en la Figura 3.

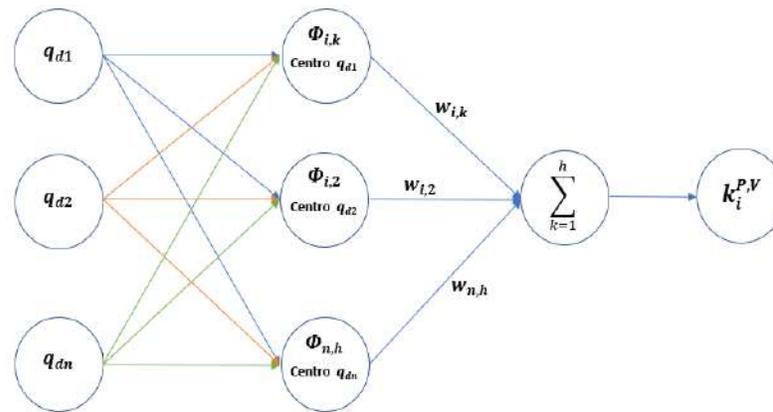


Figura 3. Estructura de la red neuronal de base radial.

La estructura de las RBNN implementadas está conformada por tres capas. La primera se conoce como capa de entrada, en la que se tienen las muestras, o bien, las posiciones deseadas a entrenar. La segunda es la capa oculta, donde cada nodo está conformado por una función de activación gaussiana  $\phi_{i,j}(q_d)$  para  $j = 1, 2, \dots, h$  donde  $h$  corresponde al número total de muestras para el entrenamiento de las redes neuronales. Observe que el número de muestras ( $h$ ) es igual al número de neuronas en la capa oculta, denotado por  $k$ .

Para implementar las redes neuronales, se tiene la siguiente metodología:

- A) Seleccionar los centros de las funciones gaussianas  $C_j$ . Estos centros corresponden a las posiciones deseadas  $q_d$  que el diseñador considere adecuadas, procurando que estén distribuidas uniformemente dentro del espacio de trabajo del robot.
- B) Sintonizar las ganancias  $k_p$  y  $k_v$  de la ecuación (10) para las posiciones deseadas elegidas como centros de las funciones gaussianas. Los valores obtenidos representan los datos de entrenamiento para la capa de salida de las redes neuronales, es decir,  $k_p(q_d) = [k_{p1}, k_{p2}, \dots, k_{ph}]$  y  $k_v(q_d) = [k_{v1}, k_{v2}, \dots, k_{vh}]$ .
- C) Elegir el valor de  $\sigma$  tal que la activación de las funciones gaussianas sea menor al 50%. La constante  $\sigma$ , determina la región específica del espacio de trabajo del robot en que se activan las funciones gaussianas. Dicha activación ocurre la posición del robot se encuentra cercana a los centros elegidos.
- D) Obtener los factores de ponderación  $w_j$  para cada red neuronal. Estos factores (también conocidos como pesos sinápticos), son calculados resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1k} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{h1} & \phi_{h2} & \dots & \phi_{hk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_h \end{bmatrix} \quad (14)$$

E) Sustituir los valores de las ecuaciones (11) y (12) por los obtenidos en los incisos anteriores. Finalmente, en la estructura del control PD (10) se sustituyen las ganancias por las redes neuronales  $k_p(q_d)$  y  $k_v(q_d)$ .

### Comentarios finales

#### Resumen de resultados

Para validar el modelo dinámico del dedo subactuado, se realiza una simulación en Matlab para comparar la respuesta de posición y velocidad articular de la estructura subactuada, con la respuesta del mismo dedo considerando sus tres articulaciones independientes, o bien, sus tres grados de libertad (gdl). Estos resultados se muestran en la Figura 4, donde se utiliza un control PD clásico y se tiene una posición deseada  $q_d = 90$  grados. En la Figura 5, se muestra una comparación entre el sistema subactuado con control PD clásico y el sistema subactuado con el control PD neuronal con ganancias autosintonizables implementado.

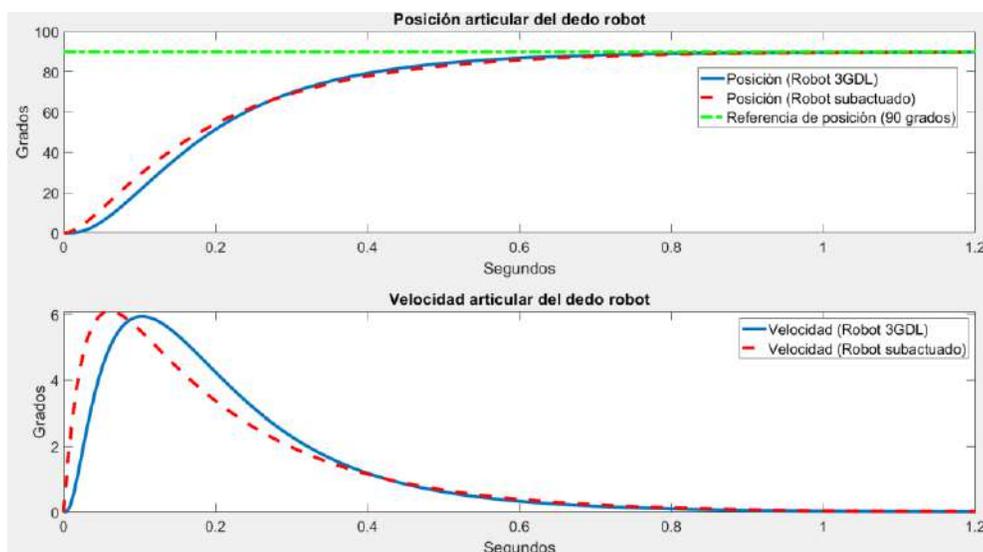


Figura 4. Respuesta de posición y velocidad articular del sistema subactuado vs sistema con 3 gdl en Matlab.

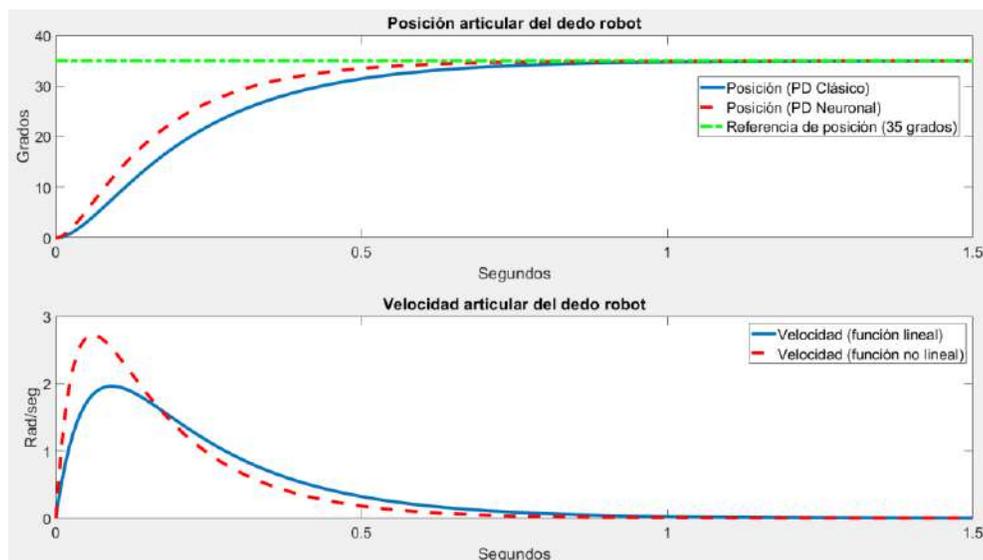


Figura 5. Respuesta de posición y velocidad articular del sistema subactuado con PD vs PD neuronal en Matlab.

Para el soporte del dedo robot subactuado, se tiene el diseño que se muestra en la Figura 6. El diseño está orientado a dar soporte al dedo robot y al actuador lineal, de modo que se pueda efectuar el movimiento de las articulaciones de manera eficiente y antropomórfica. Asimismo, el diseño permite integrar el resto de los dedos de una mano humana, lo cual ya está contemplado para un proyecto futuro.

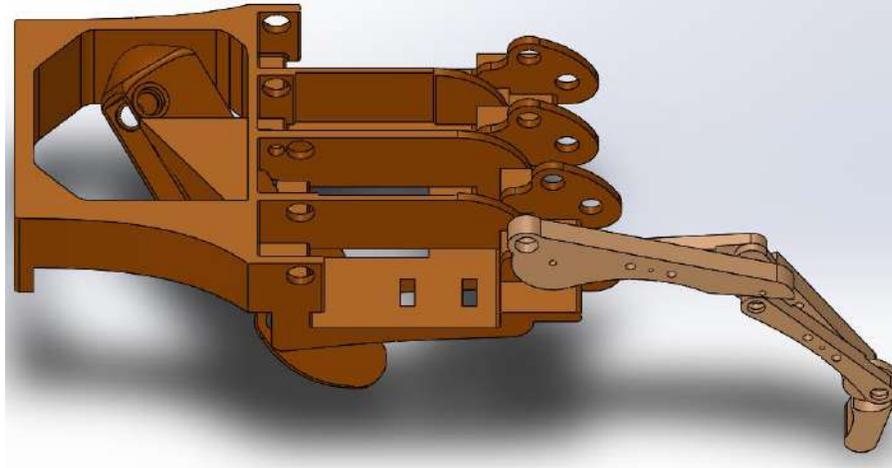


Figura 6. Diseño CAD del soporte del dedo robot subactuado y actuador lineal.

### Conclusiones

La similitud entre la respuesta del dedo robot subactuado y del dedo robot considerando el movimiento independiente de sus tres articulaciones, indica que el modelo de regresión empleado para estimar la dinámica de movimiento de la estructura subactuada, es adecuado para realizar la reducción del modelo dinámico.

La estrategia de control PD con redes neuronales de base radial, cumple con la tarea de autosintonización de las ganancias proporcional y derivativa. En comparación con el PD clásico, el PD neuronal es más robusto gracias a su capacidad de ajustar el valor de las ganancias en función de la posición deseada. Para el entrenamiento neuronal, se contemplaba utilizar quince posiciones deseadas de prueba, sin embargo, con las nueve posiciones utilizadas en este proyecto, el desempeño de las ganancias neuronales superó el de las ganancias convencionales.

### Recomendaciones

Para llevar a cabo la estrategia de control neuronal, se consideraron nueve posiciones deseadas, sin embargo, podría aumentarse el número y analizar qué tan conveniente es emplear más posiciones deseadas.

Si bien la estructura subactuada cumple con el propósito de este proyecto, es recomendable llevar a cabo un análisis de esfuerzos en los mecanismos del dedo, así como un estudio más profundo de la fricción presente en las articulaciones.

Una vez simulada la respuesta del dedo robot, el siguiente paso es llevar el diseño a la implementación física. Se puede seguir la misma metodología descrita en este documento para el resto de los dedos de una mano antropomórfica.

### Referencias

Bouza Herrera, C.N. "Modelos de regresión y sus aplicaciones,". *Reporte Técnico 2018-62.02*, Facultad de Matemática y Computación Universidad de La Habana. 2018.

Kelly, R. y Santibáñez, V. "Control de movimiento de robots manipuladores". Pearson Prentice Hall, Madrid, España. 2003.

Muñiz Montero, C. "Control de trayectoria con redes neuronales de base radial". *Doctorado Tesis*, Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica. 2008.

Ordaz Rivera, J.A. "Diseño, construcción y control del pulgar de una mano robótica antropomórfica con movimiento de pinza fina". *MC Tesis*, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México. 2016.

Reyes Cortés, F. "Robótica control de robots manipuladores". Alfaomega Grupo Editor, D.F., México. 2011.