

Оригинальная статья / Original Paper

DOI 10.15826/urej.2022.6.4.002

УДК 621.37

Смещение уровня значимости и мощности критерия при конечной крутизне переходной характеристики

Г. С. Нахмансон, **В. С. Костенников**, **Д. А. Ницак**✉Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил,
Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54а

✉ dima_nitsak@mail.ru

Аннотация

Исследованы смещения уровня значимости и мощности критерия, когда при проверке статистических гипотез с использованием правила Неймана – Пирсона в качестве модели переходной характеристики логической схемы используется простая функция ошибок. Смещения рассчитаны для рэлеевских функций распределения. В качестве одного из варьируемых параметров используется обобщенное отношение сигнал-помеха.

Ключевые слова

критическая область, мощность критерия, оперативная характеристика (критерия), переходная характеристика, уровень значимости

Для цитирования

Нахмансон Г. С., Костенников В. С., Ницак Д. А. Смещение уровня значимости и мощности критерия при конечной крутизне переходной характеристики. *Ural Radio Engineering Journal*. 2022;6(4):378–389. DOI: 10.15826/urej.2022.6.4.002.

Significance Level and the Strength of Test Shift Through the Finite Rate of the Transient Response

G. S. Nakhmanson, **V. S. Kostennikov**, **D. A. Nitsak**✉Air Force Educational and Scientific Center, 54A Starykh Bolsheviki St.,
394064, Voronezh, Russia

✉ dima_nitsak@mail.ru

Abstract

A significance level and the strength of test shifts are studied then the error function as a transient response model of logical gate is used for testing of statistical hypothesis with Neumann-Pearson criterion. Shifts are rated for Rayleigh accumulated distributions. The generalized signal-to-noise ratio is used as one of the variable parameters. The paper reveals

that the finite slope of the transient response curve of logical gate results in a type I error increase. The significance level lock leads to bottom of critical region increase and the strength of test decrease in return. The twofold increase of the slope of the transient response curve leads to both the type I error and the bottom of critical region and the strength of test shifts decrease about 12 dB. The twofold increase of generalized signal-to-noise ratio causes the rise of the maximum displacement of a test power functions more than 3 dB up. As this takes place the extremum abscissa is diminished.

Keywords

critical region, power function of a test, significance level, strength of test, transient response

For citation

Nakhmanson G.S., Kostennikov V.S., Nitsak D.A. Significance Level and the Strength of Test Shift Through the Finite Rate of the Transient Response. *Ural Radio Engineering Journal*. 2022;6(4):378–389. (In Russ.) DOI: 10.15826/urej.2022.6.4.002.

Введение

Проверка статистических гипотез с использованием байесовской методологии находит широкое применение в теории обнаружения и распознавания радиосигналов [1–3]. Использование правила Неймана-Пирсона для оценки мощности критерия предполагает, что переходная характеристика логической схемы обладает бесконечной крутизной [1; 2].

При проверке статистических гипотез с помощью электронных устройств использование ступенчатой функции для определения границы критической области не всегда достаточно обосновано. Установка расчетного порогового значения без учета динамики переходной характеристики (ПХ) логической схемы приводит к смещению уровня значимости и мощности критерия [4; 5].

В работе [4] применяется кусочно-линейная аппроксимация ПХ, а в [5] – аппроксимация ПХ нелинейными функциями, которая в большей степени соответствует ПХ физически реализуемых пороговых устройств.

В данной работе предлагается в качестве модели ПХ принять простую функцию ошибок. Эта модель, как и функция Хэвисайда является идеализацией, однако по характеру наиболее близка к ПХ современных электронных компараторов [6].

Смещение уровня значимости и мощности критерия получены для рэлеевских функций распределения. Варьируемыми параметрами при этом являются обобщенное отношение сигнал-помеха и масштабный коэффициент простой функции ошибок.

Смещение уровня значимости

Пусть \mathbf{Z} – гауссовский аналитический вектор, соответствующий фоновому сигналу и $\mathbf{C} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$, где \mathbf{A} – вектор известного обнаруживаемого сигнала, \mathbf{M} – матричная корреляционная функция вектора \mathbf{Z} . Тогда при оптимальной обработке модуль $\mathbf{Z}^+\mathbf{C}$ распределен по закону Релея [7]

$$f_0 = \frac{\tau}{b^2} \exp\left(-\frac{\tau^2}{2b^2}\right), \quad \tau \geq 0, \quad (1)$$

где $\tau = |\mathbf{Z}^+\mathbf{C}|$ – случайная величина и переменная плотности ее распределения; $b = \sqrt{\mu/2}$, $\mu = \mathbf{A}^+\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$ – энергетический показатель качества обнаружения или обобщенное отношение сигнал-помеха [7]. Замена $\tau = bt$ позволяет с учетом нормировки рассматривать (1) как функцию одной переменной

$$f_0 = t \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right). \quad (2)$$

Уровень значимости из (2)

$$F_0 = \int_{t_0}^{\infty} x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \exp\left(-\frac{t_0^2}{2}\right)$$

определяет нижнюю границу критической области

$$t_0 = \sqrt{-2 \ln F_0}.$$

Используем в качестве ПХ функцию

$$H_a = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \frac{t-t_0}{a\sqrt{2}} \right), \quad a > 0, \quad (3)$$

где a – масштабный коэффициент простой функции ошибок.

Очевидно, что

$$\frac{1}{2} \left[1 + \lim_{a \rightarrow 0} \operatorname{erf} \frac{t-t_0}{a\sqrt{2}} \right] = H(t-t_0),$$

где H – функция Хэвисайда.

Заемствуем табличный интеграл [8, с. 30]

$$\begin{aligned} & 2\alpha^2 \int x e^{-\alpha^2 x^2} \operatorname{erf} \beta(x-t_0) dx = \\ & = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} e^{-\frac{\alpha^2 \beta^2 t_0^2}{\alpha^2 + \beta^2}} \operatorname{erf} \frac{\alpha^2 x + \beta^2(x-t_0)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - e^{-\alpha^2 x^2} \operatorname{erf} \beta(x-t_0) \end{aligned}$$

и определим динамику ошибки I рода с учетом ПХ (3):

$$F_a(t) = \int_0^t x e^{-\frac{x^2}{2}} H_a dx = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \frac{t_0}{a\sqrt{2}} - \left(1 + \operatorname{erf} \frac{t-t_0}{a\sqrt{2}} \right) e^{-\frac{t^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \left(\operatorname{erf} \frac{(a^2+1)t-t_0}{a\sqrt{2}\sqrt{a^2+1}} + \operatorname{erf} \frac{t_0}{a\sqrt{2}\sqrt{a^2+1}} \right) e^{-\frac{t_0^2}{2(a^2+1)}} \right]. \quad (4)$$

Интеграл (4) примечателен тем, что его нижний предел равен нулю. Роль функционального порогового устройства «выполняет» ПХ (3).

При $t \rightarrow \infty$ (4) принимает вид

$$F_a = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \frac{t_0}{a\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \left(1 + \operatorname{erf} \frac{t_0}{a\sqrt{2}\sqrt{a^2+1}} \right) e^{-\frac{t_0^2}{2(a^2+1)}} \right]. \quad (5)$$

Уравнение (5) не является алгебраическим и решается относительно t_0 численно, но при малых значениях a , слагаемые

$$\operatorname{erf} \frac{t_0}{a\sqrt{2}}, \quad \operatorname{erf} \frac{t_0}{a\sqrt{2}\sqrt{a^2+1}}$$

стремятся к единице и (5) упрощается к

$$F_a \cong \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \exp\left(-\frac{t_0^2}{2(a^2+1)}\right). \quad (6)$$

Решением

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \exp\left(-\frac{t_0^2}{2(a^2+1)}\right) = \exp\left(-\frac{t_0^2}{2}\right)$$

относительно t_0 находим, когда F_0 и F_a эквивалентны:

$$t_{eq} \cong a^{-1} \sqrt{(a^2+1) \ln(a^2+1)}. \quad (7)$$

Эквивалентное значение ошибки I рода

$$F_{eq} = F_a|_{t_0=t_{eq}} \cong (a^2+1)^{\frac{a^2+1}{2a^2}}.$$

При $F_0 < F_{eq}$ разность $F_a - F_0$ положительна, при $F_0 > F_{eq}$ – отрицательна.

В окрестности

$$t_0 = \lim_{a \rightarrow 0+} \frac{\ln(a^2+1)}{a^2} = 1$$

при малых значениях a смещение уровня значимости относительно $F_0 = \exp(-1/2) \cong 0,606$ стремится к нулю.

На рис. 1 представлены абсолютные значения смещения ошибки I рода с учетом ПХ (3) для различных значений a в относительных единицах $\Delta F = 20 \lg(|F_a - F_0|)$ как функции от F_0 . Чтобы совместить для наглядности $\Delta F(F_{eq})$ по вертикали (темно-серая пунктирная линия), функции смещены по оси абсцисс на $\exp(-1/2) - F_{eq}$.

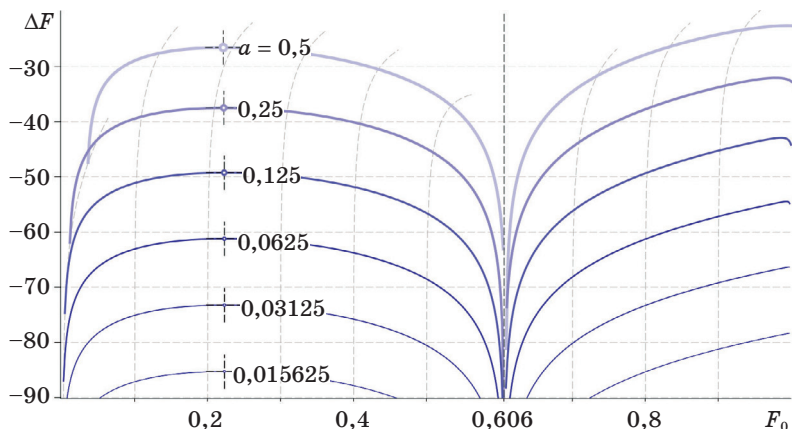


Рис. 1. Абсолютные значения смещения ошибки I рода

Fig. 1. Type I error shift modulus

Установка расчетного значения порога t_0 в физически реализуемом детекторе, использующем правило Неймана – Пирсона, ведет к увеличению ошибки I рода в области значений $F_0 < F_{eq}$, представляющей практический интерес. В этой области ошибка I рода имеет максимум смещения при $F_0 \cong F_{eq}^3$. На рис. 1 экстремальные значения $\Delta F(F_0)$, $F_0 < F_{eq}$ выделены точками.

Отметим, что смещение уровня значимости в области $F_0 > F_{eq}$ имеет минимум. Для малых значений a экстремумы наблюдаются при $F_0 \rightarrow 1$. Их оценка выполняется численно с использованием (5).

Решением уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \exp\left(-\frac{t_a^2}{2(a^2 + 1)}\right) = F_0$$

относительно t_a получим скорректированное значения порога для стабилизации заданного значения ошибки I рода

$$t_a \cong \sqrt{-(a^2 + 1) \ln[F_0^2 (a^2 + 1)]}. \quad (8)$$

На рис. 2 показаны абсолютные значения смещения порога для различных значений a в относительных единицах $\Delta t = 20 \lg(|t_a - t_0|)$ как функции от F_0 . Как и на рис. 1 функции смещены по оси абсцисс на $\exp(-1/2) - F_{eq}$.

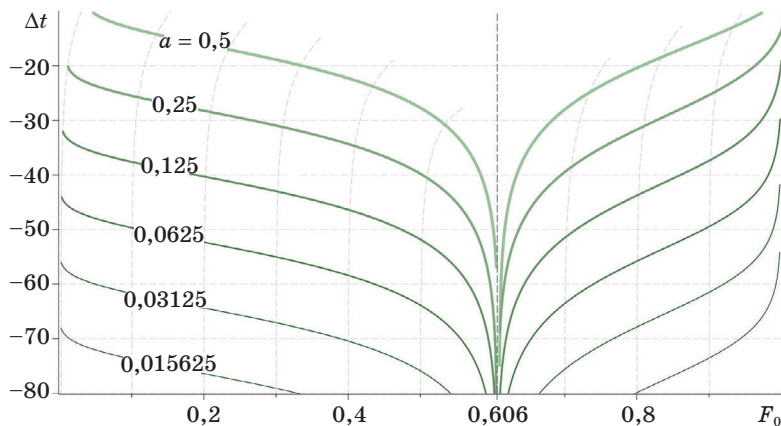


Рис. 2. Абсолютные значения смещения порога

Fig. 2. Threshold shift modulus

Как и смещение ошибки I рода, смещение порога положительно при $F_0 < F_{eq}$ и отрицательно при $F_0 > F_{eq}$. В отличие от смещения уровня значимости смещение порога не имеет экстремумов и увеличивается с уменьшением F_0 . Так, при уменьшении уровня значимости от $2 \cdot 10^{-1}$ до 10^{-6} смещения порога составили плюс 10 дБ. Ошибка I рода, напротив, в указанном диапазоне уменьшилась на минус 20 дБ.

Увеличение крутизны переходной характеристики в 2 раза приводит к уменьшению смещения как ошибки I рода, так и нижней границы критической области примерно на минус 12 дБ.

Использование (6) в качестве приближенной оценки F_a вместо строгого решения (5), а также (7) и (8), полученных на основе (6), обеспечивает точность, достаточную для проведения инженерных расчетов в области значений $F_0 < F_{eq}$, представляющей практический интерес.

Смещение мощности критерия

При наличии обнаруживаемой цели вектор-наблюдение принимает вид $\mathbf{Z} + \mathbf{A}e^{i\varphi_0}$, где φ_0 – в общем неизвестная фаза переотражения, $\imath = \sqrt{-1}$. Плотность вероятности $|\mathbf{Z} + \mathbf{A}e^{i\varphi_0}|$ имеет вид обобщенного распределения Релея или Релея – Райса [7]

$$f_1 = \frac{\tau}{b^2} e^{-\frac{\tau^2 + \varepsilon^2}{2b^2}} I_0\left(\frac{\varepsilon\tau}{b^2}\right), \quad \tau \geq 0, \quad \varepsilon = \mu \geq 0, \quad (9)$$

где I_0 – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Аналогичная замена переменной с учетом нормировки уменьшает число переменных (9) до двух

$$f_1 = e^{-\mu} t e^{-\frac{t^2}{2}} I_0(t\sqrt{2\mu}). \quad (10)$$

Мощность критерия в этом случае

$$D_0 = e^{-\mu} \int_{t_0}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} I_0(x\sqrt{2\mu}) dx. \quad (11)$$

Используем асимптотическое решение [9]

$$e^{-\alpha} \int x e^{-\frac{x^2}{2}} I_0(x\sqrt{2\alpha}) dx = 1 - e^{-\alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{\Gamma(k+1)^2} \Gamma\left(k+1, \frac{x^2}{2}\right),$$

где $\Gamma(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{N}$ – гамма-функция Эйлера (далее – гамма-функция) [10], $\Gamma(\lambda, z)$ – дополнительная неполная гамма-функция [10], получим

$$D_0 = e^{-\mu} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{\mu^k}{k!^2} \Gamma\left(k+1, \frac{t_0^2}{2}\right). \quad (12)$$

Мощность критерия с учетом ПХ (3)

$$D_a = e^{-\mu} \int_0^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} I_0(x\sqrt{2\mu}) H_a dx \quad (13)$$

находим с учетом (12), выполняя интегрирование (13) по частям [9].

С учетом обозначений:

$$p = \sqrt{\frac{a^2 + 1}{2a^2}}, \quad q = \frac{t_0}{a^2 + 1}, \quad r = p^2 q^2 = \frac{t_0^2}{2a^2(a^2 + 1)};$$

$$\Phi_1 = \frac{q^{2l} \sqrt{\pi}}{p} {}_2F_0\left(-l, -l + \frac{1}{2}; r^{-1}\right) - \sum_{m=0}^l \binom{2l}{2m} \frac{q^{2(l-m)}}{2p^{2m+1}} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}, r\right);$$

$$\Phi_2 = \sum_{m=0}^{l-1} \binom{2l}{2m+1} \frac{q^{2(l-m)-1}}{2p^{2(m+1)}} \Gamma(m+1, r),$$

где

$${}_2F_0\left(-l, -l + \frac{1}{2}; r^{-1}\right) -$$

обобщенная гипергеометрическая функция [10];

$$\binom{2l}{2m}, \binom{2l}{2m+1} -$$

биномиальные коэффициенты [10], получим

$$D_a = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \frac{t_0}{a\sqrt{2}} \right] + \frac{e^{-\mu}}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t_0^2}{2(a^2+1)}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{\mu^k}{k!} \left(\sum_{l=0}^k \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2^l l!} \right). \quad (14)$$

Интегральная ошибка, связанная с усечением k -членов ряда в (12) и (14), не превышает по модулю [9]

$$Q = 1 - \frac{\Gamma(n+1, \mu)}{\Gamma(n+1)}.$$

На рис. 3 как функции относительных единиц $20\lg Q$ построены диаграммы, позволяющие в зависимости от μ определить необходимое число членов ряда n для оценки (12). Например, чтобы ошибка (12), связанная с усечением ряда разложения $I_0(x\sqrt{2\mu})$ в (11), не превысила минус 110 дБ, n должно быть не менее 8, 11, 16, 24 и 37 для $\mu = 1, 2, 4, 8$ и 16, соответственно.

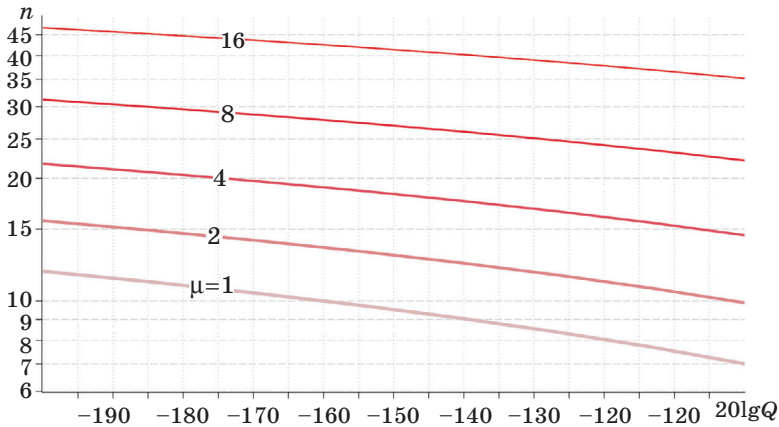


Рис. 3. Зависимость числа k -членов ряда от допустимой ошибки

Fig. 3. Dependence of the number of k -terms of the series on the admissible error

На рис. 4 и 5 представлены смещения оперативных характеристик при различных значениях a и μ в относительных единицах $\Delta D = 20\lg(D_0 - D_a)|_{t_0=t_a}$, рассчитанные с помощью (12), (14) и с учетом коррекции порога (8) для стабилизации заданного уровня значимости. Поскольку $D_0 > D_a|_{F_0 \in [0,1]}$, смещение функций $\Delta D(F_0)$ по оси абсцисс на $\exp(-1/2) - F_{eq}$ не выполняется. Для детализации $\Delta D(F_0)$ в области значений F_0 , представляющей практический интерес, ось абсцисс отображается в логарифмическом масштабе.

Максимальные значения $\max \Delta D(F_0)$ выделены точками, соединенными пунктирными линиями при различных a . Увеличение μ в два раза вызывает возрастание смещений оперативных характеристик примерно на $3,0 \div 3,8$ дБ с одновременным убыванием аргумента $\max \Delta D(F_0)$. Так, возрастание μ от 1 до 2, от 2 до 4, от 4 до 8 и от 8 до 16 приводит к уменьшению абсциссы экстремума примерно на 0,1, 0,066, 0,01 и 0,0002, соответственно.

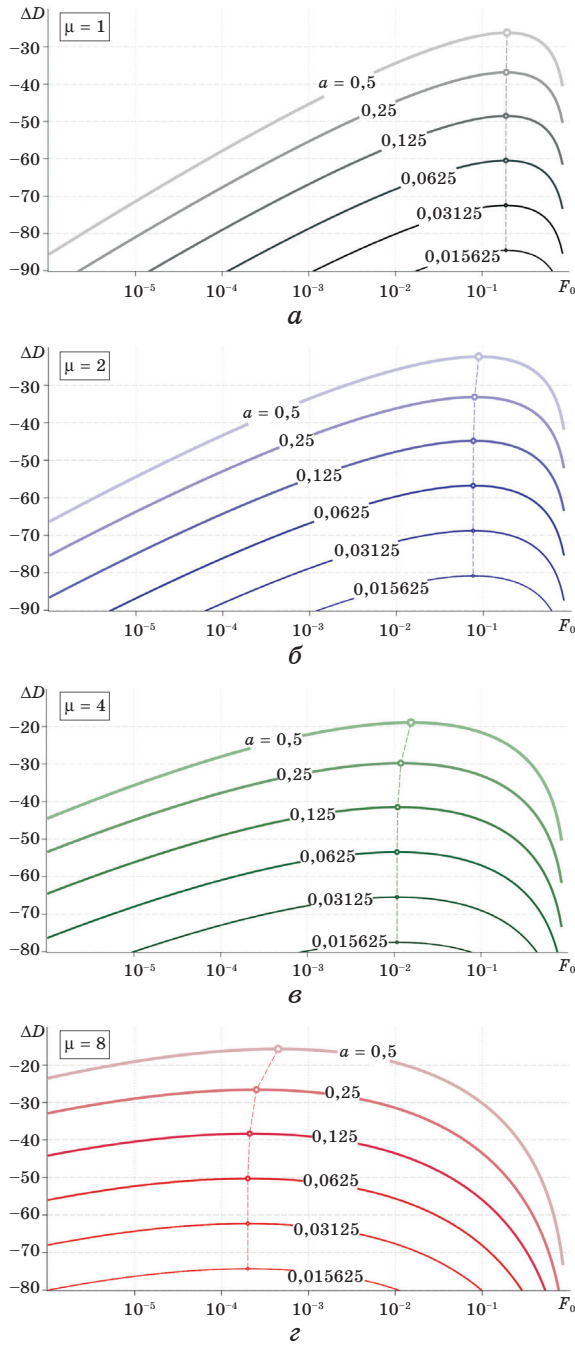


Рис. 4. Смещение оперативных характеристик:
 $a - \mu = 1$; $\delta - \mu = 2$; $\epsilon - \mu = 4$; $z - \mu = 8$

Fig. 4. Displacement of power functions of a test
 $a - \mu = 1$; $\delta - \mu = 2$; $\epsilon - \mu = 4$; $z - \mu = 8$

Экстремумы смещений наблюдаются в области значений ошибок I рода F_0 , представляющих практический интерес, при $4 \leq \mu \leq 16$. Если $\mu = 16$, $\max \Delta D(F_0)$ имеет место при $10^{-8} < F_0 < 10^{-6}$.

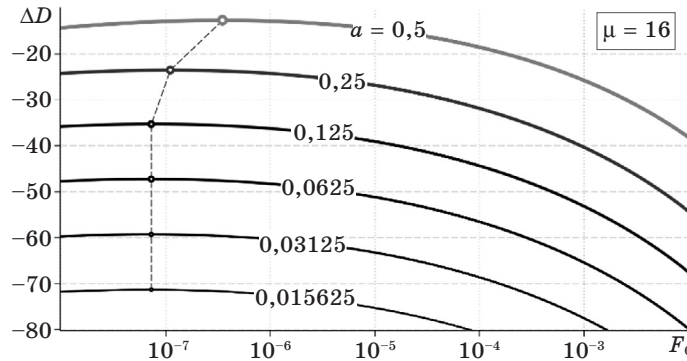


Рис. 5. Смещение оперативных характеристик при $\mu = 16$

Fig. 5. Displacement of power functions of a test at $\mu = 16$

При увеличении крутизны переходной характеристики в два раза смещение $\Delta D(F_0)$, по аналогии с ΔF и Δt , уменьшается примерно на минус 12 дБ.

Заключение

При проверке статистических гипотез с использованием правила Неймана – Пирсона применение простой функции ошибок в качестве модели переходной характеристики логической схемы увеличивает ошибку I рода. Стабилизация заданного значения ошибки I рода повышает нижнюю границу критической области и уменьшает мощность критерия.

В таких условиях увеличение крутизны переходной характеристики в два раза приводит к уменьшению смещений и ошибки I рода, и нижней границы критической области, и мощности критерия примерно на минус 12 дБ. Увеличение обобщенного отношения сигнал-помеха в два раза вызывает рост максимального смещения оперативных характеристик более чем на 3 дБ, при этом абсцисса экстремума убывает.

Список литературы

1. Тихонов В.И. *Статическая радиотехника*. М.: Советское радио; 1966. 622 с.
2. Дулевич В.Е. *Теоретические основы радиолокации*. М.: Советское радио; 1978. 602 с.
3. Сосулин Ю.Г. *Теоретические основы радионавигации*. М.: Радио и связь; 1992. 304 с.

4. Нахмансон Г.С., Костенников В.С., Шмойлов А.О. Влияние нелинейности решающей функции порогового устройства на характеристики обнаружения радиосигналов. *Нелинейный мир*, 2019;(3):36–44.

5. Нахмансон Г.С., Костенников В.С., Шмойлов А.О. Характеристики обнаружения радиосигналов при нелинейной решающей функции порогового устройства. *Известия вузов. Радиофизика*, 2019;62(10):801–808.

6. Игумнов Д.В., Костюнина Г.П. *Полупроводниковые устройства непрерывного действия*. М.: Радио и связь; 1990. 256 с.

7. Киселев А.З. *Теория радиолокационного обнаружения на основе использования векторов рассеяния целей*. М.: Радио и связь; 2002. 271 с.

8. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды*. Т. 2. Специальные функции. 2-е изд. М.: Физматлит; 2003. 664 с.

9. Поленов В.С., Ницак Д.А. Приближенное решение интегралов от показательных и степенных функций. *Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика*. 2022;(3):27–36. <https://doi.org/10.18101/2304-5728-2022-3-27-36>

10. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике. Для научных работников и инженеров*. М.: Наука;1973. 832 с.

References

1. Tikhonov V.I. *Statistical Radio Engineering*. Moscow: Sovetskoe radio; 1966. 622 p. (In Russ.)

2. Dulevich V.E. *Radar science*. Moscow: Sovetskoe radio; 1978. 602 p. (In Russ.)

3. Sosulin Yu.G. *Radio-navigation science: manual for graduate students*. Moscow: Radio i svyaz; 1992. 304 p. (In Russ.)

4. Nakhmanson G.S., Kostennikov V.S., Shmoylov A.O. The influence of the nonlinearity of the decisive functions of the threshold device for detecting characteristics of radio signals. *Nonlinear World*, 2019;(3):36–44. (In Russ.)

5. Nakhmanson G.S., Kostennikov V.S., Shmoylov A.O. Radio-signal detection characteristics for nonlinear decision function of a threshold device. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Radiofizika*, 2019;62(10):801–808. (In Russ.)

6. Igumnov D.V., Kostyunina G.P. *Continuous-action semiconductor devices*. Moscow: Radio i svyaz; 1990. 256 p. (In Russ.)

7. Kiselev A.Z. *The radar detection theory based on targets scattering vectors*. Moscow: Radio i svyaz; 2002. 271 p. (In Russ.)

8. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A, Marichev O.I. *Integrals and Series, Vol. 2: Special Functions*. 2nd ed. Moscow: Fizmatlit; 2003. 664 p. (In Russ.)

9. Polenov V. S., Nitsak D. A. Approximate answer on integrals of exponential and power functions. *BSU bulletin. Mathematics, Informatics*. 2022;(3):27–36. (In Russ.) <https://doi.org/10.18101/2304-5728-2022-3-27-36>

10. Korn G. A., Korn T. M. *Mathematical handbook. For scientists and engineers*. Moscow: Nauka;1973. 832 p. (In Russ.)

Информация об авторах

Нахмансон Геннадий Симонович, доктор технических наук, профессор Военного учебно-научного центра Военно-воздушных сил, заслуженный работник высшей школы Российской Федерации

Костенников Виталий Сергеевич, научный работник Военного учебно-научного центра Военно-воздушных сил.

Ницак Дмитрий Анатольевич, кандидат технических наук, научный работник Военного учебно-научного центра Военно-воздушных сил

Information about the authors

Gennady S. Nakhmanson, Doctor of Technical Sciences, Professor, Honored Worker of Higher Education of the Russian Federation, Air Force Educational and Scientific Center, Russia

Vitaly S. Kostennikov, Research Scientist, Air Force Educational and Scientific Center, Russia.

Dmitry A. Nitsak, Candidate of Technical Sciences, Research Scientist, Air Force Educational and Scientific Center, Russia.

Поступила / Received: 12.10.2022

Принята в печать / Accepted: 14.11.2022