



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO  
DE MÉXICO



FACULTAD DE ECONOMÍA

MONOGRAFÍA

LA DUALIDAD EN LA TEORIA DEL CONSUMO

UNIDAD DE APRENDIZAJE MICROECONOMÍA  
MAESTRIA EN ECONOMÍA APLICADA

JUVENAL ROJAS MERCED

TOLUCA MÉX., SEPTIEMBRE DE 2015

## CONTENIDO

---

	Pág.
Presentación.....	3
Introducción	6
Desarrollo	9
1. Agentes economicos y bienes	10
2. Existencia de un equilibrio	11
3. La teoría de la dualidad en el consumo	14
3.1 La resolución del problema del consumidor	15
3.2 La dualidad en la teoría del consumidor	16
4. La identidad de roy y el lema de shephard.	21
4.1 La idéntidad de Roy	21
4.2 Lema de Shepard	22
5. La Resolución del problema dual	23
5.1 La minimización del gasto	23
5.2 Relación entre demanda ordinaria y compensada, utilidad indirecta y función de gasto	27
Conclusiones	29
Bibliografía	31
Anexo	33

# PRESENTACIÓN

---

La conducta del consumidor puede ser definida como los procesos de toma de decisiones y las actividades físicas implicadas en la evaluación, adquisición, uso y disposición de bienes y servicios. Implica una secuencia de decisiones y actitudes, centradas en la toma de decisiones sobre si consumir o ahorrar, sobre las categorías de bienes y servicios a consumir, sobre las marcas a consumir, sobre la conducta de compra y el shopping, y sobre cómo los productos serán usados y eliminados.

Un aspecto central a considerar es la supuesta racionalidad de la conducta humana, supuesto que subyazca a la mayoría de las teorías económicas y sus investigaciones empíricas.

En esta monografía se presentan las diferentes formas de representar las preferencias del consumidor, las relaciones que existen entre ellas y la forma en que se pueden derivar las funciones de demanda con tales representaciones. Al hacer este análisis se aplicará el concepto de dualidad a la teoría del consumidor.

Adicionalmente, se analizará las formas en las que se puede plantear el problema de elección del consumidor: la elección de la cesta de bienes que maximice la función de utilidad sujeta a la restricción presupuestaria; la elección de la cesta de bienes que minimice el gasto de cierto nivel de utilidad. Limitaremos nuestro estudio al caso en el cual el consumidor tiene que elegir una cesta de bienes compuesta por únicamente dos bienes, aunque los resultados pueden ser extendidos para situaciones en que las canastas de bienes se compongan por cualquier número de éstos.

En síntesis esta nota contiene el estudio de los siguientes aspectos:

- i. Las diferentes formas de representar las preferencias del consumidor, y de la forma en que a partir de ellas es posible obtener las funciones de demanda.

- ii. La forma en que se pueden obtener las funciones de demanda a partir de los teoremas de dualidad (Shephard, Roy).

La idea general de la dualidad en la teoría del consumidor, es que un problema de elección puede ser caracterizado en formas alternativas, esto es, con diferentes modelos, y que además existen ciertas relaciones entre los resultados encontrados en los modelos alternativos.

El programa de Microeconomía el cual es impartido en la Maestría en Economía Aplicada, dentro de la Facultad de Economía tiene como objetivo general conocer el contenido y aplicar el método de la teoría microeconómica tradicional.

Es por ello que la presente monografía busca ayudar a cumplir en parte dicho propósito, toda vez que desarrolla la unidad III. La dualidad en la teoría del consumo. Con ella se trata de implementar un material de apoyo con el cual el alumno pueda fortalecer los conocimientos adquiridos dentro del aula, además de que le brinde las bases del estudio del equilibrio general.

# INTRODUCCIÓN

---

La teoría del consumidor describe la forma en que los consumidores (hogares) asignan su ingreso al gasto en bienes y servicios para maximizar su satisfacción (utilidad). Todos los modelos propuestos bajo la teoría del consumidor parten del supuesto de que la función de utilidad con que trabajamos corresponde a la de un individuo representativo que actúa de manera racional tomando las mejores decisiones, tanto como pueda hacerlo. Es decir, bajo el supuesto de la elección racional, es decir, el supuesto de que las personas sopesan los costos y beneficios de cada posibilidad cada vez que deben elegir (Stiglitz y Walsh, 2011).

Referente a las preferencias de los individuos lo que importa es:

- Los supuestos sobre las preferencias: Las preferencias deben ser completas, deben ser transitivas, los consumidores son insaciables, las preferencias son continuas.
- Las cestas de bienes: Una cesta está compuesta de un conjunto de bienes con determinadas cantidades de cada uno de ellos.
- Las relaciones de sustitución y complementariedad entre los bienes: Dos bienes son sustitutos si al subir el precio de uno de los bienes, la demanda por el otro bien también sube. Dos bienes son sustitutos perfectos si el consumidor está dispuesto a sustituir un bien por otro a una tasa constante. Dos bienes son complementos si al subir el precio de uno de los bienes la cantidad demandada del otro bien disminuye. Dos bienes son complementos perfectos si ambos bienes siempre se consumen en proporciones fijas.
- Las curvas de indiferencia de utilidad: Representan diferentes combinaciones entre par de bienes que generan el mismo nivel de utilidad.
- La tasa marginal de sustitución: Mide la relación en que el consumidor está dispuesto a sustituir un bien por otro.

Los hogares compran bienes que satisfacen sus necesidades, la unidad que agrupa el conjunto de bienes demandados recibe el nombre de cesta de bienes. Una cesta de bienes representa las cantidades de uno o más bienes de consumo.

Los consumidores (hogares) eligen las cestas de bienes en los mercados. Con esta información sobre cantidades demandadas a diferentes precios se puede estimar una función de demanda que permita estimar una medida de beneficios que represente el bienestar del consumidor.



# DESARROLLO

---

## 1. Agentes económicos y bienes

El fenómeno económico se lleva a cabo en la sociedad. Este fenómeno tiene diversos actores económicos.

Los actores del proceso económico son (Rufasto, s.f.):

- Empresas
- Familias
- Gobierno
- Economías extranjeras

Los dos primeros actores son los agentes económicos<sup>1</sup>. La economía es definida por las acciones de ellos. Los otros dos agentes operan sobre la economía, pero sólo en forma lateral. El estado o gobierno realiza operaciones de regulación de términos contractuales, seguridad, etc. Las economías extranjeras realizan compras en nuestra economía nacional, pero también colocan sus productos.

Las familias tienen un doble papel en la economía de mercado: son a la vez las unidades elementales de consumo y las propietarias de los recursos productivos.

Las empresas son los agentes económicos destinados exclusivamente a la producción de bienes y servicios. Para realizar su actividad necesitan los factores productivos que les entregan las familias. A cambio de ellos pagarán unas rentas: sueldos y salarios como contrapartida del trabajo; intereses, beneficios, dividendos, etc., como contrapartida del capital; alquileres o simplemente renta como contrapartida de la tierra. Los bienes y servicios producidos por las empresas son ofrecidos a las familias que entregarán a cambio su precio.

---

<sup>1</sup> Un agente económico es un actor y tomador de decisiones en un modelo económico. Por lo general, cada agente toma decisiones mediante la resolución de un problema de optimización / elección definido.

El estado es el agente económico cuya intervención en la actividad económica es más compleja. Por una parte, el Estado acude a los mercados de factores y de bienes y servicios como oferente y como demandante. Al igual que las familias, es propietario de factores productivos que ofrece a las empresas de las que también demanda gran cantidad de bienes y servicios.

A la vez es el mayor productor de bienes y servicios. Por otra parte, a diferencia de los otros agentes económicos, tiene capacidad coactiva para recaudar impuestos, tanto de las empresas como de las familias. Así mismo destinará parte de sus ingresos a realizar transferencias sin contrapartida a ciertas empresas que considere de interés social o a algunas familias mediante subsidios de desempleo, pensiones de jubilación y otras.

## **2. Existencia de un equilibrio**

Una unidad económica es un grupo de individuos que tienen como finalidad llevar a cabo en forma continua determinadas actividades económicas. Esta unidad sólo puede existir si dispone de recursos que serán requeridos por sus actividades económicas (Rufasto, s.f.).

Un agente económico es un individuo o unidad económica (grupo de individuos) dedicado a realizar actividades tendientes a la producción o consumo de bienes, principalmente, o a la prestación de servicios laterales que puedan completar un camino económico iniciado en la gestión de material y recursos brutos y finalizado en el uso o consumo de bienes terminados y servicios para el consumidor final.

El fenómeno económico indica que el agente económico busca su propio bienestar<sup>2</sup>. La ciencia económica se vale, para estudiar a este agente, de las técnicas de la optimización matemática. En tal sentido, un modelo<sup>3</sup> adecuado de optimización dentro de un equilibrio parcial para la formalización de la acción de este agente es el modelo 3R. Este modelo se sostiene en tres directrices de acción económica:

- R1: Razonamiento económico
- R2: Recursos disponibles
- R3: Relaciones de transformación

R1 indica que el agente tiene un razonamiento específico que determina la forma en que él concibe el bienestar. La satisfacción o bienestar de un individuo depende en gran parte de su psicología. Puede preferir consumir, fruta, o carne, o música, o prendas de seda. Los deseos y necesidades de orden psicológico son la directriz más importante del problema económico.

R2 impone una restricción al agente económico: él no podrá realizar acción económica *a menos que* sea poseedor de recursos transformables en la economía. La transformación de los recursos puede ser efectuada vía relaciones tecnológicas de transformación o vía negocios (compra o venta de recursos).

R3 especifica que los recursos pueden ser transformados de formas predeterminadas en la economía. Dos ejemplos importantes: la harina se transforma por vía tecnológico-física (preparación-repostería) en pasteles; el dinero puede transformarse vía comercial (mercado) también en pasteles.

---

<sup>2</sup> Es un estado de la persona cuyas condiciones físicas y mentales le proporcionan un sentimiento de satisfacción y tranquilidad. El bienestar económico es el estado de la persona cuyas condiciones económicas le permiten vivir con tranquilidad. Se trata de un concepto subjetivo, que puede tener representaciones muy diferentes en la mente de cada individuo, dado que el bienestar está íntimamente relacionado con las necesidades y los gustos de las personas.

<sup>3</sup> Un modelo es una versión simplificada de la realidad.

La transformación física es regulada por diversas propiedades físicas (y químicas, y otras relacionadas), en tanto que la transformación comercial está determinada por los precios de los artículos en el mercado y por el valor del dinero (en realidad, ambos son dos perspectivas de una misma cosa).

El modelo 3R tiene una presentación matemática simple, pero sólida. Para construirlo, se vale de las técnicas de programación matemática<sup>4</sup>. Así, tenemos (Rufasto, s.f.; Corchuela y Quiroga, 2014)):

$$\begin{aligned} & \mathbf{max} \ U(X) \\ & \mathbf{sujeto\ a\ (restricciones):} \ M \geq P(X) \end{aligned}$$

La expresión  $X$  muestra una composición de bienes (cesta de bienes) que debemos consumir para alcanzar bienestar. La forma en que  $X$  produce bienestar viene dada por la función  $U(X)$ . Así, cada combinación, canasta, cesta o as de bienes  $X$  genera, luego de su consumo, un bienestar de valor  $U(X)$ . La función  $U(X)$  aloja la directriz de razonamiento económico, R1.

La expresión  $M$  indica una composición de recursos en propiedad del agente. Si el agente es una empresa,  $M$  indicará sus existencias de recursos primos. Si el agente es una familia,  $M$  indicará la cantidad de dinero de que dispone para realizar compras.  $M$  es la encarnación de la directriz de transformación, R2

La expresión  $P(X)$  indica el total de requerimientos de recursos disponibles (Gasto) para la obtención de una canasta o cesta como  $X$ . Como los recursos son transformados en productos (vía comercio o vía física),  $P(X)$  es la manifestación de la directriz de transformación, R3.

---

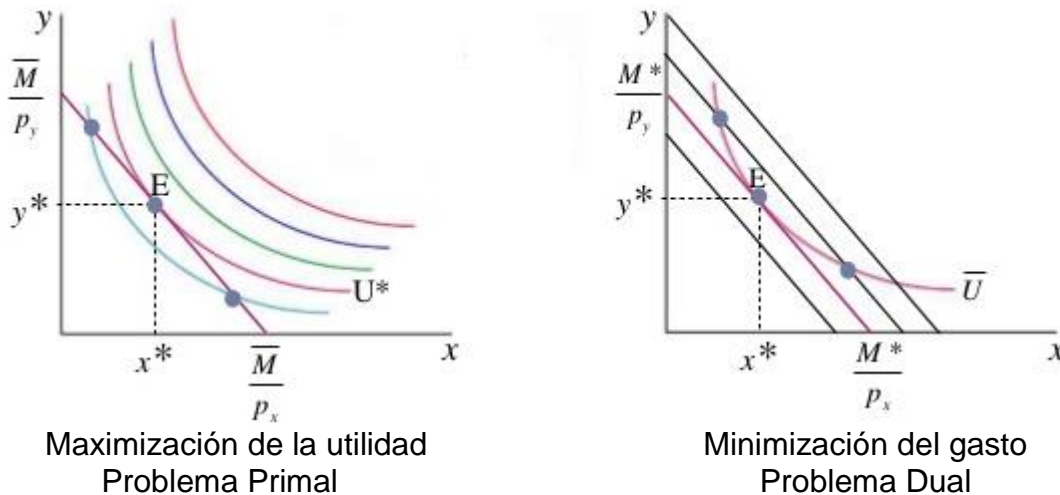
<sup>4</sup> Programación matemática también conocida como optimización, es la selección de la mejor alternativa o solución con respecto a algún criterio, de un conjunto de soluciones o alternativas disponibles.

Cuando decimos  $M \geq P(X)$ , estamos afirmando que los requerimientos de recursos para la producción y consumo de una canasta de forma  $X$  nunca podrá ser superior al monto total de recursos disponibles por nuestra unidad económica.

### 3. La teoría de la dualidad en el consumo.

Es una manera alternativa de analizar la decisión de maximización de la utilidad del consumidor: en lugar de elegir la curva de indiferencia<sup>5</sup> más alta, dada una restricción presupuestaria, el consumidor elige la recta presupuestaria más baja que toca una curva de indiferencia dada (Gráfica 1).

Gráfica 1. Equilibrio del consumidor

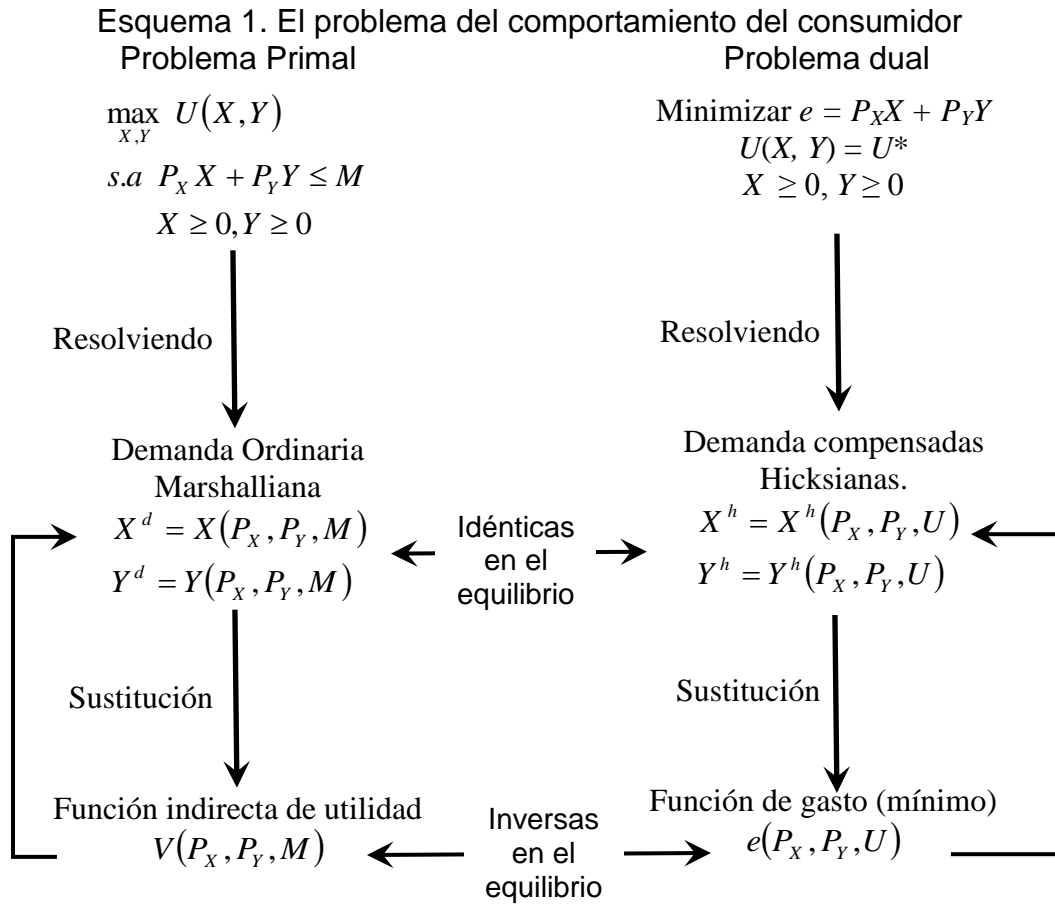


Fuente: Nicholson (2008), parkin (2014)

En forma esquemática (esquema 1), el procedimiento corresponde a intercambiar la función objetivo con la restricción, es decir, mientras en el problema primal se busca maximizar la utilidad, sujeta la restricción que indica que el ingreso debe ser mayor o igual al gasto que se realiza en la elección de la cesta de consumo, en el

<sup>5</sup> Es un gráfico que muestra diferentes conjuntos de bienes entre los cuales un consumidor es indiferente. Es decir, en cada punto de la curva, el consumidor no tiene preferencia por un conjunto u otro salvo por otra variable externa. En cada punto de la curva de indiferencia el mismo nivel de utilidad (satisfacción) para el consumidor es el mismo.

problema dual, lo que se busca es minimizar el gasto realizado en la elección de la cesta de consumo, sujeta a un determinado nivel de utilidad previamente establecido.



Fuente. Elaboración propia con base a Pereyra (2010), Nicholson y Sydnor (2011), Villar (1999), Molsalve (2013)

### 3.1 La resolución del problema del consumidor

La resolución del problema del consumidor se resume en el problema de optimización o maximización de la utilidad, el cual consiste en elegir la cesta de bienes que le representen el mayor nivel de utilidad o satisfacción al consumidor, teniendo la restricción de que el gasto que se realice en dicha cesta de bienes,

dados unos precios en el mercado, debe ser igual o menor al ingreso que dispone para ello.

Así el problema es:

$$\begin{aligned} \max_{X,Y} & U(X,Y) \\ \text{s.a} & P_X X + P_Y Y \leq M \\ & X \geq 0, Y \geq 0 \end{aligned}$$

La resolución proporciona las funciones de demanda ordinarias (marshallianas) (

$$\begin{aligned} X^d &= X(P_X, P_Y, M) \\ Y^d &= Y(P_X, P_Y, M) \end{aligned}$$

Las cuales nos brindan el máximo valor de satisfacción o utilidad al momento de sustituirlas en la función de utilidad<sup>6</sup>, dando como resultado a la Función indirecta de utilidad.

$$V(P_X, P_Y, M) = V(X^d, Y^d) = V[X(P_X, P_Y, M), Y(P_X, P_Y, M)]$$

Bajo las hipótesis habituales sobre las preferencias del consumidor, estas funciones son continuas, homogéneas de grado cero en  $(P_X, P_Y, M)$ , decrecientes con respecto a los precios, creciente con respecto al ingreso, etc.

### 3.2 La dualidad en la teoría del consumidor

Existen dos maneras de analizar la decisión de optimización del consumidor. La elección óptima de  $X$  e  $Y$  puede analizarse no sólo como un problema consistente en elegir la curva de indiferencia más alta —el valor máximo de  $U(\cdot)$ — que toca a la recta presupuestaria<sup>7</sup>, sino también como un problema de elegir la recta

---

<sup>6</sup> Si bien la utilidad es un concepto subjetivo que no se puede medir, es posible simularla utilizando funciones de utilidad, que relacionan la cantidad de utilidad con la cantidad consumida de ciertos bienes o servicios. Esta medida de utilidad se denomina utilidad cardinal. Es decir, que una función de utilidad asigna valores numéricos (que se pueden denominar útiles) a cada cantidad de bienes consumidos. Un valor más elevado de la función de utilidad es preferido a un valor inferior.

<sup>7</sup> Muestra todas las combinaciones posibles de bienes que el consumidor puede adquirir si agota todo su presupuesto en dichos bienes.



presupuestaria más baja —el gasto presupuestario mínimo— que toca a una determinada curva de indiferencia. Utilizamos el término dualidad para referirnos a estas dos perspectivas (Varian, 1993).

Para ver cómo funciona este principio, consideremos el siguiente problema dual de optimización del consumidor, a saber, el problema de la minimización del costo de alcanzar un determinado nivel de utilidad:

$$\text{Minimizar } [P_X X + P_Y Y]$$

Sujeta a la restricción de que

$$U(X, Y) = U^*$$

$$X \geq 0, Y \geq 0$$

El lagrangiano<sup>8</sup> correspondiente viene dado por

$$L = P_X X + P_Y Y - \lambda [U(X, Y) - U^*]$$

donde  $\lambda$  es el multiplicador de Lagrange. Diferenciando  $L$  con respecto a  $X$ ,  $Y$  y  $\lambda$  e igualando las derivadas a cero, hallamos las siguientes condiciones necesarias para la minimización del gasto:

$$P_X - \lambda UMgX = 0$$

$$P_Y - \lambda UMgY = 0$$

$$U(X, Y) = U^*$$

Resolviendo las dos primeras ecuaciones, observamos que

---

<sup>8</sup> El método lagrangiano utiliza una técnica proveniente del cálculo para medir de modo matemático la forma en que los consumidores pueden lograr satisfacción máxima y los negocios pueden maximizar el beneficio (o minimizar los costos) con los límites dados.

$$\lambda = \frac{P_X}{UMgX} = \frac{P_Y}{UMgY}$$

Como también es cierto que

$$\frac{UMgX}{UMgY} = RMgS = \frac{P_X}{P_Y}$$

La elección de  $X$  e  $Y$  minimizadora del costo debe encontrarse en el punto de tangencia de la recta presupuestaria y la curva de indiferencia que genera la utilidad  $U^*$ .

La solución a este problema proporciona las funciones de demanda compensada<sup>9</sup> (hicksianas).

$$X^h = X^h(P_X, P_Y, U)$$

$$Y^h = Y^h(P_X, P_Y, U)$$

De nuevo, bajo las hipótesis habituales sobre las preferencias del consumidor, estas funciones son continuas, homogéneas de grado cero en  $(P_X, P_Y)$ , etc.

Funciones de demanda que al sustituirlas en la función objetivo nos permiten obtener la función de gasto<sup>10</sup> (mínimo)

$$e(P_X, P_Y, U) = P_X X^h + P_Y Y^h = P_X X^h(P_X, P_Y, U) + P_Y Y^h(P_X, P_Y, U)$$

Las propiedades de la función de mínimo gasto son (Mendieta, 2005; Maté y Pérez, 2007)):

- $e(p, p, u)$  es no decreciente con respecto a los precios.
- $e(p, p, u)$  es homogénea de grado 1 con respecto a los precios.
- $e(p, p, u)$  es cóncava con respecto a los precios.

<sup>9</sup> Muestra la relación entre el precio de un bien y la cantidad adquirida del mismo, partiendo del supuesto que los demás precios y la utilidad se mantienen constantes. Por tanto, solo ilustra el efecto sustitución. En términos matemáticos, es una representación bidimensional de una función de demanda compensada.

<sup>10</sup> Representa el mínimo gasto de alcanzar un determinado nivel de utilidad dados los precios de los bienes. Se obtiene sustituyendo las funciones de demanda compensadas en el elemento minimizador.

- $e(p, p, u)$  es continua en los precios, cuando los precios sean suficientemente mayores a cero .

De nuevo, bajo las hipótesis habituales sobre las preferencias del consumidor, estos funciones son continuas, homogéneas de grado cero en  $(P_X, P_Y)$ , etc.

Como éste es el mismo punto que maximizaba la utilidad en nuestro problema inicial, el problema dual de minimización del gasto genera las mismas funciones de demanda que se obtienen en el problema de maximización de la utilidad.

Las relaciones entre las soluciones a estos problemas están descrita por las identidades.

$$\begin{aligned} X^d(P_X, P_Y, M) \Big|_{M=e} &\equiv X^h(P_X, P_Y, U) & X^h(P_X, P_Y, U) \Big|_{U=V} &\equiv X^d(P_X, P_Y, M) \\ Y^d(P_X, P_Y, M) \Big|_{M=e} &\equiv Y^h(P_X, P_Y, U) & Y^h(P_X, P_Y, U) \Big|_{U=V} &\equiv Y^d(P_X, P_Y, M) \end{aligned}$$

Esto es

$$\begin{aligned} X^d(P_X, P_Y, M) &\equiv X^d[P_X, P_Y, e(P_X, P_Y, U)] \equiv X^h(P_X, P_Y, U) \\ Y^d(P_X, P_Y, M) &\equiv Y^d[P_X, P_Y, e(P_X, P_Y, U)] \equiv Y^h(P_X, P_Y, U) \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} X^h(P_X, P_Y, U) &\equiv X^h\{P_X, P_Y, V[X(P_X, P_Y, M), Y(P_X, P_Y, M)]\} \equiv X^d(P_X, P_Y, M) \\ Y^h(P_X, P_Y, U) &\equiv Y^h\{P_X, P_Y, V[X(P_X, P_Y, M), Y(P_X, P_Y, M)]\} \equiv Y^d(P_X, P_Y, M) \end{aligned}$$

Por otro lado, en el equilibrio la utilidad alcanza su valor máximo y todo el ingreso se gasta es decir

$$\begin{aligned} V(P_X, P_Y, M) \Big|_{M=e} &= U \\ e(P_X, P_Y, U) \Big|_{U=V} &= M \end{aligned}$$

De ésta forma

$$V(P_X, P_Y, M) \equiv V[P_X, P_Y, e(P_X, P_Y, U)] = U$$

$$e(P_X, P_Y, U) \equiv e[P_X, P_Y, V(P_X, P_Y, M)] = M$$

Derivando la identidad  $X^d(P_X, P_Y, M) \equiv X^d[P_X, P_Y, e(P_X, P_Y, U)] \equiv X^h(P_X, P_Y, U)$  con respecto a  $P_X$ , se obtiene la Ecuación de Slutsky<sup>11</sup>,

$$\frac{\partial X^d}{\partial P_X} = \frac{\partial X^h}{\partial P_X} - X^d \frac{\partial X^d}{\partial M}$$

Para obtener esta ecuación es preciso utilizar el resultado

$$\frac{\partial e}{\partial P_X} = X^h(P_X, P_Y, U)$$

conocido como Lema de Shephard<sup>12</sup> (Nicholson, 2013).

La Ecuación de Slutsky proporciona una fórmula para el cálculo de los efectos sustitución  $\frac{\partial X^h}{\partial P_X}$  y renta o ingreso  $-X^d \frac{\partial X^d}{\partial M}$  de una variación infinitesimal del precio de un bien sobre su demanda.

Cuando la renta monetaria del consumidor no es exógena, como ocurre en el modelo consumo-ocio y en general cuando la renta monetaria del consumidor es

---

<sup>11</sup> Es una propiedad matemática que nos permite obtener la demanda compensada de un determinado bien a partir de su demanda ordinaria, conociendo los efectos precio e ingreso, así como la cantidad consumida de equilibrio. La variación en la cantidad demandada de un bien ante una variación de su propio precio puede descomponerse en dos efectos:

- i. Un efecto sustitución, que varía la cantidad demandada del bien manteniendo constante el nivel de utilidad, aproximado a través del cambio en la función de demanda hicksiana. Este efecto sustitución es no positivo.
- ii. Un efecto renta, igual al producto de la cantidad inicialmente demandada por la variación en la cantidad asociada a un cambio en la renta del individuo. Este efecto será positivo si es un bien inferior y negativo si es un bien normal.

<sup>12</sup> El lema de Shepard nos da a conocer la demanda compensada de un bien (se denomina de esta manera, ya que ante variaciones en los precios del bien, se compensa al consumidor alterando su ingreso para que de esta forma mantenga el mismo bienestar que tenía antes de los cambios en los precios), teniendo en cuenta las variaciones en el gasto mínimo ante las variaciones en el precio de dicho bien.

el valor de una dotación inicial de bienes, la descomposición en efecto sustitución y renta del efecto total de la variación en el precio de un bien sobre su demanda adopta una forma distinta. La razón es que el signo del efecto renta en este caso no sólo depende de si el bien en cuestión es normal o inferior, sino de si el individuo es un comprador o un vendedor neto de este bien (Universidad Carlos Tercero, 2010).

#### 4. La identidad de roy y el lema de shephard.

##### 4.1 La idéntidad de Roy

Es la tasa a la que varía la utilidad del consumidor cuando cambia el precio de un bien, expresada en términos monetarios. Dicha tasa es de signo contrario a la variación del precio y de magnitud igual al producto de la utilidad marginal de la renta por la tasa de variación del poder de compra debida al mencionado cambio de precio (Pereyra, 2010).

Obtención de la Identidad de Roy a partir de la Función de Gasto: Si sustituimos en la Función Indirecta de Utilidad la renta o ingreso por su expresión en la Función de Gasto, nos queda:

$$V(P_X, P_Y, M) \equiv V[P_X, P_Y, e(P_X, P_Y, U)]$$

Si derivamos esta nueva expresión de la Función Indirecta de Utilidad respecto al precio de un bien individual, tenemos:

$$\frac{\partial V(P_i, M)}{\partial P_i} \equiv \frac{\partial V}{\partial P_i} + \frac{\partial V}{\partial M} \frac{\partial e}{\partial P_i} = \underset{\substack{\text{En toda la función} \\ \text{de gasto, } \partial V=0}}{0} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial P_i} = - \frac{\partial V}{\partial M} \frac{\partial e}{\partial P_i}$$

De donde acabamos obteniendo la Identidad de Roy:

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial P_i} = -\frac{\partial V}{\partial M} \frac{\partial e}{\partial P_i} = -\lambda X_i^*$$

En otras palabras, la identidad de Roy<sup>13</sup> muestra la relación entre las funciones Marshallianas de Demanda y la Función de Utilidad Indirecta (Maté y Pérez, 2007).

$$X^d(P_X, P_Y, M) = -\frac{\frac{\partial V}{\partial P_X}}{\frac{\partial V}{\partial M}} \quad Y^d(P_X, P_Y, M) = -\frac{\frac{\partial V}{\partial P_Y}}{\frac{\partial V}{\partial M}}$$

Esta identidad muestra que se puede deducir las funciones Marshallianas de demanda una vez conocidas la función de utilidad indirecta.

## 4.2 Lema de Shepard

Surge a partir del análisis de la estática comparativa, al estudiar los efectos de cambios en el precio de un bien individual sobre la función de gasto. Afirma que la derivada de la función gasto respecto de un precio es igual a la demanda compensada del bien cuyo precio varió (García, 2010).

$$\frac{\partial e(P_X, P_Y, U)}{\partial P_X} = X^h(P_X, P_Y, U) \quad \frac{\partial e(P_X, P_Y, U)}{\partial P_Y} = Y^h(P_X, P_Y, U)$$

---

<sup>13</sup> Nos da a conocer cuánto debemos adquirir de un bien teniendo en cuenta cómo varía nuestro bienestar conociendo los precios de todos los bienes posibles a consumir (IPC) y los ingresos, ante cambios que ocurren en el precio del bien.

Puede comprobarse fácilmente teniendo en cuenta que, a partir de las condiciones de primer orden  $P_j = \lambda U M g_j$  y que en la curva de indiferencia la utilidad es constante, es decir:  $\partial U = 0$ .

La tasa de variación del gasto mínimo para alcanzar un nivel dado de utilidad ante variaciones en el precio de un bien coincide con la cantidad demandada de dicho bien en el óptimo de minimización; es decir, con su demanda compensada de Hicks.

Es el nivel mínimo de gasto necesario para alcanzar un determinado nivel de utilidad, en función de cuáles sean los precios.

## 5. La Resolución del problema dual

### 5.1 La minimización del gasto

Las funciones de demanda condicionada o hicksianas van a ser aquellas funciones de demanda que realicen los consumidores que minimicen su gasto. Para ver cómo funciona el enfoque dual, reconsideremos el ejemplo Cobb-Douglas (Nicholson, 2013).<sup>14</sup>

$$U = X^\alpha Y^{1-\alpha}$$

En este caso, el lagrangiano viene dado por

$$L = P_X X + P_Y Y - \lambda (X^\alpha Y^{1-\alpha} - U^*)$$

---

<sup>14</sup> Las funciones de utilidad tipo Cobb-Douglas son la base de unas funciones de demanda tales que el total gastado en cada mercancía es una proporción constante de la renta, independientemente de los precios, es decir, en el bien 1 siempre se gastará el mismo porcentaje de la renta aunque cambien los precios, y lo mismo para el bien 2. Las preferencias que dan origen a este tipo de función de utilidad se conocen como preferencias *regulares*.

Diferenciando con respecto a  $X$ ,  $Y$  y  $\lambda$  e igualando a cero, tenemos que

$$\frac{\partial L}{\partial X} = P_X - \lambda \alpha X^{\alpha-1} Y^{1-\alpha} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = P_Y - \lambda (1-\alpha) X^\alpha Y^{-\alpha} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = X^\alpha Y^{1-\alpha} - U^* = 0$$

De lo cual, despejando de las dos ecuaciones a  $\lambda$  e igualándolas tendemos

$$\lambda = \frac{P_X}{\alpha X^{\alpha-1} Y^{1-\alpha}} = \frac{P_Y}{(1-\alpha) X^\alpha Y^{-\alpha}}$$

Ordenando los términos

$$\frac{\alpha X^{\alpha-1} Y^{1-\alpha}}{(1-\alpha) X^\alpha Y^{-\alpha}} = \frac{P_X}{P_Y}$$

Aplicando leyes de los logaritmos tenemos

$$\frac{\alpha Y}{(1-\alpha) X} = \frac{P_X}{P_Y}$$

Despejando para  $Y$

$$Y = \frac{P_X}{P_Y} \frac{(1-\alpha)}{\alpha} X$$

Sustituyendo este valor en la tercera derivada (que corresponde a la restricción)



$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = X^\alpha Y^{1-\alpha} - U^* = 0$$

$$U^* = X^\alpha \left[ \frac{P_X (1-\alpha)}{P_Y \alpha} X \right]^{1-\alpha}$$

$$U^* = X^\alpha X^{1-\alpha} \left[ \frac{P_X (1-\alpha)}{P_Y \alpha} \right]^{1-\alpha}$$

Aplicando leyes de los exponentes y despejando para  $X$ , obtenemos el valor óptimo<sup>15</sup>

$$h_x = X^h = U \left( \frac{\alpha P_Y}{1-\alpha P_X} \right)^{1-\alpha} \quad \text{Función de demanda compensada (hicksiana)}$$

Para obtener el valor de  $Y$ , sustituimos el valor de  $h_x$  en la ecuación

$$Y = \frac{P_X (1-\alpha)}{P_Y \alpha} X$$

$$Y = \left[ \frac{P_X (1-\alpha)}{P_Y \alpha} \right] U \left( \frac{1-\alpha P_Y}{\alpha P_X} \right)^{1-\alpha}$$

Aplicando leyes de los exponentes obtendremos

$$h_y = Y^h = U \left[ \frac{(1-\alpha) P_X}{\alpha P_Y} \right]^\alpha \quad \text{Función de demanda compensada (hicksiana)}$$

---

<sup>15</sup> El valor más grande o más pequeño de la función objetivo se llama el valor óptimo, y un conjunto de valores de  $x, y, z, \dots$  que se resultan en el valor óptimo es la solución óptima. Las variables  $x, y, z, \dots$  se llaman las variables decisión.

Una vez obtenidas las hicksianas o cantidades óptimas que minimizan el gasto, se sustituyen los valores correspondientes  $h_X$  y  $h_Y$  en la ecuación de gasto, y de esta forma obtenemos la ecuación de gasto que nos representa el gasto mínimo a realizar la alcanzar un nivel determinado de utilidad.

$$E = P_X h_X + P_Y h_Y$$

$$E = P_X \left[ U \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{P_Y}{P_X} \right)^{1-\alpha} \right] + P_Y \left[ U \left( \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{P_Y}{P_X} \right)^{1-\alpha} \right]$$

Aplicando leyes de los exponentes

$$E = UP_x^\alpha P_Y^{1-\alpha} \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} + UP_x^\alpha P_Y^{1-\alpha} \left( \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{1-\alpha}$$

Factorizando los términos

$$E = UP_x^\alpha P_Y^{1-\alpha} \left[ \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} + \left( \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{1-\alpha} \right]$$

Factorizando el término entre corchetes

$$E = UP_x^\alpha P_Y^{1-\alpha} \left[ \frac{1}{\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}} \right]$$

Por lo que el gasto total vendrá representado por:

$$E = \frac{UP_x^\alpha P_Y^{1-\alpha}}{\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}} \quad \text{Ecuación de gasto}$$

## 5.2 Relación entre demanda ordinaria y compensada, utilidad indirecta y función de gasto

Existe una gran relación entre lo que se refiere a la función de demanda ordinaria<sup>16</sup> o marshallianas y las funciones de demanda compensada o hicksianas, si son valuadas en el óptimo.

Esto toda vez que la maximización de la utilidad y la minimización del gasto es el mismo problema, solo que vistos desde diferente perspectiva.

Así, utilizando los resultados del ejercicio anterior tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Max} U &= X^\alpha Y^{1-\alpha} \\ \text{s.a.} M &= P_X X + P_Y Y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Min } E &= P_X X + P_Y Y \\ \text{s.a } U &= X^\alpha Y^{1-\alpha} \end{aligned}$$

$$X^* = \frac{\alpha M}{P_X}$$

$$h_X = X = U \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{P_Y}{P_X} \right)^{1-\alpha}$$

$$Y^* = \frac{(1-\alpha)M}{P_Y}$$

$$h_Y = Y = U \left[ \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \frac{P_X}{P_Y} \right]^\alpha$$

$$V = U = \left( \frac{\alpha}{P_X} \right)^\alpha \left( \frac{(1-\alpha)}{P_Y} \right)^{1-\alpha} M$$

$$E = \frac{U P_X^\alpha P_Y^{1-\alpha}}{\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}}$$

Valuándolas en el óptimo tenemos que

<sup>16</sup> Mide la cantidad óptima de bienes que consume un individuo para maximizar su utilidad, dados unos precios y un ingreso. Se representa como (Mendieta, 2005):

$$X^d(P_X, P_Y, M) \Big|_{M=e} \equiv X^d(P_X, P_Y, U)$$

$$Y^d(P_X, P_Y, M) \Big|_{M=e} \equiv Y^d(P_X, P_Y, U)$$

Donde,  $X^d$ ,  $Y^d$  es la cantidad demandada,  $P$  el precio del bien y  $M$  el ingreso del individuo. Esta demanda surge del problema primal. La demanda Marshalliana se obtiene a partir del problema Primal o problema de maximización de utilidad restringida.

- $X^d|_{M=E} = X^h$
- $X^h|_{U=V} = X^d$

De esta forma:

$$X^d|_{M=E} = \frac{\alpha M}{P_X} = \frac{\alpha}{P_X} \left( \frac{U P_X^\alpha P_Y^{1-\alpha}}{\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}} \right)$$

Aplicando leyes de los exponentes

$$X^d|_{M=E} = U \left( \frac{\alpha P_Y}{1-\alpha P_X} \right)^{1-\alpha} = X^h$$

$$X^h|_{U=V} = U \left( \frac{\alpha P_Y}{1-\alpha P_X} \right)^{1-\alpha} = \left[ \left( \frac{\alpha}{P_X} \right)^\alpha \left( \frac{(1-\alpha)}{P_Y} \right)^{1-\alpha} M \right] \left( \frac{\alpha P_Y}{1-\alpha P_X} \right)^{1-\alpha}$$

Aplicando leyes de los exponentes

$$X^h|_{U=V} = \frac{\alpha M}{P_X} = X^d$$

## **CONCLUSIONES**

---

Dentro de la racionalidad del consumidor, en presencia de información perfecta, el consumidor puede realizar su mejor elección. Esta elección le permitiría al consumidor alcanzar su máximo nivel de utilidad.

Las dos formas de expresar la elección del consumidor son muy sencillas. Una de ellas implica suponer que el consumidor se encuentra inmerso en un problema cuyo objetivo principal es la maximización de su utilidad sujeto a una restricción de presupuesto. La otra, supone que el consumidor puede minimizar su gasto sujeto a alcanzar el máximo nivel de utilidad. Ambos enfoques nos llevan al mismo resultado de elección óptima de cantidades de bienes para consumir.

Otro resultado importante, es que a partir del proceso de maximización de utilidad restringido o de minimización de gasto restricción se obtienen dos tipos de funciones de demandas (Marshallianas y Hicksianas) a partir de las cuales se pueden estimar medidas de bienestar del consumidor ante cambios en precios y en el ingreso.

Las dos formas de modelar el comportamiento del consumidor son a través del problema primal y el problema dual.

## **BIBLIOGRAFÍA**

---

1. Aguado, F. J. (2012). *Curso fundamental de microeconomía*. Madrid, España, Delta publicaciones.
2. Corchuela M. B. y Quiroga R. A. (2014). *Lecciones de Microeconomía, producción, costes y mercado*. Pirámide, España.
3. Corchuelo, M. A.; Eguía, P. B.; Valor, S. M. T. (2012). *Curso práctico de microeconomía*. Madrid, España, Delta publicaciones.
4. Escartín G. E. (s f). Historia del pensamiento económico, tema 25: Walras y el equilibrio general. Universidad de Sevilla, España. [http://personal.us.es/escartin/Walras\\_Equilibrio\\_General.pdf](http://personal.us.es/escartin/Walras_Equilibrio_General.pdf)
5. Frank, R. H. (2009). *Microeconomía intermedia*. México, Mc Graw Hill.
6. García S. (2013). La teoría del consumidor: dualidad. <https://www.u-cursos.cl/ingenieria/2004/1/MA22A/5/material.../bajar?>
7. Gravelle, H. y Rees R. (2006). *Microeconomía*. Madrid, España, Pearson, Prentice Hall.
8. Krugman P. y Wells R. (2007). Introducción a la economía: Microeconomía. Reverte, Barcelona, España.
9. Maté, G., J. y Pérez, D. C. (2007). *Microeconomía avanzada*. Madrid, España, Pearson, Prentice Hall.
10. Martínez G. X. (2010). Microeconomía Avanzada. *CODE y Departament d'Economia* Universitat Autònoma de Barcelona. <http://pareto.uab.cat/xmg/Docencia/MicroAv1/Curs0607/EqGen.pdf>
11. Mendieta L. J. (2005). Microeconomía II. Universidad de los Andes.
12. Monsalve, F. (2013). Microeconomía Avanzada. Facultad de CC.EE de Albacete, Departamento de Análisis Económico y Finanzas, Área de Fundamentos del Análisis Económico. España.
13. Nicholson W. (2008), Teoría microeconómica, Thompson editores, México, D.F.
14. Nicholson, W. y Snyder, C. (2011). *Microeconomía intermedia y su aplicación*. Madrid, España, Cengage Learning.
15. Parkin M. (2014), microeconomía. quinta edición, Pearson educación, México, D.F.
16. Pereyra (2010). Impacto e importancia de la identidad de roy y el lema de shephard en la teoría del consumidor. Universidad Nacional Mayor de San Marcos.
17. Rufasto A. (s.f.). Los agentes económicos y el circuito económico. <http://rufasto.tripod.com/pdf/econagents.pdf>
18. Stiglitz, J. E. y Walsh, C. E. (2011). *Microeconomía*. Madrid, España, Ariel.
19. Universidad CarlosTercero (2010). Teoría del Consumidor: Dualidad. <http://www.eco.uc3m.es/docencia/microeconomia/notas/Dualidad.pdf>
20. Uriarte, V. C. (2013). *Teoría del equilibrio general*. México, Trillas.
21. Varian, H. (1993) Análisis Microeconómico. Ed. Antoni Bosch, Barcelona.
22. Villar (1999). *Lecciones de microeconomía*. España, Antoni Bosch editor.



## **ANEXO**

---

<b>Unidad de aprendizaje:</b>	<b>Microeconomía</b>
-------------------------------	----------------------

Periodo lectivo	Horas totales	Horas teóricas	Horas prácticas	Créditos
Primero	4	3	1	7

<b>Área:</b>	Básica
--------------	--------

Unidades de aprendizaje antecedentes	Unidades de aprendizaje consecuentes
Ninguna	Ninguna

<b>Fecha de elaboración:</b> Febrero de 2013	<b>Elaboró:</b> M. en E. Juvenal Rojas Merced, M. en E. Ricardo Rodríguez Marcial
--	---

**Objetivo general:** Conocer el contenido y aplicar el método de la teoría microeconómica tradicional.

**Contenido temático:**

UNIDAD I. Preferencias, racionalidad y función de utilidad  
 UNIDAD II. La decisión óptima y la demanda ordinaria  
 UNIDAD III. La dualidad en la teoría del consumo  
 UNIDAD IV. Tecnología, eficiencia y función de producción  
 UNIDAD V. La teoría de los costos  
 UNIDAD VI. Maximización de los beneficios y la dualidad en la producción  
 UNIDAD VII. Modelos de intercambio puro  
 UNIDAD VIII. Economías con producción  
 UNIDAD IX. Fallos del mercado: externalidades y bienes públicos  
 UNIDAD X. La teoría de la utilidad esperada

**Actividades de aprendizaje:**

- Resolución de ejercicios
- Control de lecturas

**Procedimiento de evaluación:**

Producto de evaluación	Porcentaje
Examen	70
Trabajos y ejercicios	30

**Bibliografía**

Aguado, F. J. (2012). *Curso fundamental de microeconomía*. Madrid, España, Delta publicaciones.

Corchuelo, M. A.; Eguía, P. B.; Valor, S. M. T. (2012). *Curso práctico de microeconomía*. Madrid, España, Delta publicaciones.

Frank, R. H. (2009). *Microeconomía intermedia*. México, Mc Graw Hill.

Gravelle, H. y Rees R. (2006). *Microeconomía*. Madrid, España, Pearson, Prentice Hall.

Maté, G., J. y Pérez, D. C. (2007). *Microeconomía avanzada*. Madrid, España, Pearson, Prentice Hall.

Nicholson, W. y Snyder, C. (2011). *Microeconomía intermedia y su aplicación*. Madrid, España, Cengage Learning.

Stiglitz, J. E. y Walsh, C. E. (2011). *Microeconomía*. Madrid, España, Ariel.

Uriarte, V. C. (2013). *Teoría del equilibrio general*. México, Trillas.

Varian, H. R. (1992). *Microeconomic Analysis*. Nueva York, W. W. Norton.

Villar (1999). *Lecciones de microeconomía*. España, Antoni Bosch editor.