JAMBURA JOURNAL OF MATHEMATICS
Jambura J. Math. Vol. 5, No. 1, pp. 210–217, February 2023
Journal Homepage: http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom
DOI: https://doi.org/10.34312/jjom.v5i1.17595

Near-Modul Kuat Faktor

Meryta Febrilian Fatimah[1,*], Darmawati Darmawati[1]

[1] *Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Negeri Sulawesi Barat, Majene 91414, Indonesia*

[*] *Corresponding author. Email: merytaff@unsulbar.ac.id*

ABSTRAK

Near-ring adalah generalisasi dari ring. Pada teori ring, jika R adalah ring dengan elemen satuan terhadap operasi penjumlahan dan perkalian dan G adalah grup komutatif terhadap operasi penjumlahan, maka G dengan operasi perkalian skalar atas R serta memenuhi beberapa aksioma disebut dengan modul atas ring. Diberikan near-ring N dan grup M, near-modul M atas N dapat dikonstruksikan dengan cara yang serupa seperti pada modul atas ring. Selanjutnya, pada paper ini, definisi near-modul terbagi menjadi tiga yaitu near-modul, near-modul modifikasi dan near-modul kuat. Lebih lanjut, paper ini menunjukkan bahwa near-modul kuat dapat dikonstruksi menjadi near-modul kuat faktor, sejalan dengan modul faktor G. Kemudian, paper ini juga menunjukkan bahwa teorema utama fundamental homomorfisma pada modul atas ring dapat digeneralisasi pada near-modul kuat atas near-ring kuat.

Kata Kunci:
Near-Modul; Near-Modul Kuat; Near-Modul Kuat Faktor

ABSTRACT

Near-ring is a generalization of ring. In ring theory, let R be a ring over addition and multiplication operation with unity element and G be a commutative group under addition operation. Then G together with scalar multiplication of R and holds several axioms called module over ring. Let N be a near-ring, here we can construct the module over near-ring called near-module. We have three definitions of module over near-ring, such that, near-module, modified near-module and strong near-module. Then we showed that strong near-module can be constructed into strong near-module factor as well as module factor in G. Furthermore, we generalized the fundamental theorem of homomorphism in module over ring to strong near-module over strong near-ring.

Keywords:
Near-Module; Strong Near-Module; Strong Near-Module Factor

Format Sitasi:

M. F. Fatimah and D. Darmawati, "Near-Modul Kuat Faktor", *Jambura J. Math.*, vol. 5, No. 1, pp. 210–217, 2023, doi: https://doi.org/10.34312/jjom.v5i1.17595

1. Pendahuluan

Hasil perumuman dari ruang vektor atas lapangan yaitu modul atas ring [1, 2]. Modul dibedakan menjadi dua, yakni modul kiri dan modul kanan, oleh karena ring yang tidak selalu komutatif. Misal diberikan grup komutatif $(G, +)$ dan ring $(R, +, \cdot)$ dengan

e-ISSN: 2656-1344
Received: 19 December 2022 | Accepted: 17 February 2023 | Online: 24 February 2023

elemen satuan 1_R. Selanjutnya, dibentuk operasi pergandaan skalar $\circ : R \times G \rightarrow G$ dengan $\circ(r, g) = r \circ g$, untuk setiap $r \in R$ dan $g \in G$ [3]. Grup komutatif G yang memenuhi aksioma tertentu disebut modul atas ring R.

Near-ring merupakan hasil generalisasi dari ring. Himpunan tak kosong N yang dilengkapi dengan dua operasi biner penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\cdot)$ disebut near-ring apabila $(N, +)$ merupakan grup, $(N, \cdot)$ semigrup serta $(N, +, \cdot)$ memenuhi salah satu hukum distributif [4]. Apabila aksioma hukum distributif N yang dipenuhi adalah aksioma hukum distributif kanan maka N disebut near-ring kanan, begitu pula sebaliknya. Pada paper ini, apabila tidak diberikan penjelasan lebih lanjut, near-ring N yang dimaksud adalah near-ring yang memenuhi aksioma hukum distributif kanan. Seperti halnya modul atas ring, apabila aksioma modul atas ring digeneralisasi ke struktur near-ring maka dapat diidentifikasi eksistensi modul atas near-ring. Definisi modul atas near-ring sebelumnya telah dibahas oleh Juglal [5]. Grup $(M, +)$ yang dilengkapi perkalian skalar $\odot_{\mathrm{n}} : N \times M \rightarrow M$ dengan $\odot_{\mathrm{n}}(n, m) = n \odot_{\mathrm{n}} m$ disebut modul atas near-ring $(N, +, \cdot)$ apabila untuk setiap $n_1, n_2 \in N$ dan $m \in M$ memenuhi $(n_1 + n_2) \odot_{\mathrm{n}} m = n_1 \odot_{\mathrm{n}} m + n_2 \odot_{\mathrm{n}} m$ dan $(n_1 \ n_2) \odot_{\mathrm{n}} m = n_1 \odot_{\mathrm{n}} (n_2 \odot_{\mathrm{n}} m)$ [6]. Selanjutnya, M disebut dengan near-modul [7]. Karena aksioma hukum distributif dari near-ring hanya berlaku salah satu dan berdasarkan aksioma modul atas ring pada [8], maka Ramakrishna, *et al.* [9] mendefinisikan near-modul atas near-ring dengan tiga cara yaitu near-modul, near-modul modifikasi dan near-modul kuat.

Lebih lanjut, diberikan G adalah modul atas ring R dan S submodul di G. Karena S submodul di G, maka $(S, +)$ merupakan subgrup komutatif di G. Dengan demikian S merupakan subgrup normal di G. Berdasarkan teori grup, dapat dibentuk himpunan koset $\left(\frac{G}{S}, +\right)$ yang juga merupakan grup komutatif dan selanjutnya disebut sebagai grup faktor [10]. Jika didefinisikan operasi pergandaan skalar $\circ : R \times \frac{G}{S} \rightarrow \frac{G}{S}$ yang *well-defined* dan memenuhi aksioma modul atas ring, maka himpunan koset $\frac{G}{S}$ selanjutnya disebut sebagai modul faktor dari submodul S di G [11]. Berdasarkan hasil yang diperoleh pada modul atas ring, paper ini mengonstruksi modul faktor pada near-modul kuat, sehingga diperoleh hasil generalisasi modul faktor pada near-modul kuat.

Pada paper-paper sebelumnya telah dikerjakan beberapa topik yang berkaitan seperti pembahasan hasil generalisasi radikal prima pada near-ring dan near-modul [12], generalisasi dari near-ring [13], sifat-sifat near-ring [14], serta generalisasi near-modul reguler [15]. Lebih lanjut, generalisasi near-modul modifikasi faktor juga dibahas pada [9]. Adapun pada paper ini, diperkenalkan hasil generalisasi near-modul kuat faktor serta generalisasi teorema utama homomorfisma modul dari konsep homomorfisma modul atas ring pada konsep near-modul kuat atas near-ring.

2. Metode

Penelitian ini dilakukan dalam bentuk studi literatur tentang konsep-konsep dasar yang berkaitan dengan Near-Model maupun Near-Modul Faktor Kuat Faktor dari berbagai sumber literatur seperti jurnal ilmiah, prosiding maupun dari sumber buku-buku teks. Berikut beberapa konsep dasar yang berkaitan dengan topik yang dibahas pada penelitian ini.

2.1. Near-ring

Definisi 1. [16] Diberikan himpunan tak kosong N. Himpunan N terhadap operasi biner penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\cdot)$ disebut near-ring apabila memenuhi:

1. $(N, +)$ merupakan grup;
2. $(N, \cdot)$ semigrup;
3. Untuk setiap $a, b, c \in N$ memenuhi $(a + b)\ c = ac + bc$.

Selanjutnya, near-ring dinotasikan dengan $(N, +, \cdot)$.

Contoh 1. Diberikan himpunan $M(G) = f|f : G \to G$ dengan G grup terhadap operasi penjumlahan di $M(G)$ yaitu untuk setiap $f, g{\in}M(G)$ pemetaan $f{+}g{:}G{\to}G$ didefinisikan dengan, untuk setiap $x{\in}G$ berlaku $(f{+}g)(x) ={f}(x){+}g(x)$ dan operasi komposisi fungsi di $M(G)$. Selanjutnya dinotasikan dengan $(M(G), +, \circ)$.

Pada ring telah diperkenalkan tentang modul atas ring. Grup komutatif $(\mathrm{M}, +)$ dan ring $(R, +, \cdot)$ dengan elemen satuan serta operasi $\circ : R \times M \to M$ disebut modul kiri atas ring R apabila untuk setiap $r_1, r_2 \in R$ dan $m_1, m_2 \in M$ dipenuhi $r_1 \circ (m_1 + m_2) = r_1 \circ m_1 + r_1 \circ m_2$, $(r_1 + r_2) \circ m_1 = r_1 \circ m_1 + r_2 \circ m_1$, $(r_1 \cdot r_2) \circ m_1 = r_1 \circ (r_2 \circ m_1)$ dan $1_R \circ m_1 = m_1$ [1].

2.2. Modul Atas Near-ring

Definisi 2. [9] Diberikan $(\mathrm{M}, +)$ grup dan $(\mathrm{N}, +, \cdot)$ near-ring serta didefinisikan pergandaan skalar $\odot_{\mathrm{n}} :\ \mathrm{N} \times \mathrm{M} {\to} \mathrm{M}$. Himpunan M disebut near-modul atas N apabila:

1. Untuk setiap $n_1, n_2{\in}N$ dan $m{\in}M$ berlaku $(n_1{+}\ n_2) \odot_{\mathrm{n}} m = n_1{\odot_{\mathrm{n}}}\ m\ {+}n_2{\odot_{\mathrm{n}}}\ m$.
2. Untuk setiap $n_1, n_2{\in}N$ dan $m{\in}M$ berlaku $(n_1\ \ n_2) \odot_{\mathrm{n}} m = n_1{\odot_{\mathrm{n}}}\ (n_2{\odot_{\mathrm{n}}}\ m)$.

Selanjutnya, near-modul dinotasikan dengan $(\mathrm{M}, +, \odot_{\mathrm{n}})$ dengan notasi $\odot_{\mathrm{n}}$ diartikan sebagai operasi pergandaan skalar $\odot_{\mathrm{n}} :\ \mathrm{N} \times \mathrm{M} {\to} \mathrm{M}$.

Contoh 2. Diberikan $(G, +)$ grup dan $(M(G), +, \circ)$ near-ring. Didefinisikan operasi pergandaan skalar $\odot_{\mathrm{n}}\ :\ M(G) \times\ G \to\ G$ dengan definisi untuk setiap $f \in M(G)$ dan $x \in\ G$ berlaku $\odot_{\mathrm{n}}(f, x) = f{\odot_{\mathrm{n}}}x\ =\ f(x)$. Selanjutnya, $(G, +)$ merupakan near-modul atas near-ring $M(G)$ sebab untuk setiap $f, g \in M(G)$ dan $x \in G$ berlaku $(f + g) \odot_{\mathrm{n}} x\ = (f + g)(x) =\ f(x) + g(x)$ dan $(f \circ g) \odot_{\mathrm{n}} x\ =\ (f \circ g)(x) =\ f(g(x)) = f{\odot_{\mathrm{n}}}(g{\odot_{\mathrm{n}}}x)$.

2.3. Near-modul Modifikasi

Definisi 3. [9] Diberikan $(M, +)$ grup dan $(N, +, \cdot)$ near-ring serta didefinisikan pergandaan skalar $\odot_{\mathrm{m}}\ :\ N\ \times\ M \to M$. Himpunan M disebut near-modul modifikasi atas N apabila:

1. Untuk setiap $n{\in}N$ dan $m_1, m_2{\in}M$ berlaku $n{\odot_{\mathrm{m}}}\ (m_1{+}\ m_2) = n{\odot_{\mathrm{m}}}m_1{+}n{\odot_{\mathrm{m}}}m_2$.
2. Untuk setiap $n_1, n_2{\in}N$ dan $m{\in}M$ berlaku $(n_1\ \ n_2) \odot_{\mathrm{m}}m = n_1{\odot_{\mathrm{m}}}(n_2{\odot_{\mathrm{m}}}m)$.

Selanjutnya, near-modul modifikasi dinotasikan dengan $(M, +, \odot_{\mathrm{m}})$. Near-modul M pada Contoh 2 bukan merupakan near-modul modifikasi. Sebab, $f{\odot_{\mathrm{m}}}\ (x + y)\ = f(x + y)$. Oleh karena f adalah suatu fungsi dari G ke G, sehingga tidak ada jaminan bahwa $f(x + y)\ =\ f(x) + f(y)$. Berikut diberikan contoh near-modul modifikasi.

Contoh 3. Diberikan $(M,+)$ grup dan $(N,+,\cdot_L)$ near-ring serta didefinisikan operasi pergandaan skalar $\odot_\mathrm{m} : N\times M \to M$ dengan definisi, untuk setiap $n \in N$ dan $m \in M$ berlaku $\odot_\mathrm{m}(n,m) = n \odot_\mathrm{m} m = m$. Struktur $(M,+,\odot_\mathrm{m})$ merupakan near-modul modifikasi sebab untuk setiap $n_1, n_2 \in N$ dan $m_1, m_2 \in M$ berlaku $n_1 \odot_\mathrm{m}(m_1+m_2) = n_1 \odot_\mathrm{m} m_1 + n_1 \odot_\mathrm{m} m_2$ dan $(n_1 \cdot_L n_2) \odot_\mathrm{m} m_1 = n_1 \odot_\mathrm{m} (n_2 \odot_\mathrm{m} m_1)$.

Berdasarkan Definisi 1, Contoh 3 bukan merupakan near-modul. Sebab untuk setiap $n_1, n_2 \in N$ dan $m \in M$ berlaku $(n_1+n_2)\odot_\mathrm{m} m = m$ dan $n_1 \odot_\mathrm{m} m + n_2 \odot_\mathrm{m} m = m+m = 2m$ sehingga $(n_1+n_2)\odot_\mathrm{m} m \neq n_1 \odot_\mathrm{m} m + n_2 \odot_\mathrm{m} m$. Dengan demikian, tidak semua near-modul adalah near-modul modifikasi. Begitu pula sebaliknya.

2.4. Near-modul Kuat

Definisi 4. [9] Diberikan $(M,+)$ grup dan $(N,+,\cdot)$ near-ring serta didefinisikan pergandaan skalar $\odot : N \times M \to M$. Himpunan M disebut near-modul kuat atas N apabila:

1. Untuk setiap $n_1, n_2 \in N$ dan $m \in M$ berlaku $(n_1+n_2)\odot m = n_1 \odot m + n_2 \odot m$.
2. Untuk setiap $n \in N$ dan $m_1, m_2 \in M$ berlaku $n \odot (m_1+m_2) = n \odot m_1 + n \odot m_2$.
3. Untuk setiap $n_1, n_2 \in N$ dan $m \in M$ berlaku $(n_1\, n_2)\odot m = n_1 \odot (n_2 \odot m)$.

Contoh 4. Diberikan $(M,+)$ grup dan $(N,+,\cdot)$ near-ring. Didefinisikan operasi pergandaan skalar $\odot : N\times M \to M$ dengan definisi untuk setiap $n \in N$ dan $m \in M$ berlaku $\odot(n,m) = n \odot m = nm$. Selanjutnya, $(M,+)$ merupakan near-modul kuat atas near-ring N sebab untuk setiap $n_1, n_2 \in N$ dan $m_1, m_2 \in M$ berlaku:

1. $(n_1+n_2)\odot m = n_1 \odot m + n_2 \odot m$
2. $n_1 \odot (m_1+m_2) = n_1 \odot m_1 + n_1 \odot m_2$
3. $(n_1 \cdot n_2)\odot m_1 = n_1 \odot (n_2 \odot m_1)$.

Diketahui bahwa setiap M near-modul kuat, maka M juga merupakan near-modul dan near-modul modifikasi. Namun, belum tentu berlaku sebaliknya, sebagaimana ditunjukkan pada Contoh 2 dan Contoh 3.

3. Hasil dan Pembahasan

Pada modul atas ring didefinisikan modul faktor dari suatu submodul atas ring. Demikian halnya pada near-modul kuat. Diberikan $(M,+,\odot)$ adalah near-modul kuat atas near-ring $(N,+,\cdot)$ dan $S \subseteq M$ sub near-modul kuat, untuk membentuk suatu near-modul kuat faktor didefinisikan terlebih dahulu suatu ideal pada near-modul kuat.

Definisi 5. Diberikan $(M,+,\odot)$ near-modul kuat, $(N,+,\cdot)$ near-ring dan $I \subseteq M$. Subgrup normal I atas M disebut ideal di M apabila untuk setiap $n \in N$, $i \in I$, $m \in M$ berlaku $n(m+i) - nm \in I$.

Pada teori ring, salah satu sifat ideal di ring R yaitu jika I ideal di R dan dibentuk koleksi ideal $\mathcal{I} = \{I | I \text{ ideal di } R\}$, maka $\mathcal{I}$ juga merupakan ideal di R [10]. Berdasarkan hal ini, sifat ideal pada ring R dapat digeneralisasi untuk sifat ideal pada near-modul kuat.

Teorema 1. *Diberikan near-modul kuat $(M,+,\odot)$ atas near-ring $(N,+,\cdot)$ dan I ideal pada near-modul kuat M. Jika koleksi ideal pada near-modul kuat M dinotasikan dengan $\Pi = \{I_\alpha | I_\alpha \text{ ideal di } M, \alpha \in \Delta\}$ dengan Δ himpunan indeks, maka irisan dari semua koleksi ideal di M merupakan ideal.*

Bukti. Berdasarkan Definisi 5, karena I_α ideal di $M, \forall \alpha \in \Delta$, dengan Δ himpunan indeks sehingga I_α merupakan subgrup normal untuk setiap $\alpha \in \Delta$, dengan Δ himpunan indeks. Berdasarkan [10], diperoleh bahwa $\bigcap_{\alpha \in \Delta} I_\alpha$ subgrup normal atas M. Ambil sebarang $n \in N$, $m \in M$, $i \in \bigcap_{\alpha \in \Delta} I_\alpha$ artinya , $i \in I_\alpha, \forall \alpha \in \Delta$. Oleh karena $I_\alpha, \forall \alpha \in \Delta$ ideal atas M, maka $n(m+i) - nm \in I_\alpha, \forall \alpha \in \Delta$. Akibatnya $n(m+i) - nm \in \bigcap_{\alpha \in \Delta} I_\alpha$. Dengan demikian $\bigcap_{\alpha \in \Delta} I_\alpha$ ideal atas M. □

Seperti halnya pada teori modul dapat mengonstruksi struktur modul faktor dari idealnya, pada near-modul kuat juga demikian. Diberikan $(M, +, \odot)$ adalah near-modul kuat atas near-ring $(N, +, \cdot)$ dan $I \subseteq M$ ideal. Bentuk himpunan koset $\frac{M}{I} = \{vm + I | m \in M\}$ yang didefinisikan operasi $\oplus$ dan $\odot$ pada $\frac{M}{I}$ yaitu untuk setiap $m_1 + I, m_2 + I \in \frac{M}{I}$ dan $n \in N$ berlaku $m_1 + I \oplus m_2 + I = (m_1 + m_2) + I$ dan $n \odot m_1 + I = (nm_1) + I$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa himpunan $\frac{M}{I}$ dengan operasi $\oplus$ dan $\odot$ merupakan near-modul kuat.

Teorema 2. *Diberikan near-modul kuat* $(\mathrm{M}_1, +_1, \odot_1)$ *dan* I *ideal dari* M. *Jika* $\frac{M}{I} = \{m + I | m \in M\}$ *dan didefinisikan operasi* $\oplus$ *dan* $\odot$ *pada* $\frac{M}{I}$ *yaitu untuk setiap* $m_1 + I, m_2 + I \in \frac{M}{I}$ *dan* $n \in N$ *berlaku* $m_1 + I \oplus m_2 + I = (m_1 + m_2) + I$ *dan* $n \odot m_1 + I = (nm_1) + I$, *maka* $(\frac{M}{I}, \oplus, \odot)$ *merupakan near-modul kuat.*

Bukti. Akan ditunjukkan $(\frac{M}{I}, \oplus, \odot)$ near-modul kuat. Ditunjukkan terlebih dahulu bahwa pemetaan $\odot : N \times \frac{M}{I} \to \frac{M}{I}$ terdefinisi dengan baik, dengan definisi untuk setiap $m_1 + I \in \frac{M}{I}$ dan $n \in N$ berlaku $n \odot m_1 + I = (nm_1) + I$. Ambil sebarang $m_1 + I, m_2 + I \in \frac{M}{I}$ dan $n_1, n_2 \in N$ dengan $m_1 + I = m_2 + I$ menurut kesamaan dua buah koset artinya $m_1 - m_2 \in I$ serta $n_1 = n_2$. Perhatikan bahwa $n_1 \odot m_1 + I = (n_1 m_1) + I$ dan $n_2 \odot m_2 + I = (n_2 m_2) + I$ diperoleh $n_1 m_1 - n_2 m_2 = n_1 m_1 - n_1 m_2 = n_1 (m_1 - m_2) \in I$ artinya $(n_1 m_1) + I = (n_2 m_2) + I$ dengan kata lain $n_1 \odot m_1 + I = n_2 \odot m_2 + I$ atau operasi pergandaan skalar $\odot$ terdefinisi dengan baik. Selanjutnya, ditunjukkan $(\frac{M}{I}, \oplus, \odot)$ merupakan near-modul kuat. Ambil sebarang $m_1 + I, m_2 + I \in \frac{M}{I}$ dan $n_1, n_2 \in N$. Perhatikan bahwa,

1. $(n_1 + n_2) \odot m_1 + I = ((n_1 + n_2)\,\mathrm{m}_1) + \mathrm{I} = (n_1 m_1 + n_2 m_1) + I = n_1 m_1 + I + n_2 m_1 + I = n_1 \odot m_1 + n_2 \odot m_1$.
2. $n_1 \odot (m_1 + m_2) = (n_1 (m_1 + m_2)) + \mathrm{I} = (n_1 m_1 + n_1 m_2) + I = n_1 m_1 + I + n_1 m_2 + I = n_1 \odot m_1 + n_1 \odot m_2$.
3. $(n_1 \cdot n_2) \odot m_1 = ((n_1 n_2)\,\mathrm{m}_1) + \mathrm{I} = (\mathrm{n}_1 (n_2 m_1)) + I = n_1 \odot (n_2 \odot m_1)$.

Dengan M adalah suatu near-modul kuat. Akibatnya $(\frac{M}{I}, \oplus, \odot)$ merupakan near-modul kuat. □

Seperti halnya konstruksi modul faktor, near-modul kuat $(\frac{M}{I}, \oplus, \odot)$ pada Teorema 2 disebut juga dengan near-modul kuat faktor. Lebih lanjut, konsep homomorfisma pada near-modul kuat juga diperkenalkan seperti konsep homomorfisma modul atas ring.

Definisi 6. Diberikan near-modul kuat $(M_1, +_1, \odot_1)$ dan $(M_2, +_2, \odot_2)$ atas near-ring $(N, +, \cdot)$. Pemetaan $\psi : M_1 \to M_2$ disebut homomorfisma $N-$near-modul kuat apabila untuk setiap $a, b \in M_1$ dan $x \in N$ berlaku:

1. $\psi(a +_1 b) = \psi(a) +_2 \psi(b)$
2. $\psi(x \odot_1 a) = x \odot_2 \psi(a)$.

Berdasarkan Definisi 6 dapat diinterpretasikan bahwa ψ merupakan homomorfisma $N-$near-modul kuat apabila hasil peta dari jumlahan dua elemen di M_1 sama dengan jumlah masing-masing petanya dan peta hasil kali skalar suatu elemen di N dengan elemen di M_1 sama dengan hasil kali skalar dengan peta dari elemen di M_1 tersebut. Seperti halnya sifat-sifat yang dimiliki transformasi linear, sifat terkait homomorfisma $N-$near modul kuat diberikan.

Sifat 1. *Diberikan near-modul kuat* $(\mathrm{M}_1, +_1, \odot_1)$ *dan* $(\mathrm{M}_2, +_2, \odot_2)$ *atas near-ring* $(\mathrm{N}, +, \cdot)$. *Jika* $\psi : \mathrm{M}_1 \rightarrow \mathrm{M}_2$ *adalah homomorfisma* $N-$*near-modul kuat, maka* $\psi\left(0_{M_1}\right) = 0_{M_2}$.

Bukti. Akan ditunjukkan $\psi\left(0_{M_1}\right) = 0_{M_2}$. Karena ψ adalah homomorfisma $N-$near-modul kuat, berlaku

$$\psi\left(0_{\mathrm{M}_1}\right) = \psi\left(0_{\mathrm{M}_1} + 0_{\mathrm{M}_1}\right) = \psi\left(0_{\mathrm{M}_1}\right) + \psi\left(0_{\mathrm{M}_1}\right).$$

Dengan menambahkan $-\psi\left(0_{\mathrm{M}_1}\right)$ ke kedua ruas, diperoleh bahwa,

$$\begin{aligned}
\psi\left(0_{\mathrm{M}_1}\right) + \left(-\psi\left(0_{\mathrm{M}_1}\right)\right) &= \psi\left(0_{\mathrm{M}_1}\right) + \psi\left(0_{\mathrm{M}_1}\right) + \left(-\psi\left(0_{\mathrm{M}_1}\right)\right) \\
\psi\left(0_{\mathrm{M}_1}\right) - \psi\left(0_{\mathrm{M}_1}\right) &= \psi\left(0_{\mathrm{M}_1}\right) + \psi\left(0_{\mathrm{M}_1}\right) - \psi\left(0_{\mathrm{M}_1}\right) \\
0_{M_2} &= \psi\left(0_{\mathrm{M}_1}\right).
\end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $\psi\left(0_{M_1}\right) = 0_{M_2}$. □

Berdasarkan Sifat 1, apabila $\psi : \mathrm{M}_1 \rightarrow \mathrm{M}_2$ adalah homomorfisma $N-$near-modul kuat, maka $\psi\left(0_{M_1}\right) = 0_{M_2}$. Selanjutnya dapat didefinisikan himpunan semua elemen $\mathrm{m} \in \mathrm{M}_1$ yang dipetakan ke 0_{M_2} dan disebut $\ker(\psi) = \{m \in M_1 | \psi(m) = 0_{M_2}\}$. Himpunan $\ker(\psi)$ tak kosong dari Sifat 1, sebab $0_{M_1} \in \ker\psi$ untuk ψ homomorfisma $N-$near-modul.

Teorema 3. *Diberikan near-modul kuat* $(M_1, +_1, \odot_1)$ *dan* $(M_2, +_2, \odot_2)$ *atas near-ring* $(N, +, \cdot)$. *Jika* $\psi : M_1 \rightarrow M_2$ *adalah homomorfisma* $N-$*near-modul kuat, maka ker* ψ *adalah ideal dari* M_1 *dan* $\frac{M_1}{ker\ \psi} \simeq \psi(M_1)$.

Bukti. Diketahui bahwa *ker* ψ merupakan subgrup normal atas M_1 [10]. Selanjutnya ditunjukkan *ker* ψ ideal dari M_1. Ambil sebarang $n \in N$, $m \in M$, $i \in$ *ker* ψ artinya $\psi(i) = 0_{M_2}$. Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned}
\psi\left(n\left(m+i\right) - nm\right) &= \psi\left(nm + ni - nm\right) \\
&= \psi\left(nm\right) + \psi\left(ni\right) - \psi\left(nm\right) \\
&= n\psi\left(m\right) + n\psi\left(i\right) - n\psi\left(m\right) \\
&= n\psi\left(i\right) \\
&= 0_{M_2}.
\end{aligned}$$

Dengan demikian $n(m+i) - nm \in \ker\psi$. Dengan kata lain $\ker\psi$ ideal atas M_1. Selanjutnya ditunjukkan bahwa $\frac{M_1}{\ker\psi} \simeq \psi(M_1)$. Bentuk pemetaan $f : \frac{M_1}{\ker\psi} \rightarrow \psi(M_1)$ dengan definisi untuk setiap $m + \ker\psi = f\left(m + \ker\psi\right) = \psi\left(m\right)$.

Akan ditunjukkan bahwa f merupakan suatu isomorfisma near-modul kuat.

1. Ambil sebarang $m + \ker\psi, n + \ker\psi \in \frac{M_1}{\ker\psi}$ dengan $m + \ker\psi = n + \ker\psi$. Menurut kesamaan dua buah koset diperoleh bahwa $m - n \in \ker\psi$ artinya $\psi(m-n) = 0_{M_2}$. Karena ψ adalah near-modul kuat homomorfisma maka $\psi(m) - \psi(n) = 0_{M_2}$. Hal ini berakibat $\psi(m) = \psi(n)$ atau $f(m + \ker\psi) = f(n + \ker\psi)$. Diperoleh bahwa f pemetaan.
2. Selanjutnya ditunjukkan bahwa f merupakan near-modul kuat homomorfisma. Ambil sebarang $m + \ker\psi$, $n + \ker\psi \in \frac{M_1}{\ker\psi}$ dan $\alpha \in$N maka,

$$\begin{aligned} f((m+\ker\psi)+(n+\ker\psi)) &= f((m+n)+\ker\psi) \\ &= \psi(m+n) \\ &= \psi(m)+\psi(n) \\ &= f(m+\ker\psi)+f(n+\ker\psi), \end{aligned}$$

   dan

$$\begin{aligned} f(\alpha(m+\ker\psi)) &= f(\alpha m+\ker\psi) \\ &= \psi(\alpha m) \\ &= \alpha\psi(m) \\ &= \alpha f(m+\ker\psi), \end{aligned}$$

   sehingga f merupakan homomorfisma $N-$near-modul kuat.
3. Ditunjukkan f berisfat injektif. Ambil sebarang $m + \ker\psi \in \ker f$, artinya $f(m + \ker\psi) = \psi(m) = 0_{M_2}$. Akibatnya $m \in \ker\psi$, dengan demikian diperoleh bahwa $\ker f = 0_{M_2} + \ker\psi$, sehingga f injektif.
4. Ditunjukkan f bersifat surjektif. Ambil sebarang $x \in \psi(M_1)$, berarti terdapat $m_1 \in M_1$ sedemikian sehingga $x = \psi(m_1)$. Artinya ada $m_1 + \ker\psi \in \frac{M_1}{\ker\psi}$ sedemikian sehingga f $(m_1 + \ker\psi) = x$. Dengan demikian terbukti bahwa f surjektif.

Dari langkah 1-4, diperoleh bahwa f merupakan suatu isomorfisma near-modul kuat. Dengan kata lain $\frac{M_1}{\ker\psi} \simeq \psi(M_1)$. □

4. Kesimpulan

Setiap (M, +,$\odot$) near-modul kuat, maka (M, +,$\odot$) juga merupakan near-modul dan near-modul modifikasi. Namun, apabila M merupakan near-modul, maka M belum tentu near-modul modifikasi maupun near-modul kuat. Lebih lanjut, apabila M merupakan near-modul modifikasi, maka M belum tentu near-modul maupun near-modul kuat.

Selanjutnya, diberikan (M, +,$\odot$) adalah near-modul kuat atas near-ring (N, +,$\cdot$) dan $I \subseteq M$ ideal. Himpunan koset $\frac{M}{I} = \{m + I | m \in M\}$ yang didefinisikan dengan operasi $\oplus$ dan $\odot$ pada $\frac{M}{I}$ yaitu untuk setiap $m_1 + I, m_2 + I \in \frac{M}{I}$ dan $n \in N$ berlaku $m_1 + I \oplus m_2 + I = (m_1 + m_2) + I$ dan $n \odot m_1 + I = (nm_1) + I$ merupakan near-modul kuat faktor. Hasil generalisasi modul faktor ke near-modul kuat faktor yaitu $\left(\frac{M}{I}, \oplus, \odot\right)$.

Lebih lanjut, diberikan near-modul kuat $(M_1, +_1, \odot_1)$ dan $(M_2, +_2, \odot_2)$ atas near-ring (N, +,$\cdot$). Didefinisikan pemetaan $\psi : M_1 \rightarrow M_2$. Karena $\ker\psi$ merupakan ideal atas near-ring M, maka himpunan $\left(\frac{M}{\ker\psi}, \oplus, \odot\right)$ juga merupakan near-modul kuat faktor. Dengan demikian, hasil generalisasi dari teorema utama homomorfisma modul dapat diperoleh pada near-modul kuat yaitu $\frac{\mathrm{M}_1}{\ker \psi} \simeq \psi(\mathrm{M}_1)$.

Ucapan Terima Kasih

Terima kasih kepada LPPM Universitas Sulawesi Barat yang telah mendukung penelitian ini melalui pendanaan penelitian skim penelitian dosen pemula dengan nomor kontrak: 095/UN55.C/PT.01.03/2022.

Referensi

[1] S. Wahyuni, I. E. Wijayanti, D. Y. Yuwaningsih, and A. D. Hartanto, *Teori Ring dan Modul*. Yogyakarta: UGM Press, 2016.
[2] A. Rorres, *An Introduction to Linear Algebra*, 4th ed. London: Pearson Education, Inc., 2017.
[3] W. A. Adkins and S. H. Weintraub, *Algebra: An Approach via Module Theory*, ser. Graduate Texts in Mathematics. New York, NY: Springer New York, 1992, vol. 136, doi: 10.1007/978-1-4612-0923-2.
[4] G. Pilz, *Near-rings : the theory and its applications*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1983.
[5] S. Juglal, *Prime near-ring modules and their links with the generalised group near-ring*. PhD Thesis: Nelson Mandela Metropolitan University, 2007.
[6] S. Patlertsin and S. Pianskool, "2-Absorbing R -ideals of modules over near rings," in *The 22nd Annual Meeting in Mathematics (AMM 2017) Department of Mathematics, Faculty of Science Chiang Mai University, Chiang Mai, Thailand*, Chiang Mai, 2017, pp. 1–10.
[7] C. Krishnaveni, "Near-Module Homomorphism Defined Over Different Near-Rings," *International Journal of Mathematics and Computer Applications Research (IJMCAR)*, vol. 6, no. 5, pp. 13–22, 2016.
[8] D. S. Dummit and R. M. Foote, *Abstract Algebra*, 3rd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2004.
[9] A. V. Ramakrishna, T. Prasanna, and D. Lakshmi, "Near Ring Multiplications on a Modified Near Module Over a Near Ring," *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 14, no. 1, pp. 126–134, jan 2021, doi: 10.29020/nybg.ejpam.v14i1.3781.
[10] D. Malik, J. S. Mordeson, and M. Sen, *Fundamentals of Abstract Algebra*. New York: The Mc Graw-Hill Companies, Inc., 1997.
[11] J. B. Fraleigh and N. Brand, *A First Course in Abstract Algebra*, 8th ed. New York: Pearson, 2020.
[12] N. Groenewald, "On the prime radicals of near-rings and near-ring modules," in *Nearrings, Nearfields and Related Topics*. World Scientific, jan 2017, pp. 42–57, doi: 10.1142/9789813207363_0005.
[13] U. Leerawat, M. Sirivoravit, and K. Daowsud, "On near generalized rings," *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, vol. 23, no. 5, pp. 1085–1099, jul 2020, doi: 10.1080/09720529.2020.1750104.
[14] K. H. Al-Shaalan, "On some properties of near-rings," *Arabian Journal of Mathematics*, vol. 10, pp. 21–29, nov 2021, doi: 10.1007/s40065-020-00302-0.
[15] J. Ahsan, "On Regular Near-Ring Modules," in *Near-Rings and Near-Fields*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1995, pp. 45–51, doi: 10.1007/978-94-011-0359-6_4.
[16] J. C. Beidleman, *On Near-Rings and Near-Ring Modules*. PhD Thesis: The Pennsylvania State University, 1964.