UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO
FACULTAD DE QUÍMICA
PROGRAMA EDUCATIVO DE QUÍMICO EN ALIMENTOS

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

UNIDAD TEMÁTICA
TEORÍA DE LA PROBABILIDAD

M. EN P. E. ANA MARGARITA ARRIZABALAGA REYNOSO
TOLUCA DE LERDO; ESTADO DE MÉXICO. SEPTIEMBRE DE 2015

PROBABILIDAD

Introducción

La **Probabilidad** mide la frecuencia con la que aparece un resultado determinado cuando se realiza un experimento.

El **experimento tiene que ser aleatorio**; es decir, que pueden presentarse diversos resultados, dentro de un conjunto posible de soluciones, y esto aún realizando el experimento en las mismas condiciones. Por lo tanto, a priori no se conoce cual de los resultados se va a presentar.

Ejemplo

En la Lotería de Navidad, el "Premio Gordo" puede ser cualquier número entre el 1 y el 100.000, pero no se sabe a priori cual va a ser (si se supiera no tendría validez el sorteo).

Hay experimentos que no son aleatorios y por lo tanto no se les puede aplicar la Teoría de la Probabilidad.

Antes de calcular las probabilidades de un experimento aleatorio hay que definir una serie de conceptos.

Evento elemental hace referencia a cada una de las posibles soluciones o resultados que se pueden presentar.

Evento compuesto es un subconjunto de sucesos elementales.

Al conjunto de todos los posibles sucesos elementales se le denomina **espacio muestral**. Cada experimento aleatorio tiene definido su espacio muestral (es decir, un conjunto con todas las soluciones posibles).

Probabilidad y la relación entre eventos

Entre los eventos compuestos se pueden establecer distintas relaciones:

a) Un evento puede estar contenido en otro: las posibles soluciones del primer suceso también lo son del segundo, pero este segundo suceso tiene además otras soluciones suyas propias. Siempre que se da el suceso A se da el suceso B, pero no al contrario.

b) Dos eventos pueden ser iguales: esto ocurre cuando siempre que se cumple uno de ellos se cumple obligatoriamente el otro y viceversa.

c) Unión de dos o más eventos: la unión será otro suceso formado por todos los elementos de los sucesos que se suman.

d) Intersección de sucesos: es aquel suceso compuesto por los elementos comunes de dos o más sucesos que se intersectan.

e) Eventos mutuamente excluyentes: son aquellos que no se pueden dar al mismo tiempo ya que no tienen elementos comunes (su intersección es el conjunto vacío).

f) Eventos complementarios: son aquellos que si no se da uno, obligatoriamente se tiene que dar el otro.

Cálculo de probabilidades

Probabilidad

La probabilidad mide la mayor o menor posibilidad de que se dé un determinado resultado (evento) cuando se realiza un experimento aleatorio.

La probabilidad toma valores entre 0 y 1 (o expresados en porcentaje, entre 0% y 100%):

a) **El valor cero corresponde al evento imposible**

b) **El valor uno corresponde al evento seguro**

c) **El resto de eventos tendrá probabilidades entre cero y uno**: que será tanto mayor cuanto más probable sea que dicho suceso tenga lugar.

¿Cómo se mide la probabilidad?
Uno de los métodos más utilizados es aplicando la **Regla de Laplace:** define la probabilidad de un evento como el cociente entre sucesos favorables y sucesos posibles.

P(A) = Casos favorables / casos posibles

Para poder aplicar la **Regla de Laplace** el experimento aleatorio tiene que cumplir **dos requisitos:**

El número de resultados posibles (eventos) tiene que ser finito. Si hubiera infinitos resultados, al aplicar la regla "casos favorables / casos posibles" el cociente siempre sería cero.

Todos los sucesos tienen que tener la misma probabilidad.

A la **Regla de Laplace** también se le denomina **"probabilidad a priori"**, ya que para aplicarla hay que conocer antes de realizar el experimento cuales son los posibles resultados y saber que todos tienen las mismas probabilidades.

¿Y si el experimento aleatorio no cumple los dos requisitos indicados, qué se hace?
Aplicar el Modelo Frecuentista
Cuando se realiza un experimento aleatorio un número muy elevado de veces, las probabilidades de los diversos posibles eventos empiezan a converger hacia valores determinados, que son sus respectivas probabilidades.

En este modelo ya no será necesario que el número de soluciones sea finito, ni que todos los eventos tengan la misma probabilidad.

A esta definición de la probabilidad se le denomina **probabilidad a posteriori**, ya que tan sólo repitiendo un experimento un número elevado de veces se puede saber cuál es la probabilidad de cada suceso.

Probabilidad de sucesos
Al definir los eventos se habló de las diferentes relaciones que pueden guardar dos sucesos entre sí, así como de las posibles relaciones que se pueden establecer entre los mismos.

Un suceso puede estar contenido en otro: entonces, la probabilidad del primer evento será menor que la del evento que lo contiene.

Dos eventos pueden ser iguales: en este caso, las probabilidades de ambos sucesos son las mismas.

Intersección de eventos: es aquel suceso compuesto por los elementos comunes de los dos o más sucesos que se intersectan. La probabilidad será igual a la probabilidad de los elementos comunes.

Unión de dos o más eventos: la probabilidad de la unión de dos sucesos es igual a la suma de las probabilidades individuales de los dos sucesos que se unen, menos la probabilidad del suceso intersección

Propiedades de la probabilidad

P(ϕ) = 0

P(A) = 1- P($\overline{A}$)

Si A y B son sucesos tales que $A \subset B$ entonces P(A)$\leq$P(B)

P($A \cup B$) = P(A) + P(B) - P($A \cap B$)

P($A \setminus B$) = P(A)-P($A \cap B$)

Eventos mutuamente excluyentes: la probabilidad de la unión de dos sucesos incompatibles será igual a la suma de las probabilidades de cada uno de los sucesos (ya que su intersección es el conjunto vacío y por lo tanto no hay que restarle nada).

Eventos complementarios: la probabilidad de un evento complementario de un evento (A) es igual a 1 - P(A)

Unión de eventos complementarios: la probabilidad de la unión de dos sucesos complementarios es igual a 1.

Propiedades de la unión e intersección de eventos

1. **Asociativa**:
   Unión $\rightarrow$ ($A \cup B$) $\cup C$ = $A \cup$ ($B \cup C$)
   Intersección $\rightarrow$($A \cap B$) $\cap C$ = $A \cap (B \cap C)$

2. **Conmutativa**:
   Unión $\rightarrow A \cup B$ =B $\cup$A
   Intersección $\rightarrow A \cap B$ =B $\cap$A

3. **Idempotente**:
   Unión $\rightarrow$A $\cup$A =A
   Intersección $\rightarrow$A $\cap$A =A

4. **Simplificativa**:
   A $\cup (B \cap A)$=A; A $\cap$(B $\cup$A)=A

5. **Distributiva**:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

6. $A \cup \overline{A} = E$
$A \cap \overline{A} = \phi$

Consecuencias:

$A \cup \phi = A$; $A \cap \phi = \phi$

$A \cap E = A$; $A \cup E = E$

Leyes de Morgan: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ y $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Probabilidad Condicional

Las **probabilidades condicionales** se calculan una vez que se ha incorporado información adicional a la situación de inicio.

Las probabilidades condicionales se calculan aplicando la siguiente fórmula:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Donde:
P(B/A) es la probabilidad de que suceda el evento B dado que se haya dado el suceso A.
P (B · A) es la probabilidad del suceso simultáneo de A y de B
P (A) es la probabilidad a priori del suceso A

Ejemplo

En un estudio sanitario se ha llegado a la conclusión de que la probabilidad de que una persona sufra problemas coronarios (evento B) es el 0.10 (probabilidad a priori).

Además, la probabilidad de que una persona sufra problemas de obesidad (evento A) es el 0.25 y la probabilidad de que una persona sufra a la vez problemas de obesidad y coronarios (evento intersección de A y B) es del 0.05.

Calcular la probabilidad de que una persona sufra problemas coronarios si está obesa (probabilidad condicionada P(B/A)).
P (B · A) = 0.05
P (A) = 0.25
P (B/A) = 0.05 / 0.25 = 0.20

Por lo tanto, la probabilidad condicionada es superior a la probabilidad a priori. No siempre esto es así, a veces la probabilidad condicionada es igual a la probabilidad a priori o menor.

Regla de la Multiplicación

La **probabilidad compuesta** o regla de multiplicación de probabilidades se deriva de la probabilidad condicional.

La probabilidad de que se den simultáneamente dos eventos (suceso intersección de A y B) es igual a la probabilidad a priori del evento A multiplicada por la probabilidad del evento B condicionada al cumplimiento del evento A.

La **fórmula** para calcular esta probabilidad compuesta es:

$$P(A \cap B) = P(B|A)\ P(A)$$

Ejemplo

El evento A (porcentaje de varones mayores de 40 años casados) y el evento B (varones mayores de 40 años con más de 2 hijos) y se obtiene la siguiente información:

35% de los varones mayores de 40 años están casados.
De los varones mayores de 40 años y casados, 30% tienen más de 2 hijos (evento B condicionado al evento A).

Calcular la probabilidad de que un varón mayor de 40 años esté casado y tenga más de 2 hijos (intersección de A y B).

$P\ (A) = 0.35$
$P\ (B/A) = 0.30$
$P\ (A \cdot B) = 0.35 * 0.30 = 0.105$

Es decir, un 10.5% de los varones mayores de 40 años están casados y tienen más de 2 hijos.

Ejemplo

El evento A (alumnos que hablan inglés) y el evento B (alumnos que hablan alemán) y se obtiene la siguiente información:

50% de los alumnos hablan inglés.
De los alumnos que hablan inglés, 20% hablan también alemán (evento B condicionado al evento A).

Calcular la probabilidad de que un alumno hable inglés y alemán (intersección de A y B).

P (A) = 0.50
P (B/A) = 0.20
P (A · B) = 0.50 * 0.20 = 0.10
Es decir, 10% de los alumnos hablan inglés y alemán.

Si el **evento A es independiente del evento B**, entonces **el evento B** también es **independiente del evento A.**

Ejemplo

Evento A: la probabilidad de que haga buen tiempo es del 0.4
Evento B: la probabilidad de tener un accidente es del 0.1
Evento intersección: la probabilidad de que haga buen tiempo y tener un accidente es del 0.08.

Se cumple alguna de las condiciones señaladas:
P(B/A) = P(A · B) / P(A) = 0.08 / 0.4 = 0.2, que no es igual a P(B)
P(A/B) = P(A · B) / P(B) = 0.08 / 0.6 = 0.133, que no es igual a P(A)
P(A · B) = 0.08, que no es igual a P(A) multiplicado por P(B).

Por lo tanto, no se cumple ninguna de las tres condiciones señaladas por lo que **estos dos eventos no son independientes**, sino que existe algún grado de dependencia entre ellos.

Ejemplo
Evento A: la probabilidad de que haga buen tiempo es del 0.4
Evento B: la probabilidad de salir cara al lanzar una moneda es del 0.5
Evento intersección: la probabilidad de que haga buen tiempo y que salga cara es 0.2

Se cumple alguna de las condiciones señaladas:
P(B/A) = P(A · B) / P(A) = 0.2 / 0.4 = 0.5, igual que P(B)
P(A/B) = P(A · B) / P(B) = 0.2 / 0.6 = 0.4, igual que P(A)
P(A · B) = 0.2, igual a P(A) multiplicado por P B)

Por lo tanto, **estos dos sucesos sí son independientes.**

Referencias Bibliográficas

- Celis de la Rosa, A. de J. y Labrada M., V. (2014). *Bioestadística*. México: Manual Moderno. ISBN: 978-607-448-423-6.
- De Oteysa, E., Lam, E., Hernández, C., y Carrillo, A. (2015). *Probabilidad y Estadística*. México: Pearson. ISBN: 978-607-32-3401-6.
- Devore, J. (2012). *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias*. México: Cengage. ISBN-978-607-481-619-8.
- Garza O., B. (2014). *Estadística y Probabilidad*. México: Pearson. ISBN: 978-607-32-2783-4.
- Gutiérrez B., A. L. (2012). *Probabilidad y estadística, un enfoque por competencias*. México: McGraw Hill. ISBN978-607-15-0712-9.
- Johnson, R. A. (2012). *Probabilidad y Estadística para Ingenieros de Miller y Freud*. México: Pearson. ISBN: 978-607-32-0799-7.
- Johnson, R., y Kuby, P. (2012). *Estadística Elemental*. México: Cengage. ISBN: 978-607-481–807-9.
- Mendenhall, W., Beaver, R. J. y Beaver, B. M. (2008). *Introducción a la Probabilidad y Estadística*. México: Thomson. ISBN: 978-970-686-794-0.
- Pagano, M. y Gauvreau, K. (2001). *Fundamentos de Bioestadística*. México: International Thomson Editores.
- Spiegel, M. R. (2013). Probabilidad y Estadística. Serie Schaum. México: McGraw Hill. ISBN: 978-607-15-1188-1.
- Triola, M. F. (2009). Estadística. México: Pearson Educación. ISBN: 978-970-26-1287-2.
- Walpole, R. E. y Myers, R. H. (2014). Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias. México: Pearson Educación. ISBN: 978-670-32-1417-9.