UNIVERSIDAD AUTONOMA DEL ESTADO DE MEXICO

UNIDAD ACADÉMICA PROFESIONAL TIANGUISTENCO

Unidad VI:

Inversa de Matrices

Unidad de Aprendizaje:

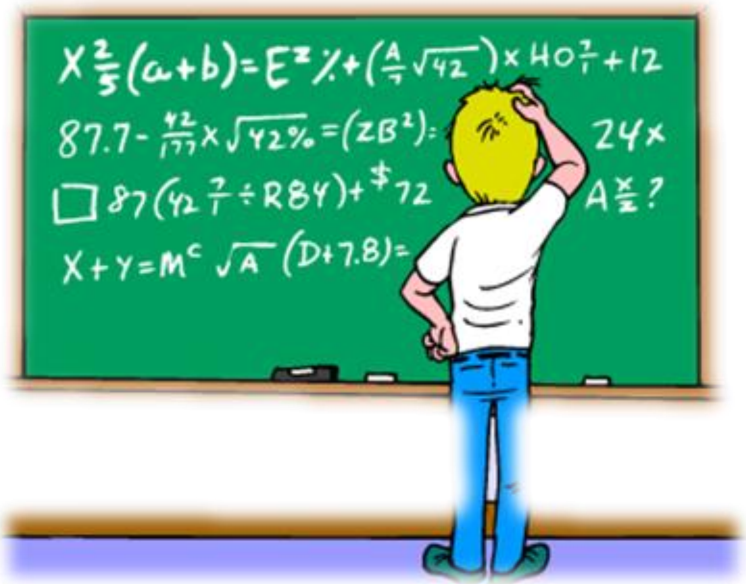
“ALGEBRA APLICADA”

Elaboró:

- ***M. en Ed. Raul Mendez Ramirez***

21.04.15

CONTENIDO



- **Guión explicativo**

  - 6.1 Introducción a Inversas de una matriz
  - 6.2 Inversa de una matriz por reducción de renglones
  - 6.3 Matriz de cofactores
  - 6.4 Inversa de una matriz por medio de la Adjunta

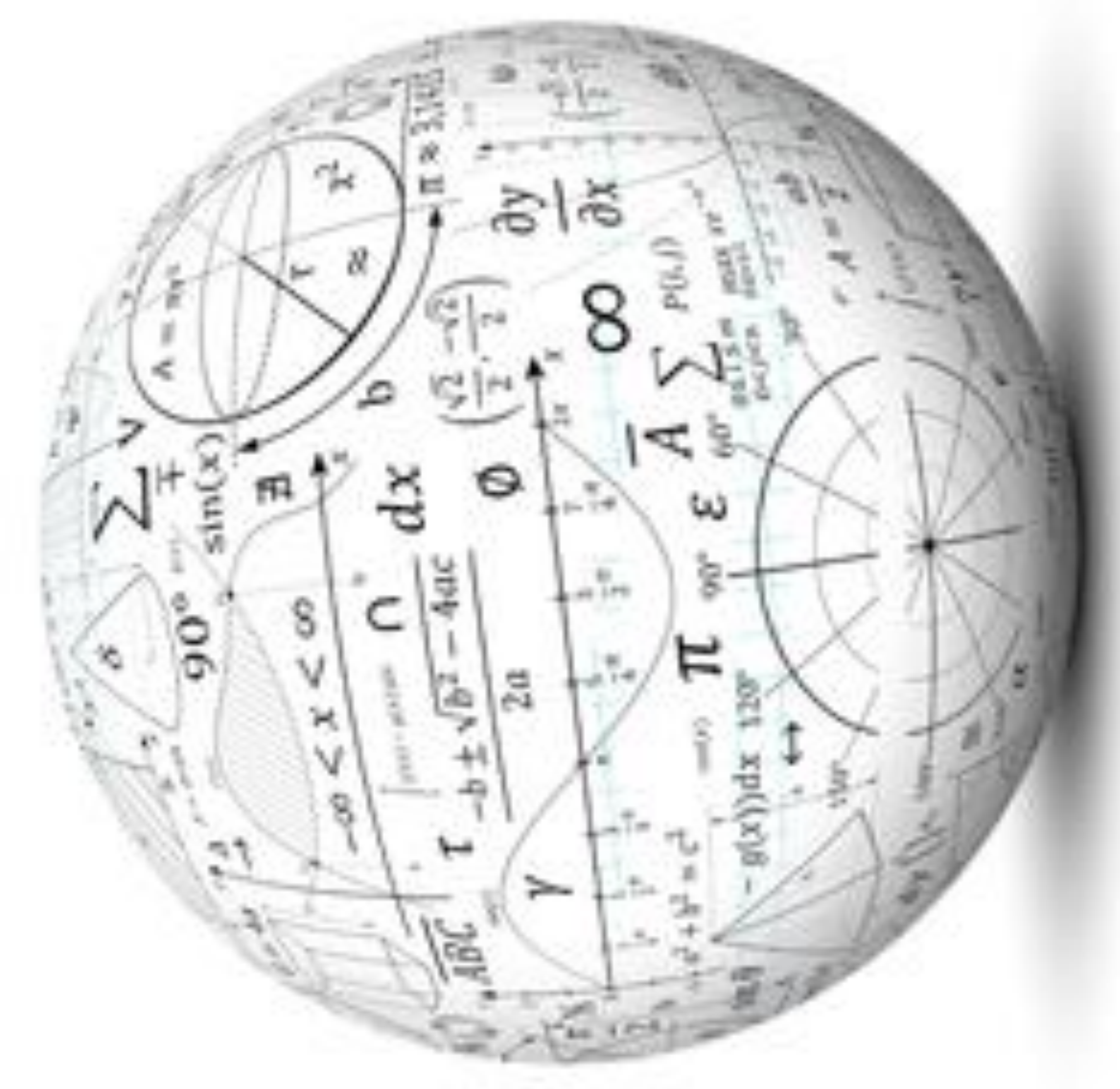
Guion explicativo

La asignatura de Algebra aplicada pertenece al área curricular de ciencias básicas de la licenciatura en Producción Industrial impartida en la Unidad Académica Profesional Tianguistenco, la cual tiene como propósito que el estudiante conozca y utilice los métodos elementales de las operaciones matriciales y la manipulación básica de vectores en la aplicación a problemas de ingeniería.

En esta unidad de aprendizaje aprenderemos que las operaciones con matrices y determinantes nos sirven para calcula sistemas de ecuaciones de manera mas simple y obtener los resultados con operaciones simples. Para cumplir con los objetivos particulares del programa que se enlistan a continuación:

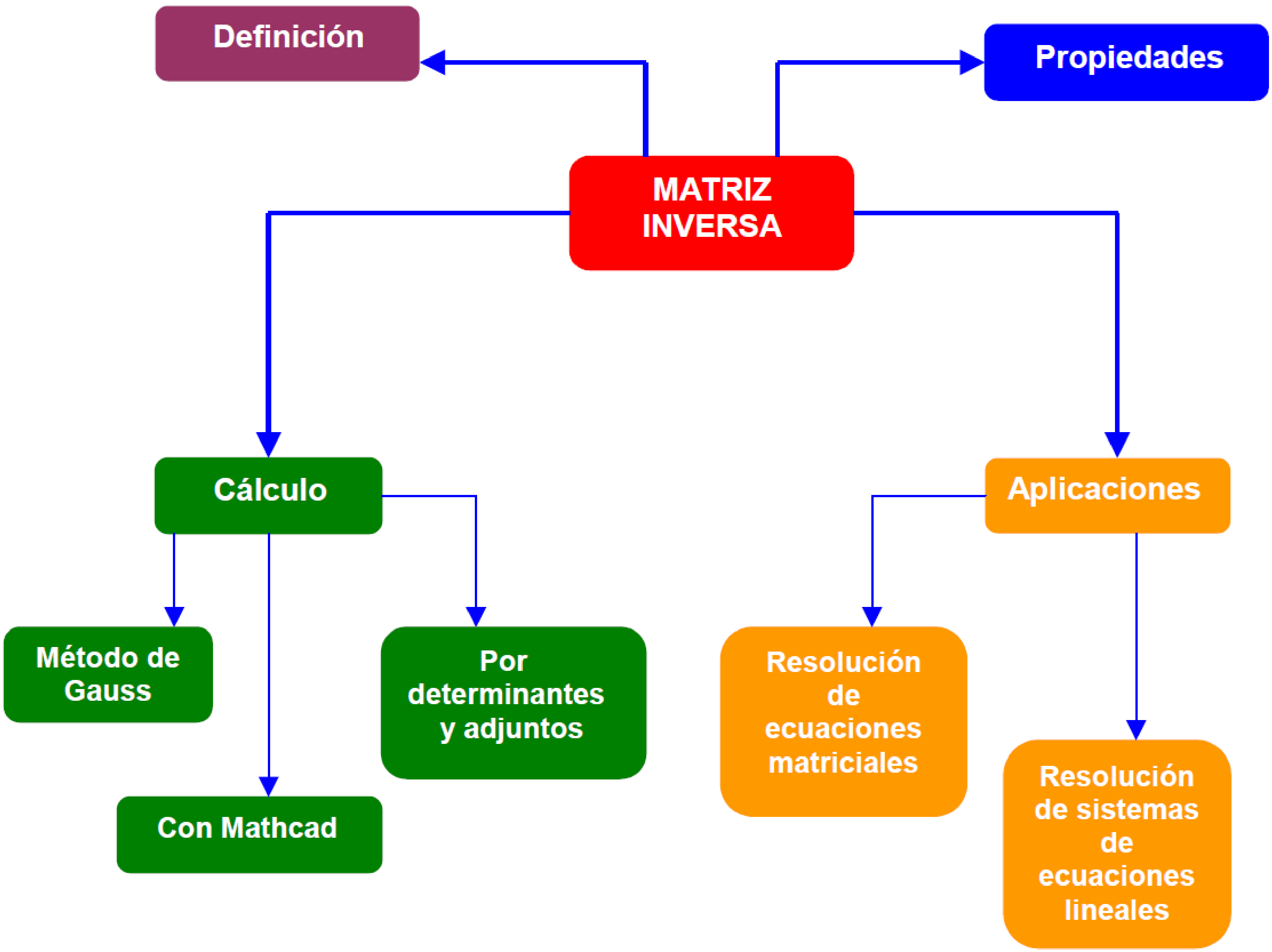
- **Cognitivo:** Diferenciar los diferentes métodos para el cálculo de inversas de matrices
- **Procedimental:**Calcular inversa de matrices mediante diferentes métodos
- **Psicomotriz:** Explicar la importancia de las inversas de matrices en la ingeniería que se estudia
- **Actitudinal:** Analizar las aplicaciones de los métodos utilizados para obtener inversas de matrices y su aplicación en su entorno

6.1 Introducción a Inversas de una matriz



Una matriz nos permite escribir sistemas lineales de una manera compacta que facilita la automatización del método de eliminación, dándonos un procedimiento rápido y eficaz para determinar las soluciones.

Su uso, sin embargo, no nos proporciona solamente la oportunidad de contar con una notación conveniente, sino también resolver sistemas de ecuaciones lineales y otros problemas de manera rápida y eficiente, desarrollando operaciones sobre las matrices y trabajando con ellas de acuerdo con las reglas que cumplen. Por supuesto, como debe hacer cualquier buena definición, la del concepto de matriz no sólo permite mirar de otra forma los problemas existentes, sino que, además, da lugar a muchas nuevas preguntas, algunas de las cuales analizaremos en esta presentación.



Definición
Propiedades
MATRIZ INVERSA
Cálculo
Aplicaciones
Método de Gauss
Con Mathcad
Por determinantes y adjuntos
Resolución de ecuaciones matriciales
Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

La inversa de una matriz

Sean A y B dos matrices de $n \times n$. Suponga que

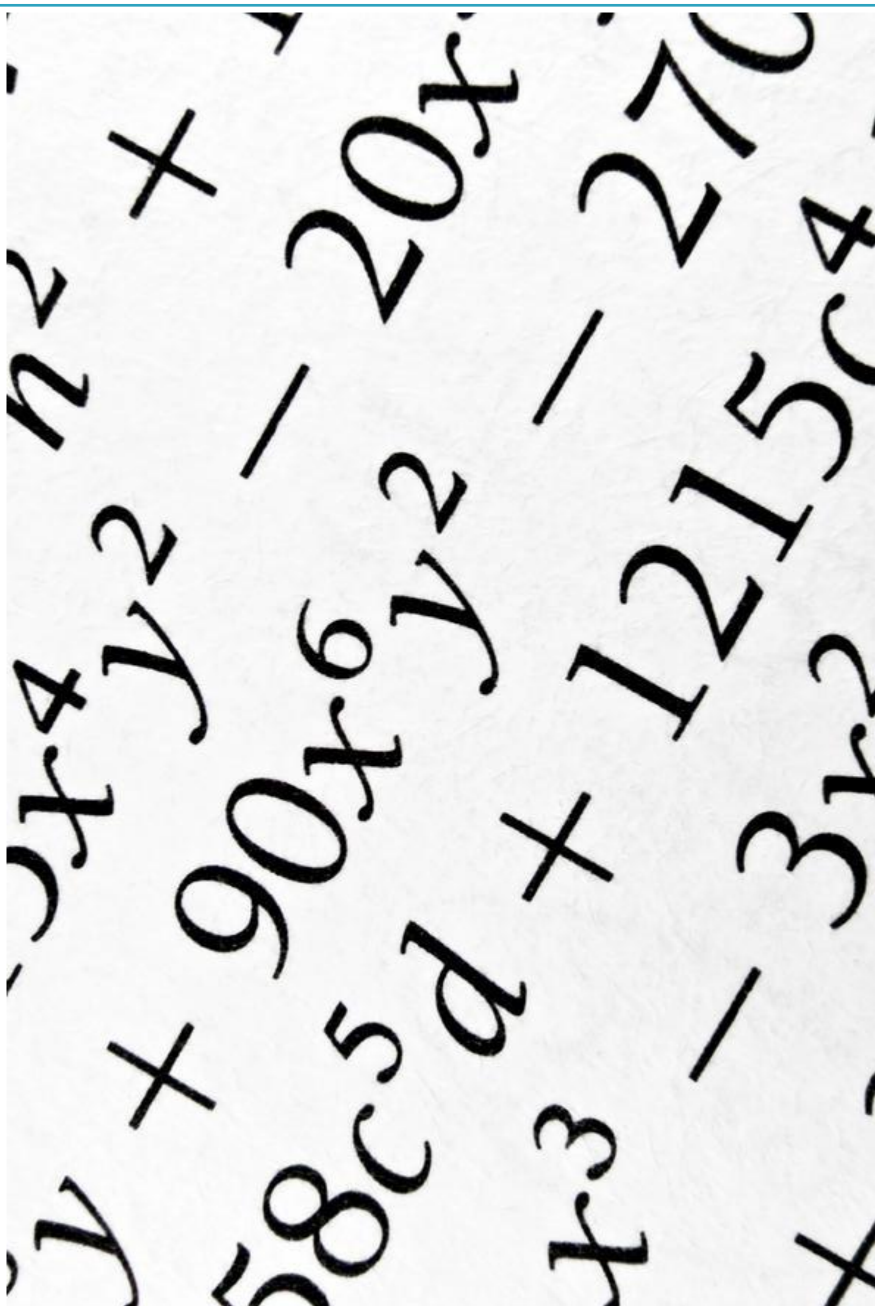
$$AB = BA = I$$

Entonces B se llama la **inversa** de A y se denota por A^{-1}. Entonces se tiene

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I}$$

Si A tiene inversa, entonces se dice que A es **invertible**.

6.2 Inversa de una matriz por reducción de renglones



Cálculo de la inversa de una matriz de 2 x 2

Sea $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$. Calcule A^{-1} si existe.

Suponga que A^{-1} existe. Se escribe $A^{-1}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ y se usa el hecho de que $AA^{-1}=I$. Entonces

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x-3z & 2y-3w \\ -4x+5z & -4y+5w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las dos últimas matrices pueden ser iguales únicamente si cada una de sus componentes correspondientes son iguales. Esto significa que

$$2x \qquad -3z \qquad = 1 \tag{3}$$

$$2y \qquad - 3w = 0 \tag{4}$$

$$-4x \qquad +5z \qquad = 0 \tag{5}$$

$$-4y \qquad + 5w = 1 \tag{6}$$

Éste es un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Observe que hay dos ecuaciones que involucran únicamente a x y a z [las ecuaciones (3) y (5)] y dos que incluyen sólo a y y w [las ecuaciones (4) y (6)]. Se escriben estos dos sistemas en la forma aumentada:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \end{array}\right) \tag{7}$$

$$\left(\begin{array}{rr|r} 2 & -3 & 0 \\ -4 & 5 & 1 \end{array}\right) \tag{8}$$

Si A es invertible, entonces el sistema definido por (3), (4), (5) y (6) tiene una solución única y, por lo que acaba de decirse, la reducción de renglones da

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & x & y \\ 0 & 1 & z & w \end{array}\right)$$

Ahora se llevan a cabo los cálculos, observando que la matriz de la izquierda en (9) es A y la matriz de la derecha es I:

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 + 4R_2} \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -R_2} \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to -R_1 + \frac{3}{2}R_2} \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Así, $x = -\frac{5}{2}$, $y = -\frac{3}{2}$, $z = -2$, $w = -1$ y $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Se calcula

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces A es invertible y $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

En resumen…

Procedimiento para encontrar la inversa de una matriz cuadrada A

Paso 1. Se escribe la matriz aumentada $(A|I)$.

Paso 2. Se utiliza la reducción por renglones para poner la matriz A a su forma escalonada reducida por renglones.

Paso 3. Se decide si A es invertible.

a) Si la forma escalonada reducida por renglones de A es la matriz identidad I, entonces A^{-1} es la matriz que se tiene a la derecha de la barra vertical.

b) Si la reducción de A conduce a un renglón de ceros a la izquierda de la barra vertical, entonces A no es invertible.

6.3 Matriz de cofactores

6.4 Inversa de una matriz por medio de la Adjunta

ADJUNTO DE UNA MATRIZ

Consideremos una matriz n-cuadrada $A = (a_{ij})$ sobre un cuerpo K. El adjunto de A, denotado por adj A, es la traspuesta de la matriz de cofactores de A:

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Obtenemos la determinante….

1

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$

2

Input

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}\right)$$

Solutions steps using diagonals

Solution steps using expansion by minors

Output -15

Se obtienen los cofactores….

2

Los cofactores de los nueve elementos de *A* son:

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -17 \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \quad A_{13} = + \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -11 \quad A_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 7 \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3$$

Se hace la transpuesta de la matriz….

$$\begin{pmatrix} -17 & 4 & 6 \\ -11 & 7 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} -17 & -11 & 1 \\ 4 & 7 & -2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

3

Utilizamos la formula….

4

$$\frac{1}{-15}\left(\begin{pmatrix} -17 & -11 & 1 \\ 4 & 7 & -2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}\right)$$

Formula:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\mathrm{adj}\,A)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{17}{15} & \frac{11}{15} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{4}{15} & -\frac{7}{15} & \frac{2}{15} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

5

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{17}{15} & \frac{11}{15} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{4}{15} & -\frac{7}{15} & \frac{2}{15} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

A . A^{-1}= I

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobación….

La traspuesta de la matriz de los cofactores anteriores proporciona el adjunto de A:

$$\text{adj}\, A = \begin{pmatrix} -17 & -11 & 1 \\ 4 & 7 & -2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

- *Aplicación del adjunto para hallar la matriz inversa*

Para toda matriz cuadrada A,

$A \cdot (\text{adj}\ A) = (\text{adj}\ A) \cdot A = |A| I$

De este modo, si $|A| \neq 0$,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj}\, A)$$

Formulas…

Ejemplo 3 Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Entonces adj $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$.

La adjunta de una matriz de 2 × 2

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Entonces adj $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$.

Ejercicios…

*Obtener la matriz inversa (si existe) de la matriz dada:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \\ 4 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcule A^{-1} si existe.

Ejercicios...

1. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 7 & -21 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

0. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 19 & -7 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & -6 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

Ejercicio paso a paso

(Matriz Inversa Adjunta)

4X4

Paso 1

$$+2\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right.$$

$(3.0.1)+(0.-2.0)+(-1.1.3)-(0.0.-1)-(3.-2.3)-(-1.1.0)$

$= 0+0-3+0+18+0$

15

$15(2) = \boxed{30}$ Para det.

$$-(-6)\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right. = \begin{array}{l} 0-0-0+0+6-0 \\ 6 \\ 6(-6) = \boxed{36} \end{array}$$

Para det.

$$+4\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right. = \begin{array}{l} -1-6-0+1+0+0 \\ -6 \\ -6(4) = \boxed{-24} \end{array}$$

Para det

$30+36-24 = \boxed{42} \rightarrow$ Determinante

Paso 2

$$+\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right| = \begin{array}{l} 0+0-3+0+18+0 \\ \boxed{15} \end{array}$$

$$-\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right| = \begin{array}{l} 0-0-0+0+6-0 \\ 6 \\ \boxed{-6} \end{array}$$

$$+\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right| = \begin{array}{l} -1-6-0+1+0+0 \\ \boxed{-6} \end{array}$$

$$-\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right| = \begin{array}{l} 3+0+0-0-0-0 \\ -3 \\ \boxed{-3} \end{array}$$

Paso 2

$$- \left|\begin{array}{ccc|cc} -6 & 4 & 0 & -6 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right| = \begin{array}{l} 0 - 0 + 0 - 0 - 36 + 4 \\ -32 \\ \boxed{32} \end{array}$$

$$+ \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right| = \begin{array}{l} 0 - 8 + 0 - 0 + 12 + 0 \\ \boxed{4} \end{array}$$

$$- \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -6 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right| = \begin{array}{l} -2 + 12 + 0 - 0 + 0 - 0 \\ 10 \\ \boxed{-10} \end{array}$$

$$+ \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -6 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right| = \begin{array}{l} 6 - 0 + 0 - 4 - 0 + 0 \\ \boxed{2} \end{array}$$

Paso 3

$$B = \begin{vmatrix} 15 & -6 & -6 & -3 \\ 32 & 4 & -10 & 2 \\ -6 & -6 & -6 & -24 \\ -20 & 8 & 22 & 4 \end{vmatrix} \qquad B^T = \begin{vmatrix} 15 & 32 & -6 & -20 \\ -6 & 4 & -6 & 8 \\ -6 & -10 & -6 & 22 \\ -3 & 2 & -24 & 4 \end{vmatrix}$$

Paso 4

$$A^{-1} = \frac{1}{42}\begin{vmatrix} 15 & 32 & -6 & -20 \\ -6 & 4 & -6 & 8 \\ -6 & -10 & -6 & 22 \\ -3 & 2 & -24 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5/14 & 16/21 & -1/7 & -10/21 \\ -1/7 & 2/21 & -1/7 & 4/21 \\ -1/7 & -5/21 & -1/7 & 11/21 \\ -1/14 & 1/21 & -4/7 & 2/21 \end{vmatrix}$$

Comprobación…

Paso 4

$$A \cdot A^{-1} = \begin{vmatrix} 2 & -6 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5/14 & 16/21 & -1/7 & -10/21 \\ -1/7 & 2/21 & -1/7 & 4/21 \\ -1/7 & -5/21 & -1/7 & 11/21 \\ -1/14 & 1/21 & -4/7 & 2/21 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5/7 + 6/7 - 4/7 - 0 = 1 & 32/21 - 4/7 - 20/21 + 0 = 0 & -2/7 + 6/7 - 4/7 - 0 = 0 & -20/21 - 8/7 + 44/21 - 0 = 0 \\ 5/14 - 3/7 - 0 + 1/14 = 0 & 16/21 + 2/7 - 0 - 1/21 = 1 & -1/7 - 3/7 + 0 + 4/7 = 0 & -10/21 + 4/7 + 0 - 2/21 = 0 \\ 0 - 1/7 - 0 + 1/7 = 0 & 0 + 2/21 - 0 - 2/21 = 0 & 0 - 1/7 + 0 + 8/7 = 1 & 0 + 4/21 + 0 - 4/21 = 0 \\ 5/14 - 0 - 3/7 + 1/14 = 0 & 16/21 + 0 - 5/7 - 1/21 = 0 & -1/7 - 0 - 3/7 + 4/7 = 0 & -10/21 + 0 + 11/7 - 2/21 = 1 \end{vmatrix}$$

Finalmente….

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

La Matriz Identidad

MÉTODO GAUSS-JORDAN

PARA MATRICES DE 4 X 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Procedimiento. . . .

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[A_{1,4}(-2)]{A_{1,3}(-1)} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{A_{2,1}(-3)} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -11 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[A_{3,4}(-5)]{A_{3,1}(-1),\ A_{3,2}(1)} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -12 & 2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 3 & 0 & -5 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{M_3(-\frac{1}{5})} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -12 & 2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3/5 & 0 & 1 & -1/5 \end{array}\right] \xrightarrow[A_{4,3}(-1)]{A_{4,1}(12),\ A_{4,2}(-5)} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -26/5 & -3 & 11 & -12/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2/5 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3/5 & 0 & 1 & -1/5 \end{array}\right]$$

Por tanto…

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -26/5 & -3 & 11 & -12/5 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \\ -2/5 & 0 & 0 & 1/5 \\ -3/5 & 0 & 1 & -1/5 \end{bmatrix}$$

Comprobación....

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{26}{5} & -3 & 11 & -\frac{12}{5} \\ 2 & 1 & -4 & 1 \\ -\frac{2}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & 0 & 1 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{26}{5}+6+\frac{4}{5}-\frac{3}{5}=1 & -3+3-0+0=0 & 11-12-0+1=0 & -\frac{12}{5}+3-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}=0 \\ 0+2+\frac{2}{5}-\frac{12}{5}=0 & 0+1-0+0=1 & 0-4-0+4=0 & 0+1-\frac{1}{5}-\frac{4}{5}=0 \\ -\frac{26}{5}+6+\frac{2}{5}-\frac{6}{5}=0 & -3+3-0+0=0 & 11-12-0+2=1 & -\frac{12}{5}+3-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}=0 \\ -\frac{52}{5}+12-\frac{2}{5}-\frac{6}{5}=0 & -6+6+0+0=0 & 22-24+0+2=0 & -\frac{24}{5}+6+\frac{1}{5}-\frac{2}{5}=1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Identidad

Ejercicios….

16. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Referencias

- Grossman, S. (2008). *Algebra Lineal*. Mc Graw Hill; 6ta. Ed.
- Anton, H. (1980).*Introducción al Algebra Lineal*. Limusa, Noruega Editores, 3ra. ed.
- Kolman, N., Hill, D. (2006). *Algebra Lineal*. Pearson Education; Mexico. 8va.ed.