



TITLE:

Minimizing methods and related topics for twist maps and the n-body problem(Abstract_要旨)

AUTHOR(S):

Kajihara, Yuika

CITATION:

Kajihara, Yuika. Minimizing methods and related topics for twist maps and the n-body problem. 京都大学, 2023, 博士(情報学)

ISSUE DATE:

2023-01-23

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.k24328>

RIGHT:

許諾条件により本文は2023-09-14に公開

京都大学	博士 (情報学)	氏名	梶原唯加
論文題目	Minimizing methods and related topics for twist maps and the n -body problem (ツイスト写像と n 体問題に関する最小化法及び関連する話題)		
<p>(論文内容の要旨)</p> <p>万有引力により相互作用するn個の質点の運動を解析するという古典力学のn体問題は、17世紀からの長い歴史をもち、数学、物理学、天文学の発展に多大な影響を与えている。 $n=2$の場合には運動方程式の一般解を求めることは可能であるが、Poincaréの先駆的な研究などにより、$n \geq 3$の場合には不可能なことが知られている。特に、3体問題において1質点の質量を無限小としたものは制限3体問題とよばれ、小惑星の運動や宇宙探査機の軌道設計など応用上重要なものとなっている。 n体問題に対しては、2000年頃から変分問題としての定式化のもと最小化法を用いた周期軌道の存在証明が活発に行われ大きな成功を収めている。しかしながら、制限3体問題に対しては、特有の困難さのためそのような研究はほぼ皆無である。また、低次元力学系との関係が深く研究されている組み紐理論は、n体問題に対しても大きな成果が期待されるものの、その高次元性のため、適用例はほとんど報告されていない。</p> <p>一方、ツイスト写像は、平面上の制限3体問題など2自由度ハミルトン系に関連しても現れる、面積保存かつツイスト条件を満たす2次元写像で、応用上も重要なものである。ツイスト写像は、変分構造をもつことが知られており、最小化法を用いてこれまでに周期軌道やその間を有限回遷移する軌道の存在が示されている。さらに、2つの周期軌道間を無限回遷移する軌道の存在も予想されるが、その変分構造における汎関数の値が発散してしまうため未解決となっている。</p> <p>本論文では、まず、最小化法を用いて、これまで未解決であった、ツイスト写像における2つの周期軌道間を無限回遷移する軌道の存在を証明している。また、古典力学のn体問題の代表例の1つである制限3体問題とそれを特殊化したHill問題と2中心問題を取りあげ、さまざまな周期軌道の存在証明を最小化法により与えている。さらに、$2n$体問題の対称周期軌道の組み紐の型を特定し、その拡大率を求め、古典力学のn体問題における組み紐理論の有用性をも示している。</p> <p>本論文の構成は以下のとおりである。</p> <p>第1章では、研究の背景と概要が述べられている。</p> <p>第2章では、ツイスト写像において2つの周期軌道間を無限回遷移する軌道の存在証明を与えている。この結果は、周期軌道やその間のヘテロクリニック軌道および周期軌道間を有限回遷移する軌道の存在を証明したMatherおよびYuの結果を発展させるものである。従来知られている変分構造では周期軌道間を無限回遷移する軌道に対する汎関数の値が発散してしまうという問題を、新規の変分構造を新たに導入することにより解決している。</p> <p>第3章では、制限3体問題における多様な周期軌道の存在証明を与えている。一般的な3体問題と比して、制限3体問題では作用積分の最小点が衝突軌道とならないことを示すことが困難であり、n体問題に対して用いられる標準的な手法をそのまま適用することはできない。本章では、逆に、その要因になっていたコリオリ力の項を有効に利用することによりその困難を克服し、作用積分の最小点が衝突軌道とならないことを示している。また、周期軌道の存在証明において、境界条件の取り方に任意性があり、それにより多数の周期軌道の存在の証明に成功している。</p>			

第4章は、制限3体問題を特殊化したHill問題と2中心問題における多様な周期軌道の存在証明を与えている。Hill問題は、制限3体問題において1つの有質量近傍での質量零の質点の運動が近似的に記述され、例えば、無視できない太陽の影響も受けながら地球の周りを周回する実際の人工衛星の軌道を精度よく計算する上で有用なモデルである。また、2中心問題は制限3体問題の代替えとしてEulerにより提案されたもので、有質量の2質点が空間に動かず固定されていることが仮定される。Hill問題に対しては、与えられた平面にホロノーム拘束を受ける場合も含めて、対称的な周期軌道の存在を、2中心問題に対しては周期軌道の中で特に強い対称性をもち、ある瞬間完全に静止するbrake軌道の存在を、それぞれ示すことに成功している。

第5章では、これまでに最小化法により得られていた $2n$ 体問題の周期軌道を取りあげ、それらがなす組み紐の型と拡大率について論じている。NielsenとThurstonにより写像類群は組み紐により分類され、組み紐の型によってその力学系の複雑さの指標となる拡大率が計算される。本章では、 $2n$ 体問題の周期軌道から構成される組み紐の型が擬アノソフ型であることを証明し、拡大率が黄金数と類似の無限連分数で与えられる金属数の自然数のべきで表されることを示した。

最後に、第6章では、本論文で得られた結果を要約し、今後の課題について述べている。

(続紙 2)

(論文審査の結果の要旨)

本論文では、ツイスト写像と古典力学の n 体問題を取りあげ、最小化法を用いて種々の軌道の存在を証明している。具体的には、ツイスト写像における2つの周期軌道間を無限回遷移する軌道や、制限3体問題とそれを特殊化したHill問題と2中心問題におけるさまざまな周期軌道の存在証明を与えている。また、 $2n$ 体問題における対称周期軌道の組み紐の型を特定し、その拡大率を求めている。研究成果は以下の通りである。

1. ツイスト写像における2つの周期軌道を無限回遷移する軌道の存在証明

ツイスト写像に対して、これまで周期軌道および周期軌道間を有限回遷移する軌道の存在は示されていたが、その際用いられていた変分構造における汎関数の値が発散してしまうため無限回遷移する軌道の存在を示すことは困難であった。本論文では、新たな変分構造を導入することにより、この困難を克服し、無限回遷移する軌道の存在証明を与えることに成功している。単に軌道の存在を示しただけでなく、そのような軌道を捉えられる新しい変分構造も定式化しているため、今後さらなる新しい軌道の存在証明への可能性も期待される。

2. 制限3体問題における多様な周期解の存在証明

2000年にChencinerとMontgomeryが3体問題における8の字解の存在を証明して以降、 n 体問題に対して最小化法を用いたさまざまな周期解の存在証明が与えられている。しかしながら、小惑星の運動や宇宙探査機の軌道設計など応用上も重要である制限3体問題に対しては、作用積分の最小点が衝突軌道でないことを示すことが困難なことから、そのような研究成果はこれまで皆無であった。本論文では、逆に、その要因になっていたコリオリ力の項を有効に利用することによりその困難を克服している。また、周期軌道の存在証明において、境界条件の取り方にある程度任意性があり、それにより多数の周期解の存在の証明に成功している。

3. Hill問題と2中心問題における多様な周期解の存在証明

制限3体問題の特殊化であるHill問題と2中心問題において多様な周期解の存在が証明されている。特に、Hill問題は、無視できない太陽の影響も受けながら地球の周りを周回する実際の人工衛星の軌道を精度よく計算できるなど応用上も有用である。Hill問題に対しては、与えられた平面にホロノーム拘束を受ける場合も含めて、対称的な周期解の存在を、2中心問題に対しては周期解の中で特に強い対称性をもち、ある瞬間完全に静止するbrake軌道の存在を、それぞれ示すことに成功している。

4. $2n$ 体問題の周期解の組み紐型の拡大率の表現

これまでに最小化法により得られていた $2n$ 体問題の対称周期軌道に対し、それらがなす組み紐の型と拡大率を解析している。NielsenとThurstonにより写像類群は組み紐により分類され、組み紐の型によってその力学系の複雑さの指標となる拡大率が計算される。本論文では、 $2n$ 体問題の対称周期軌道から構成される組み紐の型が擬アノソフ型であることが証明され、その拡大率が金属数で表されることが示されている。 n 体問題と組み紐理論を結びつける研究はこれまでになく、今後の理論の展

開が期待される。

以上のように、本論文はツイスト写像と古典力学の n 体問題における最小化法および組み紐理論を用いた数学解析に関するものであり、多くの技術的困難を伴う課題に対して極めて優れた成果を与え、その理論の発展に大きく寄与するものである。よって、本論文は博士（情報学）の学位論文として価値あるものであると認めた。また令和4年12月19日、論文内容とそれに関連した事項について、試問を行った結果、合格と認定する。また、本論文のインターネットでの全文公表についても支障がないことを確認した。