Ciencia Ergo Sum

ISSN: 1405-0269

ciencia.ergosum@yahoo.com.mx

Universidad Autónoma del Estado de México

México

Castañeda Alvarado, Enrique

Tauromaquia Topológica

Ciencia Ergo Sum, vol. 14, núm. 3, noviembre-febrero, 2007, pp. 339-344

Universidad Autónoma del Estado de México

Toluca, México

Espacio del divulgador

Recepción: 13 de marzo de 2007
Aceptación: 7 de junio de 2007

* Facultad de Ciencias, UAEM.
Correo electrónico: eca@uaemex.mx

Tauromaquia Topológica

Para Alma Fabiola Fong Rosas,
porque cada día que pasa la topología es más asombrosa.

A menudo se dice que la geometría es el arte de razonar bien con figuras mal hechas.
Henri Poincaré

Enrique Castañeda Alvarado*

Resumen. En este artículo acercamos al lector a esa maravillosa área de las matemáticas que llamamos topología, mediante algunos tópicos que platicamos de una forma accesible, divertida y sin ningún rigor matemático. Los tópicos que se abordan son conexidad, la banda de Möbius, la teoría de nudos y su aplicación a la biología molecular y finalmente hablamos de la conjetura de Poincaré.
Palabras clave: topología, conexidad, banda de Möbius, nudos, ADN, conjetura de Poincaré.

Tauromaquia Topologycal

Abstract. In this paper we bring the reader over to this wonderful area of the mathematics that we call Topology, by means of some topics that we present in an accessible form, entertained and without any mathematical rigor for the reader. The topics that approached are connectedness, the Möbius strip, the theory of knots and its application to the molecular Biology and finally we convey about Poincare's conjecture.
Key Word: Topology, connectedness, Möbius strip, Knots, DNA, Poincare´s conjeture.

Introducción

La palabra topología podría suscitar ciertos temores por considerar que se refiere a cosas inaccesibles a sus conocimientos matemáticos. Sin embargo esto no necesariamente es así, topología se deriva de la palabra griega $\tau o \pi o \zeta$, que significa lugar o posición. Mismo significado tiene la palabra latina *situs*, al que refiere el nombre antiguo *Analysis situs*. Por lo que podemos traducir la palabra topología como el estudio de la posición y la forma, podríamos decir que por su origen es una disciplina geométrica. A diferencia de otras geometrías como la euclidiana, hiperbólica o elíptica y otras que se ocupan de la medida de ángulos y longitudes, la topología es una geometría no métrica. Leibniz determinó que esta geometría se tendría que ocupar solamente de la posición y las propiedades derivadas de la misma sin tomar en cuenta las cantidades ni su cálculo. No es la intención de este escrito definir con todo el rigor matemático lo que es la topología, en lugar de esto permítaseme hablar heurísticamente. Supongamos que tenemos un masa flexible por ejemplo de plastilina, la cual podemos deformar con la condición de no romperla, rasgarla o pegarla, si de alguna manera se rompió o rasgó debemos pegarla como estaba. Podemos estirarla, comprimirla, doblarla, etc. Si la masa es esférica la podemos deformar hasta lograr un cubo, pero con estas condiciones nunca podremos obtener una dona o una esfera hueca. Lo que realmente le interesa a un topólogo son las diferencias que hay entre una esfera sólida, una hueca y una dona, no las diferencias que hay entre una dona y una taza, pues éstas son topológicamente equivalentes. Una propiedad importante de nuestra masa esférica es que es de una sola pieza, esta es una de las propiedades topológicas más importantes y recibe el nombre de conexidad. En topología como en muchas otras teorías matemáticas es importante determinar cuándo dos objetos en estudio son equivalentes. En esta área de la matemática estos objetos se llaman espacios topológicos, y si dos espacios son equivalentes decimos que son homeomorfos. La topología es el estudio de las propiedades y relaciones de figuras geométricas que permanecen invariantes respecto a cierto tipo de transformaciones llamadas funciones continuas. Estas ideas y conceptos se pueden consultar con todo el rigor matemático que se requiere en Dugundji, (1977); Engelking, (1989); Munkres (1975) y Willard, (1970).

Otras áreas de la matemática como la teoría de probabilidades y la estadística fueron creadas por Pascal y Fermat a partir del análisis de sus fructíferas partidas de dados. La teoría de ecuaciones, el cálculo infinitesimal, la geometría no euclidiana, la teoría aritmética de conjuntos y por supuesto la teoría de juegos, son también consecuencias de problemas planteados por primera vez en forma de rompecabezas o inocentes entretenimientos. La topología nació del análisis realizado por L. Euler del juego de los siete puentes de Königsberg, un célebre laberinto. A lo largo del desarrollo de la topología se han creado técnicas y herramientas para determinar si dos espacios topológicos son o no equivalentes, algunos matemáticos utilizan herramientas algebraicas (por cierto muy poderosas) como la Teoría de Grupos conocida como Topología Algebraica (véase Massey, 1991) o algunos otros crean nuevas teorías o asocian a los espacios topológicos otras estructuras que bien pueden ser topológicas o no, por ejemplo, estructuras diferenciales, hiperespacios, grupos topológicos, los anillos y espacios de funciones continuas, topología de dimensión finita o la de dimensión infinita, y por su puesto la topología general de conjuntos. Todas y cada una de ellas son áreas y líneas de investigación vigentes y de interés para los matemáticos.

Dado que la tauromaquia es el arte de lidiar con toros, en este artículo los toritos son problemas y resultados clásicos y alguno "posiblemente" aún sin solución. Cada una de las secciones de este artículo corresponde a un "torito" el cual es o un resultado clásico o un área de la topología como la teoría de nudos, o bien algún problema famoso e importante como la conjetura de Poincaré.

Supongamos que son las cuatro de la tarde y estamos en la plaza México un domingo de temporada grande, dispuestos a ver una corrida de toros y por qué no también a lanzarnos al ruedo a hacerle el quite al torero.

1. Primer "toro" de la tarde: Conexiones

Nuestro primer toro de la tarde es el siguiente problema, el cual tiene que ver con la conexidad, más precisamente con la arco conexidad de un espacio topológico aunque no precisaremos con rigor el concepto, éste no sólo es importante en topología sino en cualquier área de la matemática, la Teoría de Gráficas, por citar alguna (Carlavilla Fernández y Fernández García, 1994: 47).

Dados tres puntos en una hoja de papel tratemos de unir cada uno de ellos con todos los demás.

Quizás lo primero que tengamos que hacer es responder la pregunta ¿qué significa unir dos puntos? La respuesta la damos en la figura 1 donde se muestran los tipos de "caminos" permitidos para poder unir los puntos A y B.

Notemos que no se permite que el camino tenga cruces, tampoco que caminos diferentes se crucen. La respuesta se muestra en la figura 2.

Seguramente si nos quedamos hasta ahí el público nos abuchearía y lo que tendríamos que hacer es seguir toreando el problema. Consideremos la misma situación pero ahora con cuatro puntos. Si jugamos y experimentamos, resulta que también en esta ocasión es fácil. Veamos la solución en la figura 3.

Figura 1. Tipos de caminos PERMITIDOS y NO para unir dos puntos.

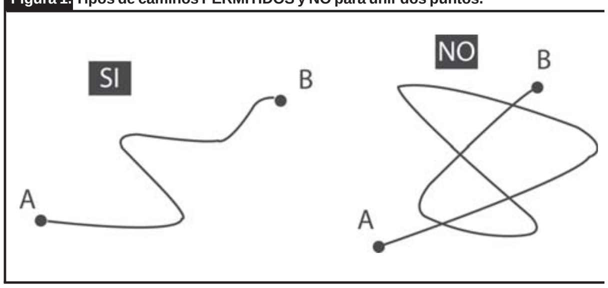


Figura 2. Solución al primer torito planteado.

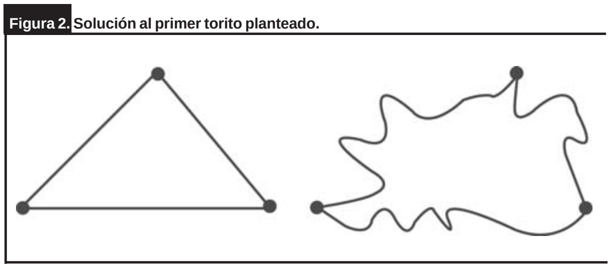
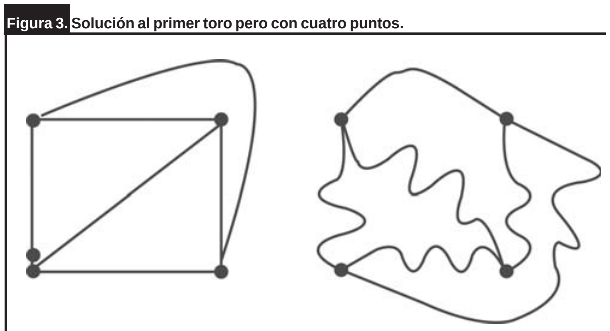


Figura 3. Solución al primer toro pero con cuatro puntos.



A un torero le gusta salir en hombros y por la puerta grande. Intente usted pero ahora con cinco puntos. ¿Qué ocurrió?, ¿cuál es el problema?, ¿hay solución? Quizás podamos conjeturar que no hay solución, o tal vez sea algo más que una conjetura. Tenemos resuelto el problema para cuatro puntos digamos P, Q, R y S. Al unirlos entre sí, el plano queda dividido en cuatro regiones a las que denotamos por A, B, C y D, por lo que un quinto punto T quedaría situado en alguna de las regiones. Si T queda situado en la región A entonces no lo podremos unir con el punto P. Si lo situamos en la región B entonces no lo podremos conectar con el punto Q, de igual forma si lo ubicamos en la región C o D siempre tenemos un punto inalcanzable que en estos casos serían S o R, respectivamente (ver la figura 4). Luego efectivamente no hay solución.

Como una simple pero muy útil aplicación del primer torito (Carlavilla –Fernández y Fernández –García, 1994: 48-50) imaginemos que el responsable gubernamental requiere diseñar una red de carreteras que comunique cinco ciudades entre sí, de forma que cada una de ellas esté unida a todas las demás. Los especialistas afirman que existe una solución con cinco cruces de carreteras (intente dibujarlas). Imaginemos que para evitar los cruces se construyen puentes, pero por su costo tan elevado es más conveniente diseñar una red con el mínimo número de puentes ¿cuál es este número?

¿Qué sucede si variamos las condiciones de conexión? ¿Qué pasaría si intentamos conectar los cinco puntos en el espacio tridimensional (el espacio en el que vivimos)? Parece evidente que hay solución sin cruces, de hecho si colocamos 6, 7, 8,… puntos también tiene solución sin cruces aunque la justificación de este hecho no la haremos aquí.

El problema sobre conexiones de puntos en el plano o en el espacio no está exento de importantes especulaciones filosóficas. Son varios los científicos que han intentado dar una explicación a la pregunta ¿por qué la vida inteligente que conocemos se ha desarrollado en un espacio físico de tres dimensiones?

Hay quienes afirman que la vida inteligente no podría haberse desarrollado en un espacio de dimensiones 4, 5,… porque estos espacios no permiten órbitas planetarias estables. Entonces la vida inteligente debería desarrollarse en 1, 2 o 3 dimensiones, pero por lo que acabamos de analizar en dimensiones 1 y 2 no es posible, pues un cerebro requiere una gran cantidad de células nerviosas unidas de dos en dos mediante nervios que no deben cortarse. Así que la única forma de hallar vida inteligente sería en un espacio de dimensión 3.

2. Segundo “toro” de la tarde: Möbius

El torito anterior sobre conexión de puntos en un ejemplo de situaciones imposibles en el plano y triviales en el espacio, pero ¿habrá situaciones intermedias entre el plano y el espacio?

Por ejemplo, en una superficie como un cilindro, una esfera, etc. (intente resolver el problema para 4, 5, 6,… puntos). No todas las superficies son tan sencillas como éstas. A continuación mandamos al ruedo un objeto topológico difícil de torear llamado *banda de Möbius*.

La banda de Möbius es una superficie descubierta por el matemático y astrónomo alemán F. A. Möbius en el año 1865. En esta superficie nuestros sentidos y nuestra intuición se ven con frecuencia desorientados.

Para construir una banda de Möbius (Barr, 1964) recortemos una tira de papel y peguemos los extremos dando previamente media vuelta a uno de ellos como se muestra en la figura 5, las flechas indican cómo se debe hacer el pegado, de tal manera que el punto A se pega con el punto A’ y el punto B con el B’.

¿Qué pasaría si nuestro mundo fuera una banda de Möbius? En la figura 6 está resuelto el problema de los cinco puntos.

Un análisis detallado del esquema nos muestra que hay caminos que llegan por “detrás” y quizás alguien podría decir “¡alto! hay trampa, los caminos unas veces llegan por delante y otras por detrás” pues estamos acostumbrados a que las superficies tengan dos caras o ¿acaso no es así con todas las superficies?

Figura 4. No hay solución para cinco puntos.

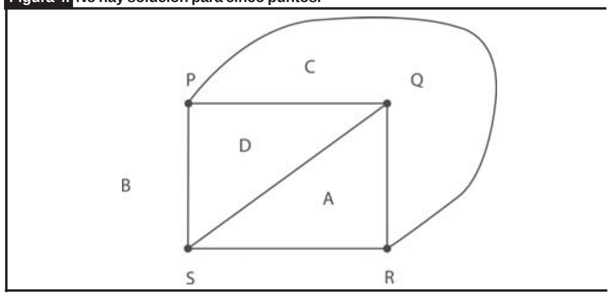


Figura 5. Construcción de la banda de Möbius.

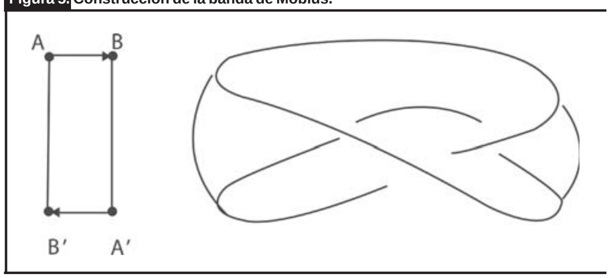


Figura 6. Solución del problema de los cinco puntos en una banda de Möbius.

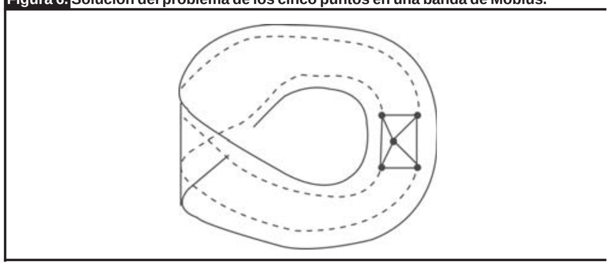
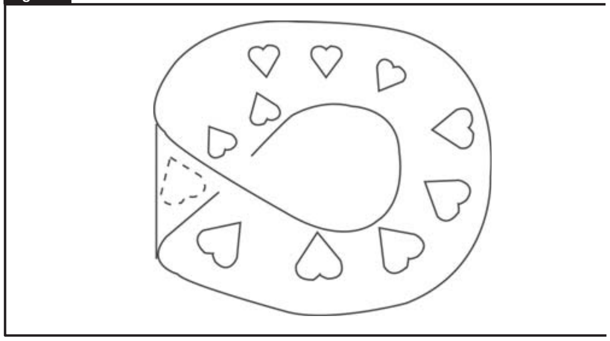


Figura 7. La banda de Möbius no es orientable.



Dejemos que un insecto camine en un cilindro y en una banda de Möbius con la única condición de que no pase por el borde. Notemos que si comienza su recorrido por "fuera" del cilindro nunca podría estar en el "interior", sin embargo la banda de Möbius puede ser recorrida por ambos lados, por lo que podríamos afirmar que esta superficie sólo tiene una cara. Otra diferencia entre estas dos superficies es que el cilindro tiene dos bordes y la banda de Möbius sólo uno. Ahora que hemos explorado un poco este objeto topológico podemos darnos cuenta que no es orientable, pero ¿qué significa que una superficie sea o no orientable?

Una forma muy sencilla de entender esto sería el hecho de que si una persona diera la vuelta a un mundo situado en estas superficies se encontraría con el corazón a la derecha, mientras que un amigo que no ha viajado lo mantendría en su lugar, para entender un poco el concepto de orientabilidad consulte (Barr, 1964). Para entenderlo mejor observe la figura 7.

Intente amable lector hacerme el quite toreando de la siguiente forma:

a) Sobre la banda de Möbius se pueden conectar hasta un máximo de seis puntos sin que los caminos se corten.

Y si ya logró salir avante intente ahora el siguiente torito.

b) Compruebe que en un neumático de automóvil o una dona (en topología es llamado toro) se pueden conectar hasta un máximo de siete puntos sin que los caminos se corten.

3. Tercer "toro" de la tarde: adivina el resultado

He pedido al juez de plaza mande nuevamente al ruedo a la banda de Möbius, y aunque ha sido difícil pues nunca sale dos veces un toro al ruedo ya que o es sacrificado o es indultado, en esta ocasión el juez lo ha concedido.

La banda de Möbius proporciona resultados curiosos si la sometemos a distintos tipos de corte (véase Barr, 1964). Si cortamos una superficie cilíndrica por la mitad longitudinalmente, evidentemente obtenemos dos cilindros. Y si cortamos la banda de Möbius. ¿Sería usted capaz de apostar por alguna de estas respuestas?

a) dos bandas de Möbius

b) dos cintas cilíndricas

c) una banda de Möbius

Lo mejor que podemos hacer es tomar al toro por los cuernos y construir nuestra propia banda de Möbius y cortarla por la mitad, le aseguro que se sorprenderá.

Veámoslo de una forma indirecta (Carlavilla Fernández y Fernández García, 1994: 56). Llamemos B a nuestra banda de Möbius y después de cortarla por la mitad supongamos que obtenemos un objeto B'. Si fuera cierto que B' es una banda de Möbius al repetir el proceso de cortarla por la mitad el nuevo objeto B" que se obtiene debería ser nuevamente una banda de Möbius, pero ¡oh sorpresa! habremos obtenido dos bandas enlazadas. Por lo que la banda B' no es una banda de Möbius

B	cortamos a ½	B'
B'	cortamos a ½	B"

Seguramente en este momento ya le dieron ganas de seguir toreando a la banda de Möbius:

a) Pruebe a cortar una banda de Möbius a 1/3 del borde ¿qué obtiene?, ¿también son dos bandas? ¿sabe identificarlas?

b) Si todavía quiere seguir cortando hágalo longitudinalmente a 1/4, 1/5, 1/6, 2/3,… del borde y saque sus propias conclusiones.

c) Construya una banda con dos medias vueltas (como la de Möbius) córtela por la mitad longitudinalmente ¿qué obtiene? (Illanes, 1999).

d) ¿Qué ocurre con una de tres medias vueltas? si lo hace le sorprenderá el "nudo" que aparece.

4. Cuarto "toro" de la tarde :"Nudo y desnudo"

Ha salido al ruedo un toro muy difícil de lidiar, muchos y grandes matemáticos se han hecho acreedores no sólo a los aplausos del público, sino también han salido por la puerta grande en hombros y les han otorgado el máximo galardón que puede obtener un matemático: la Medalla Fields con los banderillazos que le han dado a este toro. La teoría matemática que se ha desarrollado al respecto es normalmente llamada Teoría de Nudos y en efecto forma parte de la topología.

Los nudos han tenido gran importancia en la historia del hombre. Algunos historiadores han sugerido que la edad de piedra debería llamarse la edad de las cuerdas.

Hay algunos nudos muy antiguos como el de la red de pescadores descubierta en el año 7200 a. C. Actualmente expuesta en el museo nacional de Helsinki.

Estamos acostumbrados a utilizar nudos en diferentes actividades de la vida cotidiana, pero ¿son realmente nudos? Desde el punto de vista topológico si los extremos de una cuerda no están unidos, siempre podemos deshacer los nudos. Desde el punto de vista matemático un nudo lo podríamos definir de la siguiente forma:

> Son curvas unidimensionales en el espacio tridimensional que comienzan y terminan en el mismo punto y que no se cortan a sí mismas.

La circunferencia sería el nudo más sencillo. Más ejemplos se muestran en la figura 8.

Desde el punto de vista topológico, algunos de los toritos que hay al respecto son los siguientes:

a) ¿Cuándo dos nudos son equivalentes?

b) ¿Cómo distinguir nudos diferentes?

Un medio para estudiar los nudos es observar los bordes de las superficies (Armstrong, 1987). La banda de Möbius y las superficies que se obtienen al cortarla tienen en su borde buenos ejemplos de curvas que representan distintos tipos de nudos.

Intente torear los nudos, los siguientes toritos son sencillos le aseguro que se divertirá:

a) ¿El borde de una banda de Möbius es un nudo?

b) Si cortamos una banda de Möbius por la mitad, la cinta tiene dos caras y dos bordes ¿es alguno de estos bordes un nudo?

c) Una banda de Möbius con dos giros tiene dos caras y dos bordes ¿son estos bordes iguales?

Si usted desea saber con más profundidad acerca de los nudos le recomiendo consultar a Armstrong (1987), Kosniowski (1986) y a nivel de divulgación a Pérez (2002).

5. Quinto "toro"de la tarde: "ADN"

El toro que ha salido al ruedo no sólo los matemáticos lo han toreado, los biólogos moleculares principalmente lo han estado lidiando durante mucho tiempo.

Es conocida la forma de "doble hélice" de la molécula humana del "ADN", menos conocida es su longitud (Stewart, 2002), es como un cable muy largo de alrededor de 2 metros que habita dentro de una célula de una milésima de centímetro. La única forma de que una molécula de esta longitud esté en un espacio tan pequeño es que se encuentre extremadamente enrollada y torcida. Esta molécula se duplica formando una copia exacta al lado de la original. Cabe preguntarse:

Cuando están torcidas y entremezcladas, ¿cómo se separan estas dos moléculas o cables paralelos para poder alejarse y formar nuevas moléculas?

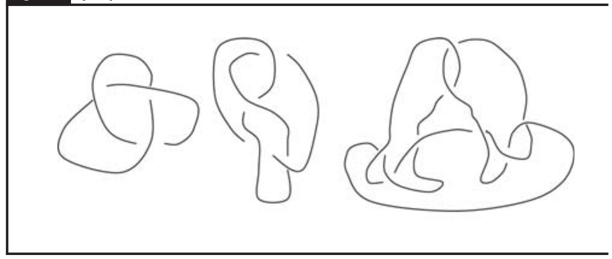
Cuenta la leyenda que en el año 333 a. C, Alejandro Magno desató el nudo gordiano cortándolo con su espada de una tajada.

Los biólogos conjeturan que hay enzimas especiales que usan la misma técnica, es decir cortan temporalmente una de las moléculas; dejan pasar un trozo de la otra molécula, sin perder los dos extremos producidos por el corte y finalmente reconectan los dos pedazos del nudo reconstruyendo la molécula de ADN. Haciendo esto muchas veces se logra la separación de las dos moléculas. El problema aquí es el siguiente:

¿Cómo se estudia la operación de estas enzimas tan importantes en la vida y reproducción de las células?

Lo que han hecho los biólogos es crear moléculas circulares de ADN fuera de la célula, después meterlas en una solución con la enzima bajo estudio y, para estudiar el resultado de la acción de la enzima, se quita la enzima y se coloca un "relajante" para que las moléculas no estén enrolladas y torcidas. Bajo el microscopio electrónico se ven nudos formados en los círculos de ADN, es decir, como si uno hubiera tomado una cuerda, hecho un nudo y después pegado los extremos de la misma (Short, 2004).

Figura 8. Ejemplos de nudos.



Lo topología ha desarrollado teorías y métodos para distinguir los distintos nudos, como por ejemplo el grupo de un nudo, los polinomios de Alexander y de Jones o por medio de espacios recubridores (véase Armstrong, 1987).

En el caso de la acción de las enzimas, algunos nudos no aparecen y otros con alta frecuencia. Con esta información los matemáticos tratan de sugerir algunas hipótesis sobre el mecanismo de la intervención de las diferentes enzimas, por ejemplo (Short, 2004):

a) Una de las enzimas crea todos los nudos.

b) Otra hace cortes únicamente cuando una parte específica de la molécula está al lado de otra parte específica.

c) Otra hace siempre un doble corte y deja pasar dos trozos de la molécula antes de volver a pegar.

Recientemente, los químicos interesados en la síntesis de nuevos compuestos han empezado a voltear la vista hacia la Teoría de Nudos e intentan obtener nuevos compuestos al cambiar la forma en la cual los átomos están conectados, tomando como base la clasificación de los nudos (véase Pérez, 2002: 163).

6. Sexto "toro" de la tarde: "$$ millón de dólares $$"

El último toro de la tarde ha salido, y créame que es un toro enorme, sumamente pesado. Muchos matemáticos han intentado torearlo pero la gran mayoría ha recibido sendas cornadas de las que no siempre se han podido recuperar. Algunos otros les han dado algunas estocadas a sus hermanos "mayores" y han podido salir en hombros, también en algunos casos con la Medalla Fields que como ya dijimos es el máximo galardón al que puede aspirar un matemático. A este toro le he llamado "$$millón de dólares$$".

¿Se puede ganar un millón de dólares resolviendo un problema de matemáticas?

La respuesta es sí y no (Illanes, 2004),

Decimos que *sí* porque el Instituto de Matemáticas Clay de Cambridge, Massachusetts, ha ofrecido un millón de dólares por cada uno de "los siete problemas del milenio": siete enunciados que han traído de cabeza a los matemáticos de los últimos años del siglo XX, y que podrían haber sido ocho si el profesor Andrew Wiles no hubiera probado lo que se conoce como último Teorema de Fermat en 1994. Decimos que *no* porque no cualquiera se puede sentar a pensar uno de estos problemas y resolverlo. Sin duda alguna es más fácil pegarle al "gordo" de la Lotería Nacional.

Este ofrecimiento se hizo en el año 2000 en París, recordando que en 1900, en esta ciudad, el matemático David Hilbert propuso una lista de 23 problemas que a su entender representaban las líneas de investigación en matemáticas más interesantes a desarrollar en el siglo XX.

Algunos matemáticos han afirmado en diversas ocasiones haber resuelto completamente uno de estos problemas, concretamente el cuarto, la llamada conjetura de Poincaré aunque ya había sido resuelta en los casos de $n > 3$ por algunos matemáticos:

a) el caso $n = 1$ es trivial.

b) el caso $n = 2$ es clásico (véase Armstrong, 1987 y llanes, 1999).

c) el caso $n = 4$ fue probado por Freedman en 1982, con lo cual ganó la Medalla Fields en 1986.

a) el caso $n = 5$ fue probado por Zeeman en 1961

b) el caso $n = 6$ fue probado por Stallings en 1962

c) el caso fue probado por Smale en 1961 (después extendió su demostración para el caso $n \geq 5$).

Se mantenía o se mantiene inaccesible, curiosamente para $n = 3$. Brevemente, el enunciado de esta conjetura dice lo siguiente: Para $n \geq 3$ la única variedad compacta, orientable y simplemente conexa es topológicamente equivalente a la esfera de dimensión n.

Esto es, la superficie de una esfera, en cualquier número de dimensiones mayor que 2 puede contraerse hasta un único punto de forma continua.

Baste saber que Poincaré demostró una propiedad particular que tienen las esferas. La pregunta es si esa propiedad es igual con una esfera en la cuarta dimensión, la quinta, y en general para cualquier dimensión, los interesados en entender un poco a nivel de divulgación el concepto de dimensión pueden consultar (Barr, 1964).

En marzo de 2003, G. Perelman anunció haber demostrado la conjetura de Poincaré utilizando técnicas de geometría diferencial, concretamente lo que hizo Perelman fue validar el programa que en 1982 R. Hamilton había establecido mediante el uso de Flujos de Ricci para demostrar la conjetura de Poincaré y la conjetura de Geometrización de Thurston. El 22 de agosto de 2006 en el marco del Congreso Internacional de Matemáticas que se celebró en Madrid, fue entregada de manos del rey Juan Carlos de España, la medalla Fields, a cuatro matemáticos reconocidos, entre ellos se encontraba G. Perelman por su contribución a la Geometría y sus ideas revolucionarias en la estructura analítica y geométrica de los Flujos de Ricci. Los especialistas que revisaron el trabajo de Perelman aseguran no haber encontrado ningún problema, pero Perelman rechazó tal galardón desconociéndose las razones por las que lo hizo, también cabe destacar que a la fecha no ha reclamado el premio del millón de dólares que se otorgaría a quien resolviera la conjetura de Poincaré.

Concluye la corrida

A manera de conclusión quiero comentar que existen muchos problemas matemáticos o temas relacionados con la topología, por citar algunos la geometría del espacio fase, los sistemas dinámicos y la geometría fractal, en otras áreas como la física (física cuántica y cosmología), la química, biología, las comunicaciones, entre otras. Existen muchas propiedades y temas importantes de los espacios topológicos a parte de la conexidad están por ejemplo la compacidad, la paracompacidad, la metrizabilidad de un espacio, éstas y muchas más pueden ser consultas de manera profunda en (Dugundji, 1977; Engelking, 1989; Munkres, 1975; Willard, 1970). Finalmente, existen muchos "toritos topológicos" a los que he intentado lidiar, a veces sufriendo "graves cornadas" y en algunas ocasiones, no muchas, logrando un buen pase al "torito". La topología a la que yo comparo con una bellísima mujer vestida de blanco en un paraíso llamado matemáticas y por ende mi afición por la tauromaquia topológica ha hecho mi vida tal vez un poco interesante y productiva. ergo

Bibliografía

Armstrong, M. A. (1987). *Topología Básica*. Reverté, España.

Barr, S. (1964). *Experiments in Topology*. Dover Publications, Inc. Nueva York.

Carlavilla -Fernández, J. L. y G. Fernández -García (1994). *Aventuras Topológicas*. Rubes Editorial, España.

Dugundji, J. (1977). *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, Mas. USA.

Engelking, R. (1989). *General Topology*. Heldermann, Verlag Berlin.

Illanes -Mejía, A.

______ (1999). *La caprichosa forma de globión*. La Ciencia para Todos, 168, SEP-Conacyt- FCE, México.

______ (2004). *Uno de a millón*. Calendario matemático, México.

Kosniowski, C. (1986). *Topología algebraica*. Reverté, España.

Massey, W. S. (1991). *A Basic Course in Algebraic Topology*. Springer -Verlag, New York, USA.

Munkres, J. R. (1975). *Topology, A First Course*. Prentice Hall Inc, Nueva Jersey, USA.

Pérez, J. A. (2002). *Galería matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Short, H. (2004). *Moléculas de ADN anudadas*. Calendario matemático, México.

Stewart, J. (2002). *Cálculo Multivariable*. 4a. ed. Thomson Learning, México.

Willard, S. (1970). *General Topology*. Addison Wesley Publishing Company, Inc Reading, Mass, USA.