JAMBURA JOURNAL OF MATHEMATICS
Jambura J. Math. Vol. 5, No. 1, pp. 59–66, February 2023
Journal Homepage: http://ejurnal.ung.ac.id/index.php/jjom
DOI: https://doi.org/10.34312/jjom.v5i1.16721

Surjektifitas Pemetaan Eksponensial untuk Grup Lie Heisenberg yang Diperumum

Edi Kurniadi[1,*], **Putri Giza Maharani**[1], **Alit Kartiwa**[1]

[1]*Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Padjadjaran, Jatinangor 40363, Indonesia*
[*]*Corresponding author. Email: edi.kurniadi@unpad.ac.id*

ABSTRAK

Grup Lie Heisenberg adalah model yang paling sering digunakan untuk mempelajari teori representasi grup Lie. Grup Lie ini bersifat modular non-kompak dan aljabar Lie-nya bersifat nilpoten. Elemen-elemen grup dan aljabar Lie Heisenberg dapat dinyatakan dalam bentuk matriks berukuran 3×3. Keistimewaan lainnya juga diwarisi oleh aljabar Lie-nya yang berdimensi tiga dan disebut aljabar Lie Heisenberg. Grup Lie Heisenberg yang Aljabar Lie-nya diperluas ke dimensi $2n+1$ disebut grup Lie Heisenberg yang diperumum dan dinotasikan oleh H dengan aljabar Lie-nya dinotasikan oleh $\mathfrak{h}_n$. Dalam penelitian ini dipelajari surjektifitas pemetaan eksponensial untuk H berkenaan dengan $\mathfrak{h}_n = \langle x, y, z \rangle$ di mana $[x, y] = z$. Tujuannya adalah untuk membuktikan karakterisasi grup Lie bagian berkaitan dengan ruang bagian dari $\mathfrak{h}_n$. Dalam penelitian ini diperoleh hasil bahwa jika $\langle x, y \rangle =: V \subseteq \mathfrak{h}_n$ suatu ruang bagian dan $e^{x_i} e^{x_j} \mid x_i,\ x_j \in V \} =: L \subseteq H$ maka $L = H$ dan akibatnya $Lie\,(L) \neq V$.

Kata Kunci:
Grup Lie Heisenberg; Aljabar Lie Heisenberg; Pemetaan Eksponensial; Surjektifitas

ABSTRACT

The Heisenberg Lie Group is the most frequently used model for studying the representation theory of Lie groups. This Lie group is modular-noncompact and its Lie algebra is nilpotent. The elements of Heisenberg Lie group and algebra can be expressed in the form of matrices of size 3×3. Another specialty is also inherited by its three-dimensional Lie algebra and is called the Lie Heisenberg algebra. The Heisenberg Lie Group whose Lie Algebra is extended to the dimension $2n+1$ is called the generalized Heisenberg Lie group and it is denoted by H whose Lie algebra is $\mathfrak{h}_n$. In this study, the surjectiveness of exponential mapping for H was studied with respect to $\mathfrak{h}_n = \langle \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \rangle$ whose Lie bracket is given by $[X_i, Y_i] = Z$. The purpose of this research is to prove the characterization of the Lie subgroup with respect to $\mathfrak{h}_n$. In this study, the results were obtained that if $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle =: V \subseteq \mathfrak{h}_n$ a subspace and a set $e^{x_i} e^{x_j} \mid x_i,\ x_j \in V \} =: L \subseteq H$ then $L = H$ and consequently $Lie\,(L) \neq V$.

Keywords:
Heisenberg Lie Group; Heisenberg Lie Algebra; Exponential Map; Surjectiveness

Format Sitasi:

E. Kurniadi, P. G. Maharani, and A. Kartiwa, "Surjektifitas Pemetaan Eksponensial untuk Grup Lie Heisenberg yang Diperumum", *Jambura J. Math.*, vol. 5, No. 1, pp. 59–66, 2023, doi: https://doi.org/10.34312/jjom.v5i1.16721

Received: 10 October 2022 | Accepted: 2 November 2022 | Online: 1 February 2023

1. Pendahuluan

Penelitian tentang aljabar dan grup Lie Heisenberg telah banyak dilakukan misalnya tentang modul tak tereduksi baru untuk aljabar Lie Heisenberg baik dalam konteks aljabar Lie Hesienberg itu sendiri maupun penelitian-penelitian yang dikaitkan dengan struktur aljabar lainnya (lihat [1–4]). Salah satu hal yang menarik di sini bahwa aljabar Lie Heisenberg diperumum dapat menjadi pembentuk aljabar Lie Frobenius melalui jumlah langsung dengan *split torus*-nya [5], dan representasi grup Lie Heisenbergnya dapat direalisasikan dalam *quaternionic stage* [6]. Disisi lain penelitian tentang struktur aljabar Lie Heisenberg juga telah banyak diteliti khususnya yang berkaitan dengan polynomial Lie [7], struktur aljabar Lie Heisenberg mengenai *dispersiveness of invariant* sistem *affine* control [8], struktur dan pengali Schur aljabar Lie Heisenberg [4], dan 2-capability dan 2-nilpotent multiplier pada aljabar Lie Heisenberg [9]. Berbeda dengan penelitian-penelitian sebelumnya, pada penelitian ini dipelajari sifat aljabar Lie Heisenberg diperumum berdimensi $2n+1$. Misalkan $\mathfrak{h}_n$ aljabar Lie Heisenberg yang diperumum dengan grup Lie-nya adalah H. Dalam artikel ini, diteliti karakteristik aljabar Lie bagian yang berkaitan dengan grup Lie bagian dari H yang merupakan perluasan hasil yang sudah diperoleh pada [10].

Grup Lie Heisenberg menarik untuk dipelajari karena elemen-elemennya dapat dinyatakan dalam bentuk matriks. Hal serupa juga berlaku untuk aljabar Lie-nya. Untuk aljabar Lie Heisenberg berdimensi 3, realisasi elemen-elemennya dapat dinyatakan dalam bentuk matriks 3×3 dan isomorfik dengan ruang vektor $\mathbb{R}^3$ [11–13]. Dengan kata lain elemen-elemen di aljabar Lie heisenberg berdimensi 3 dapat dinyatakan dalam bentuk (x, y, z) dengan $x, y, z \in \mathbb{R}$. Dengan memperluas elemen-elemen $\overline{x}$, $\overline{y} \in \mathbb{R}^n$ dan $\overline{z} \in \mathbb{R}$, diperoleh perluasan aljabar Lie Heisenberg berdimensi $2n+1$. Dengan kata lain, aljabar Lie Heisenberg diperumum ini isomorfik dengan ruang vektor $\mathbb{R}^{2n+1}$. Aljabar Lie Heisenberg juga menarik untuk dipelajari karena dapat dijadikan model dalam mempelajari dekomposisi Levi [14, 15].

Elemen-elemen aljabar Lie Heisenberg $\mathfrak{h}_3$ berdimensi 3 ini dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$A = \left(a_{ij}\right)_{1 \le i,j \le 3} = \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; x, y, z \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Basis untuk $\mathfrak{h}_3$ dapat dinyatakan dalam bentuk matriks $X = \left(a_{ij}\right)$, $a_{12} = 1$, dan nol lainnya, $Y = \left(a_{ij}\right)$, $a_{23} = 1$, dan nol lainnya, dan $Z = \left(a_{ij}\right)$, $a_{13} = 1$, dan nol lainnya, dengan kurung Lie-nya diberikan oleh $[X, Y] = Z$. Sembarang elemen grup Lie-nya diberikan oleh matriks

$$P = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; a, b, c \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Aljabar Lie Heisenberg brdimensi $2n+1$, dinotasikan oleh $\mathfrak{h}_n$, dapat dinyatakan dalam bentuk $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ dengan $\overline{x} = (X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$, $\overline{y} = (Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_n) \in \mathbb{R}^n$, dan $\overline{z} = Z \in \mathbb{R}$ [11]. Semua kurung Lie-nya sama dengan nol kecuali,

$$[X_i, Y_i] = Z, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{3}$$

Elemen-elemen $\mathfrak{h}_n$ dapat dinyatakan dalam bentuk matriks $B = \sum_{i=1}^{n} (x_i X_i + y_i Y_i) + zZ$ atau dapat dituliskan dalam bentuk matriks berukuran $(n+2) \times (n+2)$ sebagai berikut:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & \dots & x_n & z \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & y_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & y_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pada penelitian ini, dibahas tentang surjektifitas pemetaan eksponensial untuk H berkenaan dengan $\mathfrak{h}_n = \langle x, y, z \rangle$ di mana $[x, y] = z$. Selanjutnya diberikan pembuktian karakterisasi grup Lie bagian berkaitan dengan ruang bagian dari $\mathfrak{h}_n$.

2. Metode

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Pertama dipelajari tentang grup dan aljabar Lie Heisenberg berdimensi 3 dan diperumum untuk aljabar Lie Heisenberg berdimensi $2n+1$. Sifat pemetaan eksponensial untuk grup Lie Heisenberg yang bersifat satu-satu dan pada saat digunakan untuk menentukan karaktersitik aljabar Lie bagiannya yang berkaitan dengan grup Lie bagiannya. Berikut diberikan beberapa Teorema dan Preposisi yang merujuk pada [10], diperlukan untuk membuktikan hasil penelitian.

Teorema 1. *Misalkan X dan Y adalah matriks persegi yang semua entrinya bilangan kompleks. Misalkan pula X dan Y komutatif dengan komutatornya, yaitu:*

$$[X, [X, Y]] = [Y, \ [X, Y]] = 0$$

maka diperoleh

$$e^X e^Y = e^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]}.$$

Bukti. Bukti lengkap teorema ini dapat diihat pada [10] halaman 111 s.d. 112. □

Misalkan G grup matriks Lie dengan aljabar Lie-nya adalah $\mathfrak{g}$. Pemetaan eksponensial untuk G adalah pemetaan yang diberikan oleh persamaan

$$\exp: \ \mathfrak{g} \to G. \tag{4}$$

Jika $G = H$ grup Lie Heisenberg dengan aljabar Lie-nya $\mathfrak{h}_n$ maka diperoleh sifat pemetaan eksponensialnya, yang dinyatakan pada Teorema 2 berikut:

Teorema 2. *Misalkan $\mathfrak{h}_n$ aljabar Lie Heisenberg berdimensi $2n+1$ dengan H adalah grup Lie-nya. Pemetaan eksponensial dari $\mathfrak{h}_n$ ke H bersifat satu-satu dan pada.*

Proposisi 1. *Misalkan X dan Y adalah matriks persegi sembarang, maka berlaku:*

1. *Jika X dan Y komutatif yaitu $XY = YX$, maka $e^{X+Y} = e^X e^Y = e^Y e^X$.*
2. *Jika A matriks yang dapat dibalik maka, maka $e^{AXA^{-1}} = Ae^X A^{-1}$.*

Jika P dan Q sembarang matriks yang tidak komutatif $(PQ \neq QP)$, maka tidak benar bahwa $e^P e^Q = e^{P+Q}$. Untuk kasus aljabar Lie Heisenberg $\mathfrak{h}_n$ dengan basis $S = \{\overline{x},\ \overline{y}, \overline{z}\}$, dengan $\overline{x} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $\overline{y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$, dan $\overline{z} = Z$. Perhatikan bahwa $X_i Y_i \neq Y_i X_i$ sehingga $e^{X_i} e^{Y_i} \neq e^{X_i + Y_i}$. Oleh karena itu, perhitungan eksponensial elemen-elemen di $\mathfrak{h}_n$ akan menggunakan Teorema 1 dan memanfaatkan formula Baker-Campbell-Hausdorff. Disisi lain, eksponensial dari matriks X dapat dihitung menggunakan formula pada persamaan (5).

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}. \tag{5}$$

Karena $\mathfrak{h}_n$ adalah aljabar Lie nilpoten 2 langkah, maka terdapat bilangan bulat positif $n_0 = 3$ sedemikian sehingga $X^{n_0} = O$. Dengan demikian, deret matriks pada persamaan (5) akan menjadi hingga dan eksponensial e^X dapat ditentukan. Sebagai contoh eksponensial matriks R di bawah ini dapat dihitung dengan mudah menggunakan persamaan (5).

Jika $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, maka eksponensial dari R dapat ditentukan sebagai berikut :

$$e^R = \sum_{u=0}^{\infty} \frac{R^u}{u!} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

3. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini, dibuktikan hasil utama penelitian ini yang merupakan perluasan hasil yang diperoleh dalam [10]. Hasil tersebut dinyatakan dalam Proposisi 2 berikut.

Proposisi 2. *Misalkan $\mathfrak{h}_n$ aljabar Lie Heisenberg berdimensi $2n+1$ dari grup Lie Heisenberg H dengan basis $B = \{X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n, Z\}$ dan kurung Lie-nya semuanya nol kecuali $[X_i, Y_i] = Z, \quad 1 \leq i \leq n$. Misalkan V subruang dari $\mathfrak{h}_n$ dengan*

$$V = \operatorname{span}\{X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n\} \tag{7}$$

dan misalkan

$$L = e^{X_i} e^{X_j} \,\Big|\, X_i,\ X_j \in V\ \} \tag{8}$$

subgrup dari H, maka $L = H$ dan akibatnya aljabar Lie dari L tidak sama dengan V.

Bukti. Perhatikan kembali *bracket* Lie pada persamaan (3). Misalkan X_i dan X_j elemen-elemen di V yang sekaligus merupakan elemen basis. Karena $X_iX_j \neq X_jX_i$ maka perkalian eksponensial $e^{X_i}e^{X_j}$ dapat dihitung menggunakan formula $e^{X_i+Y_j+\frac{1}{2}[X_i,Y_j]} = e^R$ dengan $R = X_i + Y_j + \frac{1}{2}[X_i, Y_j]$. Diperoleh, $e^R \in H$. Di sisi lain, karena pemetaan ekponensial untuk H satu-satu dan pada ([10], hal. 75), surjektivitas dari pemetaan di H mengakibatkan setiap elemen di H termuat di L. Jadi, $L = H$.

Sekarang misalkan P_1 dan Q_1 elemen-elemen sembarang di

$$V = \text{Span}\{X_1 \ldots, X_n,\ Y_1, \ldots, Y_n\}$$

maka terdapat skalar-sklar $\alpha_i,\ \beta_j, \delta_i, \gamma_j\ \ i, j = 1, 2, \ldots, n$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} P_1 &= \alpha_1X_1 + \alpha_2X_2 + \cdots + \alpha_nX_n + \beta_1Y_1 + \beta_2Y_2 + \cdots + \beta_nY_n, \\ Q_1 &= \delta_1X_1 + \delta_2X_2 + \cdots + \delta_nX_n + \gamma_1Y_1 + \gamma_2Y_2 + \cdots + \gamma_nY_n. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan sifat bilinearitas kurung Lie pada aljabar Lie Heisenberg $\mathfrak{h}_n$, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} [P_1, Q_1] = [&\alpha_1X_1 + \alpha_2X_2 + \cdots + \alpha_nX_n + \beta_1Y_1 + \beta_2Y_2 + \cdots + \beta_nY_n,\ \ \delta_1X_1 + \delta_2X_2 + \ldots \\ &+\delta_nX_n + \gamma_1Y_1 + \gamma_2Y_2 + \cdots + \gamma_nY_n] \\ = \ &\kappa Z. \end{aligned}$$

dengan κ dapat dinyatakan dalam suku-suku $\alpha_i,\ \beta_j, \delta_i, \gamma_j$. Di sisi lain, karena $[X_i, Z] = [Y_i, Z] = 0$, maka diperoleh $[P_1, Z] = [Q_1, Z] = 0$. Hal yang serupa diperoleh bahwa,

$$[P_1, [P_1, Q_1]] = [Q_1, [P_1, Q_1]] = 0.$$

Oleh karena itu, Teorema 1 berlaku untuk kasus elemen-elemen P_1 dan Q_1. Jadi,

$$e^{P_1}e^{Q_1} = e^{P_1+Q_1+\frac{1}{2}[P_1,Q_1]}.$$

Dengan menghitung langsung diperoleh

$$S = P_1 + Q_1 + \frac{1}{2}[P_1, Q_1] = \begin{pmatrix} 0 & x'_1 & \ldots & x'_n & z' \\ 0 & . & 0 & 0 & y'_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & . & y'_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dengan $x'_1, \ldots, x'_n, y'_1, \ldots, y'_n$ dan z' dinyatakan $\alpha_i,\ \beta_j, \delta_i, \gamma_j$. Dengan menghitung eksponensial untuk S, diperoleh bahwa

$$e^S = \begin{pmatrix} 1 & \kappa'_1 & \dots & \kappa'_n & \kappa' \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \varepsilon'_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \varepsilon'_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Menggunakan surjektivitas pemetaan eksponensial dari aljabar Lie Heisenberg $\mathfrak{h}_n$ ke grup Lie Heisenberg H maka elemen e^S ini termuat di H. Sebaliknya, karena pemetaan eksponensial dari aljabar Lie Heisenberg bersifat surjektif, maka setiap elemen di L termuat juga di H. Jadi, untuk kasus ini, telah dibuktikan juga bahwa $L = H$. Karena $L = H$, tentu saja aljabar Lie dari L tidak sama dengan V. □

Untuk memperjelas Proposisi 2, perhatikan contoh untuk kasus $n = 1$, yaitu untuk aljabar Lie Heisenberg berdimensi 3.

Contoh 1. Misalkan $\mathfrak{h}$ aljabar Lie Heisenberg dengan basis S $=\{X, Y, Z\}$ dan bracket tak nolnya adalah $[X, Y] = Z$. Misalkan pula H adalah grup Lie Heisenberg dari $\mathfrak{h}$. Jika V subruang dari $\mathfrak{h}$ yang dibangun oleh X dan Y serta K subgroup dari H yang elemen-elemennya adalah semua hasil kali eksponensial dari elemen-elemen di V maka K = H. Akibatnya jika aljabar Lie dari K, katakanlah $\mathfrak{k}$, maka $\mathfrak{k}$ tidak sama dengan V ($\mathfrak{k} \neq$V).

Sesuai dengan bukti Proposisi di atas, dibagi menjadi 2 kasus. Kasus I : untuk X dan Y di V yang sekaligus elemen-elemen basis dan kasus II : untuk P_2 dan Q_2 elemen-elemen sembarang di $V = \text{Span}\{X, Y\}$.

Kasus I. Pertama akan dihitung berdasarkan elemen-elemen basis, di mana diperoleh $[X, [X, Y]] = [Y, [X, Y]] = 0$.

Oleh karena itu berlaku untuk kasus Aljabar Lie Heisenberg $\mathfrak{h}$. Formula $e^X e^Y = e^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]}$

$$R = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^R = \sum_{u=0}^{\infty} \frac{R^u}{u!} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sehingga diperoleh $K = H$.

Kasus II. Misalkan P_2 dan Q_2 elemen-elemen sembarang di $V = \text{Span}\ \{X, Y\}$ maka terdapat skalar-sklar α_i, $i = 1, 2, 3, 4$ sedemikian sehingga

$$P_2 = \alpha_1 X + \alpha_2 Y,$$

$$Q_2 = \alpha_3 X + \alpha_4 Y.$$

Dengan menggunakan sifat bilinearitas kurung Lie pada aljabar Lie Heisenberg $\mathfrak{h}$, perhatikan bahwa

$$[P_2, Q_2] = [\alpha_1 X + \alpha_2 Y,\ \alpha_3 X + \alpha_4 Y] = (\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3)\, Z.$$

Di sisi lain karena $[X, Z] = [Y, Z] = 0$, maka diperoleh $[P, Z] = [Q, Z] = 0$. Hal yang serupa diperoleh bahwa,

$$[P_2, [P_2, Q_2]] = [Q_2, [P_2, Q_2]] = 0.$$

Oleh karena itu, Teorema 1 berlaku untuk kasus elemen-elemen P_2 dan Q_2. Jadi,

$$e^{P_2} e^{Q_2} = e^{P_2 + Q_2 + \frac{1}{2}[P_2, Q_2]}.$$

Dengan menghitung langsung diperoleh

$$S = P_2 + Q_2 + \frac{1}{2}[P_2, Q_2] = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 + \alpha_3 & \frac{1}{2}(\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3) \\ 0 & 0 & \alpha_2 + \alpha_4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eksponensial dari S ini diberikan dalam bentuk matriks

$$\boldsymbol{e}^S = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 + \alpha_3 & \frac{1}{2}(\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3) + \frac{(\alpha_1+\alpha_3)(\alpha_2+\alpha_4)}{2} \\ 0 & 1 & \alpha_2 + \alpha_4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Misalkan $k_1 = \alpha_1\alpha_3$, $k_2 = \alpha_2 + \alpha_4$, dan

$$k_3 = \frac{1}{2}(\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3) + \frac{(\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_4)}{2},$$

maka

$$\mathbf{e}^S = \begin{pmatrix} 1 & k_1 & k_3 \\ 0 & 1 & k_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Menggunakan surjektivitas pemetaan eksponensial dari aljabar Lie Heisenberg $\mathfrak{h}$ ke grup Lie Heisenberg H maka elemen $\boldsymbol{e}^S$ ini termuat di H. Jadi, untuk kasus ke dua ini, telah dibuktikan juga bahwa $K = H$.

4. Kesimpulan

Telah dibuktikan bahwa grup Lie Heisenberg H dari aljabar Lie $\mathfrak{h}_n = \text{Span}\{X_1, .., X_n, Y_1, \ldots, Y_n, Z\}$ sama dengan subgrup L yang semua elemen-elemennya hasil kali eksponensial dari $V = \text{Span}\ X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n \subseteq \mathfrak{h}_n$. Dengan demikian, juga dibuktikan bahwa jika $\mathfrak{k}$ adalah aljabar Lie dari L, yaitu $\mathfrak{k} = \text{Lie}\,(L)$, maka $\mathfrak{k} \neq V$ dengan V dan L seperti didefinisikan sebelumnya.

Referensi

[1] M. A. Alvarez, M. C. Rodríguez-Vallarte, and G. Salgado, "Contact and Frobenius solvable Lie algebras with abelian nilradical," *Communications in Algebra*, vol. 46, no. 10, pp. 4344–4354, oct 2018, doi: 10.1080/00927872.2018.1439048.

[2] F. Bagarello and F. G. Russo, "A description of pseudo-bosons in terms of nilpotent Lie algebras," *Journal of Geometry and Physics*, vol. 125, pp. 1–11, feb 2018, doi: 10.1016/j.geomphys.2017.12.002.

[3] R. R. S. Cantuba, "Lie polynomials in q-deformed Heisenberg algebras," *Journal of Algebra*, vol. 522, pp. 101–123, mar 2019, doi: 10.1016/j.jalgebra.2018.12.008.

[4] P. Niroomand and F. Johari, "The structure, capability and the Schur multiplier of generalized Heisenberg Lie algebras," *Journal of Algebra*, vol. 505, pp. 482–489, jul 2018, doi: 10.1016/j.jalgebra.2018.03.014.

[5] E. Kurniadi, "On Properties of the (2n+1)-Dimensional Heisenberg Lie Algebra," *JTAM (Jurnal Teori dan Aplikasi Matematika)*, vol. 4, no. 2, pp. 107–114, oct 2020, doi: 10.31764/jtam.v4i2.2339.

[6] B. Muraleetharan, K. Thirulogasanthar, and I. Sabadini, "A representation of Weyl–Heisenberg Lie algebra in the quaternionic setting," *Annals of Physics*, vol. 385, pp. 180–213, oct 2017, doi: 10.1016/j.aop.2017.07.014.

[7] R. R. S. Cantuba and M. A. C. Merciales, "An extension of a q-deformed Heisenberg algebra and its Lie polynomials," *Expositiones Mathematicae*, vol. 39, no. 1, pp. 1–24, mar 2021, doi: 10.1016/j.exmath.2019.12.001.

[8] J. A. Souza, "Sufficient conditions for dispersiveness of invariant control affine systems on the Heisenberg group," *Systems & Control Letters*, vol. 124, pp. 68–74, feb 2019, doi: 10.1016/j.sysconle.2018.12.004.

[9] P. Niroomand and M. Parvizi, "2-capability and 2-nilpotent multiplier of finite dimensional nilpotent Lie algebras," *Journal of Geometry and Physics*, vol. 121, pp. 180–185, nov 2017, doi: 10.1016/j.geomphys.2017.07.003.

[10] B. C. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations*, ser. Graduate Texts in Mathematics. Cham: Springer International Publishing, 2015, vol. 222, doi: 10.1007/978-3-319-13467-3.

[11] L. Corwin and F. P. Greenleaf, "Representations of Nilpotent Lie Groups and their Applications," in *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004, ch. 1.

[12] J. Hilgert and K.-H. Neeb, *Structure and Geometry of Lie Groups*, ser. Springer Monographs in Mathematics. New York, NY: Springer New York, 2012, doi: 10.1007/978-0-387-84794-8.

[13] V. V. Bavula, "The groups of automorphisms of the Lie algebras of formally analytic vector fields with constant divergence," *Comptes Rendus Mathematique*, vol. 352, no. 2, pp. 85–88, feb 2014, doi: 10.1016/j.crma.2013.12.001.

[14] H. Henti, E. Kurniadi, and E. Carnia, "Levi Decomposition of Frobenius Lie Algebra of Dimension 6," *CAUCHY: Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi*, vol. 7, no. 3, pp. 394–400, oct 2022, doi: 10.18860/ca.v7i3.15656.

[15] S. Khanal, R. R. Subedi, and G. Thompson, "Representations of nine-dimensional Levi decomposition Lie algebras," *Journal of Pure and Applied Algebra*, vol. 224, no. 3, pp. 1340–1363, mar 2020, doi: 10.1016/j.jpaa.2019.07.020.