

## MODELOS DE COMPORTAMENTO NÃO LINEAR GEOMÉTRICO DE PORTICOS ASSIMÉTRICOS TRIDIMENSIONAIS

**Manuel T. Braz César e Rui Carneiro de Barros**

Assistente 2º Triénio  
Instituto Politécnico de Bragança  
Escola Superior de Tecnologia e de Gestão  
Campus de Santa Apolónia - 5301-857 Bragança - Portugal  
e-mail: brazcesar@ipb.pt

Professor Associado com Agregação  
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto  
Departamento de Engenharia Civil  
R. Dr. Roberto Frias – 4200-465 Porto – Portugal  
e-mail: rcb@fe.up.pt, web <http://www.fe.up.pt/~rcb>

**Palavras-chave:** Instabilidade, Análise Não-Linear P-Delta, Pórticos Tridimensionais.

**Resumo.** *Neste trabalho pretende-se relacionar o comportamento não linear geométrico de pórticos tridimensionais com configuração irregular em planta, admitindo a variação de parâmetros geométricos e de rigidez previamente escolhidos, através da comparação entre os resultados obtidos com software desenvolvido pelos autores e com software comercial. A utilização da formulação da matriz de rigidez no software desenvolvido permite aferir o seu grau de precisão, face aos softwares comerciais utilizados. O estudo determina comparativamente o factor de carga para cada caso, e poderá permitir desenvolver tabelas e gráficos que traduzam de forma simplificada a melhor solução para cada configuração das estruturas tridimensionais analisadas.*

## 1. INTRODUÇÃO

Devido ao número crescente de software comercial para utilização em projecto e investigação na área das estruturas, surge a necessidade de aferir os resultados obtidos como forma de garantir a correcta utilização desse software assim como permitir identificar os problemas tipo para os quais é possível utilizá-lo com mais adequabilidade. Embora os programadores verifiquem o seu funcionamento com exemplos clássicos torna-se imperativo avaliar, para uma grande variedade de problemas não convencionais, o modo de funcionamento, o consumo de recursos na determinação da solução ou soluções e ainda o rigor do resultado obtido.

Desta forma o presente trabalho contempla dois objectivos, em primeiro lugar procede-se à verificação da precisão de software comercial que depois serão usados no objectivo principal do artigo, ou seja, o estudo paramétrico e determinação do parâmetro crítico de estruturas tridimensionais de edifícios, com assimetrias em planta.

Devido ao elevado numero de software existente no mercado procedeu-se à utilização dos mais utilizados no projecto de estruturas de engenharia civil. Neste trabalho utilizaram-se o seguinte software comercial: ROBOT MILLENNIUM e SAP 2000. Software como CYPE e TRICALC foram excluídos uma vez que não permitem o cálculo de parâmetros críticos e modos de encurvadura. De referir que o primeiro software mencionado, ROBOT MILLENNIUM, foi descartado pois não permite este tipo de análise com grande rigor (quando comparado com o resultados mais exactos).

Outro software mais elaborado está a ser utilizado, como o ANSYS e COSMOS, cujos resultados serão parcialmente apresentados.

De forma a tornar os exemplos de cálculo mais realistas optou-se por utilizar estruturas pré-dimensionadas com acções previstas na regulamentação, nomeadamente RSA e EUROCODIGO 1, introduzindo as secções resistentes obtidas nos diversos software.

As estruturas 3D analisadas são compostas por perfis metálicos comerciais e apresentam geometria porticada o que obriga a um estudo dos efeitos de segunda ordem. De forma a introduzir efeitos estabilizadores nas estruturas são utilizados elementos de contraventamento e analisados para cada variação paramétrica (e disposição no espaço) o comportamento não linear geométrico obtendo-se o parâmetro crítico e o respectivo modo de encurvadura. Da compreensão do comportamento para cada configuração contraventada depende a escolha da melhor solução.

Para proceder as comparações e variações paramétricas recorreu-se a utilização de um software de cálculo automático (INST3D), já desenvolvido e apresentado por César e Barros<sup>1</sup>, baseado numa formulação exacta das matrizes de rigidez bidimensionais e que, através da equação matricial de equilíbrio incremental, permite obter os parâmetros críticos para as diversas configurações estudadas assim como os respectivos modos de encurvadura. No algoritmo de resolução através do software INST3D a metodologia seguida baseia-se na formulação da matriz de rigidez exacta da barra (2D) com as funções de estabilidade propostas por Livesley e Chandler<sup>2</sup>. São detalhadas as matrizes utilizadas e esquematizado o modelo de cálculo para obtenção do parâmetro crítico e modos de encurvadura.

Como forma de ilustrar os resultados comparativamente entre os diversos casos estudados foi representada em gráfico a variação paramétrica dos parâmetros críticos, para determinado pórtico 3D assimétrico não-contraventado. Realiza-se ainda o estudo comparativo do mesmo pórtico já contraventado, verificando-se o aumento da capacidade resistente correspondente.

## 2. MODELO DE CÁLCULO DA CARGA CRÍTICA DE PÓRTICOS 2D E 3D

### 2.1 Formulações da matriz de rigidez

O estudo da instabilidade prática de estruturas corresponde à determinação do parâmetro crítico de carga  $\lambda$  e do modo principal de encurvadura. Esta metodologia contempla o conhecimento da matriz de rigidez que relaciona as acções actuantes com as deformações da estrutura. Como o estudo é realizado em pórticos tridimensionais, duas situações podem ser utilizadas para a determinação das incógnitas em causa: utilização de matrizes de rigidez 3D ou utilização de matrizes de rigidez 2D associadas no espaço através das barras de ligação dos vários pórticos com diferente orientação espacial. Em cada um dos casos existe ainda a possibilidade da utilização de formulações exactas e aproximadas das matrizes de rigidez. As formulações aproximadas são simplificações das funções de estabilidade associadas à matriz de rigidez das formulações, exactas através da linearização dessas funções, o que torna necessário analisar a modelação das barras das estruturas em estudo como forma de prevenir erros devidos à simplificação utilizada.

Na primeira abordagem para a determinação da carga crítica foi usado um modelo bidimensional, metodologia na qual se baseia o software desenvolvido (INST3D), utilizando para cada barra prismática dos pórticos a matriz de rigidez exacta de vigas-coluna com funções de estabilidade  $\phi_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) conforme definidas por Reis e Camotim<sup>3</sup>, Barros<sup>4,5</sup> e relacionáveis com as funções de estabilidade originalmente desenvolvidas por Livesley e Chandler<sup>2</sup>. Assim, a formulação utilizada no software desenvolvido (INST3D) é baseada na seguinte matriz de rigidez exacta de vigas-coluna:

$$\begin{bmatrix} \frac{sEI}{L} & \frac{scEI}{L} & 0 & 0 & \frac{s(1+c)EI}{L^2} & \frac{-s(1+c)EI}{L^2} \\ \frac{scEI}{L} & \frac{sEI}{L} & 0 & 0 & \frac{s(1+c)EI}{L^2} & \frac{-s(1+c)EI}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ \frac{s(1+c)EI}{L^2} & \frac{s(1+c)EI}{L^2} & 0 & 0 & \frac{2s(1+c)EI}{mL^3} & \frac{-2s(1+c)EI}{mL^3} \\ \frac{-s(1+c)EI}{L^2} & \frac{-s(1+c)EI}{L^2} & 0 & 0 & \frac{-2s(1+c)EI}{mL^3} & \frac{2s(1+c)EI}{mL^3} \end{bmatrix} \quad (1)$$

em que para  $\rho > 0$  (barras comprimidas) as equações assumem a forma

$$\left. \begin{aligned} s &= \frac{(1 - 2\alpha \cdot \cot(2\alpha))\alpha}{\tan \alpha - \alpha} & m &= \frac{2s(1+c)}{2s(1+c) - \pi^2 \cdot \rho} \\ c &= \frac{2\alpha - \text{sen}(2\alpha)}{\text{sen}(2\alpha) - 2\alpha \cdot \cos(2\alpha)} & \rho &= \frac{P}{P_E}; P_E = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2}; \alpha = \frac{\pi}{2} \sqrt{\rho} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

e para  $\rho < 0$  (barras traccionadas) as equações assumem a forma

$$\left. \begin{aligned} s &= \frac{(1 - 2\gamma \cdot \coth(2\gamma))\gamma}{\tanh \gamma - \gamma} \\ c &= \frac{2\gamma - \text{senh}(2\gamma)}{\text{senh}(2\gamma) - 2\gamma \cdot \cosh(2\gamma)} & \gamma &= \frac{\pi}{2} \sqrt{-\rho} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

A função  $m$  introduzida por Merchant<sup>6</sup> permite representar a diminuição de rigidez ao movimento transversal da barra prismática bi-encastada, como consequência da inclinação que ocorre entre o eixo da barra e a direcção das forças  $P$  responsáveis pela compressão axial. No software INST3D determina-se a carga crítica e o respectivo modo de instabilidade através de um processo iterativo, na resolução da equação incremental de equilíbrio.

Os vários programas ou ‘software’ comerciais baseiam-se na utilização de algoritmos universalmente conhecidos, logo mais fáceis de utilizar e compreender e menos sujeitos a erros, como forma de resolver os problemas relacionados com estruturas em engenharia civil. Numa das abordagens possíveis utiliza-se a matriz de rigidez total aproximada (elástica e geométrica) para a qual é necessário um cuidado especial na modelação dos elementos-barras.

No caso do Software SAP 2000 e de acordo com o manual do programa<sup>7</sup>, para a resolução do problema de instabilidade estrutural de valores e vectores próprios (e determinação do parâmetro crítico) o software utiliza a equação seguinte:

$$[K - \lambda K_G] \varphi = 0 \quad (4)$$

em que  $K$  corresponde à matriz de rigidez elástica,  $K_G$  à matriz de rigidez geométrica (dependente do vector solicitação associado a determinada combinação de cargas),  $\lambda$  os parâmetros de carga (eigenvalues) e  $\varphi$  os modos de instabilidade (eigenvectors). Esta formulação segue a utilização das matrizes elástica e geométrica como consequência da linearização das funções de estabilidade (Reis e Camotim<sup>3</sup>).

Embora o referido manual mencione a utilização de matrizes 3D, a sua formulação não é apresentada pelo que se pressupõe que seja utilizado na determinação do parâmetro crítico.

Uma formulação já apresentada por Almeida, Caraslindas e Barros<sup>8</sup>, baseia-se na seguinte aproximação da matriz de rigidez geométrica 3D (correspondente ao esforço axial T):

$$k_G = \frac{T}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} \\ & & \frac{6}{5} & 0 & -\frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{5} & 0 & -\frac{L}{10} & 0 \\ & & & \frac{I_p}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{I_p}{A} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{2L^2}{15} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{L^2}{30} & 0 \\ & & & & & \frac{2L^2}{15} & 0 & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{L^2}{30} \\ & & & & & & 1 & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & \frac{6}{5} & 0 & 0 & -\frac{L}{10} \\ & & & & & & & & & \frac{6}{5} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & \frac{I_p}{A} & 0 \\ & & & & & & & & & & & \frac{2L^2}{15} \\ & & & & & & & & & & & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix} \quad (5)$$

(Sim.)

Embora o uso da matriz geométrica seja vulgar no software comercial pelas razões já enumeradas, diversos autores têm vindo a desenvolver matrizes de rigidez exactas tridimensionais (6), nomeadamente Eock, Yosuk e Hyu<sup>9</sup>. Devido à sua complexidade e aparente dificuldade em desenvolver algoritmos versáteis e fáceis de programar são normalmente esquecidas aquando da resolução de problemas relacionados com a instabilidade estrutural no âmbito do projecto de estruturas, sendo utilizadas unicamente na investigação. No entanto com o aumento da rapidez de processamento dos computadores pessoais e o aparecimento de novos algoritmos universais de resolução, a utilização destas matrizes revelar-se-á cada vez mais uma ferramenta eficaz já que permitem obter mais rigorosamente os parâmetros críticos de instabilidade e os respectivos modos de envurvadura.

$$k = \begin{bmatrix} S_1 k_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 k_{7,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & S_7 k_{2,2} & 0 & 0 & 0 & S_6 k_{6,2} & 0 & S_7 k_{8,2} & 0 & 0 & 0 & S_6 k_{12,2} \\ & & S_9 k_{3,3} & 0 & S_8 k_{5,3} & 0 & 0 & 0 & S_9 k_{9,3} & 0 & S_8 k_{11,3} & 0 \\ & & & k_{4,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{10,4} & 0 & 0 \\ & & & & S_4 k_{5,5} & 0 & 0 & 0 & S_8 k_{9,5} & 0 & S_5 k_{9,3} & 0 \\ & & & & & S_2 k_{6,6} & 0 & S_6 k_{8,6} & 0 & 0 & 0 & S_3 k_{2,6} \\ & & & & & & S_1 k_{7,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & S_7 k_{8,8} & 0 & 0 & 0 & S_6 k_{12,8} \\ & & & & & & & & S_9 k_{9,9} & 0 & S_8 k_{11,9} & 0 \\ & & & & & & & & & k_{10,10} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & k_{11,11} & 0 \\ & & & & & & & & & & & k_{12,12} \end{bmatrix} \quad (6)$$

(Sim.)

Neste caso as funções de estabilidade, para cargas axiais de compressão, são expressas por:

$$S_1 = \frac{1}{1 + \frac{EA}{4P^3L^2}(H_y + H_z)} \quad (6a)$$

$$S_2 = \frac{1}{4}\alpha L \frac{\sin \alpha L - \alpha L \cos \alpha L}{2 - 2 \cos \alpha L - \alpha L \sin \alpha L} \quad (6b)$$

$$S_3 = \frac{1}{2}\alpha L \frac{\alpha L - \sin \alpha L}{2 - 2 \cos \alpha L - \alpha L \sin \alpha L} \quad (6c)$$

$$S_4 = \frac{1}{4}\beta L \frac{\sin \beta L - \beta L \cos \beta L}{2 - 2 \cos \beta L - \beta L \sin \beta L} \quad (6d)$$

$$S_5 = \frac{1}{2}\beta L \frac{\beta L - \sin \beta L}{2 - 2 \cos \beta L - \beta L \sin \beta L} \quad (6e)$$

$$S_6 = \frac{1}{6} \frac{\alpha^2 L^2 (1 - \cos \alpha L)}{2 - 2 \cos \alpha L - \alpha L \sin \alpha L} \quad (6f)$$

$$S_7 = \frac{1}{6} \frac{\alpha^2 L^2 (1 - \cos \alpha L)}{2 - 2 \cos \alpha L - \alpha L \sin \alpha L} - \frac{\alpha^2 L^2}{12} \quad (6g)$$

$$S_8 = \frac{1}{6} \frac{\beta^2 L^2 (1 - \cos \beta L)}{2 - 2 \cos \beta L - \beta L \sin \beta L} \quad (6h)$$

$$S_9 = \frac{1}{6} \frac{\beta^2 L^2 (1 - \cos \beta L)}{2 - 2 \cos \beta L - \beta L \sin \beta L} - \frac{\beta^2 L^2}{12} \quad (6i)$$

em que  $\alpha^2 = \frac{P}{EI_z}$  e  $\beta^2 = \frac{P}{EI_y}$

Esta matriz também pode ser linearizada obtendo-se a matriz de rigidez geométrica 3D (aproximada) já representada na equação (5).

## 2.2 Métodos exactos para a obtenção dos parâmetros críticos e modos de instabilidade

Existem duas metodologias, em função do tipo de matriz utilizada, para determinar os parâmetros críticos e os modos de instabilidade. No caso do programa INST3D a matriz de rigidez global exacta dos pórticos 3D é obtida por assemblagem e espalhamento criteriosos das matrizes de rigidez locais 2D, e a posterior determinação do parâmetro crítico envolve

também o conhecimento dos limites inferior (para pórticos deslocáveis ou de nós móveis) e superior (para pórticos indeslocáveis ou de nós fixos) entre os quais será procurado. Neste tipo de análise a contribuição de cada pórtico para o comportamento 3D faz-se ao nível dos elementos pertencentes a dois ou mais pórticos não complanares. Estes pórticos impedem o movimento dos restantes através da contribuição da sua inércia. Os elementos laminares – lajes – são modeladas como tendo comportamento de diafragma rígido, procedimento valido para o software comercial SAP 2000 pela utilização de *Diaphragm Constraints (Rigid Links)*.

Após conhecer o parâmetro crítico e resolvendo a equação (4) obtêm-se os modos de encurvadura associados ao(s) parâmetro(s) crítico(s). No caso de se utilizar software com matrizes de rigidez tridimensionais exactas (em vez de matrizes de rigidez bidimensionais exactas) o processo é mais rigoroso na obtenção da carga crítica e do modo de encurvadura, mas mais dispendioso em termos de recursos já que o numero de variáveis aumenta significativamente e consequentemente o numero de equações a resolver (face à ordem da nova matriz), o que torna este processo aparentemente mais difícil de aplicar a estruturas com um numero elevado de elementos.

### 3. ANÁLISE EXACTA VS ANÁLISE APROXIMADA

Antes de apresentar o cálculo relativo à determinação do parâmetro crítico de um pórtico tridimensional assimétrico através dos softwares INST3D e SAP 2000 torna-se necessário aferir o rigor de cada um na obtenção do resultado final.

Como forma de calibrar o software utilizado procedeu-se à determinação manual do parâmetro crítico de dois pórticos 2D, um de nós fixos e o segundo de nós móveis, representados na Figura 1. Após determinar analiticamente a carga crítica destes pórticos, introduziram-se os dados dos referidos pórticos no software INST3D e precedeu-se à determinação de  $\lambda_{cr}$ . De referir que o software unicamente permite a obtenção do parâmetro crítico e dos modos de encurvadura para pórticos com encastramentos na base.

De seguida utilizou-se o software SAP 2000 e ANSYS 8.0<sup>10</sup> e repetiu-se o processo anteriormente descrito. Note-se que o software INST3D utiliza uma formulação exacta da matriz de rigidez (bidimensional) enquanto que o SAP 2000 utiliza uma formulação aproximada das matrizes  $K$  e  $K_G$  e o ANSYS 8.0 utiliza uma formulação exacta da matriz de rigidez elástica da barra prismática tridimensional (incluindo efeitos de flexo-torção) e a mesma matriz de rigidez geométrica também utilizada no SAP 2000.

Verificou-se que com a utilização do software INST3D o resultado obtido coincide com o resultado analítico o que valida a formulação utilizada. Relativamente ao software comercial verificou-se que os resultados obtidos com o SAP 2000 apresentam erros devido à formulação aproximada utilizada pelo programa. Como forma de diminuir o erro aumentou-se o grau de discretização dos elementos obtendo-se resultados equivalentes para discretizações bastante elevadas como se pode verificar na Tabela 1. Os resultados obtidos pelo ANSYS 8.0 (para estes pórticos de calibração) são praticamente coincidentes com os obtidos pelo INST3D, revelando uma maior precisão e simplicidade de modelação em relação ao SAP 2000.

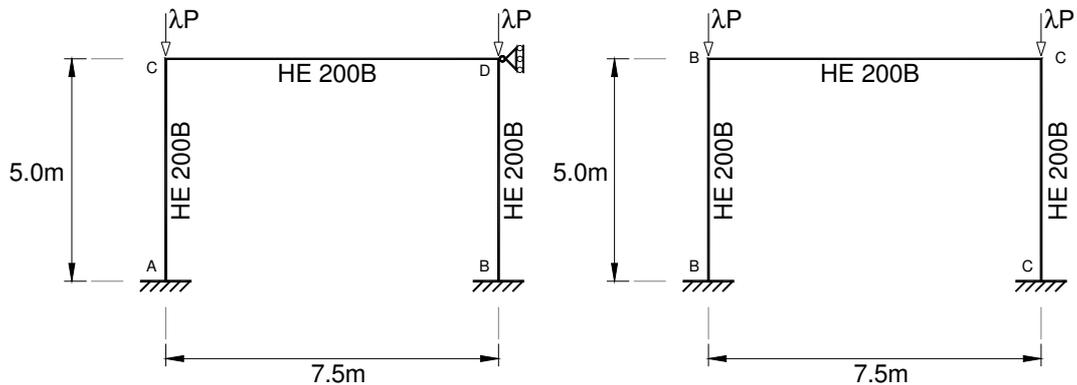


Figura 1. Pórticos de calibração (esquerda: nós fixos; direita: nós móveis)

Nestes pórticos foi considerada a encurvadura no plano XZ (2D) e impossibilitada de encurvar na direcção perpendicular YZ. Foram utilizados os graus de liberdade  $U_x$ ,  $U_z$  e  $R_y$ , segundo a notação do SAP 2000. O material utilizado possui um modulo de elasticidade de 200 GPa.

O cálculo computacional do parâmetro crítico pelo INST3D permitiu determinar para o pórtico de nós fixos  $\lambda_{\text{fixos}} = 10822.652$  e para o pórtico de nós móveis  $\lambda_{\text{móveis}} = 3009.226$ . Reis e Camotim<sup>3</sup> apresentam equações do cálculo analítico manual para a determinação do parâmetro crítico neste tipo de estruturas, sendo  $\lambda_{\text{fixos}} = 10835.206$  e  $\lambda_{\text{móveis}} = 3010.538$ ; estes valores são muito próximos dos anteriores, com erros relativos de arredondamento de 0.001%.

Utilizando o software comercial anteriormente mencionado, para várias discretizações dos elementos constituintes da estrutura, obtiveram-se os resultados indicados na Tabela 1.

Modelo (número elementos/ barra)	Nós Móveis					Nós Fixos				
	SAP 2000	ANSYS	INST3D	Erro relativo S      A		SAP 2000	ANSYS	INST3D	Erro relativo S      A	
1	3315	3034	3009	10.1%	0.8%	1043895	18224	10823	9545%	68%
2	3115	3016	3009	3.5%	0.5%	12613	11090	10823	16.5%	2.4%
3	3046	3010	3009	1.2%	0.0%	11677	10902	10823	7.9%	0.7%
4	2996	3009	3009	-0.4%	0.0%	10988	10852	10823	1.5%	0.3%
8	2946	3009	3009	-2.0%	0.0%	10258	10828	10823	-5.2%	0.0%
16	2933	3009	3009	-2.5%	0.0%	10072	10826	10823	-6.9%	0.0%
32	2930	3009	3009	-2.6%	0.0%	10026	10826	10823	-7.3%	0.0%
64	2929	3009	3009	-2.6%	0.0%	10014	10826	10823	-7.4%	0.0%

Tabela 1. Erros associados à discretização de barras no SAP 2000 para o cálculo de parâmetro crítico.

Nesta tabela verifica-se que o SAP 2000 apresenta erros por excesso e por defeito. Os erros

por excesso estão relacionados com a discretização dos elementos que compõem a estrutura: para o caso do pórtico de nós fixos com um elemento o erro cometido é muito grande o que permite concluir que é necessário cuidado especial ao escolher a discretização para analisar este tipo de estruturas. Os erros por defeito estão associados aos algarismos significativos utilizados pelo programa e ainda aos valores utilizados para as características das secções dos elementos. Considerou-se como ‘correcta’ uma discretização de referência de 4 elementos.

## 4. PÓRTICO 3D ASSIMÉTRICO

### 4.1 Generalidades

Neste ultimo ponto serão apresentados resultados paramétricos obtidos para a análise de um pórtico 3D com geometria irregular em planta e com 5 pisos de elevação. Os pórticos em questão são repetições espaciais de um pórtico tridimensional – pórtico base – que permite comparar os resultados obtidos aquando da variação paramétrica de diversas características da estrutura. Os parâmetros em causa permitem otimizar a configuração da estrutura em estudo, ao permitir determinar melhores soluções estruturais para esquemas modulares com repetição em planta e alçado.

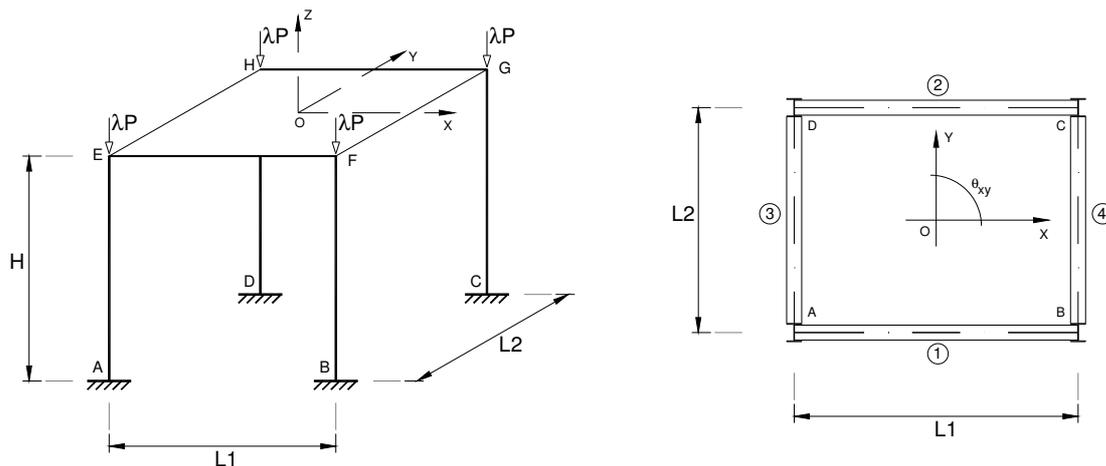


Figura 2. Pórtico base 3D, não-contraventado, composto de 4 pórticos 2D

Resumidamente explica-se o propósito do estudo: a obtenção de  $\lambda$  e dos modos de encurvadura. Nos pórticos deslocáveis os deslocamentos laterais podem ocorrer por flexão dos pilares e neste caso torna-se importante o uso de elementos diagonais de contraventamento para impedir a perda de geometria (ou pode-se ainda recorrer ao compromisso entre as inércias das barras dos pórticos, limitando os deslocamentos horizontais) que devido à sua rigidez axial permita absorver os esforços de tracção e impedir o deslocamento do pórtico. As barras utilizadas no contraventamento diagonal são modeladas com rigidez à flexão nula e rigidez axial inferior à adoptada para os pilares e vigas, e a formulação matricial corresponde à adição da contribuição da rigidez axial das barras

inclinadas nos andares com diagonais; só posteriormente se realiza a determinação do parâmetro crítico e do modo de encurvadura. No caso de pórticos parcialmente contraventados em alguns pisos, como não se sabe se o pórtico é deslocável ou indeslocável é necessário efectuar as duas verificações determinando os parâmetros críticos respectivos  $\lambda_{des}$  e  $\lambda_{indes}$ . Aplicando a matriz de rigidez exacta bidimensional à formulação matricial que relaciona os esforços actuantes com as deformações resultantes obtém-se, por um processo incremental, o parâmetro crítico e o respectivo modo de encurvadura assim como a deformação imediatamente antes da perda de estabilidade.

Na formulação utilizada no programa INST3D considera-se, conforme anteriormente apresentado por César e Barros<sup>1</sup>, que os pórticos são rectangulares constituídos por barras prismáticas de secção constante com: Numero de pilares constante em cada piso; Pilares sempre na mesma prumada; Ligações rígidas em cada nó; Ligações triplas (encastramentos) ao exterior; Cargas verticais concentradas nos nós.

Neste trabalho, e sem qualquer perda de generalidade, apresentam-se os resultados da análise de uma estrutura assimétrica de 5 pisos: sem elementos de contraventamento; e com determinada configuração (mais eficiente em termos de rigidez) dos elementos de contraventamento.

#### 4.2 Estudos comparativos para um pórtico 3D com assimetria em planta

O exemplo seguinte refere-se a um edifício de habitação a realizar em estrutura metálica para o qual se pretende determinar o parâmetro crítico e modos de encurvadura. A estrutura, embora não tenha sido construída, foi pré-dimensionada utilizando a quantificação das acções preconizadas nos regulamentos RSA e EUROCÓDIGO 1 de forma a obter secções com características reais. De referir que não foi considerado o efeito do vento nem do sismo, e que se considera não existente a possibilidade de qualquer perda de estabilidade local.

	Sobrecarga
Habitação:	2.0 kN/m <sup>2</sup>
Coberturas:	1.0 kN/m <sup>2</sup>

Tabela 2. Sobrecarga em edifícios - RSA.

As lajes são consideradas como tendo comportamento de diafragma rígido no seu plano e para o pré-dimensionamento utilizaram-se lajes maciças com 0.15m de espessura. Foram consideradas também as acções referentes às paredes exteriores, divisórias e apoios do telhado. Escolheram-se perfis da série HEA, usuais nos projectos de estruturas metálicas, quer para as vigas quer para os pilares de forma a minorar diversidades de interpretação de resultados. As diagonais utilizadas no modelo possuem uma rigidez à flexão nula e uma área de 11cm<sup>2</sup>, inferior à adoptada para os pilares e vigas, e correspondente a perfis metálicos da série UPN (UPN80). O aço utilizado possui um modulo de elasticidade de 210 GPa. Foram alterados realisticamente vários parâmetros relativos à geometria global do pórtico plano, nomeadamente o vão entre pilares (L) e a altura dos pisos (H). O parâmetro L varia entre 3m

e 8m com incrementos de 1.0m enquanto o parâmetro H varia entre 3m e 4m, com incrementos de 0.5m. Para cada caso paramétrico foi determinada a carga crítica e os modos de encurvadura para o pórtico em estudo.

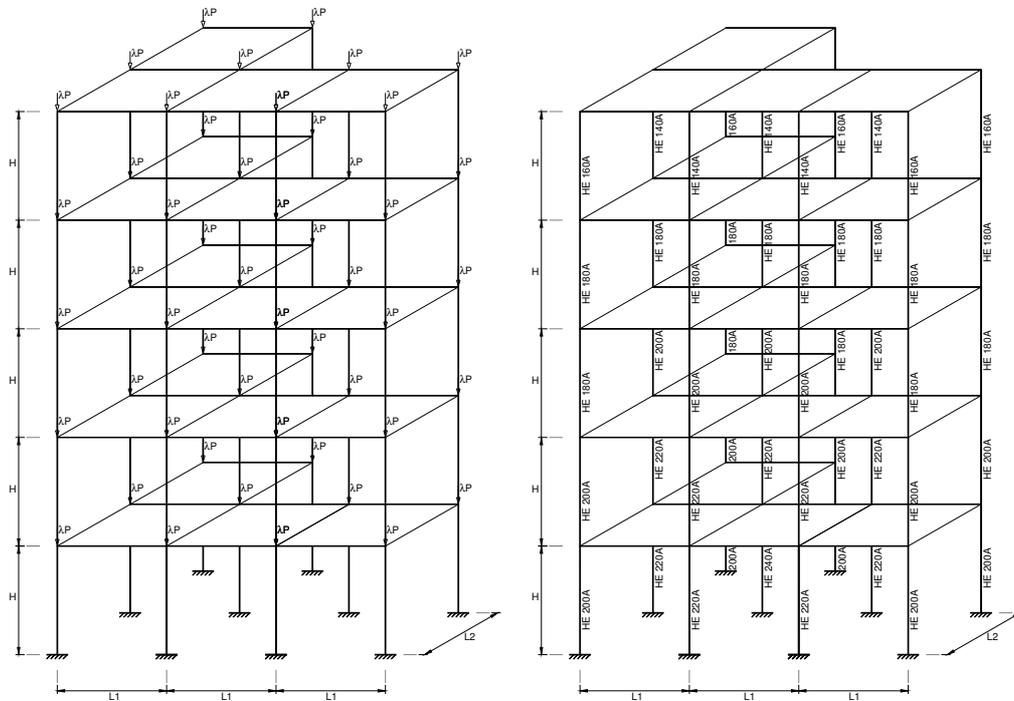


Figura 3. Pórtico 3D não-contraventado (Perspectiva).

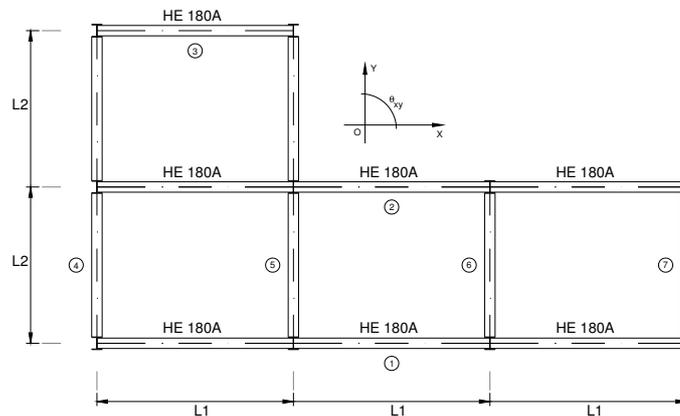


Figura 4. Pórtico 3D não-contraventado (Planta).

O estudo dos pórticos tridimensionais envolve o conhecimento do desempenho dos pórticos 2D que associados formam a estrutura 3D. Para verificar o nível de desempenho e controlar o erro associado à modelação 3D comparativamente ao modelo 2D, foram estudados

os pórticos bidimensionais constituintes da estrutura para as configurações de nós móveis e nós fixos, a cada uma das quais correspondem famílias de valores do parâmetro crítico. Na Tabela 3 estão representados os parâmetros críticos e os erros relativos associados ao pórtico das Figuras 3-4, com  $L_1=L_2=4.0\text{m}$  e  $H=3.0\text{m}$  e com discretização de 4 elementos por barra.

Pórtico	Nós Móveis			Nós Fixos		
	SAP 2000	INST3D	Erro	SAP 2000	INST3D	Erro
1	535.67	540.63	-0.91%	1563.43	1496.04	4.50%
2	568.10	608.75	-6.67%	1581.29	1533.12	3.14%
3	402.19	409.47	-1.77%	1380.67	1318.77	4.69%
4	782.68	830.75	-5.78%	2993.84	3206.13	-6.62%
5	828.85	860.25	-3.65%	3056.78	3267.11	-6.43%
6	713.02	761.39	-6.35%	3620.87	3859.97	-6.19%
7	624.62	665.26	-6.10%	2798.57	2978.42	-6.03%

Tabela 2. Parâmetros críticos dos pórticos e erros relativos associados ao modelo 2D.

Os erros associados à determinação dos parâmetros críticos dos pórticos são devidos, como já foi referido, à utilização duma formulação aproximada no SAP2000 (e também muito parcialmente à utilização de valores exactos das propriedades das secções com inúmeras casas decimais). Para os casos em estudo considerou-se o erro relativo assim determinado como um valor de referência pouco significativo face à discretização utilizada, embora se saiba que o erro associado à linearização das funções de estabilidade com discretização de mais de 3 elementos por barra seja inferior a 3.00%.

Na Figura 5 apresenta-se o pórtico tridimensional não-contraventado, analisado quer pelo SAP 2000 quer pelo INST3D, e ainda a deformação associada ao primeiro modo de encurvadura. O pórtico não está contraventado e como se pode verificar na deformada do primeiro modo a estrutura perde estabilidade por deformação global apresentando padrão de deformação de estrutura de nós móveis.

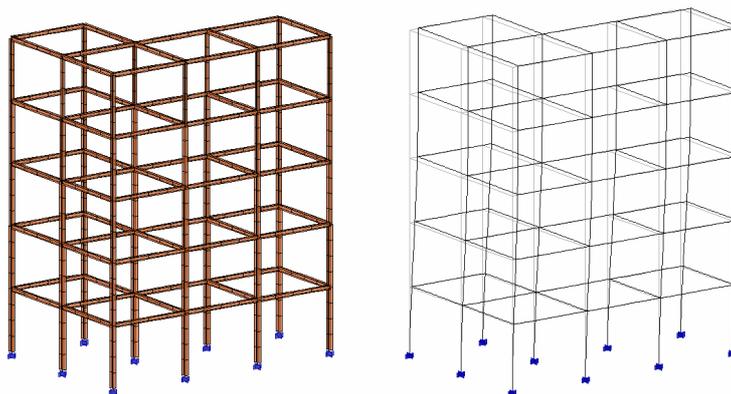


Figura 5. Pórtico 3D (SAP 2000) não-contraventado (Modelo e Deformada do 1º modo).

Procede-se agora à representação da determinação do parâmetro crítico para as variações paramétricas em estudo do pórtico 3D representado nas Figuras 3-4.

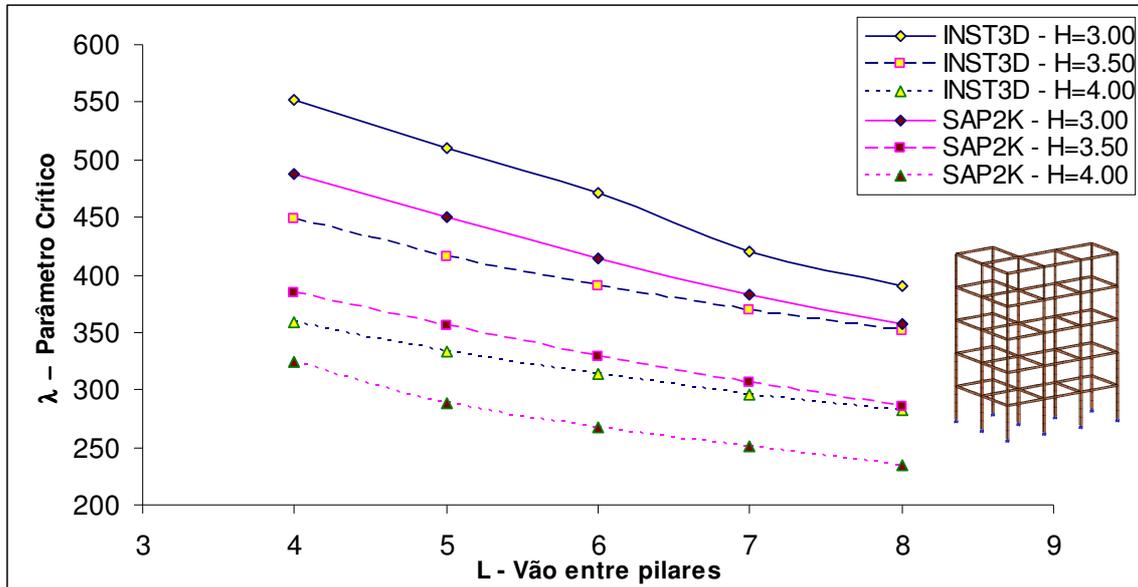


Figura 6. Resultados paramétricos obtidos pelo INST3D e SAP2000, para o pórtico não-contraventado

Como forma de reduzir a mobilidade da estrutura optou-se por introduzir varias configurações de elementos de contraventamento. Os elementos utilizados correspondem a perfis metálicos da série UPN (UPN80) com área de 11cm<sup>2</sup>, considerados como elementos bi-articulados.

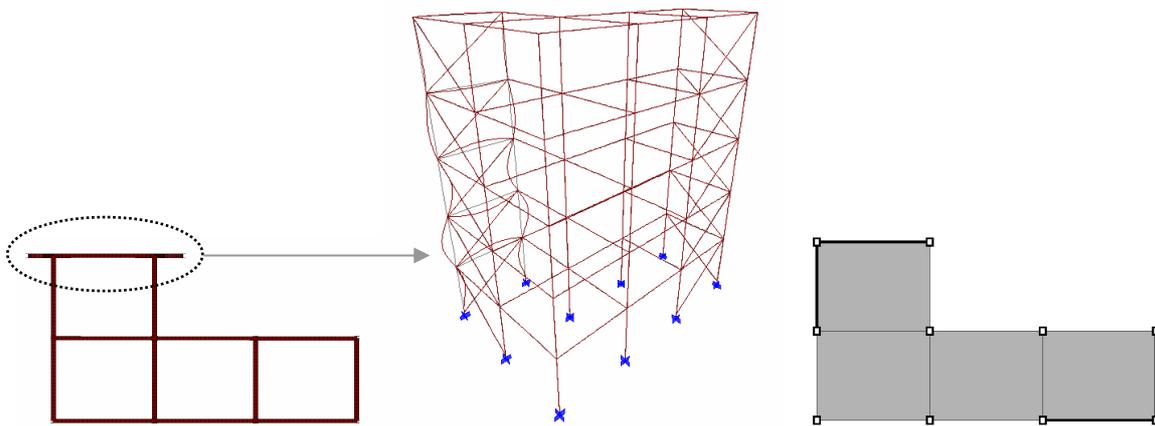


Figura 7. Pórtico 3D (SAP 2000) contraventado (Planta da deformada 3D 1º modo; Deformada 3D 1º modo; Planta da distribuição dos contraventamentos)

Na Figura 7 encontra-se representado o mesmo pórtico da figura anterior, com  $L_1=L_2= 4$  m e  $H= 3$  m. Neste caso a estrutura possui contraventamentos e como se pode verificar a perda de estabilidade ocorre por perda parcial de estabilidade (no pórtico 3). O padrão de deformação, quer do pórtico bidimensional (pórtico 3) quer da estrutura 3D, corresponde a uma configuração de nós fixos. O parâmetro crítico associado à análise pelo SAP 2000 é  $\lambda_{cr}= 1398.72$ , e o associado à análise pelo INST3D é  $\lambda_{cr}= 1347.62$ ; portanto determinação realizada pelo SAP 2000 com um erro relativo de 3.79%, valor aceitável para a discretização efectuada. Para este caso paramétrico observou-se quase uma triplicação da capacidade resistente o que revela a grande importância do contraventamento eficaz de estruturas tridimensionais.

Desta forma pode-se afirmar, para este caso de contraventamento, que segundo o SAP 2000 o pórtico 3 controla a estabilidade da estrutura com o correspondente parâmetro crítico. Este raciocínio é também validado pelo software INST3D com a determinação do pórtico 3 como crítico.

Outras configurações de 4 planos de contraventamento foram estudadas para a estrutura 3D, conduzindo ao mesmo factor de instabilidade quando calculadas pelo INST3D (sem efeitos de flexão-torção); quando calculadas pelo SAP 2000 obtiveram-se factores de instabilidade da ordem de grandeza do anteriormente apresentado para o contraventamento indicado na Figura 7. Verificou-se que os resultados obtidos pelo INST3D estão do lado da segurança ao avaliar capacidades resistentes da estrutura global pórtico 3D com erro relativo cerca de 3-4% inferiores aos resultados obtidos pelo SAP 2000.

## 5. CONCLUSÕES

Mencionaram-se várias metodologias exactas e aproximadas para o estudo da estabilidade de pórticos bi e tridimensionais. Para determinado pórtico de calibração, aferiu-se o rigor de software disponível e desenvolvido utilizados. Foi realizado com sucesso um estudo paramétrico de determinada estrutura tridimensional assimétrica (sem contraventamentos) que permitiu comparar o rigor das formulações exacta e aproximada utilizadas. Foi determinado o parâmetro crítico da estrutura tridimensional contraventada segundo determinado esquema, concluindo-se que a utilização de elementos de contraventamento influencia grandemente o comportamento estrutural assim como a capacidade resistente em termos de carga última de instabilidade. Da utilização racional destes elementos depende o nível de desempenho dos esquemas estruturais utilizados. A introdução de elementos de contraventamento em locais apropriados, em conjunto com os elementos resistentes, garantem o bom funcionamento em serviço da estrutura.

## REFERÊNCIAS

- [1] César, M.T. e Barros, R.C., *Desempenho não linear geométrico de pórticos metálicos contraventados sob acções verticais*, 4º Congresso de Construção Metálica e Mista, ISBN 972983765-1, Tema 4 – Análise e Verificação da Segurança, pp.367-378, Lisboa (2003).

- [2] Livesley, R.K. and Chandler, D.B., *Stability Functions for Structural Frameworks*, Manchester University Press, Manchester, UK, (1956).
- [3] Reis, A.J. e Camotim, D., *Estabilidade Estrutural*, McGraw-Hill de Portugal, (2001).
- [4] Barros, R.C., *Apontamentos sobre Instabilidade de Estruturas*, Conjunto de trabalhos impressos e manuscritos de apoio ao Mestrado em Estruturas de Eng<sup>a</sup> Civil, Secção de Estruturas, Departamento de Eng<sup>a</sup> Civil, F.E.U.P., Porto, (1999-2002).
- [5] Barros, R.C. e Oliveira, S., *Análise Elástica de 2<sup>a</sup> Ordem de Pórticos Planos em Calculadora Programável*, 3<sup>o</sup> Congresso Luso-Moçambicano de Engenharia: Engenharia e Inovação para o Desenvolvimento, Ed: J. Silva Gomes, C. Félix Afonso, C. Conceição António e A. Santos Matos, ISBN 972-9025-62-2, Volume I, Tema C - Materiais e Estruturas, pp. 435-446, Maputo, Moçambique, (2003).
- [6] Horne, M.R. and Merchant, W., *The Stability of Frames*, Pergamon Press, UK, (1965).
- [7] SAP 2000, *Software Verification*, Computers and Structures Inc., Berkeley – CA, (2003).
- [8] Almeida, R.F., Caraslindas, H.P. e Barros, R.C., *O Efeito da Não-Linearidade Geométrica P-Δ em Análises Estáticas Inelásticas de Pórticos Metálicos*, Ed: J. Infante Barbosa, ISBN 972-778-058-X, Volume II, Mecânica dos Sólidos e Estrutural, pp.731-742, Évora (2003).
- [9] Kim, S., Kim Y. and Choi S., *Nonlinear Analysis of 3-D Steel Frames*, Thin-Walled Structures 39, pg. 445-461, Elsevier Science Ltd., (2001).
- [10] ANSYS, *ANSYS Release 8.0 Documentation*, ANSYS inc., Canonsburg - PA (2003).