Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 44, e20220230 (2022)
www.scielo.br/rbef
DOI: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2022-0230

Physics Education Research

Las relaciones causa-efecto en las ecuaciones de Maxwell y sus implicancias en la enseñanza del electromagnetismo en los cursos introductorios de Física

Cause-effect relationships in Maxwell's equations and their implications in the teaching of electromagnetism in introductory physics courses

Alvaro Suárez[1], Arturo C. Martí[*2], Kristina Zuza[3], Jenaro Guisasola[3]

[1]Consejo de Formación en Educación, Departamento de Física, Montevideo, Uruguay.
[2]Universidad de la República, Instituto de Física, Facultad de Ciencias, Iguá 4225, Montevideo, 11200, Uruguay.
[3]Universidad del País Vasco, Departamento de Fisica Aplicada, España.

Recibida en 10 de Agosto, 2022. Revisado en 10 de Octobre, 2022. Aceptado en 12 de Octobre, 2022.

Un tratamiento superficial de las ecuaciones de Maxwell puede llevar a interpretar la existencia de una relación causal entre los diferentes términos y, por ende, que un campo eléctrico variable en el tiempo genera un magnético y viceversa. En este artículo abordamos los problemas asociados a dichas interpretaciones y sus consecuencias para la enseñanza de la física en cursos introductorios de física universitaria. Primero desarrollamos los principales argumentos que sustentan que las densidades de carga y de corriente, constantes o variables en el tiempo son las generadoras de los campos eléctricos y magnéticos. Proponemos luego una serie de ejemplos a nivel de cursos introductorios que nos permiten discutir las razones por las cuales considerar los campos eléctrico y magnético como entidades disjuntas conduce a contradicciones. Finalmente, analizamos sus implicaciones en la enseñanza de la física.
Palabras clave: Causa-efecto, ecuaciones de Maxwell, investigación en enseñanza de la física, educación universitaria, ecuaciones de Jefimenko.

A thoughtless treatment of Maxwell's equations can lead to the interpretation of the existence of a causal relationship between their different terms and, therefore, that an electric field that varies in time generates a magnetic one and vice versa. In this article we address the problems associated with these interpretations and their consequences for the teaching of physics in introductory university physics courses. First, we develop the main arguments that support that charge and current densities, constant or variable in time, are the generators of electric and magnetic fields. Then, we propose a number of classroom examples at the level of introductory courses that allow us to discuss the reasons why considering the electric and magnetic fields as disjoint entities leads to contradictions. Finally, we analyze their implications in introductory physics teaching.
Keywords: Cause-effect, Maxwell's equations, physics education research, university education, Jefimenko's equations.

1. Introducción

La teoría electromagnética expuesta por J. C. Maxwell en su *"A Treatise on Electricity and Magnetism"* [1] es una de las construcciones científicas más importantes de la física. Es innegable la necesidad que los estudiantes de los diferentes niveles educativos adquieran una comprensión adecuada de los conceptos involucrados. Desde el campo de la Investigación en Enseñanza de la Física (IEF) se han desarrollado múltiples investigaciones sobre la enseñanza del electromagnetismo en áreas tales como entendimiento conceptual, resolución de problemas y currículo e instrucción [2]. Sin embargo, a diferencia de otras áreas como la mecánica, los avances en la IEF han tenido en general un menor impacto en los libros de textos de física introductoria [3–5].

Un aspecto profusamente discutido en la literatura en los últimos 50 años es la cuestión de las fuentes de los campos eléctricos y magnéticos. Un tratamiento superficial de las ecuaciones de Maxwell en los libros de texto de física introductoria suele llevar a interpretar que los campos eléctricos pueden ser generados por partículas cargadas o campos magnéticos variables en el tiempo, y paralelamemente que los magnéticos son producidos por corrientes o campos eléctricos variables en el tiempo [6, 7]. Sin embargo, los estudios sobre la naturaleza de la electrodinámica clásica muestran que las densidades de carga y de corriente, constantes o variables en el tiempo son las generadoras de los campos electromagnéticos [8, pp 516–517], [9], [10, pp 48–49], [11, pp 261–262], [12, pp 449–450]. Este enfoque ha

*Correo electrónico: marti@fisica.edu.uy

tenido poco impacto en los libros de texto de física general, descuidar estos aspectos podría conducir a que los estudiantes interpreten de manera inadecuada las fuentes de los campos electromagnéticos y el significado físico de las ecuaciones de Maxwell [13–17]. En este artículo abordamos a un nivel de física introductoria, el problema de las fuentes de los campos y las relaciones causa-efecto en las ecuaciones de Maxwell y presentamos una serie de situaciones donde se muestra el importante papel del tratamiento unificado del campo electromagnético.

A continuación, desarrollamos los principales argumentos que sustentan que las densidades de carga y de corriente, constantes o variables en el tiempo son las generadoras de los campos eléctricos y magnéticos. En la siguiente sección, mostramos el fenómeno de la corriente de desplazamiento y la relevancia de las fuentes del campo electromagnético para su interpretación en el marco de la teoría electromagnética clásica. Seguidamente, presentamos una serie de ejemplos a nivel de física introductoria en universidad que muestran como un tratamiento unificado de los campos y el énfasis en sus fuentes lleva a evitar interpretaciones incompletas y puede contribuir a una mejor comprensión de las ecuaciones de Maxwell. Finalmente, culminamos con la discusión e implicaciones para la enseñanza.

2. Las Fuentes de los Campos Electromagnéticos

Las ecuaciones de Maxwell, formalismo que permite predecir la evolución temporal del campo electromagnético, expresadas en su forma integral toman la forma

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dA} = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dA} = 0 \tag{2}$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{dA} \tag{3}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{dA} \tag{4}$$

donde $\mathbf{E}$ es el campo eléctrico, $\mathbf{B}$ el magnético, q la carga eléctrica, I la intensidad de corriente de conducción y ε_0 y μ_0 la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética en el vacío respectivamente. Aunque no siempre se enfatiza, la naturaleza de los campos, $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$, es diferente de sus fuentes, densidades y corrientes de carga, ρ e I respectivamente. Las ecuaciones de Maxwell deben ser interpretadas como una regla para calcular los campos a partir de dichas distribuciones. Esta interacción también ocurre en el sentido opuesto pues los campos ejercen influencia sobre las cargas y corrientes por medio de la fuerza de Lorentz.

Generalmente, en los cursos introductorios de física universitaria, cuando se abordan los campos eléctricos y magnéticos, se suele comenzar con la ley de Gauss, Ec. 1, y las implicaciones estacionarias de las leyes de Ampère-Maxwell y Faraday, Ecs. 3–4. Estas leyes nos permiten describir los campos estáticos y revelan que las partículas cargadas generan campos eléctricos, mientras que las corrientes eléctricas generan campos magnéticos. En este marco encontramos los primeros obstáculos para que los estudiantes interpreten adecuadamente las fuentes de los campos [18]. En cuanto a la ley de Gauss para el campo eléctrico, todas las cargas en el espacio contribuyen al campo eléctrico y deben ser consideradas para el cálculo del flujo a través de la superficie cerrada y no solo aquellas encerradas por la superficie [19]. Por otro lado, en la ley de Ampère, el campo magnético que se debe utilizar para determinar la circulación a lo largo de una curva cerrada, es el correspondiente a todas las corrientes de conducción y no solo a las encerradas por la curva. Guisasola, et al. [20, 21] encontraron que al preguntar a los estudiantes sobre cuáles son las cargas que generan el campo eléctrico de un plano infinito obtenido por medio de la ley de Gauss, muchos entienden que contribuyen solamente las encerradas por la superficie gaussiana. Análogamente, al mostrar a los estudiantes una típica curva amperiana para hallar el campo magnético de un solenoide infinito e interrogarles sobre las corrientes que generan el campo, muchos creen que contribuyen exclusivamente las encerradas por la curva. Estos resultados muestran que los estudiantes exhiben frecuentemente una falta de comprensión acerca de la naturaleza de las relaciones entre los diferentes elementos de las leyes de Gauss y Ampère, que no consideran adecuadamente todas las variables y simplifican las relaciones causa-efecto [20, 21].

Al estudiar situaciones con campos dependientes del tiempo entran en escena las leyes de Faraday y Ampère-Maxwell que describen los campos eléctricos no electrostáticos y los campos magnéticos asociados a corrientes de desplazamiento. En estas ecuaciones los campos se relacionan entre sí a través de los términos de las derivadas temporales de los flujos [22]. En este escenario nos encontramos con otro obstáculo para interpretar adecuadamente las relaciones entre las diferentes variables en las ecuaciones de Maxwell y las fuentes de los campos, que como veremos, su origen podría estar en la manera en que se interpretan los términos que las relacionan.

Un análisis incompleto de las leyes de Faraday y Ampère-Maxwell permitiría inferir que un campo magnético variable en el tiempo genera un eléctrico y viceversa. Esta forma de interpretarlas es la dominante en muchos libros de textos de física introductoria. Por ejemplo, en el caso de la ley de Faraday, Tipler y Mosca [23, p 1031] afirman que "De acuerdo con la ley de Faraday, un flujo magnético variable produce un campo eléctrico"; Serway y Jewett [6, p 809] concluyen que "La ecuación 30.8 ($\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -d\Phi_B/dt$) es la forma general de la ley de Faraday. Esta representa todas las situaciones en las que un campo magnético variable genera un campo eléctrico", mientras que Resnick, Halliday y Krane [7, p 784], sostienen que, "La ley de Faraday aparece en esta forma como una de las cuatro ecuaciones básicas del electromagnetismo propuestas por Maxwell. En esa forma, evidentemente significa que un campo magnético variable produce un campo eléctrico". En lo que respecta a la ley de Ampère-Maxwell, podemos encontrar en la literatura interpretaciones similares. Tipler y Mosca [23, p 1031], aseveran "Así pues, tenemos el interesante resultado recíproco de que un campo magnético variable produce un campo eléctrico (ley de Faraday) y que un campo eléctrico variable produce un campo magnético". Serway y Jewett [6, p 876] sostienen que la ley Ampère-Maxwell "describe la creación de un campo magnético por un campo eléctrico variable y por corriente eléctrica". Finalmente, Resnick, Halliday y Krane [7, p 862] consideran que "un campo magnético puede ser generado por un campo eléctrico cambiante".

La idea que un campo eléctrico variable en el tiempo genera un magnético y viceversa también puede ser encontrada en otros libros de texto de física introductoria [24, p 940], [25, p 945], [26, pp 773 and 813], [27, pp 852 and 885], [28, pp 994 and 1073], [29, p 975]. De acuerdo con Bunge [30, p. 62] las interpretaciones mencionadas se podrían basar en la versión restringida del principio de causalidad acorde con el principio de *acción retardada*. Esta interpretación de la causalidad como acción retardada explica que "siempre hay un retardo temporal entre la causa y el efecto, siendo el primero anterior en el tiempo al segundo, de modo que (relativamente a un sistema físico dado, como un sistema de referencia), C y E no pueden ser a la vez distantes en el espacio y simultáneos".

El análisis realizado por Jefimenko [8] sobre la generación de los campos eléctricos y magnéticos a partir de sus fuentes, clarificó la cuestión sobre las relaciones causa-efecto y la temporalización del campo eléctrico y magnético. Dicho análisis concluye que las expresiones generales para los campos están dadas por [8, pp 516–517]

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left(\frac{\rho(r',t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}+\frac{\dot{\rho}(r',t')}{c|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\right)(\mathbf{r}-\mathbf{r}')dv' - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\dot{\mathbf{J}}(r',t')}{c^2\mid\mathbf{r}-\mathbf{r}'\mid}dv' \tag{5}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left(\frac{\mathbf{J}(r',t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}+\frac{\dot{\mathbf{J}}(r',t')}{c|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\right)\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')dv' \tag{6}$$

donde $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ son evaluados en la posición $\mathbf{r}$ en el instante t, siendo $\mathbf{r}'$ la distancia del origen de coordenadas a la densidad de carga ρ y la densidad de corriente $\mathbf{J}$, c la velocidad de la luz y $t' = t - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c$. Como es de esperar, las ecuaciones de Jefimenko se reducen a las leyes de Coulomb y Biot Savart cuando las distribuciones de carga están en reposo y las corrientes son constantes.

De acuerdo con este análisis, las fuentes de los campos son las densidades de carga y de corriente ya sea constantes o variables en el tiempo. Para clarificar este aspecto, imaginemos una onda electromagnética propagándose en el espacio, con los campos eléctricos y magnéticos en fase. La causa de la onda es una distribución de cargas oscilante y los campos eléctricos y magnéticos en cierta posición $\mathbf{r}$ y tiempo t se relacionan con el movimiento de estas cargas en un tiempo t' anterior. No cabe afirmar la existencia de una *onda eléctrica* que a posteriori produce un campo magnético.

En la teoría clásica electromagnética actual el campo eléctrico y el magnético conforman un solo objeto, el campo electromagnético [31]. Concebir entonces que dado un campo se puede obtener la evolución del otro ignora el hecho que son componentes de un mismo ente y por tanto, no pueden interactuar entre sí [9]. En este sentido, las leyes de Faraday y Ampère-Maxwell no pueden implicar relaciones causa-efecto, ya que vinculan dos cantidades que son simultáneas y, por lo tanto, ninguna de estas magnitudes puede ser fuente de la otra [15, 16].

3. El Caso de la Corriente de Desplazamiento

Veamos a continuación el caso particular de la corriente de desplazamiento y como se interpreta su posible rol como fuente de campos magnéticos. Para ello, analicemos el término de la densidad de corriente en la ecuación de Jefimenko para el campo magnético. En la ecuación 6 el vector $\mathbf{J}$ incluye, además de la densidad de corriente de cargas libres, las densidades de corrientes de polarización $\partial\mathbf{P}/\partial t$ y de magnetización $\nabla\times\mathbf{M}$, siendo $\mathbf{P}$ y $\mathbf{M}$ los vectores polarización y magnetización respectivamente [32, 33]. Aunque a priori pueda resultar sorprendente, la densidad de corriente de desplazamiento en el vacío ($\varepsilon_0\partial\mathbf{E}/\partial t$) no es una fuente de campo magnético [34]. Para comprender adecuadamente este resultado debemos retrotraernos a los primeros trabajos de Maxwell.

La corriente de desplazamiento fue introducida por primera vez por James Clerk Maxwell en *"On Physical Lines of Force"* publicado en 1861, donde logró desarrollar una teoría electromagnética basado en un modelo mecánico del éter [35, 36]. Gracias a la introducción de esta contribución obtuvo una versión de la ecuación de continuidad similar a la utilizada actualmente [37, p 496]. Sin embargo, cabe mencionar que la consideraba de naturaleza similar a la corriente de conducción [38, p 161]. En el mismo trabajo, postulando hipótesis vinculadas al mecanismo del campo electromagnético logró deducir por primera vez la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas, sugiriendo que "la luz consiste en ondulaciones transversales del mismo medio que son la causa de los fenómenos eléctricos y magnéticos” [37, p 500].

Consciente de las limitaciones y dificultades asociadas a su modelo mecánico del éter, decidió independizarlo del campo electromagnético. Es así que en 1864 publicó *“A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field”* donde presenta ocho ecuaciones del campo electromagnético y una teoría electromagnética de la luz plausible de ser contrastada experimentalmente [39]. En este trabajo describe con claridad su visión de los significados físicos del desplazamiento eléctrico y la corriente de desplazamiento: “El desplazamiento eléctrico consiste en la electrización opuesta de los extremos de las moléculas o partículas del cuerpo que puede o no estar acompañada con transmisión a través del cuerpo... las variaciones de desplazamiento eléctrico deben sumarse a las corrientes p, q, r (corrientes de conducción) para obtener el movimiento total de electricidad...”[37, p 554]. De este fragmento se desprenden dos conclusiones fundamentales, por un lado, que en *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field* Maxwell considera a la corriente de desplazamiento como otro tipo de corriente que aporta a la corriente total [35, 38] y por otro, que, el desplazamiento eléctrico era para él, lo que para nosotros es hoy el vector polarización [40].

En 1873 Maxwell publicó su obra principal, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, donde presenta en detalle toda la teoría electromagnética. Allí deja clara su postura respecto al carácter de corriente de la variación temporal del desplazamiento eléctrico afirmando que genera un campo magnético al igual que las corrientes de conducción: “La corriente produce fenómenos magnéticos en su vecindad... Tenemos razones para creer que incluso cuando no hay una conducción adecuada, sino simplemente una variación del desplazamiento eléctrico, como en el vaso de una jarra de Leyden durante la carga o descarga, el efecto magnético del movimiento eléctrico es precisamente el mismo” [1, pp 144–145]. A partir de lo expuesto, vemos que desde el punto de vista de Maxwell ambas corrientes, de conducción y de desplazamiento, generan un campo magnético. Además, dada su concepción sobre el espacio, en particular su convicción acerca de la existencia del éter, la corriente de desplazamiento era para él, consecuencia de la variación del desplazamiento eléctrico en cualquier medio mecánico, por lo tanto, estaba siempre asociada, a diferencia de la visión actualmente aceptada, a un movimiento de cargas ligadas.

La supresión del éter mecánico presenta varios problemas para la interpretación de la corriente de desplazamiento especialmente cuando se analizan los problemas de la generación y propagación de los campos electromagnéticos en el vacío. La ausencia del éter convierte a la corriente de desplazamiento en el vacío en un simple término directamente proporcional a la rapidez de cambio del campo eléctrico [41]. Para entender este aspecto, recordemos que cuando un medio se polariza por efecto de un campo eléctrico, el desplazamiento eléctrico $\mathbf{D}$ está dado por

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{7}$$

y la corriente de desplazamiento resulta

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \tag{8}$$

Observemos que mientras el término $\partial \mathbf{P}/\partial t$ está asociado a un movimiento real de cargas ligadas, el último término, $\varepsilon_0 \partial \mathbf{E}/\partial t$, corresponde al aporte del vacío a la corriente de desplazamiento. Por tanto, y contrariamente a la opinión de Maxwell, podemos tener una corriente de desplazamiento en el vacío. Este último punto es crucial para comprender por qué la corriente de desplazamiento de vacío no es una fuente de campos magnéticos. Una variación del vector $\mathbf{D}$ en el vació podría deberse únicamente a una variación del campo eléctrico y, como discutimos en la sección anterior, un campo eléctrico variable en el tiempo no es una fuente de campos magnéticos [34, 42].

4. Las Ecuaciones de Maxwell Implican Relaciones Entre los Campos

Por medio del análisis de algunos fenómenos electromagnéticos a nivel de física introductoria en esta sección destacamos que las ecuaciones de Maxwell establecen relaciones entre diferentes magnitudes en el mismo instante de tiempo. Este análisis nos permitirá reconocer que considerar los campos eléctrico y magnético como entidades disjuntas conduce a contradicciones.

4.1. Una partícula cargada en movimiento

Un fenómeno electromagnético discutido en casi todos los libros de texto de física introductoria para ciencias e ingeniería es el campo magnético generado por una partícula cargada en movimiento rectilíneo uniforme. Cuando la partícula cargada se mueve con velocidad constante genera a su alrededor campos electromagnéticos. El campo magnético generado en un punto P del espacio a una distancia r de la partícula se suele calcular mediante la ley de Biot-Savart para una carga en movimiento

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q \mathbf{v} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3}. \tag{9}$$

Sin embargo, también es posible calcular el campo magnético utilizando la ley de Ampère-Maxwell (Ec.4) [43, 44]. Supongamos una curva cerrada C de radio R que pasa por el punto P como se muestra en la Figura 1. Si aplicamos la ecuación 4, el término $\mu_0 I$ es nulo ya que por la superficie S delimitada por la curva C no pasa ninguna corriente de conducción. Por lo tanto, existe una corriente de desplazamiento

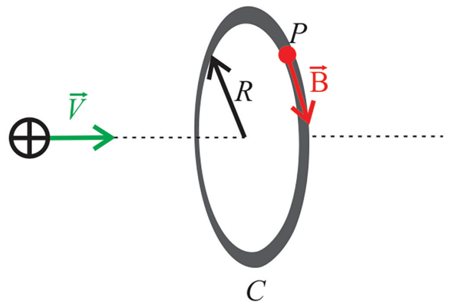

Figura 1: Una partícula cargada realizando un MRU respecto a un sistema de referencia inercial R.

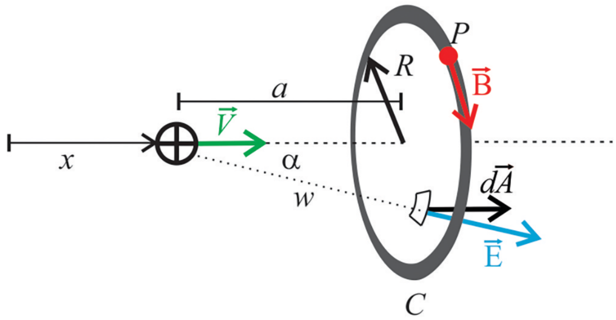

Figura 2: Configuración geométrica para el cálculo de la corriente de desplazamiento del ejemplo 1.

que aparece debido a que la partícula cargada se está acercando a la curva C y el flujo de campo eléctrico es cada vez mayor. De esta manera, la circulación de campo magnético a lo largo de la curva C está dada por

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{dA} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \tag{10}$$

donde $\varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = I_D$ es la corriente de desplazamiento a través de la superficie delimitada por la curva C.

Si la velocidad de la partícula cargada es mucho menor que la velocidad de la luz, el flujo eléctrico a través de un elemento de superficie $\mathbf{dA}$, está dado por

$$d\Phi_E = \mathbf{E} \cdot \mathbf{dA} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 w^2} \cos\alpha dA \tag{11}$$

donde w es la distancia de la partícula cargada al elemento de superficie y α el ángulo formado entre dichos vectores como se muestra en la Figura 2. Como $\cos\alpha = a/w$ y $w = \sqrt{a^2 + h^2}$, donde h es la distancia del centro de la curva al elemento de integración, si sustituimos en Ec. 11 e integramos en toda la superficie resulta

$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{a}{(a^2 + h^2)^{3/2}} h d\varphi dh, \tag{12}$$

que se integra para obtener

$$\Phi_E(a) = \frac{q}{2\varepsilon_0} \left[1 - \frac{a}{(a^2 + R^2)^{1/2}} \right]. \tag{13}$$

A partir de la derivada temporal del flujo podemos encontrar la corriente de desplazamiento

$$I_D = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{da} \frac{da}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{da}(-v), \tag{14}$$

donde $v = \frac{dx}{dt} = -\frac{da}{dt}$. Si sustituimos Ec. 13 en Ec. 14 y derivamos resulta

$$I_D = \frac{vq}{2} \frac{R^2}{(a^2 + R^2)^{3/2}} \tag{15}$$

que expresa la corriente de desplazamiento a través de la superficie S delimitada por la curva C. Para obtener el campo magnético, sustituimos Ec. 15 en Ec. 10

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = \frac{\mu_0 vq}{2} \frac{R^2}{(a^2 + R^2)^{3/2}}. \tag{16}$$

Usando que el módulo del campo magnético es constante sobre la curva C se obtiene fácilmente

$$B = \frac{\mu_0 vq}{4\pi} \frac{R}{r^3} = \frac{\mu_0 vq}{4\pi} \frac{1}{r^2} \frac{R}{r} \tag{17}$$

Escribiendo Ec. 17 en función del ángulo formado entre $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{v}$ obtenemos

$$B = \frac{\mu_0 vq}{4\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta}{r^2} \tag{18}$$

que se puede expresar vectorialmente en la siguiente forma

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q \mathbf{v} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3}. \tag{19}$$

Siendo la última ecuación idéntica a la ley de Biot-Savart para una partícula cargada en movimiento.

Llegado este punto debemos ser cuidadosos con la interpretación física del fenómeno. Nos encontramos frente a una situación donde podemos determinar el campo magnético en un punto del espacio directamente de la ley de Biot-Savart para una carga en movimiento o a partir de la ley Ampère-Maxwell. Si adjudicamos una relación causa-efecto a ambas leyes y lo analizamos desde la primera, diríamos que, por el hecho de estar la partícula cargada en movimiento, genera un campo magnético a su alrededor, mientras que desde la segunda, concluiríamos que es el campo eléctrico variable en el tiempo la causa del magnético. Si ambas interpretaciones fueran válidas tendríamos que considerar ambos aportes para el cálculo del campo magnético [41].

Cuando una partícula cargada se está moviendo con velocidad constante genera un campo electromagnético que la acompaña. No es acertado decir que el campo eléctrico genera el magnético porque ambos son partes de un mismo objeto. Como mencionamos anteriormente, las fuentes de los campos eléctricos y magnéticos son las densidades de carga y de corriente ya sea constantes o variables en el tiempo.

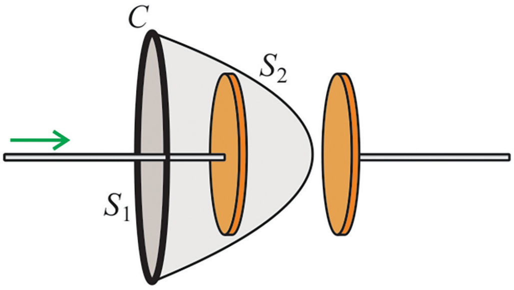

Figura 3: Las superficies S_1 y S_2 están delimitadas por la misma curva C.

4.2. La Ley de Ampère-Maxwell y la carga de un capacitor

Consideremos el ejemplo más conocido para introducir la corriente de desplazamiento, que muestra un capacitor cargado, una curva cerrada C y dos superficies S_1 y S_2 como se muestra en la Figura 3. Una típica interpretación que se hace del problema es que según la superficie que se tome para el cálculo de la circulación de campo magnético, cambia la corriente que genera el campo magnético. Por ejemplo, Resnick, Halliday y Krane, [7, p 862] sostienen que "En el primer caso, la corriente que pasa a través de la superficie (S_1) es la que crea el campo magnético; en el segundo, el flujo eléctrico cambiante que atraviesa la superficie (S_2) es el que genera el campo magnético".

La fuente real de un campo magnético en un punto no puede depender de la superficie que se tome para el cálculo de la circulación. En ese sentido, aseveraciones como la transcrita podrían ser fuentes de errores conceptuales al conducir a los estudiantes a creer que el campo magnético que aparece en la integral de línea de la ley de Ampère-Maxwell se debe solamente a las corrientes que atraviesan la superficie, promoviendo posibles interpretaciones causa-efecto de las ecuaciones de Maxwell [16].

Vinculado con el ejemplo anterior, se pueden encontrar también otros análisis que podrían inducir a errores conceptuales en los estudiantes, y promover razonamientos lineales causales para interpretar la ley de Ampère-Maxwell. Consideremos por ejemplo la determinación del campo magnético en un punto entre las placas de un capacitor circular cargándose. Para hallar el campo magnético a una distancia $r \leq R$ del eje de simetría, donde R es el radio de las placas, podemos aplicar la ley de Ampère-Maxwell a la curva cerrada C indicada en la Figura 4.

Mientras que a través del cable circula una corriente de conducción I_C, por la superficie S delimitada por la curva C sola hay corriente de desplazamiento. Por lo tanto, la circulación de campo magnético a lo largo de la curva C resulta

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = \mu_0 I_{Dneta} \tag{20}$$

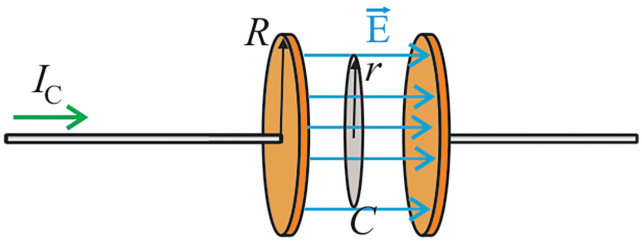

Figura 4: Representación del campo eléctrico entre las placas del capacitor y una curva cerrada C.

donde I_{Dneta} es la corriente de desplazamiento que atraviesa la superficie S dada por

$$I_{Dneta} = \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_0^r \mathbf{E} \cdot \mathbf{dA}. \tag{21}$$

Si suponemos que para cualquier instante de tiempo el campo eléctrico entre las placas es uniforme y fuera de ellas es nulo, la corriente de desplazamiento neta a través de la superficie S puede ser expresada en función de la corriente de desplazamiento total I_D y el radio R de las placas del capacitor

$$I_{Dneta} = \frac{r^2}{R^2} I_D. \tag{22}$$

Sustituyendo Ec. 22 en Ec. 20

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} I_D, \tag{23}$$

como el módulo del campo magnético es uniforme sobre la curva C

$$B 2\pi r = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} I_D \tag{24}$$

obtenemos el campo magnético a una distancia $r \leq R$, del centro del capacitor

$$B = \frac{\mu_0 r}{2\pi R^2} I_D. \tag{25}$$

Por otro lado como la corriente de desplazamiento total es igual a la de conducción resulta

$$B = \frac{\mu_0 r}{2\pi R^2} I_C. \tag{26}$$

Young y Freedman [29, p 975] al llegar a la ecuación 26 afirman que "Cuando medimos el campo magnético en esta región (entre las placas del capacitor), vemos que realmente está ahí y se comporta tal como predice la ecuación, lo cual confirma directamente el papel que tiene la corriente de desplazamiento como fuente del campo magnético". Esta afirmación podría reforzar la idea incompleta de interpretar los diferentes términos de las ecuaciones de Maxwell como generadores de campos. El campo magnético entre las placas de un capacitor se debe enteramente a las corrientes de conducción en los

 DOI: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2022-0230

cables y en las superficies de las placas [42, 45] como se deduce si calculamos la I_{Dneta} a partir de la ecuación 21.

$$I_{Dneta} = \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_0^r \mathbf{E} \cdot \mathbf{dA} = \varepsilon_0 r^2 \pi \frac{dE}{dt}. \tag{27}$$

Dado que el campo eléctrico entre las placas es uniforme, $E = \sigma/\varepsilon_0$, con σ la densidad superficial de carga de las placas del capacitor, sustituyendo en Ec. 27 obtenemos

$$I_D = r^2 \pi \frac{d\sigma}{dt} \tag{28}$$

donde podemos concluir que la corriente de desplazamiento es consecuencia de la variación temporal de la densidad superficial de carga entre las placas del capacitor.

4.3. Un imán en movimiento

Otro fenómeno ampliamente tratado en los libros de texto refiere a la inducción electromagnética. Consideremos el caso de un imán de barra moviéndose con una velocidad constante $\boldsymbol{v} = v_0 \hat{\imath}$ respecto a un sistema de referencia inercial R y una curva cerrada C arbitraria como se muestra en la Figura 5. Sabemos que en todos los puntos de la curva existe un campo eléctrico inducido por el movimiento del imán. Este campo eléctrico, está relacionado con el magnético por la ley de Faraday.

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{dA} \tag{29}$$

La explicación habitual de la aparición de este campo eléctrico, es que se origina como consecuencia de la variación temporal del campo magnético.

Apliquemos ahora la ley de Ampère-Maxwell a la curva C. La circulación de campo magnético se relaciona con la variación temporal del campo eléctrico como

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{dA}. \tag{30}$$

Siguiendo un razonamiento análogo al aplicado a la ley de Faraday, podríamos decir también que es el campo

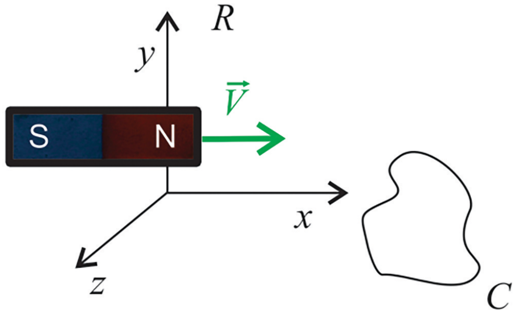

Figura 5: Un imán realizando un MRU con respecto a un sistema de referencia inercial R y una curva cerrada C arbitraria.

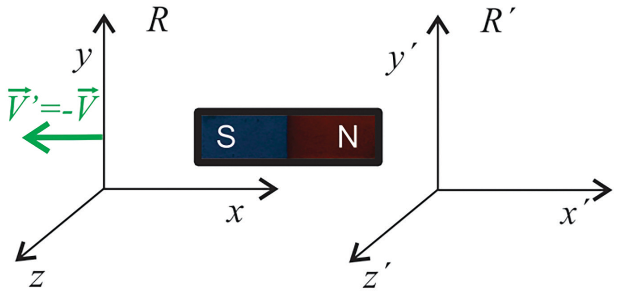

Figura 6: Imán en movimiento respecto a un sistema de referencia R y solidario respecto al sistema R'.

eléctrico variable en el tiempo quien genera el campo magnético. Sin embargo, ambas relaciones de causalidad entre los campos no pueden ser válidas simultáneamente. La dificultad radica en que ambos campos se generan simultáneamente y comparten la misma causa. Tanto la ley de Faraday como la de Ampère-Maxwell describen relaciones entre los diferentes campos en el mismo instante sin implicar relaciones causa-efecto. Un imán moviéndose con velocidad constante, genera a su alrededor un campo electromagnético que lo acompaña. Es una simplificación conceptual señalar que el campo magnético genera el eléctrico, porque son partes de un mismo ente.

Tanto para un imán como para una partícula cargada que realiza un MRU respecto a un sistema de referencia inercial R, existe algún sistema R' donde están en reposo y se detecta solamente la parte magnética o eléctrica de su campo electromagnético. Un simple cambio del sistema de referencia permite visualizar diferentes aspectos del campo electromagnético. Podemos determinar la relación entre los campos en R y R' con las transformaciones de Lorentz para $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ o con su aproximación relativista débil [46, 47].

Consideremos por ejemplo el caso del imán. Un observador situado en reposo respecto al imán en un sistema de referencia R' como se muestra en la Figura 6, mediría un campo eléctrico nulo ($\mathbf{E}' = \mathbf{0}$), y un campo magnético no nulo $\mathbf{B}' = (B'_x, B'_y, B'_z)$. Los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en los sistemas R y R' están vinculados por medio de las transformaciones de Lorentz [19]

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x \\ E_y &= \gamma[E'_y + v_0 B'_z] \\ E_z &= \gamma[E'_z - v_0 B'_y] \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} B_x &= B'_x \\ B_y &= \gamma[B'_y - (v_0/c^2) E'_z] \\ B_z &= \gamma[B'_z + (v_0/c^2) E'_y] \end{aligned} \tag{32}$$

donde $\gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$.

Como el campo eléctrico medido en R' es nulo, los campos en R resultan

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z) = (0, \gamma v_0 B'_z, -\gamma v_0 B'_y), \quad (33)$$

$$\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z) = (B'_x, \gamma B'_y, \gamma B'_z). \quad (34)$$

Combinando Ec. 34 con Ec. 33, podemos encontrar una expresión para el campo eléctrico en R en función del campo magnético

$$\mathbf{E} = v_0 B_z \hat{\jmath} - v_0 B_y \hat{k}. \quad (35)$$

Como $\mathbf{v} = v_0 \hat{\imath}$ la última expresión es equivalente a

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (36)$$

Notamos así, que mientras que un observador en el sistema de referencia R' detecta solamente el campo magnético generado por el imán, otro situado en R mide campos eléctricos y magnéticos vinculados por la ecuación 36. Un análisis de dicha ecuación nos permite reconocer la ausencia de causa-efecto entre sus diferentes términos. Un imán en movimiento genera a la vez un campo eléctrico y un campo magnético relacionados por la ecuación 36.

El campo eléctrico y el magnético son en realidad componentes del mismo ente, el campo electromagnético. La inclusión en los cursos de física de introductoria de las transformaciones de Lorentz, o su aproximación relativista débil, nos permite reconocer que estos campos no tienen existencia independiente, estando matemáticamente relacionados por dichas transformaciones, sin haber relaciones causa-efecto entre ellos. Así como no tiene sentido pensar que una componente de un vector sea la causa de otro, tampoco lo tiene pensar que una componente del campo electromagnético sea la causa del otro.

4.4. La ley de Faraday y los campos generados por un solenoide

Analicemos ahora un típico problema de inducción electromagnética, que consiste en determinar el campo eléctrico en una región del espacio donde se ubica un solenoide circular de largo L, n vueltas por unidad de longitud y radio R, cuya corriente varía con el tiempo siguiendo cierta función $I(t)$.

Para determinar el campo eléctrico a una distancia r menor al radio R del solenoide, aplicamos la ley de Faraday a la curva cerrada C_1 que se muestra en la Figura 7, donde se muestra un corte transversal. Si el solenoide es muy largo, podemos suponer que el campo magnético dentro es uniforme y el flujo de campo magnético resulta

$$\Phi_B = \mu_0 n I(t) r^2 \pi. \quad (37)$$

Si sustituimos la ecuación 37 en la ley de Faraday (Ec. 3) y operamos, obtenemos el campo eléctrico a una distancia r del centro del solenoide

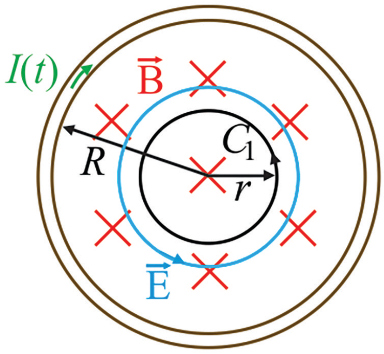

Figura 7: Corte transversal de un solenoide por el que circula una corriente I.

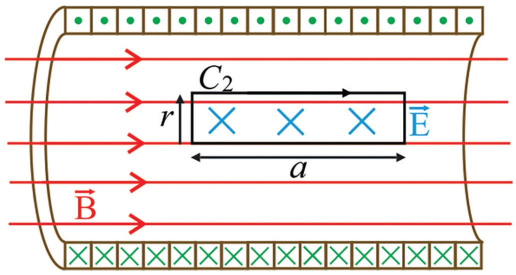

Figura 8: Corte longitudinal del solenoide. El campo magnético es horizontal hacia la derecha.

$$E(t) = \frac{\mu_0 n r}{2} \frac{dI(t)}{dt}. \quad (38)$$

La expresión obtenida para el campo eléctrico es conocida, destacándose que es directamente proporcional a la derivada temporal de la intensidad de la corriente en el solenoide.

Las ecuaciones 37 y 38 son estrictamente válidas en situaciones donde I es constante o aumenta linealmente con el tiempo. Aunque una discusión sobre su marco de validez se presenta generalmente en cursos superiores de electromagnetismo, si aplicamos la ley de Ampère-Maxwell al campo eléctrico obtenido a través de la ley de Faraday, podemos comprender con relativa sencillez su marco de aplicabilidad y develar la manera en que se vinculan las ecuaciones de Maxwell.

En la Figura 8 se muestra un corte longitudinal del solenoide, junto a los sentidos de los campos magnéticos y eléctricos, bajo la suposición de que la intensidad de corriente aumenta con el tiempo. Si aplicamos la ley de Ampère-Maxwell a la curva cerrada C_2, como no hay corrientes de conducción a través de una superficie que la delimite, tenemos que

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{dA} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d \int_0^r E a dr}{dt}. \quad (39)$$

 DOI: https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2022-0230

Si sustituimos Ec. 38 en Ec. 39 y operamos

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = \frac{\mu_0^2 \varepsilon_0 n a r^2}{4} \frac{d^2 I(t)}{dt^2}. \tag{40}$$

Esta ecuación revela que la circulación del campo magnético es directamente proporcional a la segunda derivada de la intensidad de la corriente en el solenoide. Ahora, si el campo magnético es uniforme, la circulación de campo a lo largo de C_2 debería ser nula. Vemos entonces que al aplicar la ley de Ampère-Maxwell, encontramos directamente el marco de validez de las ecuaciones 37 y 38. La única manera de que el campo eléctrico obtenido a través de la ley de Faraday sea solución de las ecuaciones de Maxwell, es que $d^2I/dt^2 = 0$, o lo que es equivalente, que la intensidad de corriente varíe en forma lineal con el tiempo.

El problema planteado tiene varios puntos interesantes a discutir. El primero a resaltar es el hecho que en los cursos introductorios de física, cuando se abordan problemas de inducción electromagnética, en general se determinan funciones de campos eléctricos utilizando la ley de Faraday, sin comprobar, ni discutir si la solución verifica además la ley de Ampère-Maxwell. Esto podría llevar a los estudiantes a creer que las soluciones de los campos solo tienen que verificar una de las ecuaciones de Maxwell. Por otro lado, el análisis realizado nos permite comprender por qué la ecuación para el campo eléctrico hallada solo es válida cuando $d^2I/dt^2 = 0$. Las leyes de Faraday y Ampère-Maxwell están acopladas, ya que la circulación de campo eléctrico depende de la rapidez de cambio del flujo de campo magnético y la circulación de campo magnético, de la rapidez de cambio del flujo de campo eléctrico. Cuando imponemos que $d^2I/dt^2 = 0$, la rapidez de cambio del flujo de campo eléctrico se hace cero, desacoplando las leyes de Faraday y Ampère-Maxwell, lo que nos permite entonces determinar el campo eléctrico solo con la ley de Faraday.

Consideremos ahora una situación donde $d^2I/dt^2 \neq 0$. En este caso, Ec. 40 da la corrección de primer orden para la circulación de campo magnético. Un típico acercamiento al problema de por qué la ley de Faraday no alcanza para determinar el campo eléctrico, consiste en argumentar que si el campo eléctrico cambia con el tiempo, genera un nuevo campo magnético que se superpone con el original. Esto daría como resultado otra configuración de campos magnéticos dentro del solenoide que tendría que ser tenida en cuenta para recalcular el campo eléctrico y así sucesivamente. Este razonamiento, que puede verse reforzado por un posible enfoque de aproximaciones sucesivas para determinar los campos, es contradictorio con la manera de abordar el problema para encontrar una solución general [48]. Para encontrar una solución a los campos, se debe resolver un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas para los campos electromagnéticos que surge de aplicar las leyes de Faraday y Ampère-Maxwell al solenoide. Los campos eléctricos y magnéticos deben verificar ambas leyes simultáneamente en todo instante de tiempo. No es correcto señalar que uno de los campos es causa del otro.

5. Discusión e Implicaciones Para la Enseñanza

La discusión planteada hasta ahora tiene importantes implicaciones en la enseñanza del electromagnetismo. Un enfoque unificado de los campos en que las fuentes reales sean las densidades de carga y de corriente, ya sea constantes o variables, mostraría a los estudiantes una imagen más precisa y más consistente de las fuentes, de las relaciones causa-efecto y de la propagación de ondas electromagnéticas. En este marco, para evitar interpretaciones incompletas es importante presentar adecuadamente las ecuaciones de Maxwell.

Una elección de ejemplos adecuada permite mostrar que las ecuaciones de Maxwell no implican relaciones causa-efecto, sino asociaciones entre distintas magnitudes en un mismo instante de tiempo. Una interesante situación a analizar refiere a las corrientes inducidas en un transformador. Variando la intensidad de la corriente en el devanado primario y analizando mediante la ley de Faraday las corrientes inducidas en el secundario, deberíamos decir que, si existe un campo eléctrico inducido en el secundario es porque existe junto a él un campo magnético que varía en el tiempo y ambos campos están relacionados por esta ley. Por tanto, la causa de ambos campos es la corriente que varía en el tiempo en el primario [10, 49].

Aunque los libros de texto de física introductoria mencionados hasta ahora consideran que un campo magnético variable en el tiempo produce un campo eléctrico y viceversa, encontramos que dos de los textos basados en la investigación IEF, a saber *Matter and interactions* de Chabay y Sherwood [50] y *Six ideas that shaped physics* de Moore [51], exponen la idea que las ecuaciones de Maxwell implican asociaciones y no relaciones causa-efecto. En lo que respecta a la ley de Faraday, Chabay y Sherwood [50, p 902], afirman que "The historical term 'magnetic induction' is often used to describe this phenomenon, and one says that the time-varying magnetic field 'induces' the curly electric field. This is somewhat misleading. It is more correct to say that anywhere we observe a time-varying magnetic field, we also observe a curly electric field. Faraday's law relates these observations quantitatively". Por otro lado, Moore [51, p 271], es más enfático, "I have been very careful to state that this is the electric field that is correlated with the changing magnetic field, not created by that field. Electromagnetic fields are created only by stationary or moving charged particles... So though **E** and **B** are correlated by Faraday's law in a given reference frame, correlation is not causation".

Cabría esperar que un tratamiento unificado del campo electromagnético evite confusiones conceptuales como las mostradas en las secciones anteriores. Para ello, es clave desarrollar secuencias didácticas que permitan a los estudiantes comprender que las ecuaciones de Maxwell no dan información sobre las fuentes de los campos sino que describen relaciones entre las diferentes cantidades y determinan su evolución temporal. Esto puede hacerse no solo en situaciones donde se presentan campos eléctricos y magnéticos que varían en el tiempo, como en el ejemplo de la sección 4.4, sino al analizar problemas de magnetostática y electrostática donde se determinan expresiones de campos con las leyes de Gauss o Ampère. De esta manera, se haría énfasis en el hecho que los campos deben verificar todas las ecuaciones de Maxwell y no una en particular, reafirmando el hecho de que conforman un cuerpo de ecuaciones acopladas. En esa línea, tanto en situaciones de campos estáticos como variables en el tiempo, debería realizarse especial énfasis en discutir problemas donde se analicen si hipotéticas configuraciones de campos eléctricos y magnéticos verifican las ecuaciones de Maxwell. Otro abordaje posible para las leyes de Gauss y Ampère que puede extenderse con facilidad a la de Ampère-Maxwell consiste en analizar las configuraciones de líneas de campo para diferentes distribuciones de carga y de corriente con el fin de fomentar que los estudiantes reflexionen sobre las fuentes de campo, evitando la aparición de razonamientos lineales causales [21].

Finalmente, señalamos que es conveniente diseñar tutoriales que permitan a los estudiantes comprender que los campos eléctrico y magnético no son objetos independientes sino partes de un mismo objeto, el campo electromagnético. Esta visión unificada contribuye a evitar la aparición de situaciones contradictorias como algunas de las presentadas en el artículo y desarrollar un mejor entendimiento de los fenómenos electromagnéticos.

Agradecimientos

Los autores agradecen a PEDECIBA (MEC, UdelaR, Uruguay) y expresan su reconocimiento por el financiamiento Fisica Nolineal (ID 722) Programa Grupos I+D CSIC 2018 (UdelaR, Uruguay). Parte de esta investigación fue financiada por el gobierno español (MINECO\FEDER PID2019 -105172RB-I00)

Referencias

[1] J.C. Maxwell, *A treatise on electricity and magnetism* (Clarendon Press, Oxford, 1881), v. 2.

[2] J.L. Docktor and J.P. Mestre, Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res. **10**, 020119 (2014).

[3] I. Galili and E. Goihbarg, American Journal of Physics **73**, 141 (2005).

[4] R. Chabay and B. Sherwood, American Journal of Physics **74**, 329 (2006).

[5] K. Zuza, J. Guisasola, M. Michelini and L. Santi, European Journal of Physics **33**, 397 (2012).

[6] R.A. Serway and J.W. Jewett, *Física para Ciencias e Ingeniería 2* (Cengage learning, Santa Fé, 2019).

[7] D. Halliday, R. Resnick and K.S. Krane, *Physics* (John Wiley & Sons, New York, 2002), v. 2.

[8] O.D. Jefimenko, *Electricity and magnetism: an introduction to the theory of electric and magnetic fields* (Electret Scientific Company, Star City, 1989).

[9] O.D. Jefimenko, European Journal of Physics **25**, 287 (2004).

[10] W.G.V. Rosser, *Interpretation of classical electromagnetism* (Springer Dordrecht, Berlin, 1997), v. 78.

[11] M.A. Heald and J.B. Marion, *Classical electromagnetic radiation* (Saunders College Publishing, Fort Worth 1995).

[12] D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics. Always learning* (Pearson Education, London, 2013).

[13] S. Rainson, G. Tranströmer and L. Viennot, American Journal of Physics **62**, 1026 (1994).

[14] J. Guisasola, J.M. Almudí and J.L. Zubimendi, Science Education **88**, 443 (2004).

[15] S.E. Hill, The Physics Teacher **48**, 410 (2010).

[16] S.E. Hill, The Physics Teacher **49**, 343 (2011).

[17] E. Campos, G. Zavala, K. Zuza and J. Guisasola, American Journal of Physics **87**, 660 (2019).

[18] E. Campos, E. Hernandez, P. Barniol and G. Zavala, Phys. Rev. Phys. Educ. Res. **17**, 020117 (2021).

[19] R.K. Wangsness, *Electromagnetic fields* (Wiley, New York, 1986).

[20] J. Guisasola, J. Salinas, J.M. Almudí and S. Velazco, Revista Brasileira de Ensino de Física **25**, 195 (2003).

[21] J. Guisasola, J.M. Almudí, J. Salinas, K. Zuza and M. Ceberio, European Journal of Physics **29**, 1005 (2008).

[22] M. Alonso and E. Finn, *Fundamental University Physics, Volume Two, Fields and Waves* (Addison-Wesley Publishing Company, Inc, New York, 1983).

[23] P.A. Tipler and G. Mosca, *Física para la ciencia y la tecnología. II* (Reverté, 2010), v. 2.

[24] W. Bauer and G. Westfall, *University physics with modern physics* (McGraw-Hill Higher Education, Toronto, 2014).

[25] P. Fishbane, S. Gasiorowicz and S. Thornton, *Physics for Scientists and Engineers, with Modern Physics* (Pearson Education Inc, San Francisco, 2005).

[26] D.C. Giancoli, *Physics for scientists and engineers with modern physics* (Pearson Education, San Francisco, 2009).

[27] R.D. Knight, *Physics for scientists and engineers: a strategic approach with modern physics* (Pearson Higher Ed., San Francisco, 2017).

[28] H. Ohanian and J. Markert, *Physics for Scientists and Engineers* (WW Norton & Company, New York, 2007).

[29] H. Young and R. Freedman, *Física Universitaria (Décimo cua,)* (Pearson Education, San Francisco, 2018), v. 1.

[30] M. Bunge, *Causality and modern science* (Transaction Publishers, New Brunswick, 2009).

[31] R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics.* (Addison-Wesley, Boston, 1963), v. 2.

[32] D.J. Griffiths and M.A. Heald, American Journal of Physics **59**, 111 (1991).

[33] O.D. Jefimenko, American Journal of Physics **60**, 899 (1992).
[34] W.G.V. Rosser, American Journal of Physics **44**, 1221 (1976).
[35] A.F. Chalmers, Physics Education **10**, 45 (1975).
[36] M.C.D. Lima, Revista Brasileira de Ensino de Física **41**, (2019).
[37] J.C. Maxwell, *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, edited by W.D. Niven, Cambridge Library Collection – Physical Sciences (Cambridge University Press, Cambridge, 2011), v. 1.
[38] O. Darrigol, *Electrodynamics from Ampere to Einstein* (Oxford University Press, Oxford, 2000).
[39] W. Berkson, *Fields of Force: The Development of a World View from Faraday to Einstein.* (Routledge, New York, 2014).
[40] J.W. Arthur, IEEE Antennas and Propagation Magazine **51**, 58 (2009).
[41] J. Roche, European Journal of Physics **19**, 155 (1998).
[42] A.P. French, The Physics Teacher **38**, 274 (2000).
[43] R. Buschauer, The Physics Teacher **51**, 542 (2013).
[44] Á. Suárez, Lat. Am. J. Phys. Educ. **7**, 96 (2013).
[45] J.A. Milsom, American Journal of Physics **88**, 194 (2020).
[46] I. Galili and D. Kaplan, American Journal of Physics **65**, 657 (1997).
[47] I. Ramos, J. Braga, J. Silva, A. Lima and L. Holanda, Revista Brasileira de Ensino de Física **39** (2016).
[48] B. Batell and A. Ferstl, American Journal of Physics **71**, 925 (2003).
[49] J. Roche, Physics Education **22**, 91 (1987).
[50] R.W. Chabay and B.A. Sherwood, *Matter and interactions* (John Wiley & Sons, New York, 2015).
[51] T.A. Moore, *Six ideas that shaped physics: Electric and Magnetic Fields are Unified. Unit E.* (McGraw-Hill, New York, 2017).