République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université M'hamed BOUGARA - BOUMERDES

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE MAGISTER

SPECIALITE: MATHEMATIQUES

OPTION : MODELES STOCHASTIQUES

Thème

PROCESSUS DE DIFFUSION ET EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES – ASPECTS THEORIQUE ET NUMERIQUE - APPLICATIONS

Présenté par

SOUAHLIA Ahmed

Soutenu publiquement le : 14 Novembre 2007

Devant le jury composé de :

Président	**Boushaba Mahmoud**	**Maitre de conférences**	**U.Mentouri-Constantine**
Promoteur	**Khaldi Khaled**	**Maitre de conférences**	**Umbb-Boumerdes**
Co-Promoteur	**Abassov Assim**	**Maitre de conférences**	**Umbb-Boumerdes**
Examinateur	**Osmanov Hamid**	**Professeur**	**Umbb-Boumerdes**
Examinateur	**Makdèche Said**	**Maitre Assistant**	**Umbb-Boumerdes**

Année Universitaire: 2007 / 2008

ملخص:

الحساب التفاضلي يعطي إطار مفهوم المعادلة التفاضلية العادية، التي تستخدم كنموذج للظواهر المتغيرة خلال الزمن. عندما أردنا إضافة تغيرات عشوائية إلى هذه المعادلات تضايقنا بعدم تفاضل الحركة البرونية.

إن تعريف مسألة تفاضلية عشوائية يمر عبر تكامل إيتو، وشكل إيتو هو أساس تقنيات الحساب التفاضلي على الأنظمة العشوائية التي نجملها تحت إسم الحساب العشوائي.

الهدف من هذه الدراسة هو تقديم نظرية إيتو للمعادلات العشوائية على شكل تفاضل أو تكامل، وبرهنة الارتباطات التي قد توجد بين المعادلات التفاضلية العشوائية والمعادلات ذات المشتقات الجزئية.

الأدوات المستعملة من أجل الوصول إلى هذا الهدف هي أساسا الحساب العشوائي والتقنيات الأولية للمعادلات التفاضلية العادية.

نبدأ ببناء تكامل مقارنة بالحركة البرونية من أجل التعريف فيما بعد بمفهوم المعادلة التفاضلية العشوائية. الأنظمة العشوائية المستعملة هي أنظمة تمتلك خاصية ماركوف.

نشير فيما بعد إلى التمثيلات الاحتمالية لحلول عدة مسائل، هذه التمثيلات تعطينا وسيلة تحليل أو حساب التقريبات لحلول هذه المعادلات.

Summary:

The differential calculation gives a setting in the notion of ordinary differential equation, that acts as model for variable phenomena in the time.
When we wanted to add to these equations random disturptions, we have been embarrassed by the non differentiability of the Brownian movement. The definition of a problem differential stochastic passes by the integral of Itô. The formula of Itô is to the basis of the differential calculation techniques on the stochastic processes that we regroup under the stochastic calculation name.
The objective of this work is to present the theory of Itô of the stochastic equations under differential or complete form, and to show the ties that can exist between the stochastic differential equations and the equations to the partial derivatives.
The instruments used to reach this objective are essentially the stochastic calculation and the elementary techniques of the equations differential ordinary determinists.
We starts with constructing an integral in relation to the Brownian movement, for in continuation to define the notion of stochastic differential equation. The used stochastic processes are the processes possessing the property of Markov.
We indicate the probabilistic representations of the solutions of the numerous problems. These representations provide an in instrument of analysis or calculation of approximations of the solutions of these equations.

Remerciements

Je remercie Dieu le tout puissant qui m'a permis d'achever ce modeste travail.

Je tiens à remercier infiniment l'encadreur le docteur KHALDI Khaled ainsi que le co-encadreur le docteur ABASSOV Assim qui m'ont accompagné et aidé dans ma recherche, grâce à ses précieux conseils et ses orientations importantes.

Je tiens aussi à remercier tous les membres du jury qui vont certainement enrichir cette recherche et la rendre plus performante.

Je remercie également tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail, notamment mes collègues dont je cite entre autres: Mme Khaldi, Mme Meslim, Mme Mehguen.

Je n'oublie pas de remercier toute ma famille et tous mes amis pour leur support.

Ahmed

Sommaire

Chapitre 02: Intégrale stochastique.

Chapitre 03: Equations différentielles stochastiques.

Chapitre 04: La représentation de la solution d'une équation différentielle stochastique.

Chapitre 05: Interprétation probabiliste des E.D.P.

du second ordre et résolution numérique.

Introduction

Introduction

Le calcul différentiel donne un cadre à la notion d'équation différentielle ordinaire, qui sert de modèle pour de phénomènes variables dans le temps.
Quand on a voulu ajouter à ces équations des perturbations aléatoires, on a été gêné par la non différentiabilité du mouvement brownien. La définition rigroureuse d'un problème différentiel stochastique passe par l'intégrale d'Itô et la formule d'Itô est à la base des techniques de calcul différentiel sur les processus stochastiques.

Le but de ce travail est de présenter la théorie d'Itô des équations stochastiques sous forme différentielle ou intégrale, de présenter la multiplicité des situations où peuvent intervenir les équations différentielles stochastiques, et de montrer les liens qui peuvent exister entre les équations différentielles stochastiques et les équations aux dérivées partielles.

Les outils utilisés pour atteindre ce but sont essentiellement le calcul stochastique et les techniques élémentaires des équations différentielles ordinaires déterministes.

Dans ce travail, on rassemble dans le premier chapitre les notions de théorie des probabilités qui seront utilisées dans cette recherche. [05][06][08][09][10][12][14][16][17][18][19][25]
Dans le deuxième chapitre, on traite les processus d'Itô avec la base des techniques de calcul différentiel sur les processus stochastiques (formule d'Itô). [05][06][07][09][10][12][14][16][18][19][22][23][25][26]
Dans le troisième et quatrième chapitre, on s'intéresse la représentation de la solution d'une équation différentielle stochastique. Précions qu'il s'agit d'équation différentielle stochastique d'Itô où l'intégrateur dans l'intégrale stochastique est un mouvement Brownien donné a priori et les fonctions coefficients dépendants du temps sont déterministes. [02][09][10][15][21] Et plus de ça, on exprime la solution d’une équation différentielle stochastique d’un certain type en se ramenant à la solution d’une autre équation différentielle stochastique. [03]

Enfin et dans le cinquième chapitre, on s'intéresse au lien profond entre certaines systèmes d'équation aux dérivées partielles et les équations différentielles stochastiques. [04][06] Ce lien se traduit en des méthodes de résolution approchée pour certaines équations aux dérivées partielles, basées sur des simulations des processus de diffusion. [01][02][04][11][13][20][24][27]

Chapitre 01: Généralités

1-1- Convergence de variable aléatoire.

Soit *(Ω,F,P)* un espace de probabilité. Toutes les variables aléatoires sont définies sur cet espace.

1-1-1- Convergence presque sûre:

Une suite de variables aléatoires X_n converge presque sûre (p.s) vers X si pour presque tout w,

$$X_n(w) \to X(w) \quad \text{quand } n \to \infty$$

On note $X_n \overset{p.s}{\to} X$

Théorème 1.1: Convergence monotone

Si X_n est une suite de variables aléatoires monotone $(X_n \leq X_{n+1})$ si $X = \lim_{p.s} Xn$, on a $E(X) = \lim E(X_n)$

Théorème 1.2: Théorème de Lebesgue dominé

Si X_n est une suite de variables aléatoires convergeant presque sûre vers X et s'il existe une variable aléatoire Y intégrable telle que $|X_n| \leq Y$, alors $E(X_n)$ converge vers $E(X)$.

Théorème 1.3: Loi des grands nombres.

Si $(X_i, i \geq 1)$ est une suite de variables aléatoires équidistribuées, indépendantes d'espérance finie, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ converge presque sûrement vers $E(X_1)$.

1-1-2- Convergence quadratique (dans $L^2(\Omega)$):

Une suite de variables aléatoires $X_n \in L^2$ *et* $X \in L^2$ converge en moyenne quadratique (dans $L^2(\Omega)$) vers X si

$$(\|X_n - X\|_2)^2 = E(X_n - X)^2 \to 0 \text{ quand } n \to \infty$$

Où

$$\|X\|_2 \underline{\underline{def}} \sqrt{\int_\Omega X^2 dp} = \sqrt{E(X^2)}$$

et

$$\|X\|_2 < \infty$$

Si $X_n \to X$ dans $L^2(\Omega)$, on a $E(X_n^2) \to E(X^2)$ et la réciproque est fausse.

Théorème 1.4: Loi des grands nombres.

Si $(X_i, i\geq 1)$ est une suite de variables aléatoires équidistribuées indépendantes de variance finie, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ converge en moyenne quadratique vers $E(X_1)$.

Si une suite de variables aléatoires gaussiennes converge en moyenne quadratique, la limite est une variable gaussienne.

1-1-3 Convergence en probabilité:

Une suite de variables aléatoires X_n converge en probabilité vers X (on note $X_n \xrightarrow{P} X$) si:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|X_n - X|) \geq \varepsilon \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty$$

1-1-4 Convergence en loi:

Une suite de variables aléatoires X_n converge en loi vers X (on note $X_n \xrightarrow{L} X$) si:

$$E(f(X_n)) \to E(f(X)) \quad \text{quand } n \to \infty$$

pour toute fonction f continue bornée.

On peut également définie la convergence en loi par la convergence simple des fonctions caractéristiques.

La convergence en probabilité implique la convergence en loi.

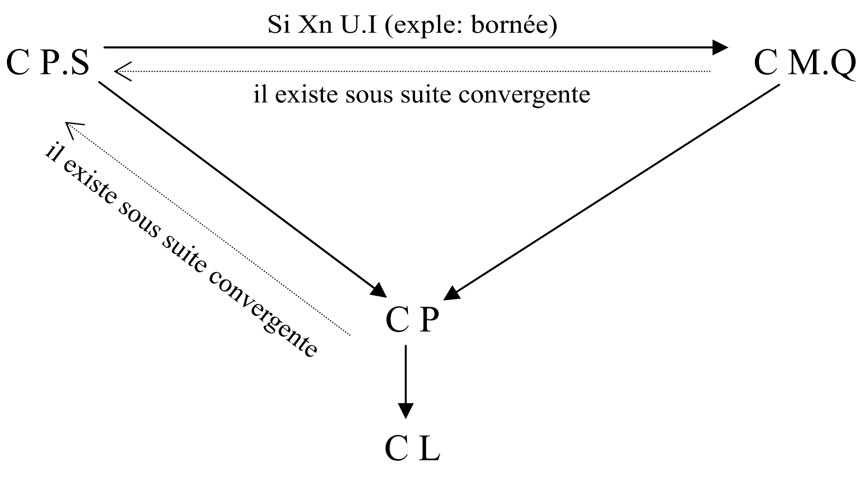
La convergence presque sûre implique la convergence en probabilité.

La convergence quadratique implique la convergence en probabilité.

La convergence en probabilité implique qu'une sous suite converge p.s.

Si une suite converge quadratique, il existe une sous suite qui converge p.s.

Si une suite uniformément intégrable (par exemple bornée) converge p.s., elle converge dans L².



1-2-Espérance conditionnelle.

Soit (Ω,F,P) un espace de probabilité et les variables aléatoires sont définies sur cet espace.

1-2-1 Conditionnement sur un évènement:

Définition 1.5:

Si A et B sont deux évènements $(A, B \in F)$, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le nombre:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

pour tout B tel que $P(B) \neq 0$.

Propriété 1.6:

$P(A/B)$ est une nouvelle probabilité sur Ω.

Définition 1.7:

Soit X une variable aléatoire définie sur l'espace (Ω,F,P).

Considérons le cas de X à valeurs dans $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

Soit B fixé et $P(A/B) = Q(A)$.

On a alors l'espérance de X par rapport à Q:

$$E_Q(X) \underline{\underline{déf}} \sum_{j=1}^{n} x_j Q(X = x_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{P(X = x_j \cap B)}{P(B)}$$

$$P(X = x_j \cap B) = \int_B 1_{X=x_j} \, dp \tag{1}$$

Où $1_{X=x_j}$ est la fonction qui vaut 1 si $w \in (X=x_j)$:

$$1_{X=x_j} = \begin{cases} 1 & si \quad w \in (X=x_j) \\ 0 & si \quad non. \end{cases}$$

$$X = \sum_{j=1}^{n} x_j 1_{X=x_j} \tag{2}$$

Donc de (1) et de (2), on a:

$$E_Q(X) = \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{P(X = x_j \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{P(B)} \sum_{j=1}^{n} x_j \int_B 1_{X = x_j}\, dp$$
$$= \frac{1}{P(B)} \int_B X\, dp$$

Donc

$$E_Q(X)\,P(B) = \int_B X\, dp$$

1-2-2 Espérance conditionnelle par rapport à une tribu:

Soit *G* une sous tribu de *F*, et soit *X* une variable aléatoire intégrable définie sur *(Ω, F, P)*.

Définition 1.8:

On appelle espérance conditionnelle de la variable *X* par rapport à *G* (on note *E(X/G)*) l'unique variable aléatoire vérifié les deux propriétés suivantes:

- *G*-mesurable
- Telle que

$$\int_A E(X/G)\,dp = \int_A X\, dp \quad , \quad \forall A \in G$$

c'est aussi l'unique variable *G*-mesurable telle que (à une égalité p.s prés): $E[E(X/G)Y] = E(XY)$

pour toute variable *Y* *G*-mesurable bornée.

1-2-3 Espérance conditionnelle par rapport à une variable:

Soit *Z* une variable aléatoire prenons pour *ß* la tribu engendrée par *Z*, et *X* une variable aléatoire intégrable.

On appelle espérance conditionnelle de *X* sachant *Z*, l'espérance conditionnelle *E(X/ ß)* (on note *E(X/Z)*).

Remarquons que *E(X/ ß)* est une fonction de *Z*, comme variable mesurable par rapport à la tribu engendrée par *Z*.

L'espérance conditionnelle *E(X/Z)* est caractérisée par:

1. C'est une variable *ß*-mesurable.
2. $\int_A E(X/Z)\,dp = \int_A X\,dp \quad , \qquad \forall A \in ß$

1-2-4 Propriétés de l'espérance conditionnelle:

1. Linéarité: soit *a* et *b* deux constantes,

$$E(aX + bY/G) = aE(X/G) + bE(Y/G).$$

2. Croissance: soit *X* et *Y* deux variables aléatoires telles que $X \leq Y$, alors $E(X/G) \leq E(Y/G)$
3. Si *X* est G-mesurable, $E(X/G) = X$.
4. Si *Y* est G-mesurable, $E(XY/G) = YE(X/G)$.
5. $E(E(X/G)) = E(X)$.
6. Si *X* est indépendante de *G*, $E(X/G) = E(X)$.
7. Si *G* est la tribu grossière (composée de l'ensemble vide et de *Ω*), $E(X/G) = E(X)$.
8. Si *G* et *H* sont deux tribus telles que $H \subset G$, alors

$$E(E(X/H)/G) = E(E(X/G)/H) = E(X/H)$$

9. **Théorème 1.9: Inégalité de Jensen.**

Soit $\varphi: IR \to IR$ fonction convexe, telle que $\varphi(X)$ est aussi intégrable, alors $\varphi(E(X/G)) \leq E(\varphi(X/G))$

1-2-5 Loi conditionnelle:

Définition 1.10:

Soit *(X,Y)* deux variables aléatoires réelles.

La loi conditionnelle de *X* quand *Y* est la famille de lois sur *IR* (on note $\mu(y,dx)$) telle que:

$$\mathrm{E}\left[\Psi(x)/Y = y\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x)\,\mu(y,x)$$

pour toute fonction Ψ borélienne bornée.

La propriété s'étend aux fonctions Ψ intégrables par rapport à μ.

Si on connaît la loi conditionnelle, l'espérance et la variance conditionnelle sont réduisent à des calcules d'espérance et de variance.

En effet:

$$E(X/Y=y)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mu(y,dx)$$

est l'espérance d'une variable aléatoire de loi $\mu(y,dx)$, pour tout y.

Si (X,Y) a une densité $f(x,y)$, on a:

$$\mu(y,x)=\frac{f(x,y)\,dx}{\int_{IR} f(u,y)\,du}$$

Cas Gaussien:

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles est gaussien.

La densité conditionnelle de X à Y est une loi gaussienne d'espérance linéaire en Y et de variance c indépendante de Y.

Donc on a:

$$E(X/Y)=aY+b \Rightarrow E(X)=aE(Y)+b$$

$$E(XY)=E(YE(X/Y))=E(aY^2)+bE(Y)$$

Où

$$a=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\operatorname{var} Y} \quad , \quad b=E(X)-aE(Y)$$

$$c=E(X^2/Y)-[E(X/Y)]^2=E(X^2)-E[(aY+b)^2]$$

Maintenant, si (X,Y) est un vecteur gaussien.

La densité conditionnelle de X à Y est aussi une loi gaussienne d'espérance linéaire en Y et de variance c indépendante de Y.

1-3- Processus stochastiques:

On va s'intéresser à des phénomènes dépendant du temps.

Ce qui est connu à la date t est rassemblé dans une tribu F_t, c'est l'information à la date t.

1-3-1 Filtration:

Définition 1.11:

On appelle filtration la famille croissante de sous tribu de F, c'est-à-dire $F_t \subset F_s$ pour tout $t \leq s$.

La filtration est continue à droite au sens où $F_t = \bigcap_{s>t} F_s$

Une filtration G est dite plus grosse que F Si $F_t \subset G_t, \forall t$

1-3-2 Processus:

Définition 1.12:

On appelle processus stochastique la famille de variables aléatoires (X_t, $t \in [0,\infty[$) définies sur le même espace de probabilité.

Un processus stochastique (X_t, $t \in [0,\infty[$) est dite adapté par rapport à une filtration F_t si X_t est F_t-mesurable pour tout t.

On dit que le processus est continu si les applications $t \rightarrow X_t(w)$ sont continues pour presque tout w.

On associe la filtration naturelle F_t^X pour le processus stochastique X, c'est-à-dire la famille croissante de tribus $F_t^X = \sigma\{X_s, s \leq t\}$

Définition 1.13:

On appelle processus prévisible si et seulement si l'application $(t,w) \rightarrow X_t(w)$ est mesurable par rapport à la tribu des prévisibles (la tribu sur $(0,\infty)\times\Omega$ engendrée par les rectangles de la forme: $]s,t]\times A$, $0 \leq s \leq t$, $A \in F_s$

Soit X, Y deux processus:

- X, Y sont égaux à une modification près si $X_t = Y_t$ $p.s$ $\forall t$.
- X, Y sont égaux en loi $X \underset{=}{\text{loi}} Y$ si pour tout $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ et pour tout n, on a

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}) \underset{=}{\text{loi}} (Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_n}) .$$

Processus croissant:

On appelle processus croissant le processus $A = (A_t, t \geq 0)$ tel que:

$A_0 = 0$ *et* $t \rightarrow A_t$ est une fonction croissante, c'est-à-dire

$$A_t(w) \leq A_s(w) , \quad \forall t \leq s \qquad p.s$$

Processus gaussiens:

Un processus X est gaussien si toute combinaison linéaire finie de $(X_t, t \geq 0)$ est une variable aléatoire gaussienne, c'est-à-dire si

$$\forall n, \forall t_i, \forall a_i, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i X_{t_i}$$

est une variable aléatoire gaussienne.

Un processus gaussien est caractérisé par son espérance et sa variance.

Processus de Markov:

Définition 1.14:

Un processus est de Markov si son comportement dans le futur ne dépend du passé qu'a travers le présent.

Soit X un processus et $(F_t)_{t \geq 0}$ sa filtration canonique.

On dit que le processus est de Markov si, pour tout t, pour toute variable bornée $Y \in F_\infty$ l'égalité:

$$E(Y \circ \theta_t / F_t) = E(Y \circ \theta_t / X_t)$$

Où θ est l'opérateur de translation défini sur les applications coordonnées par $X_u \circ \theta_s = X_{u+s}$.

Définition 1.15:

Pour toute fonction bornée f définie sur IR^n, pour toute n, pour tous $t_1<t_2<\ldots<t_n$:

$$E(f(X_{s+t_1},X_{s+t_2},...,X_{s+t_n})/F_s)=E(f(X_{s+t_1},X_{s+t_2},...,X_{s+t_n})/X_s)$$

Ceci implique en particulier que pour toute fonction f borélienne bornée:

$$E(f(X_t)/F_s)=E(f(X_t)/X_s)\,,\quad \forall t>s$$

On appelle processus de Markov forte si la propriété précédente est vraie pour tout couple de temps d'arrêt finis T, S avec $T>S$.

1-4- Martingales et temps d'arrêt:

1-4-1 Martingales:

Soit (Ω,F,P) un espace de probabilité, muni d'une filtration $(F_t)_{t\geq 0}$.

a/ Cas discret:

Définition 1.16:

Une suite de variables aléatoires réelles $(X_n, n\in IN)$ est une F_n-martingale si:

① X_n est intégrable, $\forall\ n\in IN$

② X_n est F_n-mesurable, $\forall\ n\in IN$

③ $E(X_{n+1}/F_n)=X_n$, $\forall\ n\in IN$

Propriétés 1.17:

- $E(X_{n+p}/F_n)=X_n$, $\forall\ n\in IN$, $\forall\ p\in IN$.
- Si $X_n=Y_1+Y_2+\ldots+Y_n$ où les Y_i sont des variables aléatoires indépendantes centrées, X_n est une martingale.
- Une famille des vecteurs $(S_n\ ,\ n\geq 0)$ telle que S_n est à valeurs dans IR^d est une martingale, si les familles $(S_n^i,\ n\in IN)$ sont des martingales $\forall\ i\ ,\ 1\leq i\leq d$.

b- Cas continu:

Définition 1.18:

Une famille de variables aléatoires $(X_t, t \in [0,\infty[)$ est une martingale par rapport à la filtration $(F_t)_{t\geq 0}$ si:

① X_t est F_t-mesurable et intégrable pour tout t.

② $E(X_t / F_s) = X_s$, $\forall\ s \leq t$.

Propriétés 1.19:

- Si X est une martingale $E(X_t) = E(X_0)$, $\forall\ t$
- Si $(X_t,\ t\leq T)$ est une martingale, X_t est complètement déterminé par sa valeur terminale:

$$X_t = E(X_T / F_t)$$

Cette propriété est d'un usage très fréquent en finance.

Définition 1.20:

Une famille de variables aléatoires $(X_t, t \in [0,\infty[)$ est une sous martingale (resp surmartingale) par rapport à $(F_t)_{t\geq 0}$ si:

① X_t est F_t-mesurable et intégrable pour tout t.

② $E(X_t / F_s) \geq X_s)$, $\forall\ s \leq t$. (resp $E(X_t / F_s) \leq X_s$)

Propriété 1.21:

- Si X est une martingale, alors X^2 est une sous martingale.
- Si X est une martingale et A un processus croissant, $X+A$ est une sous-martingale.

Proposition 1.22: Inégalité de Doob.

Si X est une martingale continue,

$$E\left(\sup_{s\leq T} X_s^2\right) \leq 4\,E\left(X_T^2\right)$$

1-4-2 Temps d'arrêt:

Définition 1.23: un temps d'arrêt.

On appelle temps d'arrêt la variable aléatoire τ à valeur dans $IR \cup \{+\infty\}$ telle que $\{\tau \leq \mathrm{t}\} \in F_t, \quad \forall t \in IR$

Exemple 1.24:

Une constante positive est un temps d'arrêt.

On associé a un temps d'arrêt τ la tribu F_t dite des évènement antérieurs à τ, définie par:

$$F_\tau = \{A \in F_\infty \,/\, A \cap \{\tau \leq t\} \in F_t, \forall t \in IR\}.$$

Propriétés 1.25:

- Si T un temps d'arrêt alors T est F_T-mesurable.
- Si S et T sont des temps d'arrêt, $S\Lambda T$ est un temps d'arrêt.

  En particulière $T\Lambda t$ est un temps d'arrêt.
- Si S et T sont des temps d'arrêt tels que $S \leq T$, alors $F_s \subset F_T$.
- Si un processus X est continu et adapté, X_T est F_T-mesurable.

Théorème 1.26: Théorème d'arrêt

Soit T un temps d'arrêt et M une (F_t)-martingale, le processus Z défini par $Z_t = M_{t\Lambda T}$ est une (F_t)-martingale et $E(M_{t\Lambda T}) = (M_0)$.

Théorème 1.27: Théorème d'arrêt de Doob

Soit M une (F_t)-martingale continue et si S et T sont deux temps d'arrêt tels que $S \leq T \leq k$ (k une constante finie), M_t est intégrable et:

$$E(M_T \,/\, F_S) = M_S$$

S'étend ce résultat pour tous les temps d'arrêt si la martingale est uniformément intégrable.

Proposition 1.28:

Si pour tout temps d'arrêt borné $E(X_T) = E(X_0)$, le processus X est une martingale.

Remarque 1.29:

Si $E(X_T) = E(X_0)$ pour tout t, le processus X n'est pas nécessairement une martingale.

Une martingale locale positive est une surmartingale.

Une martingale locale uniformément intégrable est une martingale.

1-5- Mouvement Brownien:

Le mouvement Brownien joue un rôle fondamental dans de nombreux domaines.

Il fut introduit par Bachelier en 1900, pour des applications à la finance et a de nouveau, à l'heure actuelle, un rôle important en mathématiques financières.

En 1905, Einstein détermine la densité de transition du mouvement Brownien par l'intermédiaire de l'équation de la chaleur et relie ainsi le mouvement Brownien et les équations aux dérivées partielles de type parabolique.

La même année, Smoluchowski décrit le mouvement Brownien comme une limite de promenades aléatoires.

Soit l'espace de probabilité (Ω,F,P) et le processus $(B_t,\ t\geq 0)$ sur cet espace.

La définition plus usuelles du mouvement Brownien est la suivante.

1-5-1 Définition:

On appelle mouvement Brownien (standard) le processus $(B_t,\ t\geq 0)$ satisfaisant aux propriétés:

- Le mouvement Brownien est issu de l'origine, c'est-à-dire:

$$P(B_0=0) = 1.$$

- Le mouvement Brownien est un processus à accroissements indépendants:

$\forall\ s \leq t$, la variable B_t-B_s est indépendante de la tribu du passé avant s, soit $\sigma(B_u,\ u \leq s)$.

- L'accroissements de mouvement Brownien est une variable aléatoire réelle de loi gaussienne, centrée de variance *(t-s)*.

Il existe une approche classique du mouvement Brownien, qui consiste à l'obtenir comme limite de marches aléatoires.

1-5-2 Théorème: Théorème de Donsker:

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une famille de variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées avec $E(X_n) = 0$ et $E(X_n^2) = 1$

Soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ avec $S_0 = 0$. ($E(S_n) = 0$ et $V(S_n) = n$).

Les processus des sommes normalisées $Y_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt]}$ (où$[nt]$ désigne la partie entière de nt) converge en loi, en tant que processus, vers le mouvement Brownien.

On considère toujours des mouvement Brownien ayant des trajectoires continues et qui sont nuls au temps 0. On appelle souvent un tel processus un mouvement Brownien standard.

1-5-3 Propriétés:

Soit $(B_t,\ t \geq 0)$ un mouvement Brownien et $F_t = \sigma\{B_s,\ s\leq t\}$ sa filtration naturelle.

1-5-3-1 Proposition: Processus gaussien

Le mouvement Brownien est un processus gaussien centré ($E(B_t) = 0$)(pour tout t), de covariance min(s,t) ($Cov(B_t,B_s) = s\Lambda t$).

Démonstration: Le caractère gaussien résulte de $\sum_{i=0}^{n} a_i B_{t_i} = \sum_{i=0}^{n} b_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)$ avec $a_i = b_i - b_{i+1}$, $i \leq n-1$, $a_n = b_n$. La covariance est égale à $E(B_t\, B_s)$ car le processus est centré.

Si $s \leq t$, $E(B_tB_s)=E((B_t - B_s)B_s + B_s^2)=E(B_t - B_s)E(B_s)+E(B_s^2)=s$, c'est-à-dire $cov\ (B_t\ ,B_s)=s\wedge t = s$

1-5-3-2 Propositions:

Soit $(B_t,\ t \geq 0)$ un mouvement Brownien, alors

- $W'_t = -B_t$ est un mouvement Brownien.
- $W'_t = 1/c\ B_{c^2t}$ est un mouvement Brownien.
- $W'_t = t\,B_{1/t}$, $\forall t > 0$, $W'_t = 0$ est un mouvement Brownien.

1-5-3-3 Propriété de Markov:

On considère un mouvement Brownien B sur l'espace (Ω,F,P) et la filtration $(F_t)_{t\geq 0}$ qu'il engendre.

Puisqu'il est à accroissements indépendantes, la variable $B_{t-s}-B_s$ est indépendante de la tribu F.

Théorème 1.30:

Pour chaque fonction f borélienne bornée:

$$E(f(B_u)/F_t) = E(f(B_u)/\sigma(B_t)) \quad \text{pour} \quad u > t$$

Définition 1.31:

Un processus$(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Markov si, étant donné la filtration $(F_t^X)_{t\geq 0}$ engendrée par le processus, celui-ci vérifie la propriété de Markov, à savoir que pour tous s, $t\geq 0$ et pour tout fonction f borélienne bornée:

$$E(f(X_{T+s})/F_t^X) = E(f(X_{T+s})/X_s).$$

Proposition 1.32: Propriété de Markov forte.

Soit T un temps d'arrêt à valeurs finies.

On a alors.

$$E(f(B_{T+s})/F_t\ ) = E(f(B_{T+s})/\sigma(B_s)).$$

En particulier, pour tout temps d'arrêt fini T, le processus $B_{t+T} - B_T$ est un mouvement Brownien indépendant de F_T.

1-5-3-4 Propriété de martingale:

Propositions 1.33:

Soit $(B_t,\ t \geq 0)$ un mouvement Brownien standard et F_t la tribu engendre par B_t.

1. Le processus $(B_t,\ t \geq 0)$ est une martingale.
2. Le processus $(B^2_t - t,\ t \geq 0)$ est une martingale et la réciproque est vraie (c'est-à-dire si X est un processus continu tel que X et $(X^2_t - t, t \geq 0)$ sont des martingales alors X est un mouvement Brownien).
3. Soit B_1 et B_2 deux mouvements Brownien indépendantes. Le produit $B_1 B_2$ est une martingale.
4. Le processus $(\exp(\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t), t \geq 0)$ est une martingale, pour tout σ réel, et la réciproque est vraie (c'est-à-dire si X un processus continu tel que $(\exp(\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t), t \geq 0)$ est une martingale, le processus X est un mouvements Brownien).

Démonstration:

En utilisant l'indépendance des accroissements du mouvement Brownien et la définition de martingale (c'est-à-dire si $s \leq t$, $B_t - B_s$ indépendante de F_s et $E(B_t/F_s) = B_s$)) avec les propriétés d'espérance conditionnelle.

Définition 1.34:

On dit que B est un (F_t)-mouvements Brownien si B et $(B^2_t - t,\ t \geq 0)$ sont des (F_t)-martingale.

1-5-4 Intégrale de Wiener:

1-5-4-1 Définition:

Soit $L^2(IR^+)$ l'ensemble des fonctions boréliennes f de IR^+ dans IR de carré intégrable telles que $\int_0^{+\infty} |f(s)|^2 \, ds < \infty$.(c'est un espace de Hilbert pour la norme $\|f\|_2 = (\int_0^{\infty} f^2(s)\, ds)^{1/2}$.)

a/- Fonction en escalier:

On pose $\int_0^{\infty} f(s)\, dB_s = B(v) - B(u)$ pour $f = 1_{]u,v]}$

Soit f une fonction en escalier, on pose

$$\int_0^{\infty} f(s)\, dB_s = \sum_{i=1}^{n} f_{i-1}(B(t_i) - B(t_{i-1}))$$

La variable aléatoire $I(f) \underline{\underline{def}} \int_0^{\infty} f(s)\, dB_s$ est une variable gaussienne d'espérance nulle et de variance $\int_0^{\infty} f^2(s)\, ds$ (car B est gaussien et centré).

b/- Cas général:

En analyse, si $f \in L^2(IR^+)$, il existe une suite f_n de fonction en escalier qui converge dans $L^2(IR^+)$ vers f:

$$\int_0^{\infty} |f_n - f|^2 (x)\, dx \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Dans ce cas, la suite f_n est de Cauchy dans $L^2(IR^+)$.

La suite de variable aléatoire $F_n = \int_0^{\infty} f_n(s)\, dB_s$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$, donc elle est convergente.

On pose:

$$F_n \quad \underline{\underline{def}} \quad \int_0^\infty f(s)\,dB_s = \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(s)\,dB_s$$

La limite ne dépend que de f et non de la suite f_n.

On dit $I(f)$ l'intégrale de Wiener de f par rapport à B.

1-5-4-2 Propriétés:

- L'intégrale est linéaire, c'est-à-dire:

$$I(f+g) = I(f) + I(g)$$

- L'intégrale est isométrique de $L^2(IR^+)$, c'est-à-dire la norme de $I(f)$ est égale à la norme de $f \Rightarrow$

$$\|I(f)\|^2 = E\left[(I(f))^2\right] \quad et \quad \|f\|^2 = \int_0^\infty f^2(s)\,ds$$

$$E(I(f)I(g)) = \int_0^\infty f(s)g(s)\,ds$$

- Si $f \in L^2(IR^+)$, pour tout t, la variable $I(f)$ vérifie:

$$E(B_t\int_0^\infty f(s)\,dB_s) = \int_0^t f(s)\,ds$$

1-5-4-3 Processus lié à l'intégrale stochastique:

Soit $f \in L^2(IR^+)$,

$$\int_0^t f(s)\,dB_s \quad \underline{\underline{def}} \quad \int_0^\infty 1_{[0,t]}(s)f(s)\,dB_s$$

De même façon $\int_0^T |f(s)|^2\,ds < \infty, \forall T$, ce qui permet de définir l'intégrale stochastique pour une grande classe de fonctions (on note L^2_{loc}).

Théorème 1.35:

Soit $f \in L^2_{loc}$ et $M_t = \int_0^t f(s)\,dB_s$

- Le processus M est une martingale continue.(d'espérance nulle et de variance $\int_0^t f^2(s)\,ds$)
- Le processus M est un processus de gaussien centré de covariance $\int_0^{t\wedge s} f^2(u)\,du$ à accroissement indépendants.
- Le processus $(M_t^2 - \int_0^t f^2(s)ds\,, \quad t \geq 0)$ est une martingale.
- Si f et g sont dans L^2_{loc} , on a

$$E(\int_0^t f(u)\,dB_u \int_0^s g(u)\,dB_u) = \int_0^{t\wedge s} f(u)g(u)\,du$$

1-5-4-4 Brownien géométrique:

Définition 1.36:

Soit B un mouvement Brownien et b, σ sont constants, le processus

$$X_t = X_0 \exp(b - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t$$

est appelé Brownien géométrique.

Chapitre 02:

Intégrale stochastique

On se donne un espace (Ω,F,P) et B un mouvement Brownien sur cet espace. $F_t = \sigma(B_s,\ s\leq t)$ sa filtration naturelle du mouvement Brownien.

2-1- Processus étagés (élémentaire):

On veut généraliser l'intégrale de Wiener et définir $\int_0^t \theta_s\, dB_s$ pour des processus stochastique θ.

Définition 2.1:

On appelle processus étagé (ou élémentaire) $(\theta_t)_{0\leq t\leq T}$, s'il existe une suite de réels t_j, $0=t_0\leq t_1\leq\ldots\leq t_n=T$ et une suite de variable aléatoire θ_j telles que θ_j est F_t-mesurable et bornée, un processus de forme:

$$\theta_s(w) = \sum_{j=1}^{n} \theta_j(w)\, 1_{[t_{j-1},t_j]} \quad où$$

$$1_{[t_j,t_{j+1}]} = \begin{cases} 1 & si\ \ s\in[t_j,t_{j+1}] \\ 0 & si\ \ non \end{cases}$$

l'intégrale stochastique de θ est alors par définition le processus continu $(I(\theta)_t)_{0\leq t\leq T}$ définir par: $I(\theta)_t = \int_0^\infty \theta_s\, dB_s = \sum_{j=1}^{n} \theta_j\left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right)$

On a $E(I(\theta)_t) = 0$ et $\operatorname{var}(I(\theta)_t) = E(\int_0^\infty \theta_s^2\, ds)$.

On obtient: $I(\theta)_t = \int_0^t \theta_s\, dB_s = \sum_{j=1}^{n} \theta_j\left(B_{t_j\wedge t} - B_{t_{j-1}\wedge t}\right)$

Ce qui établit la continuté de l'application $t \rightarrow I(\theta)_t$.

Si T_j, $0\leq T_0\leq\ldots\leq T_n$ est une suite croissante de temps d'arrêt,

$$\theta_s(w) = \sum_{j=1}^{n} \theta_j 1\mathrm{I}_{[T_{j-1},T_j]}(s)$$

on définit alors:

$$I(\theta)_t = \int_0^t \theta_s\, dB_s = \sum_{j=1}^{n} \theta_j\left(B_{T_j\wedge t} - B_{T_{j-1}\wedge t}\right)$$

2-2- Généralisation:

On peut prolonger la définition de l'intégrale de Wiener à une classe plus grande de processus (on perd le caractère gaussien de l'intégrale, ce qui est déjà le cas pour de processus étagé).

Les processus étagés appartient à Γ (Γ: l'ensemble de définition des processus càglàd de carré intégrable c'est-à-dire appartenant à $L^2(\Omega\times IR^+)$ tel que les processus θ adaptés continus à gauche limités à droite, (F_t) adaptés et

$$\|\theta\|^2 \underset{=\!=}{def} E\left(\int_0^\infty \theta_t^2\, dt\right) < \infty$$

on dit que θ_n converge vers θ dans $L^2(\Omega\times IR^+)$ si

$$\|\theta - \theta_n\| \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$$

La définition de $I(\theta)_t$ pour tous les processus θ de Γ:

On approche θ par des processus étagés, soit $\theta = \lim\limits_{n\to\infty} \theta_n$ où

$\theta_n = \sum\limits_{j=1}^{K(n)} \tilde{\theta}_j^n 1_{]t_j, t_{j+1}]}$ avec $\tilde{\theta}_j^n \in F_t$, la limite étant au sens de $L^2(\Omega\times IR^+)$.

L'intégrale $\int\limits_0^\infty \theta_s\, dB_s$ est alors la limite dans $L^2(\Omega)$ des sommes

$\sum\limits_{j=1}^{K(n)} \tilde{\theta}_j^n (B(t_{j+1}) - B(t_j))$ dont l'espérance est zéro et la variance:

$$E\left(\sum_{j=1}^{K(n)} \tilde{\theta}_j^2 (t_{j+1} - t_j)\right).$$

On a alors:

$$E\left(\int_0^\infty \theta_s\, dB_s\right) = 0 \text{ et } Var\left(\int_0^\infty \theta_s\, dB_s\right) = E\left(\int_0^\infty \theta_s^2\, ds\right).$$

On note:

$$I(\theta)_t = \int_0^t \theta_s \, dB_s \underline{\underline{def}} \int_0^\infty \theta_s 1_{[0,t]}(s) \, dB_s$$

Si θ est étagé:

$$\int_0^t \theta_s \, dB_s = \sum_{j=1}^n \theta_j \left(B_{t_{j+1}\Lambda t} - B_{t_j \Lambda t} \right)$$

Plus généralement, si τ est un temps d'arrêt, le processus $1_{[0,\tau]}(t)$ est adapté et on définit

$$\int_0^{\tau\Lambda t} \theta_s \, dB_s = \int_0^t \theta_s 1_{[0,\tau]}(s) \, dB_s$$

Propriétés 2.2:

On note Λ l'ensemble $L_{loc}^2(\Omega \times IR^+)$ des processus θ adaptés càglàd vérifiant:

$$E\left(\int_0^t \theta_s^2(s) \, ds\right) < \infty, \ \forall \, t.$$

1. Soit θ^1, θ^2 deux processus de Λ, on a:

$$\int_0^t (a\theta_s^1 + b\theta_s^2) \, dB_s = a\int_0^t \theta_s^1 \, dB_s + b\int_0^t \theta_s^2 \, dB_s$$

$\forall \, a,b$ des constantes

2. **Propriété de martingale:**

Proposition 2.3:

Soit $M_t = \int_0^t \theta_s \, dB_s$, où $\theta \in \Lambda$.

① Le processus M est une martingale, à trajectoires continues.

② Soit $N_t = \left(\int_0^t \theta_s \, dB_s\right)^2 - \int_0^t \theta_s^2 \, ds$.

Le processus $(N_t, t \geq 0)$ est une martingale.

Démonstration:

① $E(\int_0^t \theta_u \, dB_u)/F_s) = \int_0^s \theta_u dB_u, \forall t \geq s$ (la propriété de martingale)

On a: $E(\int_0^t \theta_u \, dB_u)/F_s) = 0 \quad \Rightarrow \quad E(\int_0^t \theta_u \, dB_u) = 0$

② $E(\left[(\int_0^t \theta_s \, dB_s)^2 - \int_0^t \theta_s^2 \, ds\right]/F_s) = (\int_0^s \theta_u \, dB_u)^2 - \int_0^s \theta_u^2 \, du$

On a: $E\left(\left[(\int_s^t \theta_u \, dB_u)^2 - \int_s^t \theta_u^2 \, du\right]/F_s\right) = 0 \quad \Rightarrow$

$E\left[(\int_s^t \theta_u \, dB_u)^2 / F_s\right] = E\left[\int_s^t \theta_u^2 \, du \; / F_s\right]$ donc

$$E(\left[(\int_0^t \theta_s \, dB_s)^2 - \int_0^t \theta_s^2 \, ds\right]/F_s) = E(\left[(\int_0^s \theta_u \, dB_u)^2 - \int_0^s \theta_u^2 \, du\right]/F_s)$$

$$+ E(\left[(\int_s^t \theta_u \, dB_u)^2 - \int_s^t \theta_u^2 \, du\right]/F_s) = (\int_0^s \theta_u \, dB_u)^2 - \int_0^s \theta_u^2 \, du$$

Si l'on veut définir M_t pour $t \leq T$, il suffit de demander que $\theta \in L^2(\Omega \times [0,T])$

c'est-à-dire $E(\int_0^T \theta_t^2 \, dt) < \infty$ et que θ soit adapté.

Sous cette condition, *$(M_t, t \leq T)$* est encore une martingale.

Corollaire 2.4:

$$E(M_t) = 0 \quad et \quad Var(M_t) = \int_0^t E\{\theta_s\}^2 \, ds$$

Si

$$M_t = \int_0^t \theta_s \, dB_s \; et \; M_t' = \int_0^t \varphi_s \, dB_s \quad \text{où } \varphi \in \Lambda.$$

Le processus $M_t M'_t - \int_0^t \theta_s \varphi_s \, ds$ est une martingale $\Rightarrow$

$$E\left(\int_0^t \theta_s \, dB_s \int_0^t \varphi_s \, dB_s\right) - E\left(\int_0^t \theta_s \varphi_s \, ds\right) = 0$$

Il suffit de remarquer que

$$\int_0^t (\theta_s + \varphi_s) \, dB_s \quad et \quad \left(\int_0^t (\theta_s + \varphi_s) \, dB_s\right)^2 - \int_0^t (\theta_s + \varphi_s)^2 \, ds$$

sont des martingales.

Proposition 2.5:

Soit τ un temps d'arrêt et θ un Processus F^B-adapté tel que

$$E\left(\int_0^\tau \theta_s^2 \, ds\right) < \infty$$

alors

$$E\left(\int_0^\tau \theta_s \, dB_s\right) = 0 \quad et \quad E\left(\int_0^\tau \theta_s \, dB_s\right)^2 = E\left(\int_0^\tau \theta_s^2 \, ds\right)$$

Exemple 2.6:

Remarquons que l'intégrale stochastique d'Itô ne suit pas les règles du calcul différentiel classique; en effet (W ou B: un mouvement Brownien)

$$W_t^2 \neq 2\int_0^t W_s \, dW_s$$

$$W_t^2 = 2\int_0^t W_s \, dW_s + t \Rightarrow \int_0^t W_s \, dW_s = \tfrac{1}{2}(W_t^2 - t)$$

Puisque $E(W_t^2) = t \quad et \quad E\left(2\int_0^t W_s \, dW_s\right) = 0$ par $E\left(\int_0^t \sigma_s \, dW_s\right) = 0$

En écrivant:

$$W_t^2 = 2\sum_{i=1}^{n} W_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \sum_{i=0}^{n} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2$$

où par définition:

$$\int_0^t W_s \, dW_s = \lim \sum_{i=1}^{n} W_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

L'égalité

$$2\sum_{i=0}^{n} W_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) = \sum_{i=0}^{n} (W_{t_{i+1}}^2 - W_{t_i}^2) - \sum_{i=0}^{n} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2$$

vérifie

$$\int_0^t W_s \, dW_s = \frac{1}{2}\left[W_t^2 - \lim_n \sum_{i=0}^{n} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 \right] = \frac{1}{2}(W_t^2 - t)$$

où

$$\lim \sum_{i=0}^{n} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 = E(W_t^2) = t$$

En général, si $I(\theta)_t$ processus adaptés càglàd qui n'appartiennent pas nécessairement à $L^2(\Omega \times IR)$, mais qui vérifient pour tout t, $\int_0^t \theta^2(s,w)\,ds < \infty \quad p.s$, dans ce cas M n'est pas une martingale mais une martingale locale et l'espérance peut être nul.(On utilise souvent qu'une martingale locale positive est une surmartingale)

Inégalité maximale: (Voir inégalité de Doob)

$$E(\sup_{s \le T} (\int_0^s \theta_u \, dB_u)) \le 4E(\left[\int_0^T \theta_u \, dB_u\right]^2) = 4\int_0^T E(\theta_u^2)\,du$$

2-3- Processus d'Itô:

Définition 2.8:

On appelle processus d'Itô, le processus X tel que p.s $\forall t \leq T$

$$X_t = x + \int_0^t b_s\, ds + \int_0^t \sigma_s\, dB_s$$

où b est un processus adapté tel que $\int_0^t |b_s|\, ds$ existe (au sens Lebesgue) p.s pour tout t, et σ est un processus appartient à Λ.

On utilise la notation suivante:

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

Le coefficient b est la dérive, σ est le coefficient de diffusion.

La décomposition d'un processus d'Itô est unique, c'est-à-dire si

$$dX_t = b_t\, dt + \sigma_t\, dB_t \quad = \quad \tilde{b}_t\, dt + \tilde{\sigma}_t\, dB_t \quad alors$$
$$b = \tilde{b} \quad et \quad \sigma = \tilde{\sigma}$$

En particulier, si X est une martingale locale alors $b=0$ et réciproquement.

On peut définir un processus d'Itô pour des coefficients de diffusion tels que $\int_0^t \sigma_s^2\, ds < \infty$ p.s, mais on perd la propriété de martingale de l'intégrale stochastique. La partie $x + \int_0^t b_s\, ds$ est la partie à variation finie.

Si un processus à variation finie est une martingale, il est constant.

En effet, si $A_0=0$, $A_t^2 = 2\int_0^t A_s\, dA_s \quad et \quad E(A_t^2) = 0$

Propriété 2.9:

Si $\sigma \in$ à Λ, on a

$$E(X_t) = E(X_0) + \int_0^t E(b_s)\,ds \quad , et \,\forall\, t \geq s,$$

$$E(X_t / F_s) = X_0 + \int_0^s b_u\,du + \int_0^s \sigma_u\,dB_u + E(\int_s^t b_u\,du \,/\, F_s) \;\; donc$$

$$E(X_t / F_s) = X_s + E(\int_s^t b_u\,du \,/\, F_s)$$

Si $b \equiv 0$, le processus X est une martingale continue.

La réciproque est vraie sous certaines conditions d'intégrabilité et de mesurabilité, toute martingale continue s'écrit $x + \int_0^t \phi_s\,dB_s$

Intégrale par rapport à un processus d'Itô:

Soit X un processus d'Itô:

$$dX_t = b_t\,dt + \sigma_t\,dB_t$$

On a sous réserve de conditions d'intégrabilité:

$$\int_0^t \theta_s\,dX_s \;\underline{\underline{def}}\; \int_0^t \theta_s b_s\,ds + \int_0^t \theta_s \sigma_s\,dB_s$$

Crochet d'un processus d'Itô:

Soit Z une martingale continue de carré intégrable (telle que $E(\sup_{0 \leq t \leq T} Z_t^2) < \infty$.).

S'il existe un processus croissant continu A implique que $(Z^2_t - A_t,\ t \geq 0)$ est une martingale.

Le processus A est appelé le crochet oblique ou le crochet de Z.

On note: $A_t = \langle Z, Z \rangle_t$ ou encore $\langle Z \rangle_t$

Nous avons établi que le crochet de Brownien est t et que le crochet de l'intégrale stochastique $(M_t = \int_0^t \theta_s \, dB_s)$ est $\int_0^t \theta_s^2 \, ds$

Le crochet de deux martingales locales continues est défini par:

$$\langle M, N \rangle_t = \tfrac{1}{2}(\langle M+N, M+N \rangle_t - \langle M, M \rangle_t - \langle N, N \rangle_t)$$

c'est l'unique processus à variation finie tel que le processus $MN - \langle M, N \rangle$ est une martingale locale.

Le crochet de deux intégrales stochastiques

$$X_t = x + \int_0^t H_s \, dB_s \quad , \quad Y_t = y + \int_0^t K_s \, dB_s$$

est $\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t H_s K_s \, ds$

Proposition 2.10:

Le crochet de deux martingales continues M et N est égale à la variation quadratique de ce processus:

$$\langle M, N \rangle_t = \lim \sum_{i=1}^{n} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}).$$

Il en résulte que si P et Q sont deux probabilités équivalentes, le crochet de M sous P et sous Q sont égaux. On dit que deux martingales continues sont orthogonales si leur crochet est nul, ou si leur produit est une martingale.

On étend la définition du crochet aux processus d'Itô, si deux processus d'Itô $dX_i(t) = b_i(t)\, dt + \sigma_i(t)\, dB_t$, $i = 1,2$, leur crochet est par définition le crochet de leur partie martingale. Cela tient à la proposition 2.10.

Nous en déduisons une nouvelle forme de la définition de Browniens corrélés: Si deux Browniens sont corrélés implique que leur crochet est ς_t.

On caractérise le mouvement Brownien en disant que c'est une martingale continue d'espérance nulle et de crochet t.

On définit le crochet du processus d'Itô comme étant le crochet de sa partie martingale.

Le crochet de processus d'Itô X est $A_t = \langle X \rangle_t = \int_0^t \sigma_s^2 \, ds$.

2-4- Formule d'Itô:

Soit X un processus d'Itô de décomposition $dX_t = b_t \, dt + \sigma_t \, dB_t$.

2-4-1 Première forme:

Théorème 2.11:

Soit f une fonction de IR dans IR, deux fois continûment différentiable, alors

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \tfrac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\sigma_s^2 \, ds$$

où

$$\int_0^t f'(X_s)\, dX_s = \int_0^t f'(X_s) b_s \, ds + \int_0^t f'(X_s)\sigma_s \, dB_s$$

Sous forme condensée

$$df\,(X_t) = f'(X_t)\, dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t)\sigma_t^2 \, dt$$

$$df\,(X_t) = f'(X_t) b_t \, dt + \frac{1}{2} f''(X_t)\sigma_t^2 \, dt + f'(X_t)\sigma_t \, dB_t$$

Si on utilise le crochet:

$$df\,(X_t) = f'(X_t) b_t \, dt + \frac{1}{2} f''(X_t)\, d\langle X \rangle_t + f'(X_t)\sigma_t \, dB_t$$

La formule est facile à mémoriser en notant sa ressemblance avec la formule de Taylor, sous forme:

$$df\,(X_t) = f'(X_t)\, dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t)\, dX_t \, dX_t$$

et la règle de multiplication:

$$dt\,dt = 0\,,\ \ dt\,dB_t = 0\,,\ \ dB_t\,dB_t = dt$$

Si f' et σ sont bornés:

1. $E(f(X_t)) = E(f(X_0)) + E\left[\int_0^t (f'(X_s)b_s + \frac{1}{2} f''(X_s)\sigma_s^2)\, ds\right] =$

$$E(f(X_0)) + \left[\int_0^t E(f'(X_s)b_s + \frac{1}{2} f''(X_s)\sigma_s^2)\, ds\right]$$

2. $E(f(X_t)/F_s) = f(X_s) + E\left[\int_s^t (f'(X_u)b_u + \frac{1}{2} f''(X_u)\sigma_u^2)\, du \,/\, F_s\right]$

$$= f(X_s) + \int_s^t E\left[(f'(X_u)b_u + \frac{1}{2} f''(X_u)\sigma_u^2)/F_s\right]du$$

3. $\int_0^t B_s\, dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$

Si $X_t = B_t$ *et* $F(X_t) = B_t^2$, on applique la formule d'Itô. On obtient facilement:

$$B_t^2 = 2\int_0^t B_s\, dB_s + t$$

4. $d(\exp(X_t)) = \exp(X_t)(dX_t + \frac{1}{2}\sigma_t^2 dt)$

5. La seule solution de $dS_t = S_t(\mu\, dt + \sigma\, dB_t)$ est

$$S_t = x\exp(X_t) \quad avec \quad X_t = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t$$

Proposition 2.12:

Supposons que

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(X_s)\, dB_s.$$

Où b et σ sont des fonctions de *IR* dans *IR* bornées.

Si f est une fonction d'échelle de *IR* dans *IR* de classe C^2 à dérivées bornées et vérifiant:

$$\forall x,\ b(x) f'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x) f''(x) = 0$$

Le processus $f(X)$ est une martingale.

Démonstration:

La fonction f est déterminée, à deux constantes prés par les fonctions b et σ

par: $f(x) = \int_c^x \exp(-2\int_c^x b(v)/\sigma^2(v)\,dv)\,du$

On peut affaiblir la condition sur la bornitude des dérivées qui n'est utilisée que pour assurer l'existence des intégrale et la propriété de martingale.

2-4-2 Fonction dépendant du temps:

Théorème 2.13:

Soit f une fonction définie sur $IR_+ \times IR$, deux fois différentiable en x et une fois différentiable en t, on a

$$f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t f_t'(s,X_s)\,ds + \int_0^t f'_x(s,X_s)\,dX_s$$
$$+ \tfrac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s,X_s)\sigma_s^2\,ds$$

Où

$$\int_0^t f'_x(s,X_s)\,dX_s = \int_0^t f'_x(s,X_s)b_s\,ds + \int_0^t f'_x(s,X_s)\sigma_s\,dB_s$$

On note

$$df(t,X_t) = \left(f'_t(t,X_t) + \tfrac{1}{2} f''_{xx}(t,X_t)\sigma_t^2\right)dt$$
$$+ f'_x(t,X_t)\sigma_t\,dX_t = f'_t(t,X_t)\,dt$$
$$+ f'_x(t,X_t)\sigma_t\,dX_t + \tfrac{1}{2} f''_{xx}(t,X_t)\,d\langle X\rangle_t$$

Exemples 2.14:

1. Soit X un processus tel que:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\,dB_s$$

Si f est une fonction de $IR_+ \times IR$ dans IR telle que $\sigma f'_x$ est bornée et

$$f'_t(t,x) + b(t,x) f'_x(t,x) + \tfrac{1}{2}\sigma^2(t,x) f''_{xx}(t,x) = 0$$

Alors $(f(t,X_t),\ t\geq 0)$ est une martingale.

L'opérateur L définir sur les fonctions de $C^{1,2}$ par:

$$L(f)(t,x) = b(t,x) f'_x(t,x) + \tfrac{1}{2}\sigma^2(t,x) f''_{xx}(t,x)$$

est le générateur infinitésimal de la diffusion.

Si

$$f'_t(t,x) + b(t,x) f'_x(t,x) + \tfrac{1}{2}\sigma^2(t,x) f''_{xx}(t,x) = rf(t,x) \qquad (3)$$

Alors $(\exp(-rt) f(t,X_t), t \geq 0)$ est une martingale.

Dans ce cas:

$$\exp(-rt) f(t,X_t) = E(\exp(-rt) f(T,X_T) / F_t)$$

Si f vérifie $f(T,x) = h(x)$ et solution de (3), on a

$$\exp(-rt) f(t, X_t) = E(\exp(-rt) h(X_T) / F_t)$$

2. Soit X un processus tel que: $dX_t = X_t(r\,dt + \sigma\,dB_t)$ Où r et σ sont des constantes. Alors le processus $(e^{-rt} Xt,\ t\geq 0)$ est une martingale.

On remarque que:

$$d(e^{-rt} X_t) = e^{-rt}\ X_t\, \sigma\, dB$$

$$d(e^{-rt} X_t) = dX_t\, e^{-rt} - r\,dt\, e^{-rt} X_t = e^{-rt}\,(dX_t - rX_t\,dt)$$

et vérifié les conditions d'intégrabilité.

La solution de $dX_t = X_t(r\,dt + \sigma\,dB_t)$ est:

$$X = x\exp((r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t)$$

On dit que X est un Brownien géométrique.

3. Soit X un processus tel que $dX_t = X_t(b(t)\, dt + \sigma(t)\, dB_t)$ où b et σ sont des fonctions. X est dit Brownien géométrique à coefficient déterministes, alors le processus $\left(\exp\left(-\int_0^t b(s)\, ds\right) X_t,\ t \geq 0\right)$ est une martingale.

Cas multidimensionnel:

Théorème 2.15:

Soit $(X_i,\ i=1,2)$ deux processus d'Itô tels que $dX_i(t) = b_i(t)\, dt + \sigma_i(t)\, dB_i$

Soit f une fonction de IR^2 dans IR de classe C^2, on a

$$df(X_1(t),X_2(t)) = f'_1(X_1(t),X_2(t))\, dX_1(t) + f'_2(X_1(t),X_2(t))\, dX_2(t) +$$
$$1/2\, (f''_{11}\sigma^2_1(t) + 2\, f''_{12}\, \sigma_1(t)\, \sigma_2(t) + f''_{22}\, \sigma^2_2(t))\, (X_1(t),X_2(t))\, dt$$

Où f'_i désigne la dérivée par rapport à $x_i,\ i=1,2$ et f''_{ij} la dérivée seconde par rapport à $x_i\, x_j$.

Sous forme condensée:

$$df(X_1, X_2)(t) = \sum_{i=1}^{2} f'(X_1(t), X_2(t))\, dX_i(t) +$$
$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1} f''(X_1(t), X_2(t))\, \sigma_i\, \sigma_j\, dt$$

Proposition 2.16: Formule d'intégration par parties.

Soient X_t et Y_t deux processus d'Itô tel que:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_1(s)\, ds + \int_0^t \sigma_1(s)\, dB_s$$
$$Y_t = Y_0 + \int_0^t b_2(s)\, ds + \int_0^t \sigma_2(s)\, dB_s$$

Alors $$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s\, dY_s + \int_0^t Y_s\, dX_s + \langle X, Y \rangle_t$$

Avec $$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t \sigma_1(s)\, \sigma_2(s)\, ds$$

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + \sigma_1(t)\sigma_2(t)$$

La formule d'Itô montre que:

$$X_t^2 = X_0^2 + 2\int_0^t X_s\, dX_s + \int_0^t \sigma_1^2(s)\, ds$$

$$Y_t^2 = Y_0^2 + 2\int_0^t Y_s\, dY_s + \int_0^t \sigma_2^2(s)\, ds$$

$$(X_t + Y_t)^2 = (X_0 + Y_0)^2 + 2\int_0^t (X_s + Y_s)\, d(X_s + Y_s) + \int_0^t (\sigma_1(s)\sigma_2(s))^2\, ds$$

En faisant:

$$(X_t + Y_t)^2 = 2X_tY_t + X_t^2 + Y_t^2$$

Avec

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s\, dY_s + \int_0^t Y_s\, dX_s + \int_0^t \sigma_1(s)\sigma_2(s)\, ds$$

2-4-3 Formule d'Itô multidimensionnelle:

La formule d'Itô se généralisé au cas où la fonction f dépend de plusieurs processus d'Itô et lorsque ces processus d'Itô s'expriment en fonction de plusieurs mouvements Browniens.

2-4-3-1 Cas Browniens indépendants:

Théorème 2.17:

Soit $(X_i,\ i=1,2)$ deux processus d'Itô tels que:

$$dX_i(t) = b_i(t)\, dt + \sigma_i(t)\, dB_i(t)$$

Où B_1 et B_2 sont deux Browniens indépendants. On a

$$df(X_1(t),X_2(t)) = f'_1(X_1(t),X_2(t))\, dX_1(t) + f'_2(X_1(t),X_2(t))\, dX_2(t) +$$

$$1/2\ (\ f''_{11}(X_1(t),X_2(t))\ \sigma^2_1(t) + f''_{22}(X_1(t),X_2(t))\ \sigma^2_2(t)\ )\ dt.$$

Dans le cas générale (plusieurs Browniens indépendants), soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus d'Itô multidimensionnel de composantes $(X_i(t),\ i \leq n)$

$$\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ . \\ . \\ . \\ dX_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & . & . & v_{1,p} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & . & . & v_{2,p} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ v_{p,1} & v_{p,2} & . & . & v_{p,p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dB_1 \\ dB_2 \\ . \\ . \\ . \\ dB_p \end{bmatrix}$$

Soit f une fonction définie sur $IR^+ \times IR^n$ de classe $C^{1,2}$, alors:

$$df(t, X_t) = f'_t(t, X_t)\, dt + \sum_{i=1}^{n} f'_i(t, X_t)\, dX_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} f''_{ij}(t, X_t)\, dX_i(t)\, dX_j(t)$$

Où l'on utilise les conventions d'écriture:

$$dB_i\, dB_j = \delta_{ij}\, dt \quad , \qquad dB_i\, dt = 0 \quad , \qquad dt\, dt = 0$$

2-4-3-2 Cas Brownien corrélés:

Théorème 2.18:

Soit $(X_i,\ i = 1,2)$ deux processus d'Itô tels que

$$dX_i(t) = b_i(t)\, dt + \sigma_i(t)\, dB_i(t)$$

Où B_1 et B_2 sont deux Browniens de corrélation ς

On a

$$df(X_1(t),X_2(t)) = f'_1(X_1(t),X_2(t))\, dX_1(t) + f'_2(X_1(t),X_2(t))\, dX_2(t) + 1/2\, (\, f''_{11}(X_1(t),X_2(t))\, \sigma^2_1(t) + 2\, f''_{12}(X_1(t),X_2(t))\, \varsigma\, \sigma_1(t)\, \sigma_2(t) + f''_{22}(X_1(t),X_2(t))\, \sigma^2_2(t)\,)\, dt.$$

Où

$$dB_1\, dB_2 = \varsigma\, dt$$

Chapitre 03: Equations différentielles stochastiques

Soit b et σ deux fonctions de $IR^+ \times IR^n$ à valeur réelles données.

On se donne également un espace de probabilité *(Ω,F,P)* muni d'une filtration (F_t) et B un processus de Wiener définir sur cet espace de probabilité filtré.

3-1- Définition:

On appelle équation différentielle stochastique une équation du type suivant:

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s \qquad (4)$$

où la seconde intégrale est une intégrale stochastique. (tous les termes b, σ, x sont donnés)

(4) sous forme condensée:

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

et l'inconnu est le processus X.

Le problème est de montrer que, sous certaines conditions sur b et σ, l'équation différentielle a une unique solution (comme pour une équation différentielle ordinaire). Donc la solution est un processus X continu (F_t)-adapté tel que les intégrales $\int_0^t b(s, X_s)\, ds$ *et* $\int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s$ ont un sens et l'égalité (4) est satisfaite pour tout t, avec

$$\int_0^t |b(s, X_s)|\, ds < \infty \quad et \quad \int_0^t |\sigma(s, X_s)|\, dB_s < \infty \qquad p.s$$

3-2- Théorème d'existence et d'unicité:

Théorème 3.1:

On suppose que:

- Les fonctions b et σ sont continues.
- Il existe k tel que pour tout $t \in [0,T]$, $x \in IR$, $y \in IR$

  ① $|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq k|x - y|$

  ② $|b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leq k^2(1 + |x|^2)$
- La condition initiale X_0 est indépendante de $(B_t,\ t \geq 0)$ et est carré intégrable.

Alors il existe une unique solution de (4) à trajectoires continues pour $t \leq T$. Cette solution vérifie:

$$E\left(\sup_{0 \leq s \leq T} |X_s|^2\right) < \infty$$

L'unicité signifie que si $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ et $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ sont deux solutions de (4), alors:

$$\forall\ 0 \leq t \leq T,\ p.s \qquad X_t = Y_t$$

Ce théorème se généralise au cas de processus à valeurs dans IR^n.

Théorème 3.2:

Soit δ une fonction borélienne de $]0,+\infty[$ dans lui-même telle que l'intégrale de $(\delta)^{-1}$ au voisinage de zéro diverge (par exemple $\delta(x) = \sqrt{x}$)

Si $|\sigma(s,x) - \sigma(s,y)|^2 \leq \delta(|x - y|)$ et b est Lipschitzienne, soit $|b(s,x) - b(s,y)| \leq k_t|x - y|$ pour tout x, $y \in IR$ et $s \leq t$, il existe une unique solution de (4)

3-3- Propriété de Markov:

La propriété de Markov pour un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ signifie que le comportement futur de ce processus après t dépend uniquement de X_t et nom de ce qui s'est passé avant *t*.

On dit qu'un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ vérifie la propriété de Markov par rapport à la filtration $(F_t)_{t\geq 0}$, pour le quelle il est adapté, si pour toute fonction f borélienne bornée et pour tous s et t, tels que $s\leq t$:

$$E(f(X_t)/F_s) = E(f(X_t)/X_s)$$

Soit $(X_s^{t,x}, s\geq t)$ la solution de:

$$X_t = z + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s$$

partant de x à l'instant t et $X^x = X^{0,x}$ la solution de l'équation partant de x à l'instant 0.

Donc $(X_s^{t,x}, s\geq t)$ vérifie:

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(u, X_u^{t,x})\, du + \int_t^s \sigma(u, X_u^{t,x})\, dB_u$$

Lemme 3.3:

Sous les conditions du théorème d'existence, si $s\geq t$:

$$X_s^{0,x} = X_s^{t,X_s^x} \qquad p.s$$

En particulier si:

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(X_u^{t,x})\, du + \int_t^s \sigma(X_u^{t,x})\, dB_u$$

on obtient un processus de Markov homogène.

$$E(f(X_s)/F_t) = E(f(X_s)/X_t) = \phi(s,t,X_t) = \psi(s-t, X_t).$$

où $$\phi(s,t,X_t) = E(f(X_s^{t,x})) = E(f(X_{s-t}^{0,x}))$$

$$\psi(u,x) = E(f(X_u^{0,x}))$$

Théorème 3.4:

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus sous forme:

$$X_t = z + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s$$

c'est un processus de Markov par rapport à la filtration $(F_t)_{t\geq 0}$ de mouvement Brownien B.

Plus précisément, on a pour toute fonction borélienne bornée f:

$$E(f(X_t)/F_s) = E(f(X_t)/X_s) = \phi(t, s, X_s) \quad p.s$$

Où

$$\phi(t, s, X_s) = E(f(X_t^{s,x})) \quad , \quad t \geq s$$

3-4- Théorème de comparaison:

Théorème 3.5:

Soit $dX(t) = b(X_i(t))\, dt + \sigma(X_i(t))\, dB_t$, $i = 1{,}2$ où b_i est Lipschitzienne et $|\sigma(x) - \sigma(y)|^2 \leq k|x - y|$. On suppose $X_1(0) \geq X_2(0)$ et $b_1(x) \geq b_2(x)$ alors $X_1(t) \geq X_2(t)$

3-5- Exemples:

a/ La martingale exponentielle $X(t) = e^{B(t)} e^{-\frac{t}{2}}$ est un processus qui satisfait à l'équation:

$$dX_t = X(x)\, dB(t).$$

(pour démontrer on utilise la formule d'Itô pour $F(t, x) = e^x e^{-\frac{1}{2}}$)

b/ **Proposition: Martingale exponentielle.**

Soit $\theta \in \Lambda$ et Z_0 une constante. La solution de $dZ_t = \theta_t Z_t\, dB_t$ est

$$Z_t = Z_0 \exp\left(\int_0^t \theta_s\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2\, ds\right)$$

Si la condition de Novikov $\left[E(\exp(\frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2\, ds)) < \infty \right]$ est vérifiée, le processus *$(Z_t, t \leq T)$* est une martingale d'espérance Z_0.

Démonstration:

Par définition, Z est une martingale.

On utilise la formule d'Itô pour vérifie que

$$Z_t = Z_0 \exp(\int_0^t \theta_s\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2\, ds)$$

est solution de l'équation proposée: $dZ_t = \theta_t Z_t\, dB_t$

En notant $U_t = \int_0^t \theta_s\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2\, ds \;\; (\Rightarrow Z_t = Z_0 e^{U_t})$

Alors $dU_t = \theta_t dB_t - \frac{1}{2}\theta_t^2 dt$ d'où

$$\begin{aligned} dZ_t &= Z_0 e^{U_t}(dU_t + \tfrac{1}{2}\theta_t^2\, dt) = Z_0 e^{U_t}(\theta_t\, dB_t - \tfrac{1}{2}\theta_t^2\, dt + \tfrac{1}{2}\theta_t^2\, dt) \\ &= Z_0 e^{U_t}(\theta_t\, dB_t) \qquad \Rightarrow \quad dZ_t = \theta_t Z_t\, dB_t \end{aligned}$$

Le processus Z, noté $\xi(\theta B)_t$, est appelé l'exponentielle de Doléans-Dade de θB. C'est une martingale locale positive si $Z_0>0$.

Il est plus délicat de vérifier que c'est une martingale. Sous condition de Novikov, *$(Z_t, t \leq T)$* est une martingale. Si non, c'est une martingale locale positive, donc une surmartingale et $E(Z_t) \leq Z_0$.

Si la condition de Novikov n'est pas vérifiée, on a

Lemme 3.6:

Soit f telle que $|f(t,x) - f(t,y)| \leq c|x-y|$ et $Sup\ |f'(s,0)| \leq c$

Alors

$$\int_0^t f(s,B_s)\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t f(s,B_s)^2\, ds$$

est une martingale

c/ Processus d'Ornstein-Uhlenbeck:

Soit $Y(t) = \sigma \exp(-\alpha t)\int_0^t \exp(\alpha s)\, dB_s$ où $\alpha>0$, $\sigma \in IR$ fixé, pour tout $t \geq 0$.

Vérifie: $dY_t = -\alpha\, Y(t)\, dt + \sigma\, dB_t$

Démonstration:

On utilise la formule d'Itô pour $F(t,x) = e^{-\alpha t}.x$, On a

$$\xi(t) = \sigma \int_0^t e^{\alpha s}\, dB_s$$

est un processus d'Itô avec $d\xi(t) = \sigma\, e^{\alpha t}\, dB_t$

$$dY(t) = -\alpha\, e^{-\alpha t}\xi(t)\, dt + \sigma\, e^{\alpha t} e^{-\alpha t}\, dB_t$$

$$dY(t) = -\alpha\, e^{-\alpha t}\sigma \int_0^t e^{\alpha s}\, dB_s\, dt + \sigma\, dB_t$$

$$dY_t = -\alpha\, Y(t)\, dt + \sigma\, dB_t$$

3-6- Equations différentielles stochastiques linéaires:

Comme avec des équations ordinaires linéaires, la solution générale d'une équation stochastique linéaire peut être trouvée explicitement.

La méthode de solution implique également un facteur d'intégration ou une solution fondamentale d'une équation homogène associée.

La formule générale d'une équation stochastique linéaire scalaire est:

$$dX_t = (a_1(t)X_t + a_2(t))\, dt + (b_1(t)X_t + b_2(t))\, dW_t \qquad (5)$$

où a_1, a_2, b_1, b_2 sont des fonctions du temps *t*. S'ils sont mesurable et borné sur un intervalle $0<t<T$.

Quand $a_2(t) \equiv 0$ et $b_2(t) \equiv 0$, (5) réduire au équation différentielle stochastique linéaire homogène:

$$dX_t = a_1(t)X_t\, dt + b_1(t)X_t\, dW_t \qquad (6)$$

Evidament $X_t \equiv 0$ est une solution de (6).

Quand $b_1(t) \equiv 0$ dans (5), l'E.D.S.(équation différentielle stochastique) a la forme:

$$dX_t = (a_1(t)X_t + a_2(t))\,dt + b_2(t)\,dW_t \tag{7}$$

L'équation homogène obtenue à partir (7) est alors une équation ordinaire:

$$\frac{dX_t}{dt} = a_1(t)X_t \tag{8}$$

et sa solution fondamentale est:

$$\phi_{t,t_0} = \exp\left(\int_{t_0}^{t} a_1(s)\,ds\right)$$

Cette solution fondamentale satisfait la condition initiale $\phi_{t_0,t_0} = 1$

On applique la formule d'Itô à la transformation $U(t,x) = \phi_{t,t_0}^{-1}.x$ et la solution X_t de (7), nous obtenons:

$$d(\phi_{t,t_0}^{-1} X_t) = \left[\frac{d\phi_{t,t_0}^{-1}}{dt} X_t + (a_1(t)X_t + a_2(t))\phi_{t,t_0}^{-1}\right] dt$$

$$+ b_2(t)\phi_{t,t_0}^{-1}\,dW_t \quad = a_2(t)\phi_{t,t_0}^{-1}\,dt + b_2(t)\phi_{t,t_0}^{-1}\,dW_t$$

Car

$$\frac{d\phi_{t,t_0}^{-1}}{dt} = -\phi_{t,t_0}^{-1} a_1(t)$$

La partie droite de

$$d(\phi_{t,t_0}^{-1} X_t) = a_2(t)\phi_{t,t_0}^{-1}\,dt + b_2(t)\phi_{t,t_0}^{-1}\,dW_t$$

est composée des fonctions connues de t et de *w*, et peut être intégré pour donner:

$$\phi_{t,t_0}^{-1} X_t = \phi_{t_0,t_0}^{-1} X_{t_0} + \int_{t_0}^{t} a_2(s)\phi_{s,t_0}^{-1}\,ds + \int_{t_0}^{t} b_2(s)\phi_{s,t_0}^{-1}\,dW_s$$

Comme $\phi^{-1}_{t_0,t_0} = 1$, on obtient:

$$X_t = \phi_{t,t_0}(X_{t_0} + \int_{t_0}^{t} a_2(s)\phi^{-1}_{s,t_0}\, ds + \int_{t_0}^{t} b_2(s)\phi^{-1}_{s,t_0}\, dW_s) \tag{9}$$

où

$$\phi_{t,t_0} = \exp(\int_{t_0}^{t} a_1(s)\, ds) \tag{10}$$

3-6-1 E.D.S. linéaires: Bruit additif.

Coefficients constants: homogènes.

$$dX_t = -\alpha\, X_t\, dt + \sigma\, dW_t$$

$$X_t = e^{-\alpha t}(X_0 + \sigma \int_0^t e^{\alpha s}\, dW_s)$$

Coefficients constants: non homogènes.

$$dX_t = (aX_t + b)\, dt + c\, dW(t)$$

$$X_t = e^{at}\left[X_0 + \frac{b}{a}(1 - e^{-at}) + c\int_0^t e^{-as}\, dW_s \right]$$

Coefficients variables:

$$dX_t = (a(t)X_t + b(t))\, dt + c(t)\, dW(t)$$

$$X_t = \phi_{t,t_0}(X_{t_0} + \int_{t_0}^{t} \phi^{-1}_{s,t_0} b(s)\, ds + \int_{t_0}^{t} \phi^{-1}_{s,t_0} c(s)\, dW_s)$$

où la solution fondamentale est:

$$\phi_{t,t_0} = \exp(\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds)$$

Exemple 3.7:

Soit

$$dX_t = \left(\frac{2}{1+t} X_t + b(1+t)^2 \right) dt + b(1+t)^2 \, dW_t$$

$$b(t) = c(t) = b(1+t)^2$$

La solution fondamentale est:

$$\phi_{t,t_0} = \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds \right) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \frac{2}{1+s} ds \right)$$

$$= \exp\left(2 \ln\left(\frac{1+t}{1+t_0} \right)\right) = \left[\frac{1+t}{1+t_0} \right]^2$$

et la solution générale est:

$$X_t = \left[\frac{1+t}{1+t_0} \right]^2 \left(X_{t_0} + \int_{t_0}^{t} \left[\frac{1+t_0}{1+s} \right]^2 b(s)\, ds + \int_{t_0}^{t} \left[\frac{1+t_0}{1+s} \right]^2 c(s)\, dW_s \right)$$

$$= \left[\frac{1+t}{1+t_0} \right]^2 \left(X_{t_0} + \int_{t_0}^{t} \left[\frac{1+t_0}{1+s} \right]^2 b(1+s)^2\, ds + \int_{t_0}^{t} \left[\frac{1+t_0}{1+s} \right]^2 b(1+s)^2\, dW_s \right)$$

$$= \left[\frac{1+t}{1+t_0} \right]^2 \left(X_{t_0} + \int_{t_0}^{t} [1+t_0]^2 b\, ds + \int_{t_0}^{t} [1+t_0]^2 b\, dW_s \right)$$

$$= \left[\frac{1+t}{1+t_0} \right]^2 \left(X_{t_0} + b[1+t_0]^2 \int_{t_0}^{t} ds + b[1+t_0]^2 \int_{t_0}^{t} dW_s \right)$$

$$= \left[\frac{1+t}{1+t_0} \right]^2 \left(X_{t_0} + b[1+t_0]^2 (t-t_0) + b[1+t_0]^2 (W_t - W_{t_0}) \right)$$

$$= \left[\frac{1+t}{1+t_0} \right]^2 X_{t_0} + b[1+t]^2 (W_t - W_{t_0} + t - t_0)$$

3-6-2 E.D.S. linéaires: Bruit multiplicatif.

Coefficients constants: homogènes.

$$dX_t = aX_t\,dt + bX_t\,dW_t$$

$$X_t = X_0 \exp((a - \tfrac{1}{2} b^2)t + bW_t)$$

Les deux exemples important sont:

1/- $a = \frac{1}{2}$; $b = 1$ **2/-** $a = 0$; $b = 1$

Coefficients constants: non homogènes.

$$dX_t = (aX_t + c)\,dt + (bX_t + d)\,dW_t$$

$$X_t = \phi_t \left[X_0 + (c - bd) \int_0^t \phi_s^{-1}\,ds + d \int_0^t \phi_s^{-1}\,dW_s \right]$$

avec la solution fondamentale est:

$$\phi_t = \exp((a - \frac{1}{2} b^2)t + bW_t)$$

Coefficients non constants: homogènes.

$$dX_t = a(t)X_t\,dt + b(t)X_t\,dW_t$$

$$X_t = X_0 \exp(\int_0^t (a(s) - \frac{1}{2} b^2(s))\,ds + \int_0^t b(s)\,dW_s)$$

Coefficients non constants: non homogènes.

$$dX_t = (a(t)X_t + c(t))\,dt + (b(t)X_t + d(t))\,dW_t$$

$$X_t = \phi_{t,t_0} (X_{t_0} + \int_{t_0}^t \phi_{s,t_0}^{-1} (c(s) - b(s)d(s))\,ds + \int_{t_0}^t \phi_{s,t_0}^{-1} d(s)\,dW_s$$

avec

$$\phi_{t,t_0} = \exp(\int_{t_0}^t (a(s) - \frac{1}{2} b^2(s))\,ds + \int_{t_0}^t b(s)\,dW_s$$

Exemples 3.8:

a/- Soit a, α, b, β quatre constantes réelles et Soit $x \in IR$

On considère l'équation différentielle stochastique suivante:

$$\begin{cases} dX_t = (a + \alpha X_t)\,dt + (b + \beta X_t)\,dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

cette équation admet une solution unique car $b(t,x) = a + \alpha x$ et $\sigma(t,x) = b + \beta x$ sont Lipschitziennes et ont une croissance linéaire.

On a

$$X_t = x + \int_0^t (a + \alpha X_s)\,ds + \int_0^t (b + \beta X_s)\,dB_s$$

La solution de l'équation vérifie $E(\underset{s \le t}{Sup}\ X_s^2) < \infty$

Soit *m(t)* l'espérance de X_t et en posant:

$$m(t) = E(X_t) = x + \int_0^t (a + \alpha m(s))\,ds$$

La fonction *m* est dérivable et vérifie $m'(t) = a + \alpha m(t)$. Compte tenu de la condition initiale $m(0) = x$, la solution est

$$m(t) = (x + \frac{a}{\alpha})\,e^{\alpha t} - \frac{a}{\alpha}$$

La formule d'Itô conduit à:

$$d(X_t^2) = 2X_t(a + \alpha X_t)\,dt + 2X_t(b + \beta X_t)\,dB_t + (b + \beta X_t)\,dt$$

en admettant que l'intégrale stochastique est une martingale et en posant

$$M(t) = x^2 + 2\int_0^t (am(s) + \alpha M(s))\,ds + \int_0^t (b^2 + \beta^2 + 2b\beta m(s))\,ds$$

Cas particulier 1

Soit $(Y_t)_{t \ge 0}$ l'unique solution de l'équation précédente quand $a = b = 0$ vérifiant $Y_0 = 1$. On a $dY_t = Y_t(\alpha\,dt + \beta\,dB_t)$ dont la solution est (Brownien géométrique)

$$Y_t = \exp((\alpha - \frac{1}{2}\beta^2)t + \beta B_t)$$

Si on utilise la propriété de martingale du Brownien, on a

$$E(Y_t / F_s) = \exp(\alpha\, t) E\left[\exp(-\frac{1}{2}\beta^2 t + \beta B_t) \Big/ F_s\right] = \exp(\alpha\, t)\exp(-\frac{1}{2}\beta^2 s + \beta B_s)$$

Le processus Y est une martingale si $\alpha = 0$. D'où, si $\alpha \geq 0$, le processus Y est une sous martingale ($E(Y_t / F_s) \geq Y_s$).

Soit $(Z_t)_{t\geq 0}$ le processus défini par

$$Z_t = x + (a - b\beta)\int_0^t Y_s^{-1} ds + b\int_0^t Y_s^{-1} dB_s$$

Z_t est un processus d'Itô car Y_t^{-1} est de carré intégrable et

$$dZ_t = (a - b\beta) Y_t^{-1} dt + b Y_t^{-1} dB_t$$

et on a aussi

$$d\langle Y, Z\rangle_t = b Y_t^{-1} Y_t \beta = b\beta$$

Soit $U_t = Y_t Z_t$. La formule d'Itô conduit à

$$\begin{aligned} dU_t &= (a - b\beta)dt + b dB_t + U_t(\alpha\, dt + \beta dB_t) + b\beta dt \\ &= (a + \alpha U_t)dt + (b + \beta U_t) dB_t \end{aligned}$$

et comme $U_0 = x$ on a par unicité $X_t = U_t = Y_t Z_t$

<u>Cas particulier 2</u>

On se place dans le cas $a = \beta = 0$

$$\begin{cases} dX_t = \alpha\, X_t dt + b dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

On sait (cas précédent) que cette équation admet une solution unique.

en posant $Z_t = e^{-\alpha t} X_t$, on voit que $dZ_t = e^{-\alpha t} dB_t$ d'où

$$X_t = e^{\alpha t} x + e^{\alpha t}\int_0^t e^{-\alpha s} b\, dB_s$$

Il en résulte que X est un processus gaussien de moyenne $E(X_t) = e^{\alpha t} x$ et de variance

$$V(X_t) = b^2 e^{2\alpha t}\frac{1 - e^{-2\alpha t}}{2\alpha} \underset{=}{\underline{def}} \sigma^2(t)$$

b/- Soit

$$\begin{cases} dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}\,dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

On calcul l'espérance et la variance de X_t. On pose $Y_t = e^{at} X_t$

On a $dY_t = abe^{at}dt + \sigma e^{at/2}\sqrt{Y_t}\,dB_t$ et $E(Y_t) = x + b(e^{\alpha t} - 1)$

en utilisant:

$$\begin{aligned} Y_t &= x + \int_0^t abe^{as}\,ds + \int_0^t \sigma e^{as/2}\sqrt{Y_s}\,dB_s \\ &= E(Y_t) + \int_0^t \sigma e^{as/2}\sqrt{Y_s}\,dB_s \end{aligned}$$

on obtient

$$Y_t - E(Y_t) = \int_0^t \sigma e^{as/2}\sqrt{Y_s}\,dB_s$$

$$E\left[(Y_t - E(Y_t))^2\right] = E\left[\int_0^t \sigma^2 e^{as} Y_s\,ds\right]$$

$$V(Y_t) = \int_0^t \sigma^2 e^{as} E(Y_s)\,ds$$

$$E(Y_t) = e^{at}E(X_t) = x + b(e^{at} - 1)$$

$$V(Y_t) = V(e^{at}X_t) = \int_0^t \sigma^2 e^{-as} E(e^{as}X_s)\,ds = \int_0^t \sigma^2 E(X_s)\,ds$$

3-7- Equations différentielles stochastiques réductibles:

Avec une substitution appropriée $X_t = U(t, Y_t)$, certains équations différentielle stochastique non linéaire.

$$dY_t = a(t, Y_t)\, dt + b(t, Y_t)\, dW_t \tag{11}$$

on peut réduire à une E.D.S. linéaire dans X_t.

$$dX_t = (a_1(t) X_t + a_2(t))\, dt + (b_1(t) X_t + b_2(t))\, dW_t \tag{12}$$

Si $\frac{\partial U}{\partial y}(t, y) \neq 0$, $y = V(t, x)$ de $x = U(t, y)$ avec lequel est

$x = U(t, V(t, x))$ et $y = V(t, U(t, y))$

La forme de solution de (11) est alors

$$Y_t = V(t, X_t)$$

La forme d'Itô donne:

$$dU(t, Y_t) = \left[\frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right] dt + b \frac{\partial U}{\partial y} dW_t$$

où les coefficients et les dérivés partiels sont évalués (t, Y_t).

Ceci coïncide avec une équation différentielle stochastique linéaire de la forme (12) si:

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t, y) + a(t, y) \frac{\partial U}{\partial y}(t, y) + \frac{1}{2} b^2(t, y) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(t, y)$$

$$= a_1(t) U(t, y) + a_2(t) \tag{13}$$

et

$$b(t, y) \frac{\partial U}{\partial y}(t, y) \cong b_1(t) U(t, y) + b_2(t) \tag{14}$$

Si $a_1(t) \equiv 0$; $b_1(t) \equiv 0$ et $a_2(t) = \alpha(t)$ et $b_2(t) = \beta(t)$

On obtient à partir (13) l'identité:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial y}(t, y) = -\frac{\partial}{\partial y} \left[a(t, y) \frac{\partial U}{\partial y}(t, y) + \frac{1}{2} b^2(t, y) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(t, y) \right]$$

et à partir (9) l'identités:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[b(t,y)\frac{\partial U}{\partial y}(t,y) \right] = 0$$

$$b(t,y)\frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial y}(t,y) + \frac{\partial b(t,y)}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial y}(t,y) = \beta'(t)$$

Supposer que $b(t,y) \neq 0$

Puis, éliminant U et ses dérivés, nous obtenons:

$$\beta'(t) = \beta(t) b(t,y)\left[\frac{1}{b^2(t,y)}\frac{\partial b}{\partial t}(t,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a(t,y)}{b(t,y)}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 b}{\partial y^2}(t,y) \right]$$

Puisque le coté gauche est indépendant de y, ceci signifie

$$\frac{\partial \eta}{\partial y}(t,y) = 0.$$

où

$$\eta(t,y) = \frac{1}{b(t,y)}\frac{\partial b(t,y)}{\partial t} - b(t,y)\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{a(t,y)}{b(t,y)} - \frac{1}{2}\frac{\partial b(t,y)}{\partial y} \right] \tag{15}$$

c'est un état suffisant pour la réductibilité d'E.D.S non linéaire (11) à l'E.D.S. explicitement intégrable.

$$dX_t = \alpha(t)\,dt + \beta(t)\,dW_t \tag{16}$$

Au moyen d'une transformation $x = U(t,y)$

On peut déterminer à partir (13) et (14) lesquels, dans ce cas, réduire

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t,y) + a(t,y)\frac{\partial U}{\partial y}(t,y) + \frac{1}{2}b^2(t,y)\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(t,y) = \alpha(t)$$

et

$$b(t,y)\frac{\partial U}{\partial y}(t,y) = \beta(t)$$

On a le résultat

$$U(t,y) = c\exp\left[\int_0^t \eta(s,y)\,ds\right]\int_0^y \frac{1}{b(t,z)}\,dz$$

où c est une constante arbitraire.

Nous remarquons que cette méthode peut ramener certaine E.D.S. linéaire de forme (16).

Une variation du procédé est applicable pour réduire une E.D.S. autonome non linéaire:

$$dY_t = a(Y_t)\,dt + b(Y_t)\,dW_t \tag{17}$$

au E.D.S. linéaire autonome:

$$dX_t = (a_1 X_t + a_2)\,dt + (b_1 X_t + b_2)\,dW_t \tag{18}$$

par la moyenne d'une transformation indépendante du temps

$$X_t = U(Y_t)$$

Dans ce cas, les identités (13) et (14) prennent la forme:

$$a(y)\frac{dU(y)}{dy} + \frac{1}{2}b^2(y)\frac{d^2U(y)}{dy^2} = a_1 U(y) + a_2 \tag{19}$$

et

$$b(y)\frac{dU(y)}{dy} = b_1 U(y) + b_2 \tag{20}$$

Supposant que $b(y) \neq 0$ et $b_1 \neq 0$, l'équation (20) implique:

$$U(y) = c\exp\left[b_1 B(y)\right] - \frac{b_2}{b_1} \tag{21}$$

où

$$B(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{b(s)}$$

La substitution de cette expression à U(y) dans (19) donne:

$$\left[b_1 A(y) + \frac{1}{2}b_1^2 - a_1\right] c\exp(b_1 B(y)) = a_2 - a_1\frac{b_2}{b_1} \tag{22}$$

où

$$A(y) = \frac{a(y)}{b(y)} - \frac{1}{2}\frac{db(y)}{dy}$$

On multiple la différenciant de (22) par

$$\frac{b(y)\exp\left[-b_1 B(y)\right]}{b_1}$$

et on différenciant encore, nous obtenons:

$$b_1\frac{dA}{dy} + \frac{d}{dy}\left(b\frac{dA}{dy}\right) = 0 \tag{23}$$

Ceci est satisfait si $\frac{dA}{dy} = 0$

ou si

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\frac{d}{dy}\left(b\frac{dA}{dy}\right)}{\frac{dA}{dy}}\right) = 0 \tag{24}$$

Le b_1 est choisi comme:

$$b_1 = -\frac{\frac{d}{dy}\left(b\frac{dA}{dy}\right)}{\frac{dA}{dy}}$$

Si $b_1 \neq 0$, la transformation appropriée est:

$$U(y) = c\exp(b_1 B(y)) \tag{25}$$

Si $b_1 = 0$,

$$U(y) = b_2 B(y) + c \tag{26}$$

où b_2 est choisi de (20) soit satisfait.

Exemple 3.9:

Soit l'E.D.S. non linéaire:

$$dY_t = -\frac{1}{2}e^{-2Y_t}\, dt + e^{-Y_t}\, dW_t$$

On a :

$$a(y) = -\frac{1}{2}e^{-2y}\ , \quad b(y) = e^{-y}\ , \quad A(y) = 0$$

L'équation (23) est satisfait avec tout b_1.

Pour $b_1 = 0$ et $b_2 = 1$, une solution de (20) est:

$$e^{-y}\frac{dU(y)}{dy} = 1 \Rightarrow \frac{dU(y)}{dy} = e^{y} \Rightarrow$$

$$U(y) = e^{y}$$

La substitution dans (19) conséquence $a_1 = a_2 = 0$

Par conséquent $X_t = e^{Y_t}$ et l'équation (18) réduit à la différentielle stochastique $dX_t = dW_t$, qui a la solution:

$$X_t = W_t + X_0 = W_t + e^{Y_0}$$

Chapitre 04:
La représentation de la Solution d'une E.D.S

Dans ce chapitre, on s'intéresse la représentation intégrale de la solution d'une telle équation pour énoncer des conditions sur les fonctions coéfficients déterministes de l'équation pour pouvoir exprimer analytiquement la solution et obtenir cette expression analytique.

On cherchera à représenter la solution d'une E.D.S en utilisant une représentation de la solution d'une autre E.D.S. On voudra passer d'un processus à un autre.

4-1- Propositions :

Proposition 4-1:

Soit $D_1 \subset IR$, $D_2 \subset IR$ deux intervalles réels, $g : IR_+ \times D_1 \to IR$ et $F, G : IR_+ \times D_2 \to IR$ des fonctions données.

On suppose les trois hypothèses suivantes:

- ***H_0*:** La fonction g vérifie

1) g est suffisamment régulière (exemple $g \in C^2$).

2) $g(t,x) \neq 0 \quad , \qquad \forall (t,x) \in IR_+ \times D_1$

3) Pour tout $t \in IR_+$, la fonction $x \to 1/g^t(x)$ est intégrable sur D_1 avec

$$\psi^t(x) = \int^x \frac{1}{g^t(y)} dy \qquad , \qquad x \in D_1 \tag{27}$$

- ***H_1*:** Pour tout $t \in IR_+$, l'E.D.O

$$\eta'^t(x) = \frac{1}{g^t(x)} G^t(\eta^t(x)) \quad , \qquad x \in D_1 \tag{28}$$

Admet une solution $\eta^t(\bullet)$ vérifiant

1) La fonction $(t,x) \to \eta(t,x) = \eta^t(x)$ est suffisamment régulière.

2) Pour tout $(t,x) \in IR_+ \times D_1, \eta'^t(x) \neq 0$.(ainsi η^t est injective).

3) Pour tout $t \in IR_+, \eta^t(\bullet)$ est surjective de D_1 sur D_2

✍ ***H_2:*** Pour tout $z^0 \in D_2$ donné, l'E.D.S

$$\begin{aligned} dZ(t) &= F(t,Z(t))dt + G(t,Z(t))dB_t \quad , \qquad t \geq 0 \\ Z(0) &= z^0 \end{aligned} \tag{29}$$

admet une unique solution $Z(t) \in D_2$ pour $t \geq 0$.

Ses ces trois hypothèses, si la fonction $f: IR_+ \times D_1 \to IR$ est définie par

$$f(t,x) = g(t,x)\left\{ \frac{F(t,\eta(t,x)) - \eta_t(t,x)}{G(t,\eta(t,x))} + \frac{1}{2}\left[g_x(t,x) - G_z(t,\eta(t,x))\right] \right\}$$

Alors, pour tout $x^0 \in D_1$ donnée et en posant $z^0 = \eta^0(x^0)$ et $Z(t)$ la solution de l'E.D.S (29).

On a que $X(t)$ défini par $X(t) = (\eta^t)^{-1}(Z(t))$ vérifie l'E.D.S

$$\begin{aligned} dX(t) &= f(t,X(t))dt + g(t,X(t))dB_t \quad , \qquad t \geq 0 \\ X(0) &= x^0 \end{aligned}$$

□

Soit l'E.D.S suivante:

$$dX(t) = f(t,X(t))\,dt + g(t,X(t))\,dB(t)$$

est toujours supposé vérifier l'hypothèse H_0.

Supposons données des fonctions $k_1, k_2 \in C^1(IR_+)$. On donne également $g: IR_+ \times D_1 \to IR$ vérifiant H_0. On définit alors $f: IR_+ \times D_1 \to IR$ par

$$f(t,x) = g(t,x)\left\{ k_1(t) + \frac{1}{2} g_x(t,x) - \psi_t(t,x) - k_2(t)\psi(t,x) \right\} \tag{30}$$

où ψ est définie par:

$$\psi(t,x) = \int^x \frac{1}{g^t(y)} dy$$

Soit $f_1, f_2 \in C^1(IR_+)$ deux fonctions arbitraires données.

En notant:

$$F_2(t) = \int_0^t f_2(s)ds \quad , \qquad K_2(t) = \int_0^t k_2(s)ds$$

On définit les fonctions g_1, c et η par

$$g_1(t) = g_1^0 \exp\left[F_2(t) + K_2(t)\right] \qquad \text{Pour } t \in IR_+ \text{ et } g_1^0 \neq 0$$

$$c(t) = e^{F_2(t)}\left\{a + \int_0^t e^{-F_2(s)}\left[f_1(s) - k_1(s)g_1(s)\right]ds\right\}$$
$$= e^{F_2(t)}\left\{a + \left\langle e^{-F_2}, f_1 - k_1 g_1\right\rangle_t\right\}$$

pour $t \in IR_+$ et $a \in IR$.

$$\eta(t,x) = c(t) + g_1(t)\psi^t(x) \quad \text{Pour } t \in IR_+ \text{ et } x \in D_1 \tag{31}$$

On vérifie aisément que la fonction

$$G(t,z) = g_1(t) \quad , \quad (t,z) \in IR_+ \times IR$$

vérifie l'E.D.O (28) et l'hypothèse H_1

$$\eta'^t(x) = \frac{1}{g^t(x)} G^t(\eta^t(x)) \qquad , \qquad x \in D_1$$

En effet

$$\eta'^t(x) = g_1(t)\psi'^t(x) = \frac{g_1(t)}{g^t(t)} = G(t,\eta^t(x))\Big/g^t(t)$$

observons que

$$g_1'(t) = \left[f_2(t) + k_2(t)\right]g_1(t)$$

$$c'(t) = f_2(t)c(t) + e^{F_2(t)}\left\{e^{-F_2(t)}\left[f_1(t) - k_1(t)g_1(t)\right]\right\}$$
$$= f_2(t)c(t) + f_1(t) - k_1(t)g_1(t)$$

Comme on a f_1, f_2, k_1 et $k_2 \in C^1(IR^+)$, cela implique que g_1, $c \in C^2(IR_+)$ et donc par (31), $\eta \in C^2(IR_+ \times D_1)$. Et on a vu que

$$\eta'^t(x) = g_1(t)\Big/g^t(x) \qquad \neq 0$$

Proposition 4-2:

Soit g une fonction vérifiant H_0 et supposons que ψ^t définie en (27)

Soit g, ψ sont des fonctions vérifiant en H_0. Soit f définie sur $IR_+ \times D_1$ (et ψ est une bijection de D_1 sur IR, $\forall t \in IR_+$) par

$$f(t,x) = g(t,x)\left\{k_1(t) + \frac{1}{2} g_x(t,x) - \psi_t(t,x) - k_2(t)\psi(t,x)\right\}$$

où k_1 et k_2 sont des fonctions données arbitraires de classe $C^1(IR_+)$.

Alors l'E.D.S

$$\begin{aligned} dX(t) &= f(t, X(t))\,dt + g(t, X(t))\,dB(t) \\ X(0) &= x^0 \in D \end{aligned} \qquad (32)$$

a pour solution

$$X(t) = (\psi^t)^{-1}\big(Y(t)\big)$$

où $Y(t)$ est définie par

$$Y(t) = \exp\left[-\int_0^t k_2(s)ds\right]\left\{\psi^0(x^0) + \int_0^t \exp\left[-\int_0^s k_2(r)dr\right]k_1(s)ds + \int_0^t \exp\left[-\int_0^s k_2(r)dr\right]dB_s\right\}$$

Démonstration :

On définit les fonctions F, G et η comme suivantes :

$$F(t,z) = f_1(t) + f_2(t)z \qquad (t,z) \in IR_+ \times IR$$

$$G(t,z) = g_1(t) \qquad (t,z) \in IR_+ \times IR$$

$$\eta(t,x) = c(t) + g_1(t)\psi^t(x)$$

avec $D_1 = D_2 = IR$

On a déjà vu plus haut qu'elles vérifient toutes les conditions de la proposition 4-1, sauf le point trois de H_1 à savoir la surjectivité de η^t. On le vérifie ici.

Soit donc $z \in D_2 = IR$.

On veut $z = \eta^t(x)$ pour $x \in IR$, c-à-d

$$z = c(t) + g_1(t)\psi^t(x)$$
$$\Rightarrow \quad \psi^t(x) = \frac{z - c(t)}{g_1(t)}$$

Or par hypothèse, ψ^t est bijective sur IR et

$$x = (\psi^t)^{-1}\left(\frac{z - c(t)}{g_1(t)}\right) \tag{33}$$

Ainsi $(\eta^t)^{-1}$ est définie par

$$(\eta^t)^{-1}(z) = (\psi^t)^{-1}\left(\frac{z - c(t)}{g_1(t)}\right) \tag{34}$$

Alors, par la proposition 4-1, la solution *X(t)* de (32)est donnée par

$$\begin{aligned} X(t) &= (\eta^t)^{-1}(Z(t)) \\ &= (\psi^t)^{-1}\left(\frac{Z(t) - c(t)}{g_1(t)}\right) \end{aligned} \tag{35}$$

où *Z(t)* est la solution de l'E.D.S

$$\begin{aligned} & dZ(t) = \left[f_1(t) + f_2(t)Z(t)\right]dt + g_1(t)dB_t \qquad t \geq 0 \\ & Z(0) = z^0 = \eta^0(x_0) \end{aligned} \tag{36}$$

avec f_1, $f_2 \in C^1(IR_+)$ deux fonctions arbitraires données et g_1 définie comme suite :

$$g_1(t) = g_1^0\, e^{F_2(t)+K_2(t)} \text{ pour } t \in IR_+ \text{ et } g_1^0 \neq 0.$$

Or on peut écrire explicitement la solution *Z* de l'E.D.S linéaire (36)

$$\begin{aligned} Z(t) &= e^{F_2(t)}\left\{z^0 + \int_0^t e^{-F_2(s)} f_1(s)ds + \int_0^t e^{-F_2(s)} g_1(s)dB_s\right\} \\ &= e^{F_2(t)}\left\{z^0 + \left\langle e^{-F_2(s)}, f_1\right\rangle_t + \int_0^t e^{-F_2(s)} g_1(s)dB_s\right\} \end{aligned} \tag{37}$$

En utilisant les expressions pour *Z(t), c(t)* et $g_1(t)$.

On calcule

$$
\begin{aligned}
Y(t) &= \frac{Z(t)-c(t)}{g_1(t)} \\
&= \frac{1}{g_1^0} e^{-F_2(t)-K_2(t)} \left\{ \begin{array}{l} e^{F_2(t)}\left[z^0 + \left\langle e^{-F_2}, f_1 \right\rangle_t + \int_0^t e^{-F_2(s)} g_1(s)dB_s \right] \\ - e^{F_2(t)}\left[a + \left\langle e^{-F_2}, f_1 - k_1 g_1 \right\rangle_t \right] \end{array} \right\} \\
&= \frac{1}{g_1^0} e^{-K_2(t)} \left[\begin{array}{l} z^0 + \left\langle e^{-F_2}, f_1 \right\rangle_t + \int_0^t e^{-F_2(s)} g_1(s)dB_s \\ - a - \left\langle e^{-F_2}, f_1 \right\rangle_t + \left\langle e^{-F_2}, k_1 g_1 \right\rangle_t \end{array} \right] \\
&= \frac{1}{g_1^0} e^{-K_2(t)} \left[z^0 - a + \left\langle e^{-F_2}, k_1 g_1 \right\rangle_t + \int_0^t e^{-F_2(s)} g_1(s)dB_s \right] \\
&= e^{-K_2(t)} \left[\frac{z^0 - a}{g_1^0} + \left\langle e^{-F_2}, k_1 \frac{g_1}{g_1^0} \right\rangle_t + \int_0^t e^{-F_2(s)} \frac{g_1(s)}{g_1^0} dB_s \right]
\end{aligned}
$$

Mais d’une part

$$
\frac{z^0 - a}{g_1^0} = \frac{\eta^0(x_0) - c(0)}{g_1^0} = \frac{c(0) + g_1(0)\psi^0(x_0) - c(0)}{g_1^0}
$$

$$
= \psi^0(x^0)
$$

et d’autre part, par définition de g_1, on a

$$
\frac{g_1(s)}{g_1^0} e^{-F_2(s)} = e^{K_2(s)}
$$

D’où en substitution ces deux expressions dans *Y(t)*, on a

$$
Y(t) = e^{-K_2(t)} \left\{ \psi^0(x^0) + \left\langle e^{K_2}, k_1 \right\rangle_t + \int_0^t e^{K_2(s)} dB_s \right\}
$$

Ainsi avec (35), on obtient l’expression de *X(t)* voulue.

4-2 Exemples :

a- Soit l'E.D.S d'Itô suivante

$$dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))dB_t \qquad t \geq 0$$
$$X(0) = x^0 \quad , \quad x^0 \in \left]0, \infty\right[$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{A}{2}\right)^2 x + \frac{B}{2}\right]$$
$$g(x) = \sqrt{p(x)}$$

avec

$$p(x) = \left(\frac{A}{2}\right)^2 x^2 + Bx + D$$

et les paramètres qui vérifient $A > 0$ et $D > (B/A)^2$. On peut vérifier facilement que

$$Q(x)=g(x)+(A/2)x+(B/A) \quad , \qquad x \in IR$$

vérifie $Q(x)>0, \forall x \in IR$.(Q est strictement croissante sur IR et

$$\lim_{x \to -\infty} Q(x) = 0 \; ; \; \lim_{x \to +\infty} Q(x) = +\infty \;)$$

On vérifie qu'une primitive de $\frac{1}{g}$ est

$$\psi(x) = \int^x \frac{1}{g(y)} dy = \frac{2}{A} Ln \; Q(x)$$

En effet :

$$g(x) = \left[\left(\frac{A}{2}x\right)^2 + Bx + D\right]^{1/2}$$

d'où

$$g'(x) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{A}{2}x\right)^2 + Bx + D\right]^{-1/2}\left(\frac{A^2}{2}x + B\right)$$
$$= \left[\left(\frac{A}{2}\right)^2 x + \frac{B}{2}\right] \Big/ g(x)$$

et donc

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{2}{A}LnQ\,(x)\right]=\frac{2}{A}\times\frac{Q'(x)}{Q(x)}=\frac{2}{A}\frac{\left[g'(x)+\frac{A}{2}\right]}{\left[g(x)+\frac{A}{2}x+\frac{B}{A}\right]}$$

$$=\frac{2}{A}\frac{\left[\frac{\left[\left(\frac{A}{2}\right)^2x+\frac{B}{2}\right]}{g(x)}+\frac{A}{2}\right]}{\left[g(x)+\frac{A}{2}x+\frac{B}{A}\right]}=\frac{\frac{1}{g(x)}\left[\left(\frac{A}{2}\right)^2x+\frac{B}{2}+\left(\frac{A}{2}\right)g(x)\right]}{\frac{A}{2}\left[g(x)+\frac{A}{2}x+\frac{B}{A}\right]}$$

$$=\frac{\frac{1}{g(x)}\left[\left(\frac{A}{2}\right)^2x+\frac{B}{2}+\left(\frac{A}{2}\right)g(x)\right]}{\left[\left(\frac{A}{2}\right)g(x)+\left(\frac{A}{2}\right)^2x+\frac{B}{2}\right]}=\frac{1}{g(x)}$$

Ainsi ψ est une bijection de IR sur IR avec

$$y=\psi(x)\quad\Leftrightarrow\quad\frac{A}{2}y=LnQ\,(x)$$

$$\Leftrightarrow\ e^{\frac{A}{2}y}=Q(x)\quad\Leftrightarrow\quad x=Q^{-1}\left(e^{\frac{A}{2}y}\right)$$

On a donc

$$\psi^{-1}(y)=x=Q^{-1}\left(e^{\frac{A}{2}y}\right)\quad,\qquad y\in IR$$

D'autre part

$$g(x)g'(x)=\left(\frac{A}{2}\right)^2x+\frac{B}{2}$$

et donc

$$\frac{1}{2}g(x)g'(x)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{A}{2}\right)^2x+\frac{B}{2}\right]=f(x)$$

Sous la proposition 4-1 avec $k_1=0=k_2$ et la solution X de l'E.D.S est donnée par

$$X(t) = \psi^{-1}(Y(t)) = Q^{-1}\left(e^{\frac{A}{2}Y(t)}\right)$$

où

$$Y(t) = \left\{\frac{2}{A}Ln\,(Q(x^0)) + \int_0^t dB_s\right\}$$

$$Y(t) = \frac{2}{A}Ln\,(Q(x^0)) + B_t$$

Ainsi

$$e^{\frac{A}{2}Y(t)} = Q(x^0)\,e^{\frac{A}{2}B_t}$$

d'où

$$X(t) = Q^{-1}\left(Q(x^0)\,e^{\frac{A}{2}B_t}\right)$$

□

Corollaire 4-3:

On considère l'E.D.S suivante

$$dX(t) = f(t, X(t))\,dt + \frac{1}{\alpha(t)}h(X(t))\,dB_t \qquad (38)$$
$$X(0) = x^0 \in D$$

où $D \subset IR$ un intervalle donnée.

f, α, h sont des fonctions vérifiant :

- $\alpha \in C^2(IR_+)$, $\alpha(t) \neq 0$, $\forall t \geq 0$.
- $h \in C^2(D)$, $h(x) \neq 0$, $\forall x \in D$ et $(1/h)$ est intégrable sur D avec

$$H(x) = \int^x \frac{1}{h(y)}\,dy \quad , \quad x \in D$$

Supposée une bijection de D sur IR.

- f: $IR_+ \times D \to IR$ est de la forme

$$f(t,x) = h(x)\left\{c_1(t) + \frac{1}{2\alpha^2(t)}h'(x) + c_2(t)H(x)\right\} \tag{39}$$

avec $c_1, c_2 \in (IR_+)$.

Alors la solution X de l'E.D.S (38) est donnée par

$$X(t) = H^{-1}(x)(Y'(t))$$

où Y' est le processus

$$Y'(t) = e^{C_2(t)}\left\{H(x^0) + \int_0^t e^{-C_2(s)}c_1(s)ds + \int_0^t \frac{e^{-C_2(s)}}{\alpha(s)}dB_s\right\}$$

avec C_2 définie par

$$C_2(t) = \int_0^t c_2(s)ds \quad , \qquad t \geq 0$$

Démonstration:

On applique la proposition 4-2 avec

$$g(t,x) = \frac{1}{\alpha(t)}h(x)\,,\ k_1(t) = \alpha(t) \times c_1(t) \text{ et } k_2(t) = -\left[c_2(t) + \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}\right]$$

avec ces définitions, on a

$$g_x = \frac{1}{\alpha}h'$$

et

$$\psi(t,x) = \int^x \frac{1}{g(y)}dy = \alpha(t)H(x)$$

d'où

$$\psi(t) = \alpha' \times H(x)$$

On vérifie que f est bien de la forme

$$f(t,x) = g(t,x)\left\{k_1(t) + \frac{1}{2}g_x(t,x) - \psi_t(t,x) - k_2(t)\psi(t,x)\right\}$$

En effet

$$g\times\left\{k_1+\frac{1}{2}g_x-\psi_t-k_2\times\psi\right\}=\frac{1}{\alpha}h\left\{\alpha\, c_1+\frac{1}{2}\frac{1}{\alpha}h'-\alpha' H+\left[c_2+\frac{\alpha'}{\alpha}\right]\alpha H\right\}$$

$$=h\left\{c_1+\frac{1}{2}\frac{1}{\alpha^2}h'-\frac{\alpha'}{\alpha}H+c_2 H+\frac{\alpha'}{\alpha}H\right\}$$

$$=h\left\{c_1+\frac{1}{2}\frac{1}{\alpha^2}h'+c_2 H\right\}=f$$

Alors par la proposition 4-2, la solution X de (38) donnée par

$$X(t)=\left(\psi^t\right)^{-1}\left(Y(t)\right)$$

où

$$Y(t)=\exp\left[-\int_0^t k_2(s)ds\right]\left\{\psi^0(x^0)+\int_0^t \exp\left[-\int_0^s k_2(r)dr\right]k_1(s)ds\right.$$

$$\left.+\int_0^t \exp\left[-\int_0^s k_2(r)dr\right]dB_s\right\}$$

Or on calcule

$$\int_0^s k_2(r)dr=-\int_0^s\left(c_2(r)+\frac{\alpha'(r)}{\alpha(r)}\right)dr=-C_2(s)-\int_0^s\frac{d}{dr}Ln\left|\alpha(r)\right|dr$$

$$=-C_2(s)-Ln\left|\alpha(r)\right|\Big|_{r=0}^{s}=-C_2(s)-Ln\frac{\alpha(s)}{\alpha(0)}$$

et donc

$$e^{K_2(s)}=e^{\int_0^s k_2(r)dr}=e^{-C_2(s)}\left(\frac{\alpha(s)}{\alpha(0)}\right)$$

Ainsi le processus Y ci-dessus s'écrit

$$Y(t)=\frac{\alpha(t)}{\alpha(0)}e^{C_2(t)}\left\{\alpha(0)H(x^0)+\int_0^t\frac{\alpha(0)}{\alpha(s)}e^{-C_2(s)}k_1(s)ds+\int_0^t\frac{\alpha(0)}{\alpha(s)}e^{-C_2(s)}dB_s\right\}$$

$$=\alpha(t)e^{C_2(t)}\left\{H(x^0)+\left\langle e^{-C_2},\frac{k_1}{\alpha}\right\rangle_t+\int_0^t\frac{e^{-C_2(s)}}{\alpha(s)}dB_s\right\}$$

$$=\alpha(t)e^{C_2(t)}\left\{H(x^0)+\left\langle e^{-C_2},c_1\right\rangle_t+\int_0^t\frac{e^{-C_2(s)}}{\alpha(s)}dB_s\right\}$$

et par hypothèse sur H, on a que $y = \psi^t(x)$ si et seulement si $x = H^{-1}\left(\frac{y}{\alpha(t)}\right)$,

c-à-d

$$(\psi^t)^{-1}(y) = x = H^{-1}\left(\frac{y}{\alpha(t)}\right)$$

d'où

$$X(t) = (\psi^t)^{-1}(Y(t)) = H^{-1}\left(\frac{Y(t)}{\alpha(t)}\right)$$

avec

$$\frac{Y(t)}{\alpha(t)} = e^{C_2(t)}\left\{H(x^0) + \left\langle e^{-C_2}, c_1\right\rangle_t + \int_0^t \frac{e^{-C_2(t)}}{\alpha(s)}dB_s\right\}$$

□

b- On considère l'E.D.S suivante

$$dX(t) = X(t)\left[LnX(t) + \frac{1}{2}\right]dt + X(t)dB_t \quad , \qquad t \geq 0$$
$$X(0) = x^0 > 0$$

Dans ce exemple

$$f(t,x) = x\left[Lnx + \frac{1}{2}\right] \quad \text{et} \quad g(x) = x$$

Si on pose $\eta(t,x) = Lnx$, on a $\eta_t = 0$, $\eta_x = \frac{1}{x}$ et $\eta_{xx} = -\frac{1}{x^2}$, et en posant $Z(t) = \eta(t, X(t))$, on a par la formule d'Itô

$$dZ(t) = \left[\eta_t + f\eta_x + \frac{1}{2}g^2\eta_{xx}\right](t, X(t))dt + [\eta_x g](t, X(t))dB_t$$
$$= \left[x(Lnx + \frac{1}{2})\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^2\left(\frac{-1}{x^2}\right)\right](t, X(t))dt + \left[\frac{1}{x}x\right](t, X(t))dB_t$$

$$= \eta(t, X(t))dt + dB_t = Z(t)dt + dB_t$$

Ainsi Z vérifie l'E.D.S linéaire

$$dZ(t) = [f_1(t) + f_2(t)Z(t)]dt + g_1(t)dB_t$$

Donc $f_1(t) = 0$; $f_2(t) = 1$ et $g_1(t) = 1$. et on a le choix pour η , par exemple si $\eta''(t,x) = e^t - 1 + Lnx$, alors $\eta''_t = e^t$; $\eta''_x = \frac{1}{x}$; $\eta''_{xx} = -\frac{1}{x^2}$; et dans ce cas, si on pose $Z''(t) = \eta''(t, X(t))$ alors, par la formule d'Itô, on a

$$dZ''(t) = \left[\eta''_t + f\eta''_x + \frac{1}{2}g^2\eta''_{xx}\right](t, X(t))dt + [\eta''_x g](t, X(t))dB_t$$

$$= \left[e^t + x\left(Lnx + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^2(-\frac{1}{x^2})\right](t, X(t)) + \left[\frac{1}{x}x\right](t, X(t))dB_t$$

$$= [e^t + Ln(X(t))]dt + dB_t = [1 + \eta''(t, X(t))]dt + dB_t$$

$$= [1 + Z''(t)]dt + dB_t$$

et Z'' vérifie l'E.D.S linéaire suivante

$$dZ''(t) = [f''_1(t) + f''_2(t)Z''(t)]dt + g''_1(t)dB_t$$

avec $f''_1(t) = 1$; $f''_2(t) = 1$; $g''_1(t) = 1$ et peu importe la transformation η choisie, en posant $\alpha(t) = 1$, $h(x) = x$, $c_1(t) = 0$ et $c_2(t) = 1$ dans le corollaire 4-3, on a bien que f est de la forme (39).

En effet

$$H(x) = \int^x \frac{1}{y}dy = Lnx$$

d'où

$$h(x)\left[c_1(t) + \frac{1}{2\alpha^2(t)}h'(x) + c_2(t)H(x)\right]$$

$$= x\left[\frac{1}{2} + Lnx\right] = f(x)$$

et donc la solution X s'écrit

$$X(t) = H^{-1}(Y''(t)) = e^{Y''(t)}$$

où

$$Y''(t) = e^{\int_0^t ds}\left\{Ln(x^0) + \int_0^t \exp\left[-\int_0^s dr\right]0\,ds + \int_0^t \exp\left[-\int_0^s dr\right]dB_t\right\}$$

$$= e^t\left[Ln(x^0) + \int_0^t e^{-s}ds\right]$$

□

Ce dernier exemple peut être traité plus généralement comme suit.

c- Soit l'E.D.S suivante

$$dX(t) = X(t)\left[d_1(t) + d_2(t)Ln(X(t))\right]dt + \frac{1}{\alpha(t)}X(t)dB_t\,, \qquad t \geq 0 \qquad (40)$$
$$X(0) = x^0 > 0$$

où $\alpha(t) \neq 0 \quad \forall t \geq 0,\ \alpha \in C^2(IR_+)$ et $d_1, d_2 \in C^1(IR_+)$.

Ici on a

$$f(t,x) = x\left[d_1(t) + d_2(t)Lnx\right]$$

et

$$g(t,x) = \frac{1}{\alpha(t)}h(x)$$

avec

$$h(x) = x$$

Ainsi

$$H(x) = \int^x \frac{1}{h(y)}dy = Lnx$$

d'où

$$H^{-1}(y) = e^y$$

et en posant dans le corollaire 4-3

$$c_1(t) = d_1(t) - \frac{1}{2\alpha^2(t)}$$

et

$$c_2(t) = d_2(t)$$

On a bien

$$h(x)\left[c_1(t)+\frac{1}{2\alpha^2(t)}h'(x)+c_2(t)H(x)\right]$$

$$=x\left[d_1(t)-\frac{1}{2\alpha^2(t)}+\frac{1}{2\alpha^2(t)}+d_2(t)Lnx\right]$$

$$=x\left[d_1(t)+d_2(t)Lnx\right]=f(t,x)$$

et donc par le corollaire 4-3, la solution *X(t)* de (40) est donnée par

$$X(t)=e^{Y''(t)}$$

où

$$Y''(t)=\exp\left[\int_0^t d_2(s)ds\right]\left\{Ln(x_0)+\int_0^t \exp\left[-\int_0^s d_2(r)dr\right]\left[d_1(s)-\frac{1}{2\alpha^2(s)}\right]ds\right.$$
$$\left.+\int_0^t\left(\exp\left[-\int_0^s d_2(r)dr\right]\Big/\alpha(s)\right)dB_s\right\}$$

A titre d'illustration, si on pose $d_1(t)=1, d_2(t)=a\neq 0$ et $\alpha(t)=\frac{1}{\sigma}e^{-at}\ ,\sigma\neq 0$.

Donc la solution *X(t)* de

$$dX(t)=X(t)\left[1+aLn(X(t))\right]dt+\sigma e^{at}X(t)dB_t\ ,\qquad t\geq 0$$
$$X(0)=x^0>0$$

est donnée par

$$X(t)=e^{Y''(t)}=\exp\left[e^{at}\left\{Ln(x^0)+\frac{1}{a}(1-e^{-at})+\sigma\left[\frac{\sigma}{2a}(1-e^{at})+B_t\right]\right\}\right]$$

Si on pose $\sigma=0$, on obtient

$$X(t)=\exp\left[e^{at}\left\{Ln(x^0)+\frac{1}{a}(1-e^{-at})\right\}\right]$$

qui est la solution de l'E.D.O déterministe

$$X'(t)=X(t)\left[1+aLn(X(t))\right]\ ,\qquad t\geq 0$$
$$X(0)=x^0>0$$

Chapitre 05:

Interprétation Probabiliste des E.D.P du second ordre et résolution numérique

Dans ce chapitre, on trouve le lien mathématique profond entre certaines équations aux dérivées partielles (E.D.P.) et les processus de diffusion.

5-1-Interprétation probabiliste des E.D.P. du second ordre:

Dans ce paragraphe nous exprimons les solutions d'E.D.P. du second ordre en fonction de l'espérance d'une fonctionnelle d'un processus de diffusion. Le type de ce résultat s'étend à des classes d'équations plus générales. Nous considérerons d'abord des équations de type elliptique, puis des équations de type parabolique.

5-1-1- Interprétation des E.D.P. de type elliptique:

Soit b et σ deux applications mesurables et bornées, de IR^d dans IR^d et les matrices $d \times d$ respectivement, qui vérifient:

Il existe $k>0$, tel que:

$$\left|b(x)-b(y)\right|+\left|\sigma(x)-\sigma(y)\right| \leq k\left|x-y\right|, \quad \forall\ x, y \in IR^{d} \tag{41}$$

On suppose que la matrice $\sigma\sigma^{t} = a$ vérifie:

Il existe $\alpha>0$, tel que:

$$\left(a(x)y, y\right) \geq \alpha\left|y\right|^{2}, \quad \forall x, y \in IR^{d} \tag{42}$$

et que a est à dérivées bornées.

Cette hypothèse est équivalente à:

$$\left|\sigma(x)y\right| \geq \sqrt{\alpha}\left|y\right|, \quad \forall x, y \in IR^{d}$$

c'est-à-dire que $\sigma(x)$ est une matrice inversible, telle que

$$\left|\sigma(x)^{-1}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \quad \forall x \in IR^{d}$$

Etant donné (Ω, F, F_t, P, W_t) un Wiener standard à valeur dans IR^d, on note pour tout $x \in IR^d$, $\{X_t^x, t \in IR^+\}$ le processus solution de l'équation:

$$\begin{cases} dX_t^x = b(X_t^x)dt + \sigma(X_t^x)dW_t \quad , \qquad t > 0 \\ X_0^x = x \end{cases} \tag{43}$$

dont le générateur L s'écrit:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^{d} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{44}$$

avec $a_i(x) = b_i(x) - \dfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} \dfrac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_j}$

Pour une fonction c de IR^d dans IR continue, bornée et négative, on définit:

$$\widetilde{L} = L + cI \tag{45}$$

5-1-1-1- Problème elliptique sans frontière:

Supposons que $c(x) \le \beta < 0$ avec β assez grand pour qu'il existe $\theta > 0$ tel que:

$$\left\langle -\widetilde{L}U, U \right\rangle \ge \theta \left\| U \right\|^2 \tag{46}$$

Pour tout U dans $H^1(IR^d)$, $\widetilde{L}$ étant considéré comme un opérateur de $H^1(IR^d)$ dans $H^{-1}(IR^d)$, ou comme un opérateur non borné dans $L^2(IR^d)$.

Soit f une fonction continue bornée sur IR^d et de carré intégrable, on considère L'équation aux dérivées partielles (E.D.P.):

$$\widetilde{L}U(x) = -f(x) \quad , x \in IR^d \tag{47}$$

La solution de ce problème admet une représentation probabiliste à l'aide de la diffusion définie en (43).

Théorème 5.1:

La solution U de (47) vérifie:

$$U(x) = E\int_0^{\infty} f(X_t^x) \exp\left(\int_0^t c(X_s^x)\, ds \right) dt, \quad \forall x \in IR^d \tag{48}$$

Remarque 5.2:

Les hypothèses faites sur f et c assurent que le nombre de droite de (48) a bien un sens.

Démonstration:

La démonstration consiste à appliquer la formule d'Itô pour calculer la différentielle de processus ψ_t

Soit le processus $\psi_t = U(X_t^x) \exp\left(\int_0^t c(X_s^x)\, ds\right)$

en approchant U par suite de fonctions régulières U_n.

Alors:

$$
\begin{aligned}
d\psi_t &= LU(X_t^x) \exp\left(\int_0^t c(X_s^x\, ds\right) dt \\
&\quad + c(X_t^x) U(X_t^x) \exp\left(\int_0^t c(X_s^x\, ds\right) dt \\
&\quad + \exp\left(\int_0^t c(X_s^x\, ds\right) \nabla U(X_t^x)\, \sigma(X_t^x)\, dW_t
\end{aligned}
$$

En intégrant cette différentielle entre 0 et T et en prenant une espérance, on obtient

$$E(\psi_T) = U(x) + E\int_0^T \widetilde{L}\, U(X_t^x) \exp\left(\int_0^t c(X_s^x)\, ds\right) dt$$

L'hypothèse faite sur c montre que $E(\psi_T)$ converge vers 0 lorsque T tend vers l'infini, et on obtient:

$$U(x) = -E\int_0^\infty \widetilde{L}\, U(X_t^x) \exp\left(\int_0^t c(X_s^x)\, ds\right) dt$$

$$U(x) = E\int_0^\infty f(X_t^x) \exp\left(\int_0^t c(X_s^x)\, ds\right) dt$$

5-1-1-2- Problème elliptique avec condition de Dirichlet:

On considère maintenant D un ouvert borné de IR^d et soit la frontière ∂D assez régulière (C^2 par exemple).

On suppose que $\widetilde{L}$ peut être défini comme un opérateur de $H_0^1(D)$ dans $H^{-1}(D)$, avec l'inégalité de coercivité:

$$\left\langle -\widetilde{L}\,U\;,U\right\rangle \geq \theta\,\|U\|^2_{H_0^1(D)}$$

pour tout U de $H_0^1(D)$ (nulle au bord), on peut affaiblir les hypothèses sur c si l'on veut seulement que l'inégalité de coercivité soit vérifiée sur D; cela permet en particulier pour $L = \Delta$, d'avoir $c = 0$

On note τ_x le temps d'atteinte du fermé D^c:

$$\tau_x = \inf\left\{t > 0;\quad X_t^x \notin D\right\}$$

Pour f continue sur $\overline{D} = D \cup \partial D$, on considère le problème:

$$\begin{cases} \widetilde{L}\,U(x) = -f(x) & , \quad x \in D \\ U(x) = 0 & , \quad x \in \partial D \end{cases} \tag{49}$$

alors ce problème admet une solution unique $U \in H_0^1(D)$

Théorème 5.3:

La solution de (49) vérifie:

$$U(x) = E\int_0^{\tau_x} f(X_t^x)\exp\left(\int_0^t c(X_s^x)\,ds\right)dt\;,\;\forall x \in \overline{D} \tag{50}$$

Démonstration:

Cette formule (c'est-à-dire (50)) se démontre comme au théorème 5.1 et en remplaçant T par temps d'arrêt τ_x dont on montre que son espérance est finie ($E_{\tau_x} < \infty$).

Il en résulte que le membre de droite de (50) a un sens.

Pour $x \in \partial D$, d'après (42) et la régularité de ∂D, $\tau_x = 0$ p.s

Il reste à montrer (50) pour $x \in D$.

On applique la formule d'Itô pour calculer la différentielle de processus ψ_t :

$$\psi_t = U(X_t^x)\exp\left(\int_0^t c(X_s^x)\,ds\right)$$

On obtient alors:

$$U(x) = \int_0^T f(X_t^x)\exp\left(\int_0^t c(X_s^x)\,ds\right)dt - \int_0^T \exp\left(\int_0^t c(X_s^x)\,ds\right)\nabla U(X_t^x)\,\sigma(X_t^x)\,dW_t$$

On remplace T par τ_x, et prendre l'espérance, on obtient:

$$U(x) = E\int_0^{\tau_x} f(X_t^x)\exp\left(\int_0^t c(X_s^x)\,ds\right)dt$$

Remarque 5.4:

De même, pour la solution du condition non homogène:

$$\begin{cases} \tilde{L}U(x) = -f(x) \quad , \quad x \in D \\ U(x) = \varphi(x) \quad , \quad x \in \partial D \end{cases} \tag{50'}$$

avec f et φ donnés.

$$U(x) = E\int_0^{\tau_x} f(X_t^x)\exp\left(\int_0^t c(X_s^x)\,ds\right)dt$$

$$+ E\left[\varphi(X_{\tau_x}^x)\exp\left(\int_0^{\tau_x} c(X_s^x)\,ds\right)\right], \qquad \forall x \in \overline{D} \tag{50'}$$

pour obtenir la solution de cette nouvelle condition au bord, avec la convention $\varphi(X_{\tau_x}^x) = 0$ pour $\tau_x = +\infty$

Le dernier terme s'écrit aussi:

$$E\left[1_{\tau_x < \infty}\,\varphi(X_{\tau_x}^x)\exp\left(\int_0^{\tau_x} c(X_s^x)\,ds\right)\right]$$

5-1-2- Interprétation des E.D.P. de type parabolique:

Soient b et σ deux applications mesurables et bornées de $IR^+ \times IR^d$, à valeurs dans IR^d et les matrices $d \times d$ respectivement, qui vérifient:

Il existe k tel que:

$$\forall t \in IR^+, \ \forall x, y \in IR^d$$
$$\left|b(t,x) - b(t,y)\right| + \left|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\right| < k\left|x - y\right|$$

On définit la matrice symétrique a par:

$$a(t,x) \ \underline{\underline{déf}} \ \sigma(t,x)\sigma^t(t,x)$$

Il existe $\alpha > 0$ tel que: $a(t,x) \geq \alpha I, \forall (t,x) \in IR^+ \times IR^d$

Cette hypothèse sur a est équivalente à l'hypothèse sur σ :

$$\left|\sigma(t,x)\right| \geq \sqrt{\alpha}$$

donc σ matrice inversible d'inverse uniformément bornée.

De plus:

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \in L^\infty (IR^+ \times IR^d) \tag{51}$$

Etant donnée *(Ω, F, F_t, P, W_t)* un Wiener standard à valeurs dans IR^d.

A tout $(t,x) \in IR^+ \times IR^d$, on associe le processus $\left\{X_s^{t,x}, s \geq t\right\}$ solution du problème à E.D.S.:

$$\begin{cases} dX_s^{t,x} = b(s, X_s^{t,x})\, ds + \sigma(s, X_s^{t,x})\, dW_s \quad , \qquad s \geq t \\ X_t^{t,x} = x \end{cases} \tag{52}$$

Pour $T > 0$ fixé, on se donne:

$$\begin{cases} c \in C_b\left([0,T] \times IR^d\right), \qquad avec \quad encore \quad c(t,x) \leq 0 \\ \overline{u} \in L^2(IR^d) \cap C_b(IR^d) \\ f \in L^2\left([0,T] \times IR^d\right) \cap C_b\left([0,T] \times IR^d\right) \end{cases} \tag{52'}$$

Le générateur de $(X_s^{t,x})$ est donnée par:

$$L(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{d} a_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{53}$$

où

$$a_i(t,x) = b_i(t,x) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial a_{ij}(t,x)}{\partial x_i}$$

On définit $\widetilde{L}(t)$ par:

$$\widetilde{L}(t) = L(t) + c(t,x)I \tag{54}$$

(par rapport à **5-1-1**, on se replace ici dans le cadre des diffusions à coefficients dépendant du temps).

5-1-2-1 Problème parabolique sans frontière:

On considère l'équation parabolique rétrograde (avec donnée finale en *T*) sur IR^d:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + \widetilde{L}(t)u = -f \quad , \quad 0 \le t \le T \\ u(T,x) = \overline{u}(x) \quad , \quad x \in IR^d \end{cases} \tag{55}$$

Ce problème a une unique solution:

$$u \in L^2\left([0,T]; H^1(IR^d)\right) \cap C\left([0,T]; L^2(IR^d)\right)$$

Théorème 5.6:

La solution $u(t,x)$ de (55) vérifie:

$$u(t,x) = E\int_t^T f(s, X_s^{t,x}) \exp\left[\int_t^s c(\theta, X_\theta^{t,x})\, d\theta\right] ds$$

$$+ E\left[\overline{u}(X_T^{t,x}) \exp\left[\int_t^T c(s, X_s^{t,x})\, ds\right]\right], \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times IR^d \tag{56}$$

où $(X_s^{t,x})$ est la solution de (52)

Démonstration:

La démonstration se fait encore en appliquant la formule d'Itô à:

$$\psi_s = u(t, X_s^{t,x}) \exp\left[\int_t^s c(\theta, X_\theta^{t,x})\, d\theta\right]$$

entre $s=t$ et $s=T$, en prenant l'espérance et en utilisant (55).

Dans le cas homogène, où (b,σ,c,f) sont indépendants de temps t, on peut poser $v(t) = u(T-t)$, Alors $v(t)$ vérifie:

$$\begin{cases} \dfrac{dv(t)}{dt} = \tilde{L}\, v(t) + f \quad , \quad t > 0 \\ v(0) = \bar{u} \end{cases} \tag{57}$$

et il résulte de (56), avec $t=0$:

$$v(t,x) = E\int_0^T f(X_t^{0,x}) \exp\left[\int_0^t c(X_s^{0,x})\, ds\right] dt + E\left[\bar{u}(X_T^{0,x}) \exp\left[\int_0^T c(X_t^{0,x})\, dt\right]\right] \tag{58}$$

Cette formule, qui donne l'interprétation de la solution de (57) est vraie $\forall (t,x) \in IR^+ \times IR^d$.

La formule (58), dans le cas $f = 0$, est souvent appelée formule de Feynman-Kac.

5-1-2-2 Problème parabolique avec condition de Dirichlet:

Soit D un ouvert borné de frontière ∂D de classe C^2.

Avec les données ci-dessus, on considère le problème:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + \widetilde{L}(t)u = -f \quad , & dans \ \left]0,T\right[\times D \\ u(t,x) = 0 \quad , & sur \ \left[0,T\right] \times \partial D \\ u(T,x) = \overline{u}(x) \quad , & dans \ D \end{cases} \tag{59}$$

Ce problème a une solution unique:

$$u \in L^2\left([0,T]; H_0^1(D)\right) \cap C\left([0,T]; L^2(D)\right)$$

En utilisant le processus $\left(X_s^{t,x}, s \geq t\right)$ définit par (52), on considère le temps d'arrêt $\tau_{t,x}$ définir par: $\tau_{t,x} = \inf\left\{s > t;\ X_s^{t,x} \notin D\right\}$

Théorème 5.7:

La solution $u(t,x)$ de (59) vérifie:

$$u(t,x) = E\int_t^{\tau_{t,x}\wedge T} f(s, X_s^{t,x}) \exp\left[\int_t^s c(\theta, X_\theta^{t,x})\, d\theta\right] ds$$

$$+ E\left[1_{\{T \leq \tau_{t,x}\}} \overline{u}(X_T^{t,x}) \exp\left[\int_t^T c(\theta, X_\theta^{t,x})\, d\theta\right]\right], \qquad \forall (t,x) \in [0,T] \times D \tag{60}$$

Démonstration:

Cette formule se démontre comme théorème 5.6, en appliquant ce coup-ci la formule d'Itô à: $\psi_s = u(s, X_s^{t,x}) \exp\left[\int_t^s c(\theta, X_\theta^{t,x})\, d\theta\right]$ entre $s = t$ et $s = \tau_{t,x} \wedge T$, et on prend l'espérance (comme précédemment, on est amené dans un premier temps à supposer $u \in C^{1,2}\left([0,T] \times \overline{D}\right)$, ce qui nécessite les conditions de compatibilités: $\overline{u}\big|_{\partial D} = 0$, $-\Delta \overline{u}(x) = f(T,x)$ sur ∂D (avec $\overline{u} \in C^2(\overline{D})$), puis on abandonne la régularité par un passage à la limite.

Il en sera de même dans les différents situations envisagées par la suite.)

De même, si le problème non homogène c'est-à-dire $u(t,x) = \varphi(t,x)$ sur $[0,T]\times \overline{D}$ dans (59).

La solution du problème non homogène:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + \widetilde{L}(t)u = -f \quad , & dans \ \ ]0,T[\times D \\ u(t,x) = \varphi(t,x) \quad , & sur \ \ [0,T]\times \partial D \\ u(T,x) = \overline{u}(x) \quad , & dans \ \ D \end{cases} \tag{61}$$

admet la représentation:

$$u(t,x) = E\int_t^{\tau_{t,x}\wedge T} f(s, X_s^{t,x}) \exp\left[\int_t^s c(\theta, X_\theta^{t,x})\, d\theta\right] ds$$
$$+ E\left[1_{\{T\le \tau_{t,x}\}}\overline{u}(X_T^{t,x}) \exp\left[\int_t^T c(\theta, X_\theta^{t,x})\, d\theta\right]\right]$$
$$+ E\left[1_{\{\tau_{t,x}<T\}}\varphi(\tau_{t,x}, X_{\tau_{t,x}}^{t,x}) \exp\left[\int_t^{\tau_{t,x}} c(\theta, X_\theta^{t,x})\, d\theta\right]\right] \tag{62}$$

A nouveau, si (b,σ,c,f,φ) ne dépendent pas de t, posons $v(t) = u(T-t,x)$

Alors v est la solution de

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = \widetilde{L}v + f \quad , & dans \ \ ]0,T[\times D \\ v(t) = \varphi \quad , & sur \ \ [0,T]\times \partial D \\ v(0) = \overline{u} \quad , & dans \ \ D \end{cases} \tag{63}$$

et vérifie:

$$v(T,x) = E\int_0^{\tau_x\wedge T} f(X_s^x) \exp\left[\int_0^s c(X_\theta^x)\, d\theta\right] ds$$
$$+ E\left[1_{\{T\le \tau_x\}}\overline{u}(X_T^x) \exp\left[\int_0^T c(X_0^x)\, d\theta\right]\right]$$
$$+ E\left[1_{\{\tau_x<T\}}\varphi(X_{\tau_x}^x) \exp\left[\int_0^{\tau_x} c(X_0^x)\, d\theta\right]\right], \quad \forall (t,x)\in IR^+\times IR^d \tag{64}$$

avec les conventions: $X_\bullet^x = X_\bullet^{0,x}$, $\tau_x = \tau_{0,x}$

5-2 Interprétation probabiliste des E.D.P. et résolution numérique :

Dans ce paragraphe, nous indiquons de quelques manières les représentations probabilistes des solutions présentées au paragraphe précédent peuvent aider à l'analyse numérique de ces équations.

D'une part, elles peuvent servir à montrer la convergence de schémas de discrétisation d'E.D.P. en montrant que la représentation de la solution de l'équation discrétisée converge vers la représentation de la solution de l'équation continue correspondante. Ce la s'obtient à l'aide d'un résultat de convergence en loi de chaînes de Markov vers une diffusion (théorème d'invariance).

D'autre part, on sait d'après la loi des grands nombres que l'espérance d'une variable aléatoire est la limite p.s. des moyennes d'un grand nombre de réalisations indépendantes de cette variable aléatoire. On a donc un moyen de calculer une approximation de la solution d'une E.D.P., à condition de simuler un grand nombre de réalisation indépendantes du processus de diffusion qui lui est associé. On peut aussi appliquer cette méthode après discrétisation, d'après ce que nous venons d'indiquer. Cette méthode de calcule s'appelle méthode de Monte-Carlo.

5-2-1 Théorème d'invariance: (Principe d'invariance)

On se place sous les hypothèses du paragraphe **5-1**, et on considère la famille des processus $\{X_t^x, t \geq 0\}$ solution de:

$$\begin{cases} dX_t^x = b(X_t^x)dt + \sigma(X_t^x)dB_t \qquad , \qquad t \geq 0 \\ X_0^x = x \end{cases} \tag{65}$$

où les coefficients *b* et σ sont indépendants de *t*.

Nous désignerons par P_x la loi de ce processus sur l'espace canonique (Ω', F').

Soit $h > 0$, un pas de discrétisation en temps t (destiné à tendre vers 0). Considérons une chaîne de Markov $\left(X_n^{x,h}, n = 0,1,...\right)$ à valeurs dans IR^d, partant de x ($X_0^{x,h} = x$) et de probabilité de transition $M_h(y, dz)$, mesure de probabilité sur $\left(IR^d, \beta(IR^d)\right)$ pour y fixé, qui définit la loi de la chaîne homogène par:

$$P\left(X_{n+1}^{x,h} \in B / X_n^{x,h} = y\right) = \int_B M_h(y, dz), \quad \forall B \in \beta(IR^d), n \in IN$$

La chaîne $\left(X_n^{x,h}\right)$ est ici à valeurs dans IR^d continu; dans la pratique, elle sera à valeurs dans le sous-ensemble discret correspondant aux nœuds du maillage utilisé.

On considère le processus $\left(X_t^{h,x}, t \geq 0\right)$ dans les trajectoires (continues) sont formées par les lignes brisées joignant les points $\left((hn, X_n^{x,h}), n = 0,1,2,...\right)$ et on dénote par P_x^h sa loi sur l'espace des trajectoires continues à valeurs dans IR^d.

Définition 5.10:

On dira que la suite P_x^h converge étroitement vers P_x, quand $h \to 0$, si $\forall \phi \in C_b\left(C(IR^+, IR^d)\right), E_x^h[\phi(\xi_\bullet)] \to E_x[\phi(\xi_\bullet)]$ où $\xi_\bullet$ désigne l'élément générique de $C(IR^+, IR^d)$, E_x^h et E_x les espérances suivant P_x^h et P_x.

Le principe d'invariance va consister à donner des condition sur $M_h(y, dz)$ assurent cette convergence étroite de P_x^h vers P_x, $\forall x \in IR^d$

Le générateur L du processus $\left(X_t^x\right)_{t>0}$ vérifie:

$$Lf(x) = \frac{d}{dt} E\left[f(X_t^x)\right]\Big|_{t=0}$$

De façon similaire, on définit

$$L_h f(x) = \frac{1}{h} \int_{IR^d} [f(y) - f(x)] M_h(x, dy) \tag{66}$$

et les moments d'ordre *1* et *2* de la probabilité de transition $M_h(y, dz)$:

$$b_i^h(x) \underset{\overline{\overline{\quad}}}{déf} \frac{1}{h} \int_{\|y-x\|\leq 1} (y_i - x_i) M_h(x, dy) \tag{67}$$

$$a_{ij}^h(x) = \frac{1}{h} \int_{\|y-x\|\leq 1} (y_i - x_i)(y_j - x_j) M_h(x, dy) \tag{68}$$

Théorème 5.11: Supposons:

- $a^h(x) \to a(x)$ et $b^h(x) \to b(x)$, quand $h \to 0$, uniformément sur tout compact de IR^d.
- Les quantités $|a^h(x)|$ et $|b^h(x)|$ sont majorées par des constantes indépendantes de *h* et de *x*.
- $\sup_{x \in IR^d} \left\{ \frac{1}{h} M_h(x, IR^d - B_\varepsilon(x) \right\} \to 0$ quand $h \to 0$, $\forall \varepsilon > 0$ où $B_\varepsilon(x)$ désigne la boule de centre *x* et de rayon *ε*.

Alors $\forall x \in IR^d$ si $x_h \to x$ quand $h \to 0$, $P_{x_h}^h$ converge étroitement vers P_x

On démontre en fait que $L_h f(x) \to Lf(x)$ uniformément sur tout compact *k* de IR^d.

5-2-2 Convergence d'un schéma d'approximation d'un problème elliptique:

Nous allons tout d'abord considérer un exemple particulièrement simple.

Soit $D \subset IR^2$ le carré $]0,1[\times]0,1[$.

On considère le problème de Dirichlet:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\Delta u(x) = -f(x) & dans \quad D \\ u(x) = \varphi(x) & sur \quad \partial D \end{cases} \tag{69}$$

où f est continue sur $\overline{D} = D \cup \partial D$ et φ est continue sur ∂D.

On a existence et unicité de la solution de ce problème et bien que, ici, ∂D n'est pas de classe C^2. Alors $\forall x \in \overline{D}$, on a:

$$u(x) = E_x \int_0^\tau f(W_t)\,dt + E_x[\varphi(W_t)]$$

où E_x est l'espérance par rapport au brownien partant de x et τ le temps d'atteinte de ∂D.

Soient $k = \dfrac{1}{N}$, et R_k la grille des points de coordonnées $(ik, jk), i, j \in \mathbb{Z}$ et par e_1 et e_2 les vecteurs $(k,0)$ et $(0,k)$.

Soit $\{u^k(x)\}, x \in R_k \cap \overline{D}$, la solution du problème discrétisé (qui est un système linéaire):

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2k^2}\left[u^k(x+e_1) + u^k(x-e_1) - 2u^k(x)\right] \\ + \dfrac{1}{2k^2}\left[u^k(x+e_2) + u^k(x-e_2) - 2u^k(x)\right] \\ \quad = -f(x) \quad , \quad \forall x \in R_k \cap D \\ \\ u^k(x) = \varphi(x) \quad , \quad \forall x \in R_k \cap \partial D \end{cases} \tag{70}$$

Choisissons $h > 0$ et une probabilité de transition $M_h(x,dy)$ de telle sorte que l'opérateur L_h définir par:

$$hL_h g(x) = \int_{IR^d} [g(y) - g(x)] M_h(x,dy)$$

soit identique à l'opérateur qui tout application g de R_k dans IR fait correspondre la fonction g_k donnée par:

$$g_k(x) = \frac{1}{2k^2}\begin{bmatrix} g(x+e_1) + g(x-e_1) + g(x+e_2) \\ + g(x-e_2) - 4g(x) \end{bmatrix}$$

Cela impose $h = \dfrac{k^2}{2}$ et $M_h(x, x \pm e_1) = M_h(x, x \pm e_2) = \dfrac{1}{4}$

On utilisant les formules (67) et (68), on obtient:

$$b_1^h(x) = b_2^h(x) = 0$$

$$a_{12}^h(x) = a_{21}^h(x) = 0$$

$$a_{11}^h(x) = a_{22}^h(x) = 1$$

On vérifie que l'on peut appliquer le théorème 5.11, les lois P_x^h convergent étroitement vers la loi P_x défini ci-dessus lorsque $h \to 0$

Posons $F_t' = \sigma\{s \to X_s, s \le t\}$

En utilisant $k = \sqrt{2h}$, pour indicer toutes les quantités par h.

En utilisant la propriété de Markov de la chaîne $\{X_{jh}, j = 0,1,..\}$ pour représenter la solution de (70) $u^h(x)$:

$$E_x^h\{1_{\{jh<\tau\}}[u^h(X_{(j+1)h}) - u^h(X_{jh})]\} =$$
$$E_x^h\{1_{\{jh<\tau\}} E^h[(u^h(X_{(j+1)h}) - u^h(X_{jh})) / F'_{jh}]\} =$$
$$E_x^h\{1_{\{jh<\tau\}} hA_h u^h(X_{jh})\} = -hE_x^h\{1_{\{jh<\tau\}} f(X_{jh})\}$$

$$u^h(X_\tau) = \varphi(X_\tau)$$

où τ est le temps de sortie de D de la chaîne.

D'où par sommation:

$$u^h(x) = E_x^h\left\{ h\sum_{j=0}^{(\tau/h)-1} f(X_{jh}) + \varphi(X_\tau)\right\} \tag{71}$$

On vérifie que $u^h(x)$ se comporte, lorsque $h \to 0$, comme $\tilde{u}^h(x)$ donné par: $\tilde{u}^h(x) = E_x^h\left\{ \int_0^\tau f(X_t)\,dt + \varphi(X_\tau)\right\}$

Cette dernière quantité converge vers $u(x)$ quand $h \to 0$, grâce au principe d'invariance.

5-2-3 Convergence d'un schéma d'approximation d'un problème parabolique:

On désigne toujours $(X_t^x, t \geq 0)$ le processus homogène solution de (65) et P_x sa loi. Nous allons nous placer dans la cas $d=1$, et $D =]0,1[$

On considère le problème avec E.D.P. parabolique:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \dfrac{1}{2}a(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + b(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x)\ , \quad dans\ IR_+ \times D \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 \quad , \quad t > 0 \\ u(0,x) = \overline{u}(x) \quad , \qquad x \in D \end{cases}$$

où la donnée $\overline{u}$ est continue sur $\overline{D} = [0,1]$

On a alors (ce problème est du type de celui étudié au paragraphe **5-2-2**):

$$u(t,x) = E_x\left\{ \overline{u}(X_t^x)1_{\{t \leq \tau_x\}} \right\}, \quad \forall (t,x) \in IR^+ \times \overline{D}$$

Soient h le pas de discrétisation en temps *t*, $k=\dfrac{1}{N}$ le pas de discrétisation en espace *x*.

On pose $\mu = (h,k)$. On définit les points $R_k = \{jk, j \in Z\}$

On considère le schéma suivant de type différences finies en *x*, et explicité en temps *t*:

$$\begin{cases} u^{\mu}((j+1)h,x) = u^{\mu}(jh,x) \\ + \dfrac{h}{2}a(x)\dfrac{u^{\mu}(jh,x-k) - 2u^{\mu}(jh,x) + u^{\mu}(jh,x+k)}{k^2} \\ - hb^{-}(x)\dfrac{u^{\mu}(jh,x) - u^{\mu}(jh,x-k)}{k} \\ \quad + hb^{+}(x)\dfrac{u^{\mu}(jh,x+k) - u^{\mu}(jh,x)}{k}, \quad x \in R_k \cap D,\ j = 0,1,\ldots \\ u^{\mu}(jh,0) = u^{\mu}(jh,1) = 0, \qquad j = 1,2,\ldots \\ u^{\mu}(0,x) = \overline{u}(x), \qquad x \in R_k \cap \overline{D} \end{cases} \tag{72}$$

avec b^{-} et b^{+} sont les parties positive et négative de b

La première égalité de (72) peut se réécrire:

$$\begin{aligned} u^{\mu}((j+1)h,x) &= \left(\frac{h}{2k^2}a(x) + \frac{h}{k}b^{-}(x)\right)u^{\mu}(jh,x-k) \\ &+ \left(1 - \frac{h}{k^2}a(x) - \frac{h}{k}\left|b(x)\right|\right)u^{\mu}(jh,x) \\ &+ \left(\frac{h}{2k^2}a(x) + \frac{h}{k}b^{+}(x)\right)u^{\mu}(jh,x+k) \quad , \quad x \in R_k \cap D \end{aligned} \tag{73}$$

La condition analogue de stabilité des schémas aux conditions classiques en analyse numérique:

$$h \le \frac{k}{\sup\limits_{x}\left(\left|b(x)\right| + \dfrac{a(x)}{k}\right)} \tag{74}$$

assure que les trois coefficients du membre de droite de (73) soient non négatifs.

Remarque 5.12:

En dehors de la contrainte (73), les pas h et k peuvent être choisis indépendamment l'un de l'autre, au contrainte de la situation du paragraphe précédent où le temps n'apparaissait pas dans l'E.D.P. considérée.

En définie la probabilité de transition de la chaîne de Markov associé à (73), comme:

$$\begin{cases} M_{\mu}(x, x-k) = \dfrac{h}{2k^2} a(x) + \dfrac{h}{k} b^{-}(x) \\ M_{\mu}(x, x) = 1 - \dfrac{h}{k^2} a(x) - \dfrac{h}{k} |b(x)| \\ M_{\mu}(x, x+k) = \dfrac{h}{2k^2} a(x) + \dfrac{h}{k} b^{+}(x) \\ \quad \forall x \in R_k \end{cases}$$

et d'après (67) et (68), nous obtenons:

$$b^{\mu}(x) = b(x) \quad , \quad a^{\mu}(x) = a(x) + k|b(x)|$$

On vérifie que l'on peut appliquer le théorème 5.11.

On définie l'opérateur A_{μ} par:

$$A_{\mu} g(x) = \frac{1}{h} \int_{R_k} [g(y) - g(x)] M_{\mu}(x, dy) \, ,$$
$$\forall x \in R_k \cap D$$

alors (73) se réécrit:

$$\begin{aligned} u^{\mu}((j+1)h, x) &= (I + hA_h) u^{\mu}(jh, x) \\ &= \int_{R_k} u^{\mu}(jh, y) M_{\mu}(x, dy) \qquad x \in R_k \cap D \end{aligned} \tag{75}$$

et de plus:

$$(76)\begin{cases} u^{\mu}(jh, 0) = u^{\mu}(jh, 1) = 0 \, , \quad j = 1, 2, \ldots \\ u^{\mu}(0, x) = \bar{u}(x) \quad , \quad x \in R_k \cap \overline{D} \end{cases}$$

P_x^h étant définie comme ci-dessus, sur l'espace de probabilité filtré (Ω', F', F_t') , fixons t tel que $t = kh$

Soit $0 \leq j < k$, il résulte de (75), (76), et de la propriété de Markov de la chaîne $\{X_{jh};\ j = 0,1,...\}$:

$$\begin{aligned}
&E_x^h\left\{1_{\{(j+1)h<\tau\}} u^\mu((k-j-1)h, X_{(j+1)h})\right\} = \\
&E\left\{1_{\{jh<\tau\}} E\left[u^\mu((k-j-1)h, X_{(j+1)h}) / F'_{jh}\right]\right\} = \\
&E\left\{1_{\{jh<\tau\}} \int_{IR^d} u^\mu((k-j-1)h, y) M_\mu(X_{jh}, dy)\right\} \\
&E\left\{1_{\{jh<\tau\}} u^\mu((k-j)h, X_{jh})\right\} = \\
&E\left\{1_{\{jh<\tau\}} u^\mu((k-j)h, X_{jh})\right\}
\end{aligned}$$

D'où par récurrence:

$$\begin{aligned}
&u^\mu(t,x) = E_x^h\left\{\overline{u}(X_t) 1_{\{t\leq\tau\}}\right\}, \\
&x \in R_k \cap \overline{D}
\end{aligned} \tag{77}$$

L'application $X \to u(X_t) 1_{\{t\leq\tau\}}$ est bornée et continue sur l'ensemble $\{X, \tau(X) \neq t\}$

Donc le théorème 5.11 permet de conclure que:

$$u^\mu(t,x) \to u(t,x), \quad \text{quand } \mu \to 0$$

On déduit de (77) que le schéma est stable dans $L^\infty(R_k)$, c'est-à-dire:

$$\sup_{x\in R_k \cap D} \left|u^\mu(t,x)\right| \leq \sup_{x\in \overline{D}} \left|\overline{u}(x)\right|$$

Les conditions (74), (75) assurent cette stabilité.

5-2-4 Méthode de Monte-Carlo, appliquée à une équation discrétisée:

a/ Méthode de Monte-Carlo:

De nombreuses approches peuvent être mises en ouvre pour exploiter un modèle mathématique d'une situation réelle et étudier ses propriétés.

Il est parfois possible de calculer explicitement les quantités auxquelles on s'intéresse au moyen de formules fermés, ou tout au moins de calculer celles-ci numériquement, de manière exacte si l'on exclut les questions de précision finie des calculs sur ordinateur, pour des valeurs fixées des paramètres.

Ce n'est malheureusement possible, la plupart du temps, que pour des modèles très simplifiés, possédant par exemple de nombreuses propriétés d'invariance et de symétrie. On peut éventuellement obtenir des résultats du type précédent, mais dans un cadre asymptotique, caractérisant le comportement des quantités étudiées lorsque certains paramètres tendent vers une valeur limite. Ou encore, on peut étudier des approximations du modèle initial, qui se prêtent mieux à des approches du type précédent.

La simulation de modèles stochastiques nécessite le recours à des nombres pris au hasard, et est connue sous le nom générique de méthode de Monte-Carlo.

La méthode de Monte-Carlo propose solutions approchées et aléatoires pour des nombreux problèmes.

Nous allons voir que pour une bonne approximation, nous avons besoin d'un très grand nombre de point n, et c'est le point faible de cette méthode.

Le fondement de la méthode repose sur la loi des grands nombres et le calcul de l'erreur associée à la méthode s'obtient à partir du théorème limite centrale.

Etant donné une fonction $f : IR^n \rightarrow IR$ intégrable dans $[0,1]^n$, on peut écrire:

$$\int_{[0,1]^n} f(u)\,du = E\left[f(u)\right]$$

Où $u = (u^1, u^2, ..., u^n)$ est un vecteur aléatoire dont les composantes sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (iid) de loi uniforme sur]0,1[.

On considère pour chaque k=1,…,n des suites (iid) $(u_i^k)_{i \geq 1}$ de variable aléatoire uniforme sur]0,1[.

Par la loi des grands nombres, on écrit:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(u_i^1, u_i^2, ..., u_i^n) \approx \int_{[0,1]^n} f(u)\,du$$

La méthode consiste à approcher une intégrale I d'une fonction définie sur un intervalle ouvert et borné]α,β[, continue:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(u)\,du = (\beta - \alpha)E\left[f(u)\right]$$

et en approchant *E[f(u)].*

Où u est une variable aléatoire de loi uniforme sur]α,β[.

Par la loi des grands nombres:

Si $(u_i)_{i \in N^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur]α,β[, alors

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(u_i) = E\left[f(u)\right]$$

La vitesse de convergence peut être estimée grâce au théorème de la limite centrale.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(u_i) - E\left[f(u)\right]\right] = G$$

où σ est la variance de $f(u)$ et G est une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.

Pour n est grand, l'écart aléatoire ε_n est:

$$\varepsilon_n = \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(u_i) - E\left[f(u)\right]\right|$$

avec un intervalle de confiance pour I au niveau de 95% est:

$$I \in \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(u_i) - 1{,}96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(u_i) + 1{,}96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

où u_i sont toujours des nombres tirés uniformément au hasard dans $]\alpha,\beta[$.
En générale σ n'est pas connu et on approche sa valeur:
En utilisant

$$I = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(u_i)$$

L'approximation de $E[f(u)]$, grâce à la convergence suivante:

$$0 \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f^2(u_i) - \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(u_i)\right]^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[f(u_i) - I\right]^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma^2$$

b/ Méthode de Monte-Carlo, appliquée à une équation discrétisée:

Reprenons le problème (69), déjà étudié au paragraphe **5-2-2.**

On a vu l'approximation de $u(x)$ était donnée par la formule (71):

$$u^h(x) = E_x^h\left\{h\sum_{j=0}^{(\tau/h)-1} f(X_{jh}) + \varphi(X_\tau)\right\}$$

Soit une suite infini de chaînes de Markov $\{X_{jh}^i\ ,\ j = 0,1,...\},\ i = 1,2,...$

indépendantes chacune de loi P_x^h

D'après la loi des grands nombres, on a:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[h\sum_{j=0}^{(\tau/h)-1} f(X_{jh}^i) + \varphi(X_\tau^i)\right] \to u^h(x) \quad \text{p.s. , lorsque } n \to \infty$$

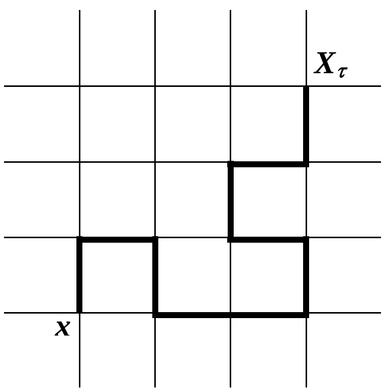
Donc au lieu de résoudre le système linéaire (70), avec $h = \frac{k^2}{2}$, on peut calculer une valeur approchée de $u^h(x)$ en simulant un grand nombre de réalisations indépendantes de la chaîne de Markov $\{X_{jh},\ j = 0,1,...\}$

Le calcul d'une réalisation de

$$h\sum_{j=0}^{(\tau/h)-1} f(X_{jh}) + \varphi(X_\tau)$$

se ramène à ce déplacer sur le maillage R_k, partant de x, en tirant au hasard à chaque pas le point suivant parmi les quatre points voisins (les différents tirages étant indépendants), jusqu'à attendre la frontière ∂D.

On calcule n réalisations indépendantes, et on fait la moyenne des résultats obtenus.



Remarques 5.13:

- Les méthodes de Monte-Carlo on parfois la réputation de converger lentement.

- Le théorème de la limite centrale nous indique que l'erreur commise est au mieux en $\frac{1}{\sqrt{n}}$ où n est le nombre de chaînes de Markov de loi identique, et indépendantes.

En effet, soit $\{X_i, i = 1,2,...\}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et équidistribuées, de moyenne μ et de variance σ^2.

On approche la moyenne μ et l'erreur ε_n par La méthode de Monte-Carlo comme:

$$\mu = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} \qquad \varepsilon_n = \frac{X_1 - \mu + X_2 - \mu + ... + X_n - \mu}{n}$$

Par le théorème de la limite centrale, lorsque $n \to \infty$, $\sqrt{n}\,\varepsilon_n$ tend vers (on loi) une variable aléatoire réelle *X* de loi gaussienne centrée de variance σ^2. Donc, lorsque *N* est grand, la loi de l'erreur aléatoire ε_n est proche de celle de $X/\sqrt{n}$

- La méthode de Monte-Carlo a néanmoins l'avantage d'être utilisable avec n'importe quelle dimension d'espace *d*, tandis que la résolution du système (64) devient très vite les capacités des ordinateurs, lorsque d est grand.

La méthode de Monte-Carlo peut être intéressante lorsqu'on ne veut connaître la valeur de la solution qu'en un seul, ou un nombre limité de point.

Un autre avantage réside au calcul en parallèle, les *N* réalisation de la chaîne de Markov devant être calculées de façon indépendante.

5-2-5 Exemple : (problème elliptique)

Soit le problème elliptique suivant :

$$\begin{cases} Lu = f & sur\ D \\ u = g & \partial D \end{cases} \qquad \text{où } D = [0,2]\times[0,1]$$

On cherche l'approximation de u

L'opérateur L est définie par :

$$L = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} + 0{,}1\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Si $x \le 1$, on a $a = 1$ si non $a = 0$

La fonction f est :

$$f(x, y) = \cos(c\pi x)e^{-y}(0{,}4 - 0{,}5ca\pi^2)$$

où $c = 5$ si $x \in [0;0{,}8] \cup [1{,}2;2]$ et $c = 10$ si $x \in \,]0{,}8;1{,}2[$

La solution analytique u est

$$u(x, y) = 2 + \cos(c\pi x)e^{-y}$$

Méthode probabiliste :

L'interprétation probabiliste de la solution u est :

$$u(x, y) = E\left[\int_0^{\tau} f(X_t(x, y))\,dt + g(X_{\tau}(x, y))\right]$$

où τ est le temps atteindre de la domaine D.

L'approximation correspondant de Monte-Carlo est définie par

$$\tilde{u}(x, y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[h\sum_{k=0}^{\tau/h-1} f(X_{kh}^{i}(x, y)) + g(X_{\tau}^{i}(x, y))\right]$$

Conclusion

Conclusion

La définition d'un problème différentiel stochastique passe par l'intégrale d'Itô et la formule d'Itô est à la base des techniques de calcul différentiel sur les processus stochastiques que l'on regroupe sous le nom de calcul stochastique.

On commence par construire une intégrale par rapport au mouvement Brownien, pour en suit définir la notion d'équation différentielle stochastique. Les processus stochastiques utilisés sont des processus possédant la propriété de Markov.

Nous indiquons les représentations probabilistes des solutions des nombreux problèmes. Ces représentations probabilistes sont intéressantes au moins pour trois raisons:

Elles peuvent aider à la compréhension des phénomènes physiques décrits par les équations considérées.

Elles fournissent un outil d'analyse ou de calcul d'approximations des solutions de ces équations.

Finalement, elles peuvent être utilisées pour l'étude des perturbations de ces équations.

Les problèmes différentiels issus de la physique sont à l'origine de l'introduction des méthodes de Monte-Carlo. L'idée consiste à exprimer la solution du problème à résoudre comme l'espérance d'une certaine variable aléatoire, fonction d'une trajectoire d'un processus de diffusion. On obtient alors une approximation de la solution en calculant la moyenne empirique des valeurs prises par cette variable aléatoire sur un grand nombre de trajectoires indépendantes. Cette méthode qui converge lentement a comme intérêt d'être insensible à la dimension des problèmes étudiés (contrairement à des méthodes classiques d'analyse numérique qui ne sont performantes qu'en petite dimension) et à la régularité de fonction dont on cherche à calculer l'intégrale lorsque les variables aléatoires sont indépendantes identiquement distribuées de loi uniforme.

Bibliographie

Bibliographie

[01] Annie Millet, méthodes de Monte–Carlo, Universités Paris.

[02] B.Ycart, Introduction aux équations différentielles stochastiques, Grenoble, Août Septembre 1998.

[03] Claude Bernier, Représentation des solutions et contrôle d'équations différentielles stochastiques, Thèse du Ph.D, Université de Montréal, Octobre 1995.

[04] Dautray Robert et al, Méthodes probabilistes pour les équations de la physique, collection CEA, Paris, 1989.

[05] Jean-François LE GALL, Mouvement Brownien et calcul stochastique, Université Pierre et Marie Curie, Janvier 1997.

[06] Jean-Pierre FOUQUE, Relations entre probabilités et équations aux dérivées partielles, Ecole Polytechnique, 2005.

[07] Julien Guyon, Volatilité stochastique: étude d'un modèle ergodique, Novembre 2002.

[08] Khaldi Khaled, Méthodes statistiques et probabilités, Casbah éditions, Algérie, 2001.

[09] Monique Jeanblanc, Cours de calcul stochastique, Paris.

[10] Monique Jeanblanc; Thomas Simon, Eléments de calcul stochastique, IRBID, Septembre 2005.

[11] N.Limnios, Introduction à la méthode de Monte Carlo, Université de technologie de Compiègne, 2005.

[12] Nils Berglund, Introduction aux intégrales stochastiques, France, Octobre 2003.

[13] Laure Elie; Bernard Lapeyre, Introduction aux méthodes de Monte–Carlo, Septembre 2001.

[14] Olivier Lévêque, Cours de probabilités et calcul stochastique, 2004-2005.

[15] Peter Kloeden., Eckhard Platen, Numerical solution of stochastic differential equation, Springer-Verlag, New York,1992.

[16] Pierre Devolder, Calcul stochastique, UCL, 2005.

[17] Pierre Priouret, Introduction au processus de diffusion, Université Pierre et Marie Curie, 2004-2005.

[18] Sylvie MELEARD, Mouvement Brownien et calcul stochastique, Université Paris 10.

[19] Thomas Simon, Eléments de calcul stochastique, IRBID, 2002.

Articles:

[20] Eric PEIRANO; Denis TALAY, Domain Decomposition by Stochastic Methods, France, 2003.

[21] Calcul stochastique II: applications aux finance, Université Paul Sabatier, DEA 2000-2001.

[22] Equations Différentielles Stochastiques, 2002-2003.

[23] Elément de calcul stochastique: applications aux finance, Université Paul Sabatier, DEA 2000-2001.

[24] Méthode de Monte Carlo, UPS Toulouse III, 2005.

[25] Mouvement Brownien; intégrale stochastique, Séminaire des Doctorants, Bordeaux, Mars 2003.

[26] Rappels de calcul stochastique.

[27] Simulation de modèles stochastiques et méthode de Monte Carlo.