DIMENZIÓK
Matematikai Közlemények
X. kötet, 2022

doi:10.20312/dim.2022.08

Konvex sokszöglemezek elsőfajú rögzítése

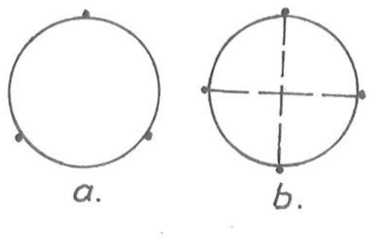
Hajdu Endre
Soproni Egyetem

ÖSSZEFOGLALÓ. Az alakzatok rögzítésének három típusát különböztetjük meg aszerint, hogy az eltolást, az elforgatást vagy a csavar mozgást gátolja a rögzítés. A dolgozat fix pontokból álló rögzítő rendszerekkel foglalkozik és sokszög alakú lemezek minimális és maximális számú rögzítő-pontszámát állapítja meg az első típusba tartozó elmozgatások figyelembe vételével.

ABSTRACT. There are three different types of fastening of shapes, depending on whether the fixing prevents displacement, rotation or screw movement. This paper deals with fixed point fastening systems and establishes the minimum and maximum number of fastening points for polygonal plates, taking into account the displacements.

1. Bevezetés

A geometria első sorban magukkal az alakzatokkal foglalkozik, kevésbé azok mozgásával, még kevésbé azok rögzítésének módjával. Ezért található oly kevés irodalom a címben jelölt témakörről. A hatvanas években megjelent dolgozatában Tomor Benedek [1] azt a kérdést tárgyalta, hogy egy rajztáblára helyezett pénzdarabot, a pereme mentén leszúrt gombostűkkel miképpen lehet eltolás ellen rögzíteni; geometriailag fogalmazva: egy konvex lemez eltolását egy fix pontrendszerrel meggátolni. Ismertette a rögzítés témakörében alapvető fogalmat, a primitív rögzítő rendszert. Ez olyan pontrendszer, mely rögzít, de egyetlen fölösleges eleme sincs, vagyis bármely elemét elhagyva, már elmozdítható az alakzat. Egy körlemeznek például két primitív rögzítő rendszerét mutatja az 1. ábra.



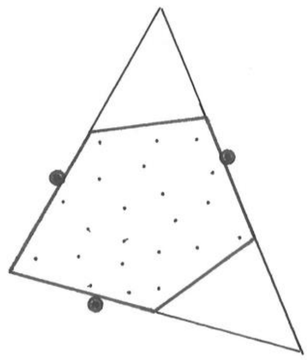
1. ábra

Tomor dolgozatának legfontosabb megállapítása az, hogy „sima” peremű konvex lemez primitív rögzítő rendszere legfeljebb 4 pontból áll, ha csak eltolás ellen kívánjuk rögzíteni a lemezt. Megemlítette, hogy lényegesen nehezebb problémákhoz jutunk, ha más mozgástípust is figyelembe veszünk. A továbbiakban nem találkoztam a rögzítés-geometriával kapcsolatos anyagokkal sem a hazai, sem a külföldi irodalomban, a Tomor-dolgozatban szereplő két munkán kívül. Magam próbálkoztam tájékozódni, tovább gondolni a témakört, egyetlen feltevését elhagyva a két említett, ismert dolgozat gyakorlati szempontból bizarrnak tűnő feltevést, hogy csúcspontba is kerülhet rögzítő pont.

2. Sokszöglemezek rögzítése

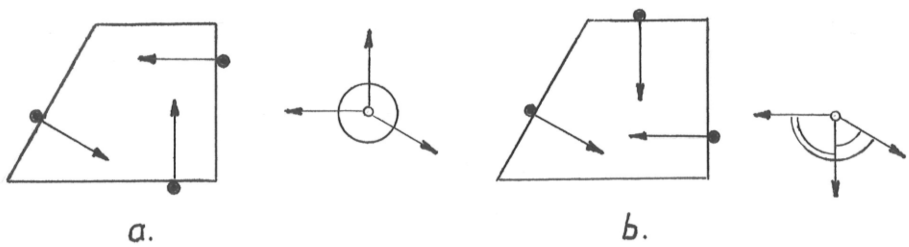
A továbbiakban elsőfajú rögzítésről beszélek, ha csak az eltolást gátolja a rögzítő pontrendszer, másodfajúnak, ha az elforgatásokat, végül harmadfajúnak, ha a csavarmozgásokat zárja ki. Az első két rögzítésfajta vizsgálható a síkban és a térben, de itt csak a síkbeli rögzítésekről lesz szó. A rögzítésekkel kapcsolatos érdekesebb kérdések közé a maximális elemszámú primitív rögzítő rendszerek keresése tartozik; vagyis az, hogy miképpen lehet a legnagyobb elemszámú, de még fölösleges rögzítő pontot nem tartalmazó rögzítő rendszereket szerkeszteni.

Az elsőfajú rögzítés témájában, az alábbiak azért jelenthetnek újdonságot, mert néhány számszerű összefüggést sikerült megállapítani. A konvex sokszögek általában (a parallelogrammák kivételével) befoglalhatók egy vagy több olyan háromszögbe, melynek oldalai tartalmazzák a sokszöglemez három oldalát (2. ábra), s mivel egy háromszög elsőfajú rögzítése három rögzítő ponttal megoldható, ez azt is jelenti, hogy a befoglaló háromszögek száma alapján meghatározható, a lemez legkisebb és legnagyobb számú primitív rögzítő rendszereinek elemszáma.

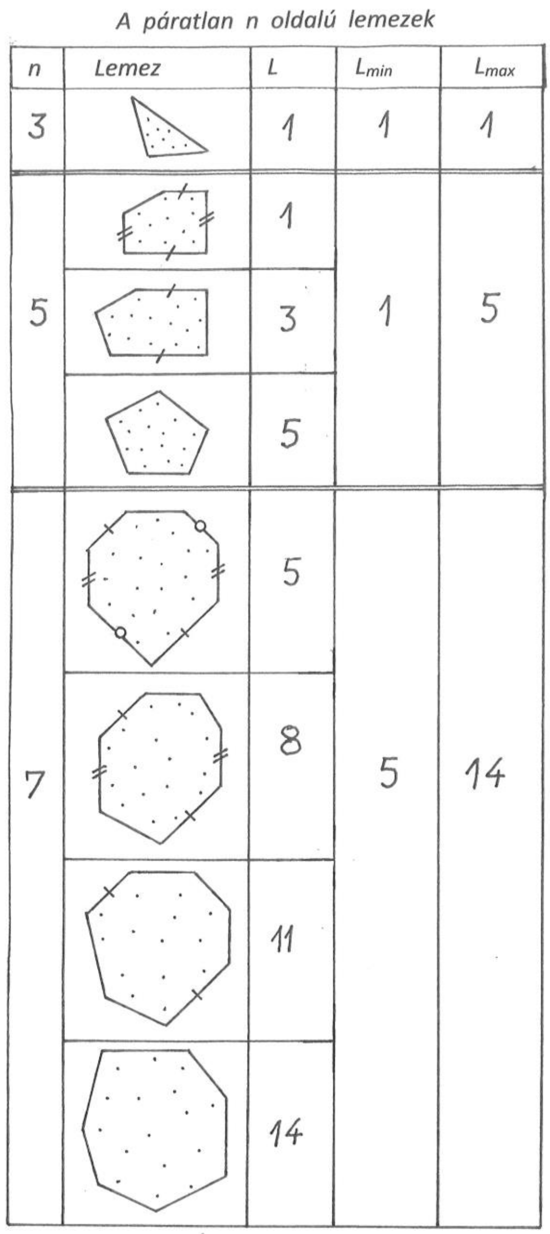


2. ábra

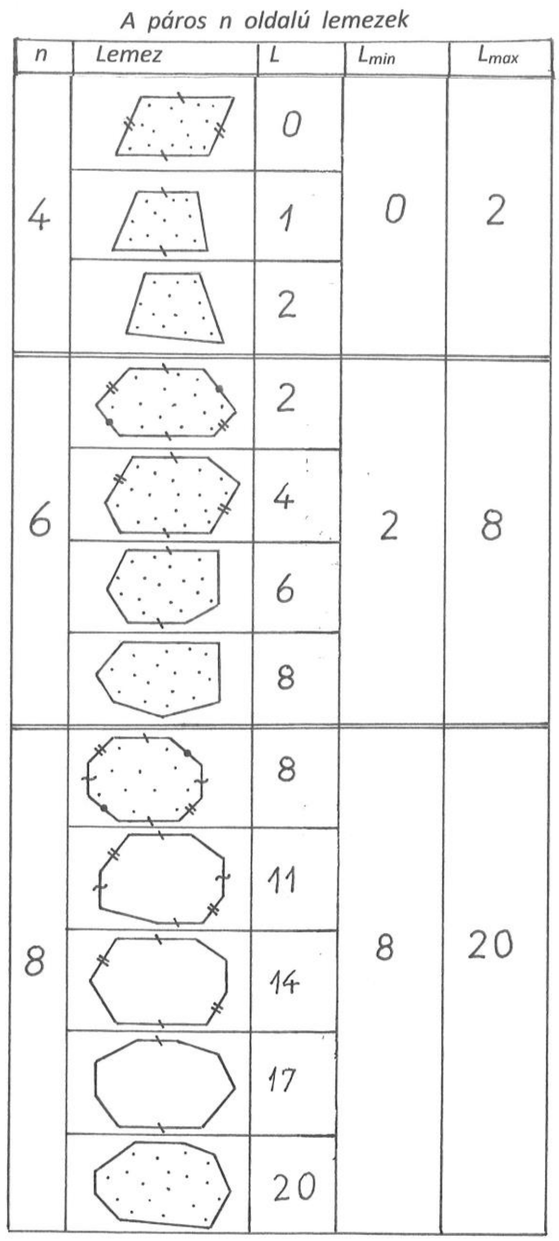
A továbbiakban szükség van a legegyszerűbb konvex lemezfajta elsőfajú rögzíthetőségének feltételére: egy tetszőleges alakú, de befoglaló háromszöggel bíró lemez három ponttal való (primitív) rögzítettségéhez szükséges és elegendő feltétel, hogy a lemez megfelelő három pontjához tartozó, s a lemez peremére merőleges, valamint a lemez belsejébe irányuló vektorok páronkénti hajlásszög összege 360° legyen (3/a. ábra). A 3/b ábra esetében a lemez nem rögzül. Háromszöglemezek esetén a feltétel mindig teljesül, ha mindegyik oldalra egy pont kerül. Az elsőfokú rögzítés esetén mindegy, hogy az oldalon belül hol helyezkedik el a rögzítő pont.



3. ábra



4. ábra



5. ábra

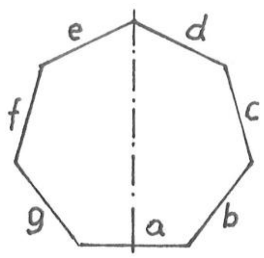
Egy n oldalú sokszöglemez három ponttal történő elsőfokú rögzítése általában több módon lehetséges a 4. és 5. ábra (táblázat), mely különböző alakú sok-szöglemezeket ábrázol, arról ad előzetes képet, hogy egy-egy azonos oldal-számú lemez hányféle módon rögzíthető (a rögzítő pontok föltűntetése nélkül). Egy n oldalú lemez három ponttal történő elsőfajú rögzítésének lehetséges legnagyobb, ill. legkisebb rögzítési számát így jelölöm: $l_I^{\max}(n;3)$, $l_I^{\min}(n;3)$. Nyomdatechnikai okból a két táblázaton ezeket a szimbólumokat csak L_{max} ill. L_{min} helyettesíti. Az már az ábrákból kitűnik, hogy minél több párhuzamos oldala van egy sokszöglemeznek, annál kisebb a rögzíthetőségi szám. Ugyancsak föltűnő, hogy az n oldalú lemez legnagyobb rögzíthetőségi száma egyenlő az $n+2$ oldalú lemezének legkisebb L_{min}- számával.

Ha a legnagyobb rögzíthetőségi értékeket keressük, akkor a párhuzamos oldalú sokszögeket nem tartalmazó szabályos, páratlan n-szögek a megfelelők. Egy szabályos hétszög alkalmas a számítás bemutatására (6. ábra). Kijelöljük a sokszög egyik oldalát: a és a síkidom körüljárási irányát: +. Ezután körüljárva a lemezt, sorba vesszük azokat az oldalakat, melyek a kijelölt és a lemez jobb oldalán lévő oldalak valamelyikével együtt, valamint a lemez másik oldalán választott oldal valamelyikével alkalmasak rögzítésre. Azon oldalakról van szó, melyek egyenesei befoglaló háromszögei a lemeznek. Részletesebben: az a oldalhoz és további 3 oldalhoz (b, c, d) tartozó rögzítések számai: $a : \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 3$. (Az alfák magyarázata: először azokat a befoglaló háromszögeket keresem, melyekhez az a oldal tartozik, a háromszög következő oldala legyen b, az eddig 2 rögzítő pont, a sokszög másik oldalán, az e oldalán találjuk a 3. rögzítő pontot, ill. a befoglaló háromszög harmadik oldalát. Így kaptuk α_1-et. Ezután az a,c - hez tartozó α_2 már kettőnek adódik, stb.) Ezután keressük a b oldallal párosítható $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ oldalakat, stb.

Ebben a példában a kapott számhármasok egymás alá írva az alábbi mátrixot adják:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A mátrixban szereplő számok legnagyobbika – példánkban 3 – általános esetben $m = \dfrac{n-1}{2}$, ha n páratlan, $m = \dfrac{n-4}{2}$, ha n páros.



6. ábra

A mátrix páratlan oldalszámú szabályos sokszög esetén, általános esetben így néz ki:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & \frac{n-3}{2} & \frac{n-1}{2} \\ 1 & 2 & & \dots & & \frac{n-3}{2} \\ \vdots & \vdots & & \dots & & \vdots \\ 1 & 1 & & \dots & & 1 \end{pmatrix}.$$

A rögzítési szám meghatározása az ilyen típusú szimmetrikus mátrix elemeinek összegezését igényli. Az összeg most két részből áll: S_1 az átlóban lévő elemek összege és $2S_2$ az átló fölötti és alatti elemek összege. Részletesen:

$$S_1 = (1 + \frac{n-1}{2})\left(\frac{n-1}{4}\right) = \frac{n^2-1}{8}.$$

Az S_2 ilyen mátrix elemeinek összege:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k-2 & k-1 & k \\ 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & k-1 & \\ \vdots & & & & & & \\ 1 & & & & & & \end{pmatrix}.$$

Ezen mátrix elemeinek összege $S=\frac{k}{6}(k^2+3k+2)$. Figyelembe véve, hogy esetünkben k helyett $\frac{n-3}{2}$ áll, a keresett összeg:

$$S_1+2S_2=\frac{n^2-1}{8}+2\frac{n-3}{2.6}\left[\left(\frac{n-3}{2}\right)^2+3\frac{n-3}{2}+2\right].$$

Egyszerűsítve, az n oldalú szabályos sokszöglemez elsőfajú, három pontos rögzítési lehetőségeinek maximális száma, ha n páratlan szám:

$$l_I^{\max}(n;3)=\frac{(n^2-1)n}{24} \qquad n\geq 3 \quad .$$

Rátérve a páros oldalszámú sokszöglemezek esetére, vegyük figyelembe, hogy most nem a legnagyobb, hanem a legkisebb értéket fogjuk megkapni, mert csupa párhuzamos oldalpárból áll a sokszög. Az alkalmas befoglaló háromszögek összeszámlálása hasonló módon történik, mint a páratlan oldalszámú sokszögek esetében, a különbség annyi, hogy a kezdő oldalhoz tartozó $\alpha_1 = 0$ és az m érték most $(n-4)/2$. Egy szabályos 10-szög esetén a rögzítés mátrixa így néz ki:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A mátrix most két, egyenlő, de különböző színnel jelölt háromszög-mátrix összegezésével kapható. Fölhasználva a korábban is használt képletet, amelyben k helyett az $m=\frac{n-4}{2}$ áll, páros oldalú sokszöglemezre

$$S=\frac{n-4}{2.6}\left[\left(\frac{n-4}{2}\right)^2+3\frac{n-4}{2}+2\right],$$

$$l_I^{\min}(n;3)=2S=\frac{(n-2)n(n-4)}{24} \qquad n\geq 4.$$

A még hiányzó két szélsőérték:

- a páratlan oldalszámú sokszöglemez legkisebb rögzítési száma,
- a páros oldalszámú sokszöglemez legnagyobb rögzítési száma.

Az $l_I^{\min}(n;3)$ értékét kéttagú összegként állíthatjuk elő: a lehető legkisebb, páratlan oldalszámú sokszög, egy oldal kivételével csupa párhuzamos oldalpárból áll (7/a. ábra). S_1: a lemez azon rögzítéseinek száma, melyekben csak a párhuzamos oldalpárok szerepelnek (7/b. ábra), a már megismert képlettel számítható, a képletbe *n-1*-et helyettesítve. Az összeg:

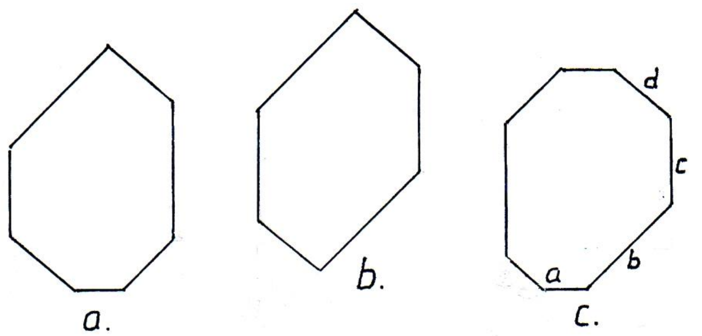
$$S_1 = \frac{(n-1-2)(n-1)(n-1-4)}{24} = \frac{(n-3)(n-1)(n-5)}{24}.$$

A másik összeget azon rögzítések száma adja, melyek mindegyikében szerepel a kivételes oldal (7/c. ábra). Ezen rögzítések érintett oldalai: *ab, ac, ad.* A páros oldalszámú mátrix első sorának legnagyobb eleme *(n-4)/2,* ami most az oldal-többlet értelmében $\frac{n+1-4}{2}$, ezért a második összeg :

$$S_2 = \left(1 + \frac{n-3}{2}\right)\frac{n-3}{4} = \frac{(n-1)(n-3)}{8}.$$

A keresett összeg a fentiek értelmében:

$$l_I^{\min}(n;3) = S_1 + S_2 = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \quad n \geq 3.$$



7. ábra

A még hiányzó negyedik eset eredménye hasonló módon számítható, melynek eredménye, ha *n* páros szám:

$$l_I^{\max}(n;3) = \frac{n(n^2-4)}{24} \quad n \geq 4 .$$

Ha az oldalszám páratlan, akkor a lehetőségek száma $l^{\max} = \frac{(n^2-1)n}{24}$. Ha az oldalszám páros, akkor a lehetőségek maximális száma $l^{\max} = \frac{(n^2-4)n}{24}$.

Irodalomjegyzék

[1] **Tomor B.**: Konvex alakzatok egy rögzítési problémája, Matematikai lapok, (1963).
[2] **Fejes Tóth, L.**: On primitive polyhedra, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 13 (1962).
[3] **Hajdu E.**: Ellipszislemez másodrendű rögzítése (2015).
https://galgoczi.net/HE_anyagok/ELLIPSZISLEMEZ%20MASODRENDU%20ROGZITESE.pdf