CÁLCULO INTEGRAL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

José Guadalupe Anaya Ortega

Integración en Términos Elementales

Proposito General

Proposito General de la Unidad de Aprendizaje

Manejar los conceptos fundamentales del cálculo integral y aplicarlos en forma colaborativa en diversas áreas haciendo énfasis en aplicaciones físicas y geométricas.
Manejar los diferentes métodos de integración. Analizar la importancia del teorema fundamental del cálculo.

Presentación

El presente material didáctico de solo visión proyectable, tiene como finalidad, desarrollar en los estudiantes la habilidad de la observación, reflexión y análisis sobre:
Integrabilidad de funciones.
Dentro del enfoque por competencias se pretende desarrollar en el estudiante la capacidad de análisis.

Especificaciones

La metodología que se sugiere para el mejor aprovechamiento del material respecto a cada tema, se describe a continuación, sin embargo a los jóvenes les resulta agradable el uso este tipo de recurso didáctico, específicamente las diapositivas considerándolas como notas de clase, para efectuar el repaso que fortalezca su aprendizaje.

Recursos que se utilizarán

1. Cañon,
2. Software: Cualquier visor de archivos pdf,
3. Computadora,
4. Pizarrón,
5. Material impreso.

Indicaciones de uso

El uso del presente material es de fácil acceso:

1. Abra el dispositivo de almacenamiento con doble clic.
2. Solo de clic para dejar pasar las diapositivas.
3. Con la tecla ESC se interrumpe la presentación.
4. Con las teclas de Redpág y Avpág puede avanzar y retroceder las diapositiva.

Competencias a desarrollar

1. De conocimientos
   1. Funciones Elementales.
   2. Métodos de Integración.
2. De Habilidades
   1. Identificación de postulados, hipótesis y conclusiones. Intuición sobre la veracidad o falsedad de una afirmación.
3. De Actitudes y Valores
   1. Disciplina, orden, tenacidad, gusto por enfrentar nuevos retos, paciencia y rigor en el razonamiento.

Índice General

Funciones Trigonométricas

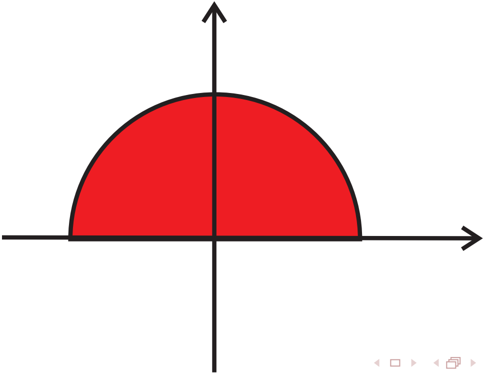
Definición

$$\pi = 2\int_{-1}^{1}(\sqrt{1-x^2})dx.$$

Funciones Trigonométricas

Definición

$$\pi = 2\int_{-1}^{1}(\sqrt{1-x^2})dx.$$



Funciones Trigonométricas

Ahora, para $x \in [-1, 1]$, sea $A(x)$ el área del sector limitado por la circunferencia unidad, el eje horizontal y el segmento de recta que une a los puntos $(0, 0)$ y $(x, \sqrt{1 - x^2})$.

Funciones Trigonométricas

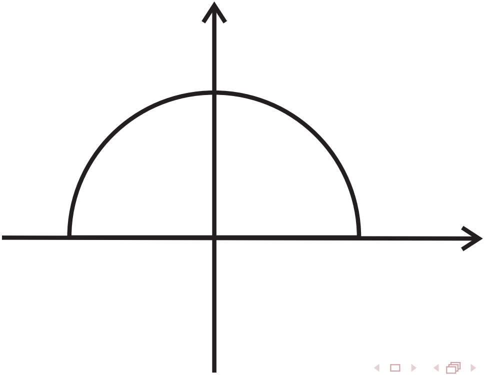
Ahora, para $x \in [-1, 1]$, sea $A(x)$ el área del sector limitado por la circunferencia unidad, el eje horizontal y el segmento de recta que une a los puntos $(0, 0)$ y $(x, \sqrt{1 - x^2})$.

Caso 1 $x \in [0, 1]$

Funciones Trigonométricas

Ahora, para $x \in [-1, 1]$, sea $A(x)$ el área del sector limitado por la circunferencia unidad, el eje horizontal y el segmento de recta que une a los puntos $(0, 0)$ y $(x, \sqrt{1-x^2})$.

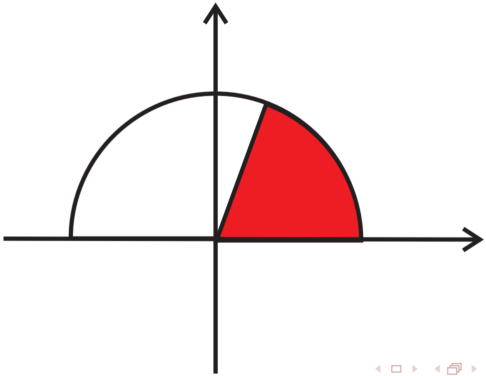
Caso 1 $x \in [0, 1]$



Funciones Trigonométricas

Ahora, para $x \in [-1, 1]$, sea $A(x)$ el área del sector limitado por la circunferencia unidad, el eje horizontal y el segmento de recta que une a los puntos $(0, 0)$ y $(x, \sqrt{1 - x^2})$.

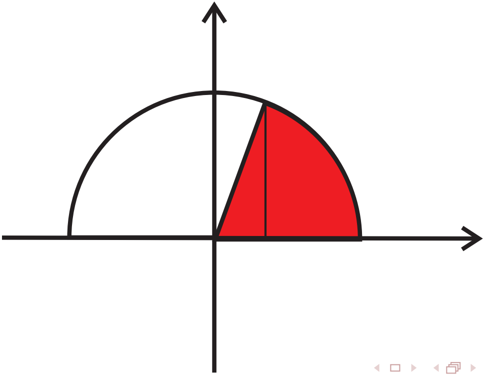
Caso 1 $x \in [0, 1]$



Funciones Trigonométricas

Ahora, para $x \in [-1, 1]$, sea $A(x)$ el área del sector limitado por la circunferencia unidad, el eje horizontal y el segmento de recta que une a los puntos $(0, 0)$ y $(x, \sqrt{1 - x^2})$.

Caso 1 $x \in [0, 1]$



Funciones Trigonométricas

$A(x)$: área del sector limitado por la circunferencia unidad, el eje horizontal y el segmento de recta que une a los puntos $(0,0)$ y $(x, \sqrt{1-x^2})$.

Funciones Trigonométricas

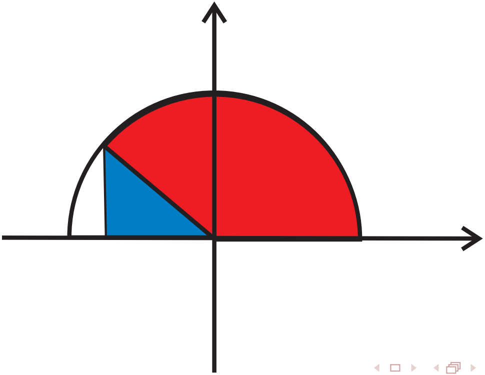
$A(x)$: área del sector limitado por la circunferencia unidad, el eje horizontal y el segmento de recta que une a los puntos $(0,0)$ y $(x, \sqrt{1-x^2})$.

Caso 2 $x \in [-1, 0]$

Funciones Trigonométricas

$A(x)$: área del sector limitado por la circunferencia unidad, el eje horizontal y el segmento de recta que une a los puntos $(0,0)$ y $(x, \sqrt{1-x^2})$.

Caso 2 $x \in [-1, 0]$



Funciones Trigonométricas

Definición

Si $x \in [-1, 1]$, entonces

$$A(x) = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \int_x^1 (\sqrt{1-x^2})dx.$$

Funciones Trigonométricas

Definición

Si $x \in [-1, 1]$, entonces

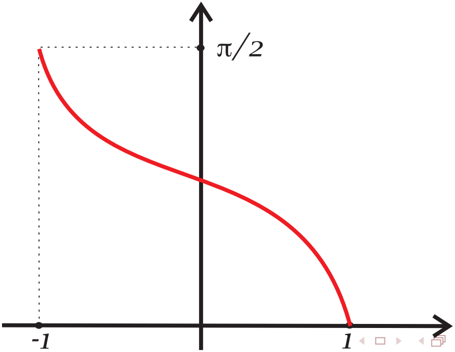
$$A(x) = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \int_x^1 (\sqrt{1-x^2})dx.$$

Funciones Trigonométricas

Definición

Si $x \in [-1,1]$, entonces

$$A(x) = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \int_x^1 (\sqrt{1-x^2})dx.$$



Funciones Trigonométricas

Definición

Si $x \in [0, \pi]$, entonces $\mathbf{cos}(x)$ es el único número en $[-1, 1]$ tal que

$$A(\cos(x)) = \frac{x}{2}.$$

y

$$\mathbf{sen}(x) = \sqrt{1 - cos^2(x)}.$$

Funciones Trigonométricas

Definición

Si $x \in [0, \pi]$, entonces $\mathbf{cos}(x)$ es el único número en $[-1, 1]$ tal que

$$A(\cos(x)) = \frac{x}{2}.$$

y

$$\mathbf{sen}(x) = \sqrt{1 - cos^2(x)}.$$

Funciones Trigonométricas

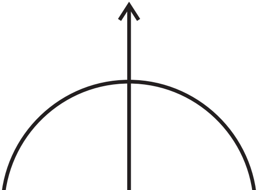
Definición

Si $x \in [0, \pi]$, entonces $\mathbf{cos}(x)$ es el único número en $[-1, 1]$ tal que

$$A(\cos(x)) = \frac{x}{2}.$$

y

$$\mathbf{sen}(x) = \sqrt{1 - cos^2(x)}.$$



Funciones Trigonométricas

Teorema 14

Si $x \in (0, \pi)$, entonces

$$cos'(x) = -sen(x)$$
$$sen'(x) = cos(x).$$

Funciones Trigonométricas

Definición

Para $x \in [\pi, 2\pi]$, definimos

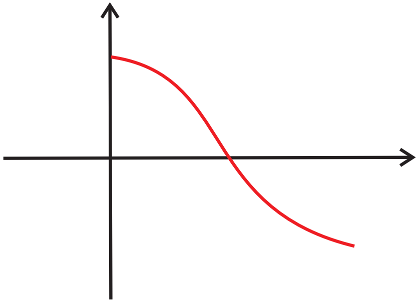
$$\cos(x) = \cos(2\pi - x).$$

Funciones Trigonométricas

Definición

Para $x \in [\pi, 2\pi]$, definimos

$$\cos(x) = \cos(2\pi - x).$$

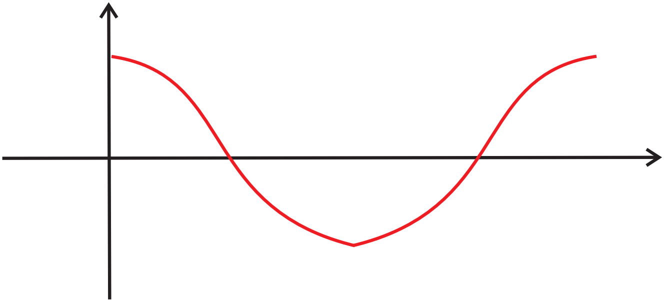


Funciones Trigonométricas

Definición

Para $x \in [\pi, 2\pi]$, definimos

$$\cos(x) = \cos(2\pi - x).$$



Funciones Trigonométricas

Definición

Para $x \in [\pi, 2\pi]$, definimos

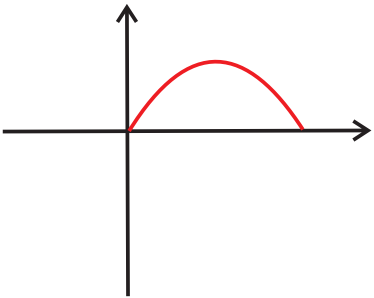
$$\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(2\pi - x),$$

Funciones Trigonométricas

Definición

Para $x \in [\pi, 2\pi]$, definimos

$$\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(2\pi - x),$$

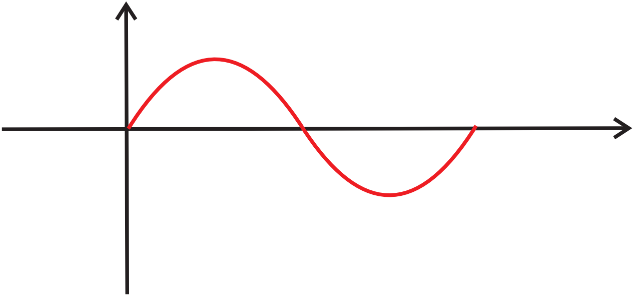


Funciones Trigonométricas

Definición

Para $x \in [\pi, 2\pi]$, definimos

$$\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(2\pi - x),$$



Funciones Trigonométricas

Definición

Para $x = 2k\pi + x'$, donde $x' \in [0, 2\pi]$, definimos

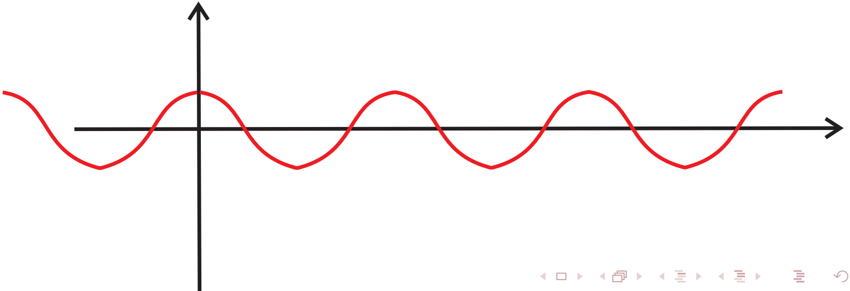
$$\cos(x) = \cos(x').$$

Funciones Trigonométricas

Definición

Para $x = 2k\pi + x'$, donde $x' \in [0, 2\pi]$, definimos

$$\cos(x) = \cos(x').$$



Funciones Trigonométricas

Definición

Para $x = 2k\pi + x'$, donde $x' \in [0, 2\pi]$, definimos

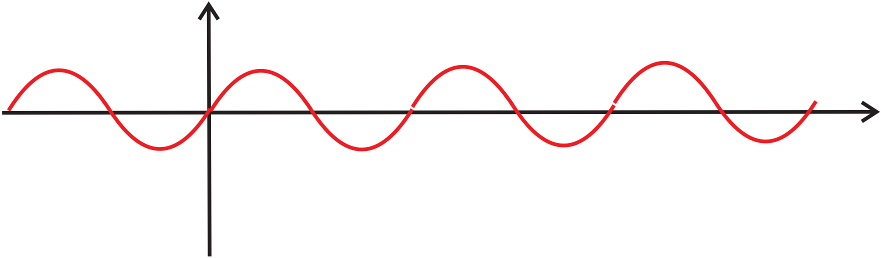
$$\text{sen}(x) = sen(x'),$$

Funciones Trigonométricas

Definición

Para $x = 2k\pi + x'$, donde $x' \in [0, 2\pi]$, definimos

$$\operatorname{sen}(x) = sen(x'),$$



Funciones Trigonométricas

Definición

Para $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, definimos

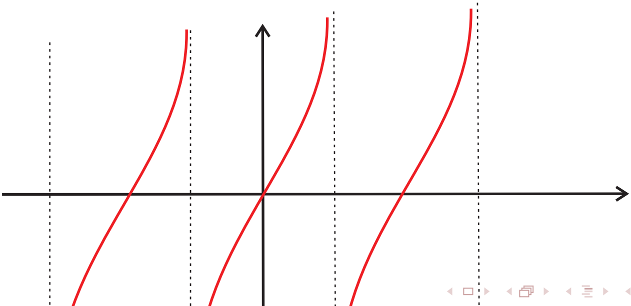
$$\tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)},$$
$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}.$$

Funciones Trigonométricas

Definición

Para $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, definimos

$$\tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)},$$
$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}.$$

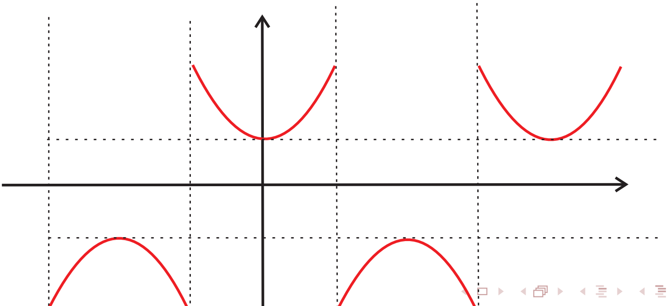


Funciones Trigonométricas

Definición

Para $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, definimos

$$\tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)},$$
$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}.$$



Funciones Trigonométricas

Definición

Para $x \neq k\pi$, definimos

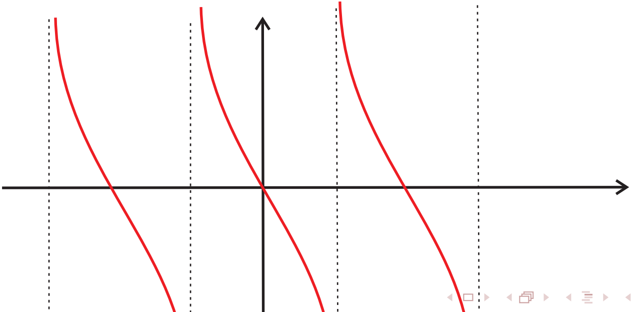
$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)},$$
$$\csc(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}.$$

Funciones Trigonométricas

Definición

Para $x \neq k\pi$, definimos

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)},$$
$$\csc(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}.$$

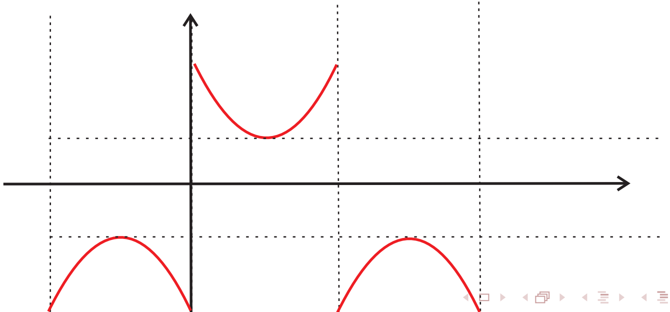


Funciones Trigonométricas

Definición

Para $x \neq k\pi$, definimos

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)},$$
$$\csc(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}.$$



Funciones Trigonométricas

Teorema 15

1. Para $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$,
   1. $\tan'(x) = \sec^2(x)$,
   2. $\sec'(x) = \sec(x)\tan(x)$.
2. Para $x \neq k\pi$,
   1. $\cot'(x) = -\csc^2(x)$,
   2. $\csc'(x) = -\csc(x)\cot(x)$.

3

Integración en Términos Elementales

Si $F(x) = x \cdot \log(x) - x$, entonces $F'(x) = \log(x)$.

Integración en Términos Elementales

Si $F(x) = x \cdot \log(x) - x$, entonces $F'(x) = \log(x)$.
Así que,

$$\int_a^b \log(x)dx = F(b) - F(a) = b(\log(b)) - b - [a\log(a) - a],$$

donde $0 < a, b$.

Integración en Términos Elementales

Si $F(x) = x \cdot \log(x) - x$, entonces $F'(x) = \log(x)$.
Así que,

$$\int_a^b \log(x)dx = F(b) - F(a) = b(\log(b)) - b - [a\log(a) - a],$$

donde $0 < a, b$.
Notación

$$F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Integración en Términos Elementales

Si $F(x) = x \cdot \log(x) - x$, entonces $F'(x) = \log(x)$.
Así que,

$$\int_a^b \log(x)dx = F(b) - F(a) = b(\log(b)) - b - [a\log(a) - a],$$

donde $0 < a, b$.
Notación

$$F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Entonces

$$\int_a^b \log(x)dx = (x \cdot \log(x) - x)|_a^b.$$

Integración en Términos Elementales

Definición

*A la función F que satisface $F' = f$, recibe el nombre de **primitiva** de f.*

Integración en Términos Elementales

Definición

A la función F que satisface $F' = f$, recibe el nombre de ***primitiva*** *de f.*

Observación

Una función continua f tiene siempre una primitiva, a saber,

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Objetivo

Hallar una primitiva que pueda expresarse en términos de funciones conocidas, tales como $\operatorname{sen}, \log$, etc.

Integración en Términos Elementales

Definición

*Una **función elemental** es una función que puede obtenerse mediante suma, multiplicaón, división y composición a partir de las funciones racionales, las funciones trigonométricas y sus inversas y las funciones* $\log$ *y* $\exp$.

Integración en Términos Elementales

Definición

*Una **función elemental** es una función que puede obtenerse mediante suma, multiplicaón, división y composición a partir de las funciones racionales, las funciones trigonométricas y sus inversas y las funciones* log *y* exp.

Observación

En general no es posible encontrar primitivas elementales, por ejemplo, no existe ninguna función elemental F tal que $F'(x) = \boldsymbol{e}^{-x^2}$

Integración en Términos Elementales

Definición

Una ***función elemental*** *es una función que puede obtenerse mediante suma, multiplicaón, división y composición a partir de las funciones racionales, las funciones trigonométricas y sus inversas y las funciones* log *y* exp.

Observación

En general no es posible encontrar primitivas elementales, por ejemplo, no existe ninguna función elemental F tal que $F'(x) = \boldsymbol{e}^{-x^2}$ (existe un teorema (difícil) que establece que dicha función no existe).

Integración en Términos Elementales

Observación

1. *Integración: método para hallar primitivas.*

Integración en Términos Elementales

Observación

1. *Integración: método para hallar primitivas.*
2. *La integración constituye un tema clásico del cálculo infinitesimal, del cual todo mundo debe estar algo enterado.*

Integración en Términos Elementales

Observación

1. *Integración: método para hallar primitivas.*
2. *La integración constituye un tema clásico del cálculo infinitesimal, del cual todo mundo debe estar algo enterado.*
3. *En ocasiones puede ocurrir que sea preciso calcular una integral, en condiciones en que no sea posible consultar ninguna de las tablas corrientes de integrales.*

Integración en Términos Elementales

Observación

1. *Integración: método para hallar primitivas.*
2. *La integración constituye un tema clásico del cálculo infinitesimal, del cual todo mundo debe estar algo enterado.*
3. *En ocasiones puede ocurrir que sea preciso calcular una integral, en condiciones en que no sea posible consultar ninguna de las tablas corrientes de integrales.*
4. *Los "métodos" más útiles de integración son en realidad teoremas muy importantes (aplicables a todas las funciones, no solamente a las elementales).*

Integración en Términos Elementales

Notación

El símbolo

$$\int f \text{ o } \int f(x)dx$$

significa "una primitiva de f" o, más precisamente, el "conjunto de todas las primitivas de f".

Integración en Términos Elementales

Notación

El símbolo

$$\int f \text{ o } \int f(x)dx$$

significa "una primitiva de f" o, más precisamente, el "conjunto de todas las primitivas de f".

Observación

La letra que aparece a la derecha de la ecuación debe ser la misma letra que aparece después de la "letra d" en el primer miembro.

Integración en Términos Elementales

Notación

El símbolo

$$\int f \text{ o } \int f(x)dx$$

significa "una primitiva de f" o, más precisamente, el "conjunto de todas las primitivas de f".

Observación

La letra que aparece a la derecha de la ecuación debe ser la misma letra que aparece después de la "letra d" en el primer miembro.

$$\int udu = \frac{u^4}{4}, \int txdx = \frac{tx^2}{2}, \int txdt = \frac{xt^2}{2}.$$

Integración en Términos Elementales

Definición

Una función $\displaystyle\int f(x)dx$*, es decir, una primitiva de* f*, recibe con frecuencia el nombre de* ***integral indefinida*** *de* f*, mientras que* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *es llamada* ***integral definida****.*

Integración en Términos Elementales

Definición

Una función $\int f(x)dx$, *es decir, una primitiva de* f, *recibe con frecuencia el nombre de* ***integral indefinida*** *de* f, *mientras que* $\int_a^b f(x)dx$ *es llamada* ***integral definida***.

$$\int a \; dx = ax$$

$$\int x^n \; dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \; n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} \; dx = \int \frac{dx}{x} = \log(x)$$

Integración en Términos Elementales

$$\int \mathbf{e}^x \; dx = \mathbf{e}^x$$

$$\int \operatorname{sen}(x) \; dx = -\cos(x)$$

$$\int \cos(x) \; dx = \operatorname{sen}(x)$$

Integración en Términos Elementales

Teorema (16 Integración por partes)

Si f y g' son continuas, entonces

$$\int fg' = fg - \int f'g,$$

$$\int f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ dx,$$

$$\int_b^a f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x)|_b^a - \int_b^a f'(x)g(x)\ dx.$$

Integración en Términos Elementales

Trucos

Integración en Términos Elementales

Trucos

1. Considerar la función g' como igual a 1.

$$\int \log(x)\ dx$$

Integración en Términos Elementales

Trucos

1. Considerar la función g' como igual a 1.

$$\int \log(x)\ dx$$

2. Utilizar la integración por partes para hallar $\int h$ en términos, otra vez, de $\int h$, y después despejar a $\int h$ de la ecuación resultante.

$$\int (1/x)\log(x)\ dx$$

Integración en Términos Elementales

Teorema (17 Integración por sustitución)

Si f y g' son continuas, entonces

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_a^b (f \circ g) \cdot g',$$

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du = \int_a^b (f(g(x))) \cdot g'(x).$$

Integración en Términos Elementales

Pendiente

$$\int \operatorname{arcsen}(\sqrt{x})\ dx$$

Integración en Términos Elementales

Pasos de integración por sustitución

Integración en Términos Elementales

Pasos de integración por sustitución

1. Sea

$$\begin{aligned} u &= g(x) \\ du &= g'(x)dx; \end{aligned}$$

(después de esta manipulación solamente debe aparecer la letra u, no la letra x).

Integración en Términos Elementales

Pasos de integración por sustitución

1. Sea

$$\begin{aligned} u &= g(x) \\ du &= g'(x)dx; \end{aligned}$$

   (después de esta manipulación solamente debe aparecer la letra u, no la letra x).
2. Hallar una primitiva (como expresión en u).

Integración en Términos Elementales

Pasos de integración por sustitución

1. Sea

$$u = g(x)$$
$$du = g'(x)dx;$$

(después de esta manipulación solamente debe aparecer la letra u, no la letra x).

2. Hallar una primitiva (como expresión en u).
3. Sustituir $g(x)$ por u.

Integración en Términos Elementales

Ejercicios

1. $$\int \sec^2(x)\tan^5(x)\ dx$$
2. $$\int (\cos(x))e^{\operatorname{sen}(x)}\ dx$$
3. $$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\ dx$$
4. $$\int \frac{dx}{x+3}$$

Integración en Términos Elementales

Más ejercicios

1. $$\int e^{3x}\ dx$$
2. $$\int \cos(4x)\ dx$$
3. $$\int \operatorname{sen}(2x+1)\ dx$$
4. $$\int \frac{dx}{1+4x^2}$$

Integración en Términos Elementales

Uno más

1. $$\int \frac{1+\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}\, dx$$

Integración en Términos Elementales

Ahora el truco es expresar a x en función de u, y dx en función de du

Integración en Términos Elementales

Ahora el truco es expresar a x en función de u, y dx en función de du

Si aplicamos la sustitución

Integración en Términos Elementales

Ahora el truco es expresar a x en función de u, y dx en función de du

Si aplicamos la sustitución

$$u = g(x),\ x = g^{-1}(u),\ dx = (g^{-1})'(u)du$$

Integración en Términos Elementales

Ahora el truco es expresar a x en función de u, y dx en función de du
Si aplicamos la sustitución

$$u = g(x),\ x = g^{-1}(u),\ dx = (g^{-1})'(u)du$$

a la integral

$$\int f(g(x))\ dx,$$

obtenemos

Integración en Términos Elementales

Ahora el truco es expresar a x en función de u, y dx en función de du

Si aplicamos la sustitución

$$u = g(x),\ x = g^{-1}(u),\ dx = (g^{-1})'(u)du$$

a la integral

$$\int f(g(x))\ dx,$$

obtenemos

$$\int f(u)(g^{-1})'(u)\ du$$

Integración en Términos Elementales

Por otra parte, si aplicamos la sustitución

Integración en Términos Elementales

Por otra parte, si aplicamos la sustitución

$$u = g(x),\ du = g'(x)dx$$

Integración en Términos Elementales

Por otra parte, si aplicamos la sustitución

$$u = g(x),\, du = g'(x)dx$$

a la misma integral

$$\int f(g(x))\; dx = \int f(g(x)) \cdot \frac{1}{g'}(x) \cdot g'(x)\; dx,$$

obtenemos

Integración en Términos Elementales

Por otra parte, si aplicamos la sustitución

$$u = g(x),\, du = g'(x)dx$$

a la misma integral

$$\int f(g(x))\ dx = \int f(g(x)) \cdot \frac{1}{g'}(x) \cdot g'(x)\ dx,$$

obtenemos

$$\int f(u) \cdot \frac{1}{g'(g^{-1}(u))}\ du$$

Integración en Términos Elementales

Ejemplos

Integración en Términos Elementales

Ejemplos

1. $$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$$

Integración en Términos Elementales

Ejemplos

1. $$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}}\, dx$$
2. $$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

Integración en Términos Elementales

Formulas de Reducción

$$\int \operatorname{sen}^n(x)\ dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1}(x)\cos(x) + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\ dx,$$

$$\int \cos^n(x)\ dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}(x)\operatorname{sen}(x) + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)\ dx,$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\ dx =$$

$$-\frac{1}{2n-2}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\ dx.$$

Integración en Términos Elementales

Teorema (18)

Toda función polinómica

$$q(x) = x^m - b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0$$

puede escribirse como producto

$$q(x) = (x-\alpha_1)^{r_1} \dots (x-\alpha_k)^{r_k} (x^2+\beta_1 x+\lambda_1)^{s_1} \dots (x^2+\beta_l x+\lambda_l)^{s_l},$$

donde $r_1 + \cdots + r_k + 2(s_1 + \cdots + s_l) = m.$

Integración en Términos Elementales

Teorema (19)

Si $n < m$ *y*

$$p(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$
$$q(x) = x^m - b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0 =$$
$$(x-\alpha_1)^{r_1}\ldots(x-\alpha_k)^{r_k}(x^2+\beta_1 x+\lambda_1)^{s_1}\ldots(x^2+\beta_l x+\lambda_l)^{s_l}$$

entonces $p(x)/q(x)$ *puede escribirse en la forma*

Integración en Términos Elementales

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \left[\frac{a_{1,1}}{(x-\alpha_1)} + \cdots + \frac{a_{1,r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}}\right] + \cdots + \left[\frac{a_{k,1}}{(x-\alpha_k)} + \cdots + \frac{a_{k,r_k}}{(x-\alpha_k)^{r_k}}\right] + \left[\frac{b_{1,1}x + c_{1,1}}{(x^2+\beta_1 x+\lambda_1)} + \cdots + \frac{b_{1,s_1}x + c_{1,s_1}}{(x^2+\beta_1 x+\lambda_1)^{s_1}}\right] + \ldots + \left[\frac{b_{l,1}x + c_{l,1}}{(x^2+\beta_l x+\lambda_l)} + \cdots + \frac{b_{l,s_l}x + c_{l,s_l}}{(x^2+\beta_l x+\lambda_l)^{s_l}}\right].$$

Bibliografía

1 Courant, R. y John, F. *Introduction to Calculus and Analysis*, Vol. I, Interscience Publishers, 1965.

2 Haaser, La Salle, Sullivan. *Análisis Matemático Curso de Introducción*, vol. I, Ed. Trillas.

3 Spivak, M. *Calculus*, Ed. Reverté, 1988.

4 Apostol, T. *Calculus*, vol. I, Ed. Reverté, 1995.

5 Sagan, H. *Advanced Calculus*, Ed. Houghton Mifflin Company, 1974.