Tartu Ülikool

Loodus- ja täppisteaduste valdkond

Matemaatika ja statistika instituut

Rasmus Born

Jõustamismeetod: kontiinumihüpoteesi sõltumatus ZFC-hulgateooriast

Matemaatika eriala

bakalaureusetöö (9 EAP)

juhendaja: Tõnu Tamme, MSc

Tartu 2023

JÕUSTAMISMEETOD: KONTIINUMIHÜPOTEESI SÕLTUMATUS ZFC-HULGATEOORIAST

bakalaureusetöö

Rasmus Born

Lühitutvustus

Hulgateoorias kutsutakse kontiinumihüpoteesiks väidet, et ei leidu hulka, mille võimsus oleks rangelt naturaalarvuhulga ning selle potentshulga võimsuse vahepeal. Matemaatik Paul J. Coheni poolt 1963. aastal leiutatud jõustamismeetodiga on tõestatud, et kontiinumihüpotees on kõige klassikalisemast hulgateooria aksiomaatikast ehk ZFC-hulgateooriast sõltumatu. Tähendab, kui ZFC-hulgateooria on süntaktiliselt mittevasturääkiv, pole teooria aksiomaatikale tuginedes võimalik tuletada kontiinumihüpoteesi ega selle eitust. Siin bakalaureusetöös antakse ülevaade jõustamismeetodi ühest võimalikust kujust, sealjuures on toodud arusaamiseks tarvilik loogika ning hulgateooria taust. Näiteks räägitakse töös Gentzeni sekventsiaalsest predikaatarvutusest, klassidest, transitiivsetest hulkadest ning transitiivsest sulundist, väga üldisest potentselt regulaarsest induktsioonist-rekursioonist, Zermelo – von Neumanni kumulatiivsest hierarhiast, Tarski-Scotti võttest, valemi ahendamisest, absoluutsusest, Mostowski-Shepherdsoni transitiivsest kollapsist ning Lévy-Montague'i peegeldumisprintsiibist. Pea kõik tulemused toodud põhjalike tõestustega. Jõustamisteoorias tuuakse esile seosed P-nimede ning Weaveri P-nimede vahel. Teema eestikeelsel esitamisel täiendati matemaatika oskussõnavara. Autor loodab, et teksti saab tulevikus kasutada ka teistkordse sissejuhatava õppematerjalina ranges hulgateoorias.

CERCS teaduseriala: P110 „Matemaatiline loogika, hulgateooria, kombinatoorika“

märksõnad: hulgateooria, ZFC, kontiinumihüpotees, sõltumatus, jõustamine, forsseerimine

METHOD OF FORCING: INDEPENDENCE OF THE CONTINUUM HYPOTHESIS FROM ZFC SET THEORY

Bachelor thesis

Rasmus Born

Abstract

In set theory, the continuum hypothesis is the supposition that there exists no set whose cardinality lies strictly between the sizes of the set of natural numbers and that of its power set. The method of forcing, first introduced by mathematician Paul J. Cohen in 1963, has been used to prove the independence of the continuum hypothesis from the most classical system of axiomatic set theory known as ZFC. Neither the continuum hypothesis nor its negation can be derived by means restricted to ZFC alone, provided that ZFC itself is syntactically consistent. This bachelor thesis is an overview of one pathway to the forcing method, which includes logic and set theory as background crucial to understanding. Among the topics discussed are Gentzen's sequential predicate calculus, classes, transitive sets and transitive closure, very general principles of well-founded induction and recursion, the Zermelo – von Neumann cumulative hierarchy, the Tarski-Scott trick, relativising well-formed formulae, absoluteness, the Mostowski-Shepherdon transitive collapse, and the relflection princible due to Lévy and Montague. Nearly all results are provided with thorough proofs. The relationship between traditional P-names and Weaver P-names in forcing theory is emphasised. In presenting the material, additions were made to Estonian mathematical terminology. The author hopes that the text may also eventually be read as a second introduction to rigorous set theory.

CERCS research specialisation: P110 Mathematical logic, set theory, combinatories

Key Words: set theory, ZFC, continuum hypothesis, independence, forcing

Sisukord

Sissejuhatus **5**

I Loogika ja hulgateooria taust **7**

1. Formaalne esimest järku predikaatarvutus . . . 7
   1.1. Sümbolid ja loogilise valemi definitsioon . . . 7
   1.2. Tuletised, aksioomid, tuletusreeglid Gentzeni süsteemis . . . 9
   1.3. Võrdusega predikaatarvutus . . . 12
   1.4. Objektteooria ja metateooria . . . 13
2. Zermelo-Fraenkeli hulgateooria . . . 13
   2.1. Teooria omaaksioomid ja baasmõisted . . . 14
   2.2. Klassid ja pärisklassid hulgateoorias . . . 20
   2.3. Transitiivne hulk . . . 21
   2.4. Järjestusseosed. Ordinaalarvud . . . 23
      2.4.1. Naturaalarvud. Naturaalarvude hulk . . . 27
      2.4.2. Ordinaalarvud . . . 29
   2.5. Potentselt regulaarne induktsioon ja rekursioon . . . 34
      2.5.1. Alumised naabertipud. E-transitiivsus, E-transitiivne sulund 34
      2.5.2. Potentselt regulaarne seos . . . 36
      2.5.3. Induktsiooni- ja rekursiooniteoreemiskeemid . . . 39
      2.5.4. Astakufunktsioon . . . 45
   2.6. Zermelo – von Neumanni kumulatiivne hierarhia . . . 48
      2.6.1. Hulga astak . . . 52
      2.6.2. Tarski-Scotti võte . . . 54

II Valemi tõkestamine ja absoluutsus. Laiend ZFC^+ **57**

1. Valemi tõkestamine. Valemi absoluutsus kvaasimudeli suhtes . . . 58
   1.1. Tõkestamise ja epsilon-kvaasimudeli definitsioon . . . 58
   1.2. Valemi tähenduse invariantsus. Valemi absoluutsus . . . 60
   1.3. Δ_0- ning Δ_0^T-valemid. Hulgateooria valemite Lévy hierarhia . . . 64
   1.4. Hulgateooria põhikonstruktsioonide absoluutsus või mitteabsoluutsus 66
      1.4.1. Potentselt regulaarse rekursiooni ja astaku absoluutsus . . . 74
   1.5. Epsilonisomorfism. Mostowski-Shepherdsoni transitiivne kollaps . . . 79
   1.6. Lévy-Montague'i peegeldumisprintsiip . . . 85
2. Laiendamine teooriaks ZFC^+ . . . 89
   2.1. Mitteabsoluutseid hulgateooria omadusi ja konstruktsioone . . . 91

III Jõustamine **95**
1. Jõustamise põhimõisted ja -konstruktsioonid 97
1.1. Jõustamiskogum. Geneeriline ideaal 97
1.2. Mõistete sisu selgitav näide 99
1.3. Geneerilise ideaali leiduvus ja kuuluvus 102
1.4. Tugevuse abimõisted ja -lemmad 105
1.5. P-nimed, Weaveri P-nimed. P-nimede kandjad. Jõustamislaiend $M[G]$ 107
1.5.1. P-nime definitsioon ja absoluutsus 108
1.5.2. P-nime kandja definitsioon ja absoluutsus 114
1.5.3. P-nime poolt genereeritud Weaveri P-nimi. Laiend $M[G]$ . . 118
1.5.4. Juurega jõustamis- ning tingimuskogum 122
1.5.5. Kanooniliste P-nimede definitsioon ja absoluutsus 126
1.6. Jõustamislaiendi $M[G]$ lihtsamad omadused 128
2. Jõustamise põhiteoreemiskeem 134
2.1. Tõesuslemma ja defineeritavuse lemma 135
2.2. Laiend $M[G]$ rahuldab teooria ZFC aksioome 137
2.3. Kontiinumihüpoteesi sõltumatus 142

Lisad **145**
Lisa A. Näide tuletusest Gentzeni süsteemis 145
Lisa B. Transitiivse eelsulundi teoreemiskeemi tõestus 146
Lisa C. Epsilon-kvaasimudeli korrektsuse tõestus 149
Lisa D. Deduktsiooni-teoreemiskeemi sõnastus 151
Lisa E. Ideaali eri definitsioonid 151

Viited ja kasutatud kirjandus **154**

Sissejuhatus

Matemaatilise hulgateooria rajaja, saksa matemaatik Georg Cantor sõnastas 1877. aastal *kontiinumihüpoteesina* tuntuks saanud väite [Can77]. Cantor oletas ja proovis pikki aastaid tõestada, et naturaalarvude hulga $\mathbb{N}$ ning selle potentshulga $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ suuruste vahel ei leidu kolmandat võimsust. Hilberti 1900. aastal esitletud kahekümne kolme vastuseta matemaatilise küsimuse seas oli kontiinumihüpotees esimesel kohal. Pärast Zermelo-Fraenkeli valikuaksioomiga hulgateooria (ZFC) püstitamist selgus, et klassikalisest hulgateooriast ei piisa kontiinumihüpoteesi tõesuses veendumiseks ei ühte- ega teistpidi. 1940. aastal näitas Kurt Gödel, et kontiinumihüpoteesi eitust pole ZFC-teoorias võimalik tõestada [Göd40]. 1963. aastal tõestas Paul J. Cohen samasuguse tulemuse kontiinumihüpoteesi jaoks [Coh63]. Kontiinumihüpotees osutus klassikalisest hulgateooriast *sõltumatuks* väiteks.

Gödeli ning Coheni meetodid erinevad oluliselt teineteisest. Teatud tähenduses leidis Gödel antud mudeli seest üles väiksema mudeli, *konstruktiivse hierarhia*, samas kui Cohen laiendas olemasoleva mudeli suuremaks mudeliks, *jõustamislaiendiks*. Coheni meetodiga saab tõestada kontiinumihüpoteesi kogu sõltumatuse. Sel põhjusel uurime just Coheni leiutatud *jõustamismeetodit* (van *forsseerimine*). Täpsemini anname ülevaate ühest võimalikust jõustamisteooria kujust, toetudes eeskätt Weaveri [Wea14] ning Kuneni [Kun80; Kun13] töödele. Samuti selgitame teooria ülesehitamiseks ning teemast arusaamiseks vajalikku matemaatilist loogikat ja hulgateooriat.

Esimeses peatükis tutvustame formaalset võrdusega esimest järku predikaatarvutust. Tuletuste ilmestamiseks valime Gentzeni sekventsiaalse süsteemi, kus sekventsi antetsedendis on täpselt üks valem. Räägime meta- ning objektteooriast. Nimetame Zermelo-Fraenkeli valikuaksioomiga hulgateooria omaaksioomid ning mainime nende vahetuid järeldusi. Seletame, kuidas saab puhtas hulgateoorias kasutada pärisklasse. Toome sisse *transitiivse hulga* mõiste. Transitiivse hulga erijuhtudena räägime naturaal- ning ordinaalarvudest. Tõestame, et igal hulgal X leidub transitiivne sulund $\mathrm{TC}(X)$. Defineerime *potentselt regulaarse seose* mõiste ning tõestame väga üldised potentselt regulaarse induktsiooni ning rekursiooni meetodid. Ehitame Zermelo – von Neumanni kumulatiivse hierarhia $(\mathsf{V}_\alpha)_{\alpha\in\mathtt{Ord}}$ ja tõestame Tarski-Scotti võtte.

Teises peatükis on kesksel kohal valemi *epsilontõkend* ja *absoluutsus*. Toome segaduse vältimise eesmärgil sisse *epsilon-kvaasimudeli* mõiste. Tõestame epsilon-kvaasimudeli korrektsuse ning põhiliste hulgateoreetiliste omaduste ning konstruktsioonide absoluutsuse. Määratleme *epsilonisomorfismi* mõiste ja tõestame *Mostowski-Shepherdsoni transitiivse kollapsi* teoreemiskeemi. Anname *Lévy-Montague'i peegeldumisprintsiibi* põhjenduse. Laiendame teooria ZFC uueks teooriaks ZFC^+, milles pääseme ligi aksioomide hulga $\mathtt{Ax}(\mathsf{ZFC})$ epsilon-kvaasimudelile. Tõestame, et ZFC^+ on algse ZFC-hulgateooria konservatiivne laiend. Näitame, kuidas teooria ZFC^+ abil saab tuletada väite ϕ sõltumatuse ZFC-hulgateooriast. Gentzeni tõestusteoreetilise süsteemiga saame anda täpsemad tõestused epsilon-kvaasimudeli korrektsuse metateoreemiskeemile ning ZFC^+-teooria metatulemustele, kui muus kirjanduses on kombeks.

Viimases peatükis kirjeldame Coheni jõustamismeetodit. Defineerime olulised mõisted, nagu *jõustamis-* ja *tingimuskogum*, *geneeriline ideaal*, *(Weaveri) P-nimed*, *P-nime kandjad*, *jõustamislaiend*, *jõustamisseos*. Avame, mis tähenduses võib vaheldumisi kasutada tavalisi P- ja Weaveri P-nimesid, samuti juureta ning juurega jõustamiskogumeid. Jõustamise põhimetateoreemiskeemi jaotame kolmeks. Esimese jao tõestame täielikult, suuremal määral teise. Kolmanda osa, *tõesuslemma* ning *defineeritavuse lemma*, esitame tõestuseta. Põgusalt vihjame, kuidas tõestatakse jõustamismeetodiga kontiinumihüpoteesi sõltumatus ZFC-hulgateooriast.

Autor usub, et bakalaureusetööd õnnestub tulevikus kasutada range hulgateooria õppematerjalina. Vähemalt nendel, kes on loogika ja naiivse hulgateooriaga juba korra või parem kaks korda kokku puutunud.

I peatükk

Loogika ja hulgateooria taust

Zermelo-Fraenkeli hulgateooria (ZF, valikuaksioomiga ZFC) on formaalne aksiomaatiline teooria. See rajaneb täpselt kokku lepitud aksioomidel ning teoreeme tõestatakse rangete tuletusreeglite järgi. Need tuletusreeglid pärib ZF võrdusega esimest järku süntaktilisest predikaatarvutusest. Pole esmatähtis, kuidas predikaatarvutus üles ehitatakse: peaasi, et ta on korrektne ja täielik standardse predikaatarvutuse semantika suhtes. Korrektsuse, täielikkuse omadused on näiteks olemas kahel tuntud loogilisel raamistikul – Hilberti süsteemil [Kul64, lk 147] ning Gentzeni metoodikal [PP04, lk-d 2, 97, 99; Pra04, lk 133].

Teooriat arendame lihtsuse eesmärgil vabas, mittetehnilises vormis. Erandkorras, kui loogilise raamistiku nüanssidesse süüvimisest ei pääse, valime lähemaks selgitamiseks Gentzeni sekventsiaalse predikaatarvutuse.

1. Formaalne esimest järku predikaatarvutus

Formaalne aksiomaatiline teooria püstitatakse järgmiselt. 1) Valitakse lubatud sümbolite metahulk ehk *tähestik*. 2) Määratakse esimest järku *valemi* rekursiivne definitsioon. 3) Fikseeritakse teoorias tuletatavate objektide ehk *tuletiste* liik. 4) Lepitakse kokku, millised tuletised on aksioomid. 5) Loetakse kehtivaks metalõplik kogus tuletusreegleid.

1.1. Sümbolid ja loogilise valemi definitsioon

Esimest järku loogika tähestik koosneb loogiliste tehete märkidest, signatuurist, indiviidmuutujaist ning kirjavahemärkidest. Valime teooria loogilisteks baastehteks $\forall, \neg$ ja $\Rightarrow$. Ülejäänud, nagu $\exists, \wedge, \vee, \Leftrightarrow$, olgu avaldatud esimeste kaudu traditsioonilisel viisil. Signatuur σ on järjestatud kolmik $\langle \texttt{Cons}, \texttt{Func}, \texttt{Pred} \rangle$, kus $\texttt{Cons}, \texttt{Func}, \texttt{Pred}$ on vastavalt konstant-, funktsionaal- ning predikaatsümbolite metahulgad, $\texttt{Pred} \neq \varnothing$. Signatuuriga käib kaasas tüüp τ ([HJ99, lk 58]), mis omistab funktsionaal- ning predikaatsümbolitele aarsused n, kus $n \geqslant 1$ on metanaturaalarv. Täpsema signatuuri fikseerime alles hiljem. Indiviidmuutujate metahulk $\texttt{Indv}$ olgu suuruselt loenduv. Tüüpiliselt kasutame eesti-ladina järjestustähestikku $a, b, c, \ldots, x, y$, kreeka tähestikku $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, neile vastavaid trükitähti või indeksite, priimide, katustega täiendatud kujusid. Kontekstist on alati selge, missugune sümbol parasjagu indiviidmuutuja rolli täidab. Kirjavahemärkidena lubame koma , ja ümarsulgi (,).

Valemi rekursiivne definitsioon toetub varasemale *termi* mõistele. Olgu fikseeritud signatuur $\sigma = \langle \texttt{Cons}, \texttt{Func}, \texttt{Pred} \rangle$, tüüp τ ja indiviidmuutujad metahulgaga $\texttt{Indv}$.

Metadefinitsioon I.1 (term, [PP04, lk 49])**.** *Termiks* kutsutakse avaldist, mis on parajasti saadud alltoodud eeskirja põhjal.

a. Iga indiviidmuutuja $x \in \texttt{Indv}$ on term.

b. Iga konstantsümbol $c \in \texttt{Cons}$ on term.

c. Kui funktsionaalsümbol $f \in \texttt{Func}$ on aarsusega $\tau(f) =: n$ ning $t_1, \ldots, t_n$ on termid, siis $f(t_1, \ldots, t_n)$ on term.

Termi rakendatakse just valemi rekursiooni atomaarses sammus. Korraga defineeritakse valem kui ka temas esinevate muutujate seotus.

Metadefinitsioon I.2 (loogiline valem, vaba/seotud indiviidmuutuja, [Pra04, lk 79])**.** *Valemiks* nimetatakse avaldist, mis on parajasti saadud järgmise eeskirja põhjal.

a. Kui predikaatsümbol $P \in \texttt{Pred}$ on aarsusega $\tau(P) =: n$ ning $t_1, \ldots, t_n$ on termid, siis $P(t_1, \ldots, t_n)$ on valem. Kõik baasis ehk *atomaarses valemis* $P(t_1, \ldots, t_n)$ esinevad indiviidmuutujad on vabad.

b. Kui $\mathcal{F}$ on valem, siis $\neg\mathcal{F}$ on valem. Vabad ja seotud indiviidmuutujad ei teisene.

c. Kui $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ on valemid, kus ükski indiviidmuutuja pole korraga ühes valemis vaba ja teises seotud, siis $(\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G})$ on valem. Vabad ja seotud indiviidmuutujad ei teisene.

d. Kui $\mathcal{F}$ on valem, kus indiviidmuutuja $x \in \texttt{Indv}$ esineb vabalt, siis $\forall x(\mathcal{F})$ on valem. Vabad ja seotud indiviidmuutujad ei teisene, v.a indiviidmuutuja x, mis valemis $\forall x(\mathcal{F})$ on seotud.

Valemite metahulka teoorias $\mathcal{T}$ tähistame kui $\texttt{Form}(\mathcal{T})$. Valemit kutsutakse *kinniseks*, kui temas vabu muutujaid pole. Kui valemi $\mathcal{F}$ asemel kirjutatame $\mathcal{F}(x)$, mõtleme, et x ei esine valemis

$\mathcal{F}$ seotult. Kirjapilt $\mathcal{F}[x]$ tähistab, et muutuja x esineb kindlasti vabalt, kujuga $\mathcal{F}[\hat{x}]$ nõuame, et indiviidmuutuja x ei esine vabalt. Termi t puhul tähendab $\mathcal{F}[t]$, et kõik termis t esinevad indiviidmuutujad on valemis $\mathcal{F}$ vabad. Analoogiliselt tõlgendame tähistusi $t[x]$ ja $\mathcal{F}[t](x)$. Termi t asendamist termiga u valemis $\mathcal{F}[t]$ tähistame kui $\mathcal{F}[t/u]$. Hoiatame, et asendamisel saadud süntaktiline avaldis ei pruugi enam olla valem. Kirjapildiga $\mathcal{F}[\hat{x}](x)$ saame näidata, et indiviidmuutuja x puudub täielikult valemist $\mathcal{F}$.

Sümbolijärjendite süntaktilist võrdust (sealhulgas kokkuleppelist) tähistame täppvõrdusega $\doteq$. Teooria arendamisel lubatakse peale tähestiku ka teiste, *abisümbolite* kasutamist, kui nende tähendus ja kontekst on fikseeritud tähestiku sümbolite kaudu. Niimoodi tuleb mõista tehtemärkide $\exists, \wedge, \vee, \Leftrightarrow$ kasutamist. Näiteks valemite $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ korral $\mathcal{F} \wedge \mathcal{G} :\doteq \neg(\mathcal{F} \Rightarrow \neg\mathcal{G})$. Eriti kasulikuks saavad abisümbolid hulgateooria juures. Ümarsulge on lubatud ära jätta üldtuntud kokkulepete järgi.

Valemi *osa-* ehk *alamvalemi* ning *peatehte* definitsioon antakse rekursiooniga vastupidises suunas valemi definitsiooniga võrreldes. Valemi peatehteks on valemi ehitamisel viimasena kasutatud loogiline tehe (eitus, implikatsioon või üldisuskvantor). Valemi osavalemiteks on kõik valemid, mis ehituse rekursioonis läbi käidi, nende hulgas ka valem ise.

Metadefinitsioon I.3 (osa- ehk alamvalem, valemi peatehe, [PP04, lk 50])**.** Valemi $\mathcal{H}$ *osa-* ehk *alamvalemid* ning *peatehe* määratakse järgmise eeskirja abil.

a. Valemi $\mathcal{H}$ osavalemiteks on $\mathcal{H}$ ise ja punktidega b.–d. määratud osavalemid. Atomaarsel valemil pole peatehet.

b. Kui $\mathcal{H} \doteq \neg\mathcal{F}$, siis valemi $\mathcal{H}$ osavalemiteks on valemi $\mathcal{F}$ osavalemid. Valemi $\mathcal{H}$ peatehteks on eitus „$\neg$“.

c. Kui $\mathcal{H} \doteq (\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G})$, siis valemi $\mathcal{H}$ osavalemiteks on valemite $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ osavalemid. Valemi $\mathcal{H}$ peatehteks on implikatsioon „$\Rightarrow$“.

d. Kui $\mathcal{H} \doteq \forall x(\mathcal{F})$, siis valemi $\mathcal{H}$ osavalemiteks on valemi $\mathcal{F}$ osavalemid. Valemi $\mathcal{H}$ peatehteks on üldisuskvantor „$\forall$“.

Alamvalemi mõistet kasutame näiteks Lévy-Montague'i peegeldumisprintsiibi tõestuse struktuurses induktsioonis.

1.2. Tuletised, aksioomid, tuletusreeglid Gentzeni süsteemis

Gentzeni sekventsiaalses süsteemis võetakse tuletisteks *sekventsid* – süntaktilised objektid üldkujuga $\Gamma \vdash \Omega$, kus Γ ja Ω on valemite komaga eraldatud järjendid. Sekventsi eesliiget Γ

kutsutakse *antetsedendiks*, tagaliiget *suktsedendiks*. Meie vaatleme süsteemi, kus suktsedent koosneb parajasti ühest valemist, *konsekvendist*. Antetsedent võib erijuhul olla tühi. Sümbolit $\vdash$ nimetame *sekviks* või *lipuks*.

Olgu Γ, Δ valemite järjendid ning $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ valemid. *Tuletus* ehk *formaalne tõestus* on sekventside süntaktiline puu aksioomidest tulemuseni, kus üleminekud põhjendatakse tuletusreeglite abil. Aksioomid, millest tõestusi alustatakse, on Gentzeni predikaatarvutuses ainult ühte tüüpi: *samasus*- ehk *identsusaksioomid* üldkujuga

$$\mathcal{F} \vdash \mathcal{F}.$$

Iga konkreetse valemi $\mathcal{F}$ korral saame iseseisva aksioomi, ja kindlat sekventsi uurides võime alati veenduda, kas sekvents on aksioom või mitte. Niisugust kontrollitavat reeglit, mis määrab korraga rohkem kui ühe aksioomi kehtivuse, nimetatakse *aksioomiskeemiks*. Aksioomide metahulk on puhtas predikaatarvutuses loenduv nagu valemite metahulkki, kuid nood aksioomid on kirjeldatavad ainsa aksioomiskeemiga. Sarnaselt tuleb suhtuda terminitesse *definitsiooniskeem*, *lause*- või *teoreemiskeem*. Näiteks kokkulepe $\mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \doteq \neg(\mathcal{F} \Rightarrow \neg\mathcal{G})$ liigitub definitsiooniskeemiks, sest kehtib suvaliste valemite $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ puhul. Edasises rõhutame, kui väide on tegelikult väiteskeem, aga definitsiooniskeemidest räägime ikka kui lihtsalt definitsioonidest.

Ühest või kahest tuletisest järgmiseni liigutakse tõestuses *tuletusreeglite abil*. Reeglid jagunevad kahte ülemrühma: nn *lausearvutuslikud* ehk *kvantoriteta reeglid* ning *predikaatarvutuslikud* või *kvantoritega reeglid*. Lausearvutuslik reegel võib baasis $\neg, \Rightarrow, \forall$ olla omakorda kolme tüüpi ning kvantoritega reegel kahte tüüpi, nagu nähtub tabelitest I.1 ja I.2.

Tabel I.1. Lausearvutuslikud ehk kvantoriteta tuletusreeglid, [PP04, lk 88]

Paremale sissetoomine	Paremalt eemaldamine	Struktuurne reegel
$\dfrac{\Gamma, \mathcal{F} \vdash \mathcal{G}}{\Gamma \vdash (\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G})}\ (\vdash\Rightarrow)^{\ddagger}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \mathcal{F} \qquad \Gamma \vdash (\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G})}{\Gamma \vdash \mathcal{G}}\ (\vdash\not\Rightarrow)^{\ddagger}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \mathcal{F}}{\Gamma, \mathcal{G} \vdash \mathcal{F}}\ (\mathrm{S}+)$
$\dfrac{\Gamma, \mathcal{F} \vdash \mathcal{G} \qquad \Gamma, \mathcal{F} \vdash \neg\mathcal{G}}{\Gamma \vdash \neg\mathcal{F}}\ (\vdash\neg)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \neg\neg\mathcal{F}}{\Gamma \vdash \mathcal{F}}\ (\vdash\not\neg)$	$\dfrac{\Gamma, \Delta, \mathcal{F} \vdash \mathcal{G}}{\Gamma, \mathcal{F}, \Delta \vdash \mathcal{G}}\ (\mathrm{S}\sim)$

‡ Reegli rakendamisel tuleb kontrollida, et sümbolijärjend $(\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G})$ oleks valem, see tähendab, et ükski indiviidmuutuja ei tohi olla korraga ühes valemis vaba ja teises seotud.

Kvantoritega reegleid on kokku kaks. Mõlemale kehtib kitsendus, kusjuures tärniga (*) reegli ahendamine tuleneb loogika kaalutlustest [PP04, lk 98], seevastu kui ristiga (†) kitsendus johtub otseselt valemi metadefinitsiooni punktist d.

Tabel I.2. Predikaatarvutuslikud ehk kvantoritega tuletusreeglid, [PP04, lk 97]

Paremale sissetoomine	Vasakule sissetoomine
$\dfrac{\mathit{\Gamma}[\hat{x}] \vdash \mathcal{F}[x]}{\mathit{\Gamma}[\hat{x}] \vdash \forall x(\mathcal{F})}\ (\vdash\forall)^{*}$	$\dfrac{\mathit{\Gamma}, \mathcal{F}[t](x) \vdash \mathcal{G}}{\mathit{\Gamma}, \forall x(\mathcal{F}[t/x]) \vdash \mathcal{G}}\ (\forall\vdash)^{\dagger}$

* Valemite jaoks defineeritud kirjapilti $[\hat{x}]$ (vt metadef I.2 järg. osa) on laiendatud järjendile $\mathit{\Gamma}$. Reegli rakendamiseks tuleb kontrollida, et universaalkvantori muutuja ei esineks vabalt valemijärjendis $\mathit{\Gamma}$.

† Reegli rakendamisel tuleb kontrollida, et valemis $\mathcal{F}$ ei esineks muutuja x seotult. Muus osas on termi t valik piiramata.

Tuletuse pikkus kasvab ruttu, vähegi keerukama tõestuse viimine aksioomideni pole praktiliselt mõistlik. Sel põhjusel lubatakse tõestuses algtipuna tulemusi, mis on ennist tõestatud. Peale varem tõestatud sekventside ning aksioomide võib puu tipp olla tuletatav eelduse järgi, näiteks struktuurses induktsioonis. Neid kolme juhtu tähistame tuletuspuus isemoodi joontega, vt tabelit I.3.

Tabel I.3. Jooned tuletuspuu algtippude jaoks

Aksioom	Varasemast tuletatud	Tuletatav eeldusest
$\dfrac{\overline{\phantom{\Gamma \vdash \mathcal{F}}}}{\mathit{\Gamma} \vdash \mathcal{F}}$ (aks) $\vdots$	$\dfrac{\smile}{\mathit{\Gamma} \vdash \mathcal{F}}$ (var) $\vdots$	$\dfrac{\text{- - - - -}}{\mathit{\Gamma} \vdash \mathcal{F}}$ (eeld) $\vdots$

Pole keeruline näha, et kõik sekventsid kujul $\mathit{\Gamma}, \mathcal{F}, \mathit{\Delta} \vdash \mathcal{F}$ on tuletatavad. Tõepoolest, olgu valemeid järjendis Δ kokku $n \geqslant 0$, järjendis Γ kokku $m \geqslant 0$ valemit. Rakendame lisamise reeglit (S+) järjest n korda, seejärel korra asukoha vahetamise struktuurset reeglit (S$\sim$), lõpuks taas m korda struktuurset reeglit (S+). Jõuame samasusaksioomini $\mathcal{F} \vdash \mathcal{F}$. Lisas A toome näite, mis ilmestab tuletamist Gentzeni süsteemis: teeme läbi abireegli

$$\frac{\mathit{\Gamma}, \mathcal{F}, \mathcal{G} \vdash \mathcal{H}}{\mathit{\Gamma}, \mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \vdash \mathcal{H}}\ (\wedge\vdash)^{\ddagger}$$

teatava ekvivalendi põhjendamise.

Defineerime veel formaalse aksiomaatilise teooria *süntaktilise vasturääkivuse* mõiste.

Metadefinitsioon I.4 (süntaktiline vasturääkivus, mittevasturääkivus, [Pra04, lk 105]). Formaalset aksiomaatilist teooriat $\mathcal{T}$ nimetatakse *süntaktiliselt vasturääkivaks*, kui leidub valem $\phi \in \texttt{Form}(\mathcal{T})$, mispuhul

$$\mathcal{T} \Vdash \vdash \phi \quad \text{ja} \quad \mathcal{T} \Vdash \vdash \neg\phi.$$

Teooriat kutsutakse *süntaktiliselt mittevasturääkivaks*, kui teooria pole süntaktiliselt vasturääkiv.

Klassikalisele predikaatarvutusele toetuvas süntaktiliselt vasturääkivas teoorias on kõik valemid $\varphi \in \texttt{Form}(\mathcal{T})$ tuletatavad [Kul64, lk 40], s.o iga valemi $\varphi \in \texttt{Form}(\mathcal{T})$ korral $\mathcal{T} \Vdash \vdash \varphi$. Niisugust standardse loogika nähtust kutsutakse *plahvatusprintsiibiks*. Plahvatusprintsiibi tõestuseks rakendame kõigepealt reeglit $(\vdash \neg)$ ja seejärel reeglit $(\vdash \not\to)$, võttes järjendi Γ rolli tühja järjendi, valemiks $\mathcal{F} \coloneqq \varphi$ ning valemiks $\mathcal{G} \coloneqq \phi$.

1.3. Võrdusega predikaatarvutus

Senine formaalne süsteem pole eriti konkreetne. Näiteks teame, et predikaatsümbolite hulk $\texttt{Pred}$ pole tühi, kuid ei midagi kindlamat. Taolist üldist tausta andvat süsteemi kutsutakse *puhtaks loogikaks*. Esimese sammuna teooria täpsustamisel lisame signatuurile võrdusmärgi kui *poolloogilise* sümboli, s.o kehtib $= \in \texttt{Pred}$. Märgi $=$ näol on tegu kahekohalise predikaatsümboliga. Võrdusmärgiga koos täiendatakse tüüpiliselt teooria aksiomaatikat, nimetades kolm uut aksioomiskeemi.

Olgu $\mathcal{F}$ suvaline valem, $t, t_1, \ldots, t_n, u_1, \ldots, u_n$ termid, $f \in \texttt{Func}$ funktsionaal- ning $P \in \texttt{Pred}$ predikaatsümbol. Aksioomiskeemid võrdusega predikaatarvutuses on toodud tabelis I.4.

Tabel I.4. Aksioomiskeemid võrdusega predikaatarvutuses, [PP04, lk 101]

Puhas loogika	Võrdusmärgi refleksiivsus	Asendus funktsionaal-sümbolisse	Asendus predikaat-sümbolisse
$\mathcal{F} \vdash \mathcal{F}$	$\vdash t = t$	$t_1 = u_1, \ldots, t_n = u_n \vdash$ $\vdash f(t_1, \ldots, t_n) = f(u_1, \ldots, u_n)$	$t_1 = u_1, \ldots, t_n = u_n \vdash$ $\vdash (P(t_1, \ldots, t_n) \Rightarrow P(u_1, \ldots, u_n))$

Tuntud võrdusseose omadused nagu sümmeetrilisus ja transitiivsus on võrdusega predikaatarvutuses tuletatavad, vt [PP04, lk-d 101–102]. Võrdusega predikaatarvutusele rajame hiljem Zermelo-Fraenkeli hulgateooria. Kahekohaliseks predikaatsümboliks loeme veel märgi $\in$ ning teooriat laiendame *omaaksioomide* ehk *mitteloogiliste aksioomide* võrra.

1.4. Objektteooria ja metateooria

Iga kirjalik matemaatiline arutelu eeldab lugejalt elementaarset lugemisoskust ning analüüsivõimet. Ta peab mõistma, et ühesugune sümbol ruumis nihutatuna viitab ikkagi samale objektile, v.a juhul, kui tähenduse muutus on kontekstist selge. Lugejal tuleb aru saada termi ning valemi mõistetest tasemel, mis võimaldab antud sümbolijärjendi puhul kindlaks määrata, kas märgijada nendeks liigitub või mitte. Sarnaselt osaku lugeja veenduda tuletuste korrektsuses. Nõndasugust lihttasemel arusaamist kutsume *minimaalseks taust-* ehk *metateooriaks*. Pangem tähele, et minimaalsesse taustteooriasse kuulub hulga või *metahulga* mõiste tundmine. Seda elementaarsel tasemel, kus „metahulk“ on kõigest süntaktiliste objektide kogum, kusjuures saab määrata, kas element kogumisse kuulub või ei kuulu. [Kle52, lk 65]

Üldisemalt on *taust-* ehk *metateooria* on loogiline süsteem, milles analüüsitakse teise teooria meetodeid ja struktuuri [Ins09]. Nimetatud teiseks teooriaks võetakse harilikult põhiteooria, milles tuletusi tehakse ja mida kutsutakse *objektteooriaks*. Arusaadavalt on meie põhiteooriaks Zermelo-Fraenkeli hulgateooria koos valikuaksioomiga. Metateooria valik sõltub vahenditest, mida kasutada soovime. Mõistliku ulatusega metateoorias saab rääkida naturaalarvudest, kodeerida valemi ja tuletuse mõisted Gödeli nummerdusega, viia valemitel läbi (kodeeritud kujul) struktuurset induktsiooni. Näiteks sobib metateooriaks Peano aritmeetika [Wea14, lk-d 1, 4], aga metateooriaks saab võtta ka objektteooria enda ehk ZFC. Formaalse metateooria korral tõuseb varasem minimaalne metateooria taseme võrra kõrgemale, meta-metateooriaks [Kle52, lk 65].

Meie metateooriat rangelt ei formaliseeri, jättes selle lugeja intuitsiooni tasemele.

***Märkus* I.5.** Indiviidmuutujate, valemite ja aksioomide metahulkade loenduvust võib võtta ka kui *potentsiaalset loenduvust*. Näiteks indiviidmuutujaid pole kunagi „päriselt“ lõpmatu kogus, kuid neid on alati piisavalt. Metanaturaalarvudest võib esimeses lähenduses mõelda kui kriipsudest, s.o $1 \doteq |$, $2 \doteq ||$, $5 \doteq |||||$, $0 \doteq \_$. Põhiline, et metanaturaalarvud oleksid üksteisest süntaktiliselt eristatavad ja oleks mõistetav, mida tähendavad elementaarsed operatsioonid, nagu $1+1$, $3 \geqslant 0$ või $\max\{1,5\}$. Struktuurse induktsiooni kui „lõpmatu“ meetodi võib samuti asendada selle potentsiaalselt lõpmatu lihtsustusega.

2. Zermelo-Fraenkeli hulgateooria

Fikseerime signatuuri $\langle \varnothing, \varnothing, \{=, \in\} \rangle$. Paljas Zermelo-Fraenkeli teoorias pole konstant- ega funktsionaalsümboleid. Teooriasse kuuluvad üksnes hulgalised objektid, st *urelemendid* ehk *aatomid* puuduvad. Lepime kokku, et võrdust ja hulka kuuluvust märgime prefikstähistuse asemel infikstähistusega, näiteks $=(x, y)$ asemel kirjutame $x = y$. Hulgateooria aksioome on loenduv kogus, seda tänu kahele aksioomiskeemile. Aksioomidega tutvume järk-järgult, et hõlbustada nende sisu selgitamist.

2.1. Teooria omaaksioomid ja baasmõisted

Tutvustame ZF-hulgateooria aksioome, nende esmaseid järeldusi ning defineerime edasiseks tarvilikud abisümbolid. Toome välja aksioomide predikaatarvutusliku kuju, samal ajal selgitame tavakeeles nende sisu ja tähendust. Toodud aksioomid moodustavad ühe võimaluse mitmest, kuidas ZF-teooriat esitada. Paljuski, enamasti isegi üdini, langevad teooria tõestatavad tulemused kokku, kuigi tõestuste käik ei pruugi ühtida. Meie valik tugineb allikatele [Jec02, lk-d 6–13, 47, 63] ja [Kul64, lk-d 212–213]. Üldlevinud kokkuleppe järgi jätame aksioomides liigsed sulud panemata.

Ilma ühegi täiendava aksioomita (isegi võrduse aksioomideta) võime tõestada, et mingisugune hulk peab leiduma: piisab mõelda sekventsile $\vdash \exists X(X = X \vee \neg X = X)$. Tühja hulga või üldse täpsemate omadustega hulga leidumise küsimus jääks aga lahtiseks.

1. Hulgad on võrdsed parajasti siis, kui neisse kuuluvad samad elemendid.

$$\vdash \forall X \forall Y (X = Y \Leftrightarrow \forall z (z \in X \Leftrightarrow z \in Y))$$

Ekstensionaalsusaksioom – oluline on sisu, ulatus, mitte mõte või moodustamise viis

Ekstensionaalsuse esimese ekvivalentsi $\Rightarrow$-suund kehtib tegelikkuses juba võrdusega predikaatarvutuses. Vastupidi taandub ekstensionaalsusaksioomi järgselt osa võrduse aksioomidest ebavajalikku rolli. Näiteks refleksiivsus $\vdash X = X$ on ekstensionaalsuse najal tuletatav.

2. Olgu $n \geqslant 0$ metanat-arv ja $p_1, \ldots, p_n$ hulgad. Kui X on hulk ja $\mathcal{S}[x, \hat{Y}, p_1, \ldots, p_n](X, Y)$ valem hulgateor-st, siis leidub X-ist erald. hulk $Y \coloneqq \{\, x \in X \mid \mathcal{S}[x, \hat{Y}, p_1, \ldots, p_n](X, Y) \,\}$ ehk teisiti $\{\, x \in X : \mathcal{S}[x, \hat{Y}, p_1, \ldots, p_n](X, Y) \,\}$ on hulk. Kõik aksioomid kujuga

$$\vdash \forall p_1 \cdots \forall p_n \forall X \exists Y \forall x (x \in Y \Leftrightarrow x \in X \wedge \mathcal{S}[x, \hat{Y}, p_1, \ldots, p_n](X, Y)).$$

Eraldamisaksioomiskeem – moodus, kuidas uusi hulki luua, eraldades need välja olemasolevatest

Hulgad $p_1, \ldots, p_n$ on parameetrite rollis (erijuhul $n = 0$ parameetreid pole). Tüüpilise eraldamisaksioomiskeemi rakendamisel on hulgad p_i fikseeritud hulgad, mis täidavad kindlaid lisatingimusi.

Eraldamisaksioomiskeem väldib Russeli antinoomiat [Jec02, lk 4], kuna reeglit $\mathcal{S}$ rakendatakse kindlale, juba olemasolevale hulgale X. Vigureid vormis $x \in Y \Leftrightarrow x \notin Y$ ei saa luua, sest indiviidmuutujat Y ei tohi valemis $\mathcal{S}$ vabalt esineda. Saab tõestada, et leidub parajasti üks tühi hulk $\varnothing$, kus $x = \varnothing$ parajasti siis, kui $\forall y(y \notin x)$ (põhjenduseks võtta suvaline hulk X ja valemiks $\mathcal{S}[x, \hat{Y}] \doteq x \neq x$, ühesuseks rakendada ekstensionaalsust). Kõikide hulkade hulka U ei leidu. Kui leiduks, oleks $Y := \{ x \in \mathsf{U} \mid x \notin x \}$ niisamuti hulk. Mõlemad variandid, nii $Y \in Y$ kui $Y \notin Y$, annaksid vastuolu. Eraldamisaksioomiskeemiga defineeritakse hulkade *ühisosa* ja *vahe* üldtuntud viisil.

Defineerime alam- ehk osahulka tähistava abisümboli, $X \subseteq Y :\doteq \forall z(z \in X \Rightarrow z \in Y)$.

3. Iga hulga X ja Y korral saab moodustada nende järjestamata paari (hulgapaari) Z, s.o hulga $Z = \{X, Y\}$, mille ainukesed elemendid on X ja Y.

$$\vdash \forall X \forall Y \exists Z \forall z(z \in Z \Leftrightarrow z = X \vee z = Y)$$

Hulgapaari moodustamise aksioom – kahest hulgast saab moodustada nende järjestamata paari

Võiksime nõuda vähemat, võttes aksioomiks hoopis $\vdash \forall X \forall Y \exists Z(X \in Z \wedge Y \in Z)$. Nii ütleksime, et $X, Y \in Z$, rõhutamata, kas hulka Z kuulub teisi elemente. Piltlikult väidaks alternatiivne hulgapaari moodustamise aksioom, et leidub hulk Z nii, et $\{X, Y\} \subseteq Z$. Konkreetselt hulgapaari leidumine ja ühesus johtuks eraldamisaksioomist ning ekstensionaalsusest. Nõndasugused märkused kehtivad samuti ühendi ning potentshulga moodustamise aksioomide juures. Kui $X = Y$, saame hulga $\{X, X\}$, mida tähistame kui $\{X\}$. [Pál74, lk 9]

Kolmas viis olemasolevatest hulkadest uusi moodustada on ühendi võtmise kaudu.

4. Iga hulga X korral saab moodustada selle elementidest Z ühendi Y, s.o hulga $Y = \bigcup X$, mille elemendid on hulga X elementide Z elemendid z.

$$\vdash \forall X \exists Y \forall z(z \in Y \Leftrightarrow \exists Z(z \in Z \wedge Z \in X))$$

Ühendi moodustamise aksioom – hulga elementidest saab moodustada nende ühendhulga

Kahe hulga A_1 ja A_2 ühend $A_1 \cup A_2$ saadakse hulgapaari ja ühendi aksioomi koosmõjus, $A_1 \cup A_2 = \bigcup\{A_1, A_2\}$.

5. Iga hulga X puhul leidub selle potentshulk Y, s.o hulk $Y = \mathcal{P}(X)$, mille

elemendid Z on parajasti hulga X osahulgad.

$$\vdash \forall X \exists Y \forall Z (Z \in Y \Leftrightarrow Z \subseteq X)$$

Potentshulga moodustamise aksioom – hulga osahulkadest saab moodustada koondhulga

Kazimierz Kuratowski järgi määratletakse *järjestatud paar* kui $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. Aksioomidele 1–3 tuginedes Kuratowski paar leidub ja täidab järjestatud paaride põhiomadust:

$$\forall a \forall b \forall c \forall d ((a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d).$$

Potentshulga aksioomiga tõestatakse, et iga hulga A ning B puhul leidub nende *otsekorrutis* $A \times B$. Idee seisneb sisalduvuses $A \times B \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$. Harilikult samastatakse hulgateoorias seosed ja funktsioonid nende graafikutega. Binaarne *seos* R on suvaline paaridest koosnev hulk. Seos hulkade A, B vahel on osahulk $R \subseteq A \times B$. Seosega käivad kaasas *määramispiirkonna* ning *muutumispiirkonna* mõisted, vastavalt

$$\begin{aligned} \operatorname{dom} R &= \{\, a \in \bigcup \bigcup R \mid \exists b (a, b) \in R \,\}, \\ \operatorname{ran} R &= \{\, b \in \bigcup \bigcup R \mid \exists a (a, b) \in R \,\}. \end{aligned}$$

Funktsioon ehk *kujutus* on seos f, mispuhul $(x, y_1) \in f$ ja $(x, y_2) \in f$ tähendab võrdust $y_1 = y_2$. Kirjutame $f \colon X \to Y$, kui $\operatorname{dom} f = X$ ja $\operatorname{ran} f \subseteq Y$. *Hulga A kujutis* $R(A)$ ning *pöördkujutis* $R^{-1}(A)$ seosega R defineeritakse tavalisel moel, samuti funktsiooni $f \colon X \to Y$ *injektiivsus*, *sürjektiivsus* ning *bijektiivsus*. Kahe funktsiooni f ja g *liitfunktsiooni*, kui $\operatorname{ran} f \subseteq \operatorname{dom} g$, märgime kui $g \circ f$ või lühemalt gf. Funktsiooni f *ahendit hulgale* A tähistame kriipsuga $f|_A$. [Pál74, lk-d 22–33, 38–41]

Defineerime hulga x järglashulga x^+ mõiste $x^+ \coloneqq x' \coloneqq x \cup \{x\}$. Naturaalarvude leidmiseks objekt- ehk hulgateooriast valime von Neumanni järgi nime saanud toimimisviisi. Von Neumanni naturaalarvud ehitatakse üles järglashulga operatsiooni kordamisel. Niisiis $0 \coloneqq \varnothing$,

$1 \coloneqq 0^+$, $2 \coloneqq 1^+$, $3 \coloneqq 2^+$ ja nõnda edasi. Samaväärselt

$$\begin{aligned} 0 &= \varnothing, \\ 1 &= \{\varnothing\}, \\ 2 &= \{\varnothing,\{\varnothing\}\}, \\ 3 &= \{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

või

$$\begin{aligned} 0 &= \varnothing, \\ 1 &= \{0\}, \\ 2 &= \{0,1\}, \\ 3 &= \{0,1,2\}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Märkame, et hulgas 0 on null elementi, hulk 1 sisaldab parajasti ühte elementi ja üldisemalt on hulgas n kokku n elementi. Loendamist võib siin mõista metateoreetilisena, kuigi kehtib samamoodi (tautoloogiana) kardinaalarvude klassikalise definitsiooni mõttes. [Pál74, lk-d 43–44]

Kui soovime rääkida naturaalarvude hulgast tervikuna, vajame täiendavat hulga leidumise aksioomi [Pál74, lk 44]. Kui hulk $A \neq \varnothing$ sisaldab iga elemendi $a \in A$ korral järglast $a^+ \in A$, nimetame hulka A *induktiivseks hulgaks* ehk *koondjärglashulgaks*. Induktiivset hulka, mis sisaldab tühja hulka, kutsume *standardseks*. Abivalemiga $\varnothing \in A$ peame silmas valemit $\exists a(a \in A \wedge a = \varnothing)$. Loeme selle üldiseks põhimõtteks: kui ζ on mingi üheselt leiduv hulgaline objekt, siis valemiga $\zeta \in Y$ peame silmas valemit $\exists y(y \in Y \wedge y = \zeta)$.

6. Leidub hulk A, mille sisaldab elemendina tühja hulka $\varnothing$ ja iga oma elemendi $a \in A$ järglast a^+.

$$\vdash \exists A(\varnothing \in A \wedge \forall a(a \in A \Rightarrow a^+ \in A))$$

Lõpmatu hulga leidumise aksioom – leidub standardseks induktiivne hulk

Alamhulgalise sisalduvuse mõttes vähim tühja hulka sisaldav koondjärglashulk ω ongi soovitud von Neumanni naturaalarvude hulk. Lõpmatu hulga leidumise aksioom nõuab niisuguse hulga

A olemasolu, mispuhul $\omega \subseteq A$. Alternatiivse ja pealtnäha kitsama, kuid ZF-teooria raames samaväärse lõpmatusaksioomi

$$\vdash \exists B(B \neq \varnothing \wedge \forall b(b \in B \Rightarrow \exists c(c \in B \wedge b \subsetneq c)))$$

leiab allikast [Kul64, lk 213].

Regulaarsuse aksioom on tähtis mudeliteoorias näiteks absoluutsuse juures. See aksioom välistab muu hulgas lõpmatult kahanevate $\in$-ahelate võimalikkuse. Regulaarsuse aksioomi kasutame hiljem oluliselt Tarski-Scotti võttes ning väites, et kõik hulgad kuuluvad Zermelo – von Neumanni hierarhiasse V, samuti epsiloninduktsioonis. Hulgateooriaga tavamatemaatika üles ehitamisel pole regulaarsuse aksioomi järele vajadust [HJ99, lk 259]. Seda põhjusel, et paljud olulised hulgad, näiteks naturaalarvud ning ordinaalarvud, on juba regulaarsuse aksioomita tugevalt regulaarsed.

7. Igas mittetühjas hulgas $X \neq \varnothing$ leidub rangelt $\in$-minimaalne element x.

$$\vdash \forall X(X \neq \varnothing \Rightarrow \exists x(x \in X \wedge \neg\exists z(z \in X \wedge z \in x)))$$

Regulaarsuse aksioom – hulk on tühi või sisaldab rangelt $\in$-minimaalset elementi

Tooduga vahetult samaväärne on kirjapilt

$$\vdash \forall X(X \neq \varnothing \Rightarrow \exists x(x \in X \wedge X \cap x = \varnothing)).$$

Teine lõpmatu aksioomide kogum on asendamisaksioomiskeem. See lubab olemasoleva hulga elemendid funktsioonilise reegli abil asendada. Valemit $\Phi[x,y]$ nimetame *täisfunktsiooniliseks*, kui iga hulga x puhul leidub üheselt määratud y nii, et $\Phi[x,y]$ kehtib. Teisisõnu peab täisfunktsioonilisuseks kehtima

$$\forall x \exists! y\, \Phi[x,y] :\doteq \forall x(\exists y(\Phi[x,y] \wedge \forall z(\Phi[x,y] \wedge \Phi[x,y/z] \Rightarrow y = z))).$$

8. Olgu $n \geqslant 0$ metanat-arv ja $p_1, \ldots, p_n$ hulgad. Kui X on hulk ja $\Phi[x, y, \hat{Y}, p_1, \ldots, p_n](X, Y)$ on täisfunktsiooniline valem hulgateooriast, siis leidub hulgast X asendamise teel saadud hulk $Y := \{\, y \mid \exists x(x \in X \wedge \Phi[x, y, \hat{Y}, p_1, \ldots, p_n](X, Y))\,\}$. Kõik aksioomid kujuga

$$\vdash \forall x \exists! y\, \Phi[x,y] \Rightarrow \forall p_1 \cdots \forall p_n \forall X \exists Y \forall y(y \in Y \Leftrightarrow \exists x(x \in X \wedge \Phi[x, y, \hat{Y}, p_1, \ldots, p_n](X, Y))).$$

> **Asendamisaksioomiskeem** – moodus, kuidas uusi hulki luua, asendades olemasolevas hulgas elemente

Asendamisaksioomiskeemist järeldub eraldamisaksioomiskeemi abiga n-ö *osalise asendamise* või *asendamise-kustutamise teoreemiskeem*. Selles väites leevendatakse täisfunktsioonilisuse tingimus osaliseks, nõudes üksnes, et

$$\forall x \forall y \forall z(\varPhi[x,y] \land \varPhi[x,y/z] \Rightarrow y = z).$$

Elemente x, mille korral sobivat elementi y ei leidu, pole millegagi asendada. Osalise skeemi korral niisugused elemendid kustutatakse. Asendamise-kustutamise teoreemiskeemi tõestuseks laiendame esmalt valemit $\varPhi$ kohtadesse, kus element y puudus (näiteks võttes kujutiseks alati tühja hulga). Seejärel rakendame asendamisaksioomiskeemi. Selmet elemente kustutada, jõuame lõpptulemuseni eraldamisaksioomiskeemiga, seades $\mathcal{S}[x,\hat{Y}] \coloneqq \exists y \varPhi[x,y]$. Sarnaselt näeme, et asendamisaksioomiskeemi rakendamiseks hulgale Y piisab teadmisest, et valem $\varPhi[x,y]$ on täisfunktsiooniline hulgal Y, s.o $\forall x(x \in Y \Rightarrow \exists! y \varPhi[x,y])$.

Asendamisaksioomiskeemi abil tuletatakse väga rohkesti olulisi teoreeme. Sellele tuginedes tõestatakse transitiivse sulundi leidumine, tulemusi ordinaalarvude aritmeetikas ning erinevate rekursioonide korrektsus, näiteks potentselt regulaarse rekursiooni teoreem. Paljude hulgateoorias tuntud hulkade leidumist ei saaks eraldamisaksioomiskeemita tõestada. Üheks näiteks on Zermelo naturaalarvuhulk, vt [Kun13, lk 126].

Aksioome punktidest 1–8 nimetatakse Zermelo-Fraenkeli aksioomideks. Viimane puuduolev aksioom on valikuaksioom, mis lubab ühekorraga ja eeskirjata „valida" lõpmatu koguse elemente. Kui X on suvaline hulk, siis *valikufunktsiooniks hulgal X (eriväärtusega a)* nimetatakse funktsiooni $\tilde{\nu}\colon X \to (\bigcup X) \cup \{a\}$, kus iga $\varnothing \neq x \in X$ korral $\tilde{\nu}(x) \in x$, lisaks $\varnothing \in X$ puhul $\tilde{\nu}(\varnothing) = a$.

9. Iga hulga X korral leidub valikufunktsioon ν hulgal $X \setminus \{\varnothing\}$.

$$\vdash \forall X(\exists \nu\colon X \setminus \{\varnothing\} \to \bigcup X \land \forall x(x \in X \land x \neq \varnothing \Rightarrow \nu(x) \in x))$$

> **Valikuaksioom** – igal hulgal $X \setminus \{\varnothing\}$ leidub valikufunktsioon

Olgu a suvaline hulk. Valikuaksioomi kohese järeldusena leidub igal hulgal X valikufunktsioon $\widetilde{\nu}$ eriväärtusega a, võttes $\widetilde{\nu} \coloneqq \nu \cup \{(\varnothing, a)\}$, kui kehtib $\varnothing \in X$. Zermelo-Fraenkeli hulgateooriat koos valikuaksioomiga kutsutakse ZFC-*teooriaks*. Ekvivalentne ning pikalt välja kirjutatud valikuaksioom tuuakse allikas [Kul64, lk-d 212–213].

Edasises jätame sekventsiaalse tähistuse ära, kui selle rõhutamine pole oluline. Gentzeni süsteemile viitame näiteks valemite absoluutsuse juures, epsilon-kvaasimudeli korrektsuse metateoreemiskeemis ning ZFC^+-teooriaga seotud tulemustes. Kasutame tõkestatud kvantoreid $\forall x \in y$ ja $\exists x \in y$, kus ükskõik missuguse valemi $\mathcal{F} \doteq \mathcal{F}(y)$ jaoks

$$\forall x \in y(\mathcal{F}) :\doteq \forall x((x \in y \Rightarrow \mathcal{F})),$$
$$\exists x \in y(\mathcal{F}) :\doteq \exists x(x \in y \wedge \mathcal{F}).$$

Toodud aksioomide pisut teistsugustest vormidest, samuti parameetrite kohta eraldamis- ning asendamisaksioomiskeemides, võib lugeda Lévy artiklist, vt [Lév74].

2.2. Klassid ja pärisklassid hulgateoorias

Kujutlegem ette hulgateooriat, kus kehtivad kõik ZFC aksioomid, kuid lõpmatusaksioomi asemele on lisatud tema eitus. Niisuguses teoorias $\mathsf{ZFC} - \mathsf{Inf} + \neg\mathsf{Inf}$ on kõik hulgad *lõplikud*, bijektsioonis unikaalse naturaalarvuga. Kõigi naturaalarvude hulka ω kui lõpmatut hulka ei leidu. Hulga ω puudumine ei takista meid rääkimast naturaalarvude kogumist ega nonde omadustest.

Otsene lähenemine siiski ei tööta. Võiksime küll kirjutada valemi $\mathcal{I}[x]$, mis väidab, et hulk x on induktiivne ja sisaldab tühja hulka:

$$\mathcal{I}[x] :\doteq \varnothing \in x \wedge \forall y(y \in x \Rightarrow y^+ \in x).$$

Samuti saaksime anda valemi $\mathcal{M}[y]$, mis ütleb, et y on $\subseteq$-vähim tühja hulka sisaldav induktiivne hulk,

$$\mathcal{M}[y] :\doteq \forall x(\mathcal{I}[x] \Rightarrow y \subseteq x).$$

Mure on selles, et kui standardset induktiivset hulka x ei leidu, võib hulga y rolli võtta ükskõik missuguse hulga. Küll aga võib naturaalarvuks olemise defineerida valemiga $\mathcal{N}[y]$, kus

$$\mathcal{N}[y] :\doteq „y \text{ on ordinaalarv}“ \wedge \neg\exists z(z \neq 0 \wedge „z \text{ on piirordinaalarv}“ \wedge z \in y).$$

(Ordinaalarvu ning piirordinaalarvu mõisted defineerime ordinaalarvude jaotises.)

Teoorias $\mathsf{ZFC} - \mathsf{Inf} + \neg\mathsf{Inf}$ saame seega väljendada lauseid kujul „iga naturaalarvu n puhul …“ valemiga $\forall n(\mathcal{N}[y/n] \Rightarrow \ldots)$. Võime piltlikumalt vaadelda valemit $\mathcal{N}$ rahuldavaid hulki mõttelise kogumina N. Siis teiseneb varasem kujule $\forall n(n \in \mathit{N} \Rightarrow \ldots)$ või isegi vormi $\forall n(n \in \omega \Rightarrow \ldots)$, võttes $\omega := \mathit{N}$. Kirjeldatud vaatenurgast on naturaalarvude kogum ω

pärisklass, teooria objektidest väljapoole jääv kujundlik assotsiatsioon.

Teoorias ZFC on ω loomulikult hulk, mitte pärisklass, ent sarnaseid süntaktilisi trikke tehakse siingi. Näiteks räägitakse kõigi hulkade klassist $\mathtt{U}$ (valemiga $x = x$), veel näiteks ordinaalarvude $\mathtt{Ord}$, kardinaalarvude $\mathtt{Card}$ ja tugevalt regulaarsete hulkade klassist $\mathtt{WF}$. Viimased kolm pärisklassi defineerime hiljem. Võtame senise arutelu kokku täpsema metadefinitsiooniga.

Metadefinitsioon I.6 (klass, pärisklass)**.** *Klassiks* $\mathcal{C}$ või $\mathcal{C}_{\mathcal{N}}$ (defineeriva valemiga $\mathcal{N}[x]$, põhimuutujaga x) nimetame mõttelist kogumit, mispuhul

$$x \in \mathcal{C}_{\mathcal{N}} \doteq \mathcal{N}[x].$$

Pärisklass on klass, mis ei ole hulk: $\neg\exists X(\forall x(x \in X \Leftrightarrow x \in \mathcal{C}_{\mathcal{N}}))$.

ZFC-teoorias on klassid niisiis omamoodi süntaktilised lühendid. Klassidel saab arusaadaval moel defineerida seosed, sealhulgas klasside võrduse ja funktsioonid (funktsiooniline valem), rääkida ühisosast (klasside konjunktsioon) ning ühendist (disjunktsioon). Klassid lühendavad arutelu, aga iga klasse sisaldava väite võime asendada väitega, mis klassidest ei räägi. On olemas hulgateooriaid, mis lubavad hulkade kõrval *tõelisi klasse*. Tõelised klassid laiendavad varem kirjeldatud klasside ulatust, selles kontekstis tuleks ülemistest pärisklassidest rääkida kui *parameetritega defineeritavatest pärisklassidest teoorias* ZFC. [Jec02, lk-d 5–6, 70] Kõik ZFC-teooria hulgad on klassid. Põhjendusena märgime, et kui M on suvaline hulk, siis valime lihtsalt $\mathcal{M}[x] \coloneqq x \in M$.

Toome näite klasside terminoloogia rakendamisest. Nimelt saame klassi mõistega anda mõnele aksioomile alternatiivse esituse. Eraldamisaksioomiskeemi võime sõnastada järgmiselt: iga hulga X ja iga klassi $\mathcal{C} \coloneqq \mathcal{C}_{\mathcal{S}[x,\hat{Y}](X,Y,p_1,\dots,p_n)}$ korral on ka $Y = X \cap \mathcal{C}$ hulk. Iseäranis mugava tõlgenduse võtab asendamisaksioomiskeem [Jec02, lk 13], mis väidab, et iga hulga X korral on klass $\mathcal{F}(X)$ hulk, kus $\mathcal{F} \coloneqq \mathcal{F}_{\Phi[x,y,\hat{Y}](X,Y,p_1,\dots,p_n)}$ ja $\mathcal{F}(X)$ on hulga X kujutis klassifunktsiooniga $\mathcal{F}$.

Selguse huvides kasutame klasside jaoks ka edaspidises tavapärasest erinevat kirjatüüpi.

2.3. Transitiivne hulk

Keskne mõiste hulga- ja mudeliteoorias on *transitiivne hulk*. Hulka loetakse transitiivseks, kui sisalduvusseos $\in$ hulgal on teatud mõttes transitiivne.

Definitsioon I.7 (transitiivne hulk, [Kun80, lk 16])**.** Hulk X on transitiivne siis, kui iga tema element on ühtlasi alamhulk. Valemina „X on transitiivne“ $\coloneqq \forall x(x \in X \Rightarrow x \subseteq X)$.

Tühi hulk on näide transitiivsest hulgast. Pole raske näha, et järgmised tingimused on ekvivalentsed.

Lause I.1 (hulga transitiivsuse teised kujud)**.** *Tingimused* (i)–(iv) *on samaväärsed*

(i) *hulk X on transitiivne,*

(ii) $\forall u, v(u \in v \wedge v \in X \Rightarrow u \in X)$*,*

(iii) $\bigcup X \subseteq X$*,*

(iv) $X \subseteq \mathcal{P}(X)$*.*

Sarnasus seose transitiivsuse omadusega on kõige selgem väites (ii). Esimese lause põhjendamise jätame lugeja ülesandeks.

Hulga ja selle elementide transitiivsus pole otseses seoses. Kui hulk X on transitiive, ei pruugi elemendid transitiivsed olla. Vastunäide: $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$. Kahtlemata on tegu transitiivse hulgaga, kuid element $\{\{\varnothing\}\}$ ise transitiivne pole. Teisipidine samuti ei kehti, st hulga kõigi elementide transitiivsusest ei järeldu hulga enda transitiivsust. Vastunäiteks sobib $\{\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$.

Varasema näite $X \coloneqq \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$ põhjal ei tarvitse transitiivse hulga alamhulk transitiivne olla, sest mittetransitiivne hulk $\{\{\varnothing\}\}$ oli ka hulga X osahulk. Vaadeldes kogumeid $\{\{\varnothing\}\}$ ja $\mathcal{P}(\{\{\varnothing\}\}) = \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}$, märkame, et kogumi hulkade transitiivsusest ei johtu kogumi potentshulga transitiivsust. Puudub element $\{\varnothing\}$.

Eitavatest tulemustest hoolimata on transitiivsetel hulkadel ja nende kogumitel ka häid omadusi.

Lause I.2. (1) *Transitiivsete hulkadest koosneva hulga C ühend $\bigcup C$ on transitiivne.*

(2) *Transitiivsete hulkade kogumi $C \neq \varnothing$ ühisosa $\bigcap C$ on transitiivne.*

(3) *Kui kogum C koosneb transitiivsetest hulkadest, on seos $\in|_C$ kogumil C transitiivne.*

(4) *Transitiivse hulga X potentshulk $\mathcal{P}(X)$, ühend $\bigcup X$ ning $X \neq \varnothing$ korral (ja regulaarsuse aksioomi kasutades) ühisosa $\bigcap X$ on transitiivsed.*

(5) *Transitiivse hulga X järglashulk $X^+ = X \cup \{X\}$ on transitiivne. Üldisemalt kui X on transitiivne ja $x \subseteq X$, siis $X \cup \{x\}$ on transitiivne.*

Tõestus. Tõestame näitlikustamiseks väite (1).

(1) Kui $C = \varnothing$, siis $\bigcup C = \varnothing$, mistõttu tulemus vahetu. Olgu $C \neq \varnothing$ transitiivsetest

hulkadest koosnev hulk, st kuuluvusest $c \in C$ järeldub c transitiivsus. Tahame tõestada, et $\bigcup C$ on transitiivne. Kasutame lause I.1 tingimust (ii).

Valime suvalise $u \in \bigcup C$. Ühendi definitsiooni põhjal leidub $c \in C$, mispuhul $u \in c$. Samuti ühendi definitsioonist $c \subseteq \bigcup C$. Kui nüüd $v \in u$, siis c transitiivsusest $v \in c$ ja alamhulgalisusest $v \in \bigcup C$. ■

Ordinaalarvud defineerime hiljem eritüüpi transitiivsete hulkadena. Von Neumanni naturaalarvud ning kõigi naturaalarvude hulk ω on ka transitiivsed. Iga hulga X korral leidub temast „minimaalselt suurem“ transitiivne hulk, nimelt *transitiivne eelsulund* $\mathrm{tc}(X)$, mille koostame samuti hiljem.

2.4. Järjestusseosed. Ordinaalarvud

Binaarset seost $\leqslant$ kutsutakse *osalise järjestuse seoseks*, kui see on refleksiivne, antisümmeetriline ning transitiivne. Irrefleksiivset ja transitiivset seost $<$ nimetatakse *range järjestuse seoseks*, mistõttu kutsutakse osalise järjestuse seost vahel ka *mitterange järjestuse seoseks*. Ettetuleva mitterange järjestuse võime alati teha võrduse keelamisega rangeks, vastupidi range seose muuta mitterangeks võrduse lubamise teel. Refleksiivset ja transitiivset seost $\preccurlyeq$ kutsutakse *eel-* ehk *kvaasijärjestuseks*. Terutame, et need mõisted sobivad nõndasamuti pärisklasside kontekstis.

Defineerime minimaalsed-maksimaalsed, vähimad ja suurimad elemendid. Loomulik on need mõisted sõnastada osalise järjestuse jaoks, kuid meil läheb tarvis üldisemat määratlust.

Definitsioon I.8 (E-ekstreemsed elemendid, [HJ99, lk 251])**.** Olgu E suvaline seos klassil X.

a. Klassi X elementi ξ nimetatakse *rangelt E-minimaalseks*, kui $\xi \in \mathit{X}$ ja ei leidu sellele *E-eelnevat* elementi klassis X, s.o $\forall x \in \mathit{X} (\neg x \mathrel{\mathit{E}} \xi)$. Analoogiliselt defineeritakse *rangelt E-maksimaalne* element Ξ.

b. Klassi X elementi m nimetatakse *E-minimaalseks*, kui $m \in \mathit{X}$ ja ei leidu sellele *rangelt E-eelnevat* elementi klassis X, s.o $\forall x \in \mathit{X} (x \mathrel{\mathit{E}} m \Rightarrow x = m)$. Analoogiliselt defineeritakse *E-maksimaalne* element M.

c. Klassi X elementi m_0 nimetatakse *E-vähimaks*, kui $m_0 \in \mathit{X}$ ja see eelneb igale klassi X elemendile, s.o $\forall x \in \mathit{X} (m_0 \mathrel{\mathit{E}} x)$. Analoogiliselt defineeritakse *E-suurim* element M_0.

Kui osalise järjestuse seose kõik elemendid on omavahel võrreldavad (kehtib *trihhotoomia*), räägitakse järjestuse *lineaarsuse* omadusest. Eritüüpi lineaarne järjestus on *potentne järjestus*.

Definitsioon I.9. Osalist järjestust $\leqslant$ hulgal P nimetatakse *potentseks järjestuseks*, kui igas mittetühjas P alamhulgas leidub $\leqslant$-vähim element. Samasuguse omadusega ranget järjestust kutsutakse *rangeks potentseks järjestuseks.*

***Märkus* I.10.** Eestikeelses kirjanduses kutsutakse potentset järjestust *täielikuks järjestuseks* [Oja06, lk 63]. Eirame niisugust traditsiooni kolmel põhjusel. Esiteks, sõna „potentne“ viitab alamhulkadele potentshulga kontekstis, mispärast kirjeldab see järjestuse omadust hulkade korral täpsemini kui võreteooriast tuntud „täielikkus“. Teiseks on täielikkus järjestusteoorias üledefineeritud, korraga mitmes eri tähenduses, raskendades liikumist eesti ning inglise keele vahel. Täielik järjestus võib viidata potentsele järjestusele (ingl *complete order* või *well-order*), aga ka lineaarsele järjestusele (*connected*/*total order*), isegi reaalarvude pidevuse omadusele (*completeness*). Kolmandaks, hiljem sõnastame mõiste *potentselt regulaarne seos* (*well-founded relation*), mille erijuhuks on range potentne järjestus. Usume, et loetletud põhjused kaaluvad üles terminoloogia muutusest tuleneva harjumatuse.

Olulised on funktsioonid, mis järjestust säilitavad.

Definitsioon I.11 (kasvav funktsioon, sarnasus, [Oja06, lk 61])**.** Olgu $(P, \leqslant)$ ja $(Q, \leq)$ osaliselt järjestatud hulgad. *Kasvavaks* ehk *järjestust säilitavaks* nimetatakse funktsiooni $f\colon P \to Q$, mispuhul

$$\forall x_1, x_2 \in P(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \lneq f(x_2)).$$

Bijektsiooni $f\colon P \to Q$ nimetatakse *kasvavaks isomorfismiks* ehk *sarnasuskujutuseks*, vastavaid hulki P, Q *sarnasteks*, kui

$$\forall x_1, x_2 \in P(x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \lneq f(x_2)).$$

Tähistame $P \simeq Q$.

Sarnasuskujutuse pöördkujutus on sarnasuskujutus. Kui on antud kaks sarnasuskujutust, mille puhul leidub liitfunktsioon, jääb kompositsioon samuti kasvavaks isomorfismiks. Tõestame kaks lemmat, lause ja teoreemi, mis kirjeldavad potentse järjestuse ning kasvavate funktsioonide suhet.

Lemma I.3 ([Jec02, lk 18])**.** *Kasvav teisendus $f\colon W \to W$ potentse järjestusega hulgal $(W, \leqslant)$ sisendit ei vähenda, s.o $\forall w \in W(w \leqslant f(w))$.*

Tõestus. Oletame vastuväitena, et $X \coloneqq \{\, x \in W \mid x > f(x) \,\} \neq \varnothing$. Järjestuse $\leqslant$ potentsusest leiduks hulgas X vähim element $m_0 \in X$. Hulga X definitsioonist $m_0 > f(m_0)$, funktsiooni f kasvavusest $f(m_0) > f(f(m_0))$. Teist korda hulga X definitsiooni põhjal $f(m_0) \in X$, mis on vahekorra $m_0 > f(m_0)$ kaudu vastuolus elemendi m_0 minimaalsusega hulgas X. ∎

Osalise järjestuse puhul saame rääkida *eellaste hulgast.*

Definitsioon I.12 (mitterange, range segment, [Pál74, lk 56; Jec02, lk 18])**.** Olgu $(P, \leqslant)$ osaliselt järjestatud hulk, vastav range järjestus $<$ ja $x \in P$.

a. Hulka $x^{\leqslant} := \{\, y \in P \mid y \leqslant x \,\} = \leqslant^{-1}(\{x\})$ nimetame elemendi x *(mitterangete) eellaste hulgaks* ehk *mitterangeks segmendiks.*

b. Hulka $x^{<} := \{\, y \in P \mid y < x \,\} = <^{-1}(\{x\})$ nimetame elemendi x *(rangete) eellaste hulgaks* ehk *(rangeks) segmendiks* või *eelsegmendiks.*

Lemmast I.3 järeldub järgmine

lause I.4. [Jec02, lk 18] *Olgu $(W, \leqslant)$ potentselt järjestatud hulk.*

(1) *Hulk W ei saa olla kasvavalt isomorfne oma elemendi range segmendiga.*

(2) *Ainus kasvav automorfism $f\colon W \to W$ on identsusteisendus Id_W.*

(3) *Kui leidub kasvav isomorfism hulgast $(W, \leqslant)$ potentselt järjestatud hulka $(V, \leq)$, siis see isomorfism on üheselt määratud (hulkade W ja V järjekorra täpsuseni).*

Tõestus. (1) Selge, kui $W = \varnothing$. Las $W \neq \varnothing$, sealjuures oletame vastuväitena, et mingi $x \in W$ korral $W \overset{f}{\simeq} x^{<}$. Määramis- ja muutumispiirkonnast tulenevalt $f(x) \in x^{<}$, st eelsegmendi definitsioonist $f(x) < x$. Vastuolu lemmaga I.3.

(2) Valime $w \in W$. Lemma I.3 rakendamisest automorfismile f johtub, et $w \leqslant f(w)$. Pöördfunktsiooni f^{-1} kasvavusest seega $f^{-1}(w) \leqslant w$. Lemma I.3 kasutamine pöördfunktsiooni kui automorfismi jaoks annab $w \leqslant f^{-1}(w)$. Antisümmeetriast $f^{-1}(w) = w$ ehk $f = \mathrm{Id}_W$.

(3) Kui $f, g\colon W \to V$ on kasvavad isomorfismid, siis funktsioonid $g^{-1} \circ f$ ning $f \circ g^{-1}$ peavad olema punkti (2) alusel vastavalt identsusteisendused Id_W ja Id_V. Järelikult $f^{-1} = g^{-1}$ ja $f = g$. ∎

Potentselt järjestatud hulkade sarnasuskujutus säilitab rangete eellaste hulki.

Lemma I.5. *Olgu $(W, \leqslant)$ ning $(V, \leq)$ potentselt järjestatud hulgad, kusjuures $W \overset{f}{\simeq} V$. Siis iga $w \in W$ puhul leidub täpselt üks $v \in V$ nii, et $w^{<} \simeq v^{\lneq}$. Täpsemini $v = f(w)$.*

Tõestus. Alustame ühesusest. Olgu $w \in W$ ja $v_1, v_2 \in V$ niisugused, et $w^{<} \overset{f_1, f_2}{\simeq} v_1^{\lneq}, v_2^{\lneq}$. Üldisust kaotamata ja lineaarsust kasutades oletame, et $v_1 \leq v_2$, kust $v_1^{\lneq} \subseteq v_2^{\lneq}$. Samal ajal

$v_1^{\lneq} \overset{f_1 \circ f_2^{-1}}{\simeq} v_2^{\lneq}$. Lause I.4 osa (1) järgi ei saa v_2 olla kasvavalt isomorfne oma range segmendiga. Järelikult $v_1 = v_2$. Ühesus sai põhjendatud.

Injektiivsuse alusel kehtib $w^< \overset{f|_{w^<}}{\simeq} f(w^<)$, kus $f(w^<)$ on hulga $w^<$ kujutis funktsiooniga f. Seega edasises piisab tõestada, et $f(w^<) = f(w)^{\lneq}$. Põhjendame kumbagi pidi sisalduvust. Kui $w_1 \in w^<$ ehk $w_1 < w$, siis funktsiooni f kasvavusest $f(w_1) \lneq f(w)$, s.o $f(w_1) \in f(w)^{\lneq}$. Teisipidi, võttes $z \in f(w)^{\lneq}$, järeldub sarnaselt $f^{-1}(z) \in w^<$. Hulga kujutise määratlusest $f(f^{-1}(z)) = z \in f(w^<)$. ■

Oleme valmis tõestama teoreemi, mis seob kõik potentsed järjestused trihhotoomiaga kokku.

Teoreem I.6 (potentsete järjestuste võrdlusteoreem, [Jec02, lk-d 18–19])**.** *Potentselt järjestatud hulkade* $(W, \leqslant)$ *ning* $(V, \leq)$ *korral täitub täpselt üks kolmest tingimusest:*

(1) *hulk* W *on sarnane hulgaga* V*,*

(2) *hulk* W *on sarnane mingi hulga* V *range segmendiga,*

(3) *hulk* V *on sarnane mingi hulga* W *range segmendiga.*

Olukorras $W = \varnothing$ või $V = \varnothing$ on tulemus ilmne. Olgu niisiis W ja V mittetühjad. Üldisust kaotamata (vajadusel W ja V ümber nimetades) oletame, et korraga kehtivad (1) ja (2) bijektsioonidega $f\colon W \to V$ ja $g\colon W \to v^{\lneq}$, $v \in V$. Niimoodi saaksime, et V on sarnane oma range algsegmendiga, $V \overset{g \circ f^{-1}}{\simeq} v^{\lneq}$. Vastuolu lause I.4 osaga (1). Samuti ei saa üheskoos kehtida väited (2) ja (3) sarnasuskujutustega $t\colon W \to v^{\lneq}$ ning $u\colon V \to w^<$, kus $v \in V$, $w \in W$. Siis oleks $t|_{w^<} \circ u\colon V \to v^{\lneq} \subseteq V$ kasvav teisendus. Lemma I.3 järgi $v \leq t(u(v))$, kuid $t(u(v)) \in v^{\lneq}$ annab rangelt $t(u(v)) \lneq v$. Vastuolu antisümmeetriaga.

Korraga kehtib niisiis ülimalt üks tingimustest (1)–(3). Jääb näidata, et alati on vähemalt üks alamväidetest tuletatav. Selleks ehitame sarnasuskujutuse S, millel üks omadustest alati leidub.

Teoreemi I.6 tõestus. (Trihhotoomia rangus tõestusele eelnenud arutelust.) Konstrueerime hulgas $W \times V$ seose S, mis koondab endasse sarnaseid eelsegmente. Olgu

$$S \coloneqq \{\, (w, v) \in W \times V \mid w^< \simeq v^{\lneq} \,\}.$$

Seos S kas on kogu hulgal W määratud või ei ole. Kui mitte, siis leidub $\leqslant$-vähim element $w_0 \in W$, mille puhul S ei ole määratud. Vähima elemendi definitsioonist $\mathrm{dom}(S) = {w_0}^<$.

Samamoodi saame arutleda seose S muutumispiirkonna $\operatorname{ran}(S)$ jaoks. Järelikult on kokku neli varianti:

i) $\operatorname{dom}(S) = W$ ja $\operatorname{ran}(S) = V$,

ii) $\operatorname{dom}(S) = W$ ja $\operatorname{ran}(S) = {v_0}^{\lneq}$,

iii) $\operatorname{dom}(S) = {w_0}^{<}$ ja $\operatorname{ran}(S) = V$,

iv) $\operatorname{dom}(S) = {w_0}^{<}$ ja $\operatorname{ran}(S) = {v_0}^{\lneq}$,

kus hulk v_0 on elemendi $w_0 \in W$ analoog hulgas V.

Seos S on funktsioon. Kui $(w, v_1) \in S$ ja $(w, v_2) \in S$ ning üldisust kaotamata $v_1 \leq v_2$, siis $v_1 \neq v_2$ tähendaks, et ${v_2}^{\lneq}$ on sarnane oma range segmendiga ${v_1}^{\lneq}$. Peegelpildis läheb samaväärne mõttekäik läbi üksühesuse põhjendamisel, niisiis S on injektiivne funktsioon. Kujutus S on kasvav. Tõesti, las (w_1, v_1), $(w_2, v_2) \in S$ ja $w_1 < w_2$ ehk $w_1 \in {w_2}^{\lneq}$. Olgu $f\colon {w_2}^{<} \to {v_2}^{\lneq}$ sarnasuskujutus. Et ${w_1}^{<} \simeq {v_1}^{\lneq}$, siis lemmast I.5 saame $v_1 = f(w_1)$. Samas $f(w_1) \in {v_2}^{\lneq}$, seega $S(w_1) = v_1 \lneq S(w_2) = v_2$.

Kokkuvõttes sobib S juhtudel i)–iii) sarnasusfunktsiooniks, kust i) $\Rightarrow$ (1), ii) $\Rightarrow$ (2) ja iii) $\Rightarrow$ (3). Tõestuse lõpetamiseks välistame juhu iv). Kui variant iv) täituks, oleks ${w_0}^{<} \simeq {v_0}^{\lneq}$ ehk definitsiooni järgi $(w_0, v_0) \in S$. Tekib vastuolu nii w_0 kui v_0 valikuga – nende korral pidi S olema määramata. ■

2.4.1. Naturaalarvud. Naturaalarvude hulk

Lõpmatusaksioom tagab mingisuguse standardse induktiivse hulga ehk koondjärglashulga A leidumise. Aksioomide juures mainisime, et hulga A seest saame leida naturaalarvude hulga ω kui $\subseteq$-vähima standardse induktiivse hulga. Selgitame mõttekäiku üksikasjalikumalt. Kui $\mathcal{A} \neq \varnothing$ koosneb üksnes standardsetest koondjärglashulkadest, on $\bigcap \mathcal{A}$ samuti standardne koondjärglashulk. Järelikult hulga A standardse induktiivsuse korral on standardselt induktiivne ka $\bigcap \mathcal{A}$, kus

$$\mathcal{A} \coloneqq \{\, C \in \mathcal{P}(A) \mid \text{„}C \text{ on standardne koondjärglashulk“} \,\}.$$

Kui B on suvaline standardne koondjärglashulk, siis $A \cap B$ on standardne koondjärglashulk, sealjuures $A \cap B \subseteq A$, seega $A \cap B \in \mathcal{A}$. Lõpuks $\bigcap \mathcal{A} \subseteq A \cap B \subseteq B$. Alamhulgaline sisalduvus $\bigcap \mathcal{A} \subseteq B$ tähendab B suvalisuse tõttu, et $\bigcap \mathcal{A}$ on $\subseteq$-vähim induktiivne hulk standardselt induktiivsete hulkade klassis `Ind`. [Pál74, lk-d 44–45] Toonitame, et lõpmatusaksioomi kasutati siin arutelus selleks, et nõuetele vastav $\mathcal{A} \neq \varnothing$ leiduks (konkreetset, hulgast A

sõltunud hulka $\mathcal{A}$ ei saaks lõpmatusaksioomita isegi koostada).

Tähistame $\omega \coloneqq \bigcap \mathcal{A}$. Selle hulga elemente kutsutakse *(von Neumanni) naturaalarvudeks.* Hulga ω definitsioonist ehk $\subseteq$-vähimisest järeldub koheselt hästi tuntud induktsiooniteoreem.

Teoreem I.7 (naturaalarvulise induktsiooni teoreem, [Pál74, lk 46])**.** *Kui S on naturaalarvude hulga ω osahulk ja samas koondjärglashulk, siis $S = \omega$. See tähendab, kui*

1) $S \subseteq \omega$,

2) $\varnothing \in S$,

3) $\forall s \in S(s^+ \in S)$,

siis $S = \omega$.

Naturaalarvude vallas tõestatakse oluline osa teoreemidest vähemasti kaudselt induktsiooniteoreemi abil. Mainime paari sõnaga mõnda niisugust omadust. Need omadused saab tõestada regulaarsuse aksioomita.

Lause I.8 ([Pál74, lk-d 47, 49])**.** (1) *Ükski naturaalarv pole ühegi oma elemendi alamhulgaks.*

(2) *Naturaalarv ei ole kunagi iseenese element, s.o seos $\in$ on hulgal ω irrefleksiivne.*

(3) *Naturaalarvude hulk ω pole iseenese element.*

(4) *Naturaalarv on transitiivne hulk. Järelikult seos $\in|_\omega$ on hulgal ω transitiivne.*

(5) *Naturaalarvude hulk ω on transitiivne.*

(6) *Naturaalarvude hulk on ühendi võtmise suhtes püsipunkt, s.o $\omega = \bigcup \omega$.*

Põhjendame toodud väiteid õige napilt, piirdudes kohati üksnes teoreemi I.7 mõttes hulga S määramisega.

Tõestus. (1) Väide on, et $\forall n \forall k(n \in \omega \wedge k \in n \Rightarrow \neg n \subseteq k)$. Seega tuleks võtta $S \coloneqq \{\, n \in \omega \mid \forall k(k \in n \Rightarrow \neg n \subseteq k) \,\}$ ja kontrollida induktsiooniteoreemi I.7 eeldusi.

(2) Kui oleks $n \in n$, siis alamhulgalisus $n \subseteq n$ annab vastuolu jaotisega (1).

(3) Kui kehtiks $\omega \in \omega$, siis oleks hulk ω naturaalarv. Vastuolu jaotisega (2).

(4) Transitiivsuse definitsioonist lähtudes vaadelda hulka $S \coloneqq \{\, n \in \omega \mid \forall k(k \in n \Rightarrow k \subseteq n) \,\}$. Seose $\in|_\omega$ transitiivsus lause I.2 osast (3).

(5) Vastavalt lause I.1 tingimusele (ii) vaadata hulka $S \coloneqq \{\, v \in \omega \mid \forall u (u \in v \Rightarrow u \in \omega)\,\}$.

(6) Jaotise (5) järgi on hulk ω transitiivne. Lause I.1 tingimuse (iii) järgi $\bigcup \omega \subseteq \omega$. Jääb näidata, et $\omega \subseteq \bigcup \omega$. Üldiselt kehtib $X \subseteq \bigcup X$ parajasti siis, kui $\forall x \in X \exists y \in X (x \in y)$. Suvalise naturaalarvu n korral aga ilmselgesti $n \in n^+ \in \omega$. ■

Tähistame sisalduvusest saadud mitteranget seost kui $\Subset$, s.o $a \Subset b :\doteq a \in b \vee a = b$.

Lause I.9. (1) *Seos $\Subset$ on naturaalarvude hulgal lineaarne järjestusseos.*

(2) *Seosed $\in$ ja $\subsetneq$ on naturaalarvude hulgal samaväärsed.*

(3) *Naturaalarvude hulk on seose $\Subset$ järgi potentselt järjestatud.*

Kuigi lauset I.9 saaks induktsiooni abil otse tõestada, järeldame tulemused hoopis allpool ordinaalarvude üldistest omadustest. Lugejale, kes soovib naturaalarvudega rohkem tutvuda, näiteks rekursiooniga, aritmeetikaga või lõplike hulkadega, soovitame allikaid [Pál74], [HJ99], [Jec02]. Meie tuletame rekursiooniteoreemi üldisemast versioonist, nimelt potentselt regulaarsest rekursioonist.

2.4.2. Ordinaalarvud

Sissejuhatavas hulgateoorias kardinaalarvude mõistet ei defineerita. Räägitakse võimsusest, täpsemini asjaolust, millal hulkadel on sama võimsus. Öeldakse, et hulgad X ja Y on *(võimsuse mõttes) ekvivalentsed*, ja kirjutatakse $X \sim Y$, kui leidub bijektsioon hulkade vahel,

$$X \sim Y :\doteq \exists \text{ bij } f\colon X \to Y.$$

Sarnaselt ei defineerita ordinaalarvu mõistet, vaid räägitakse *järjestustüübist* ning *sarnasusest*. Sealjuures on ordinaalarv ja järjestustüüp samasuguses vahekorras nagu kardinaalarv ning võimsus. Ordinaal- ning kardinaalarvude vahelist analoogiat avab täpsemini tabel I.5. Järgnevas väljume sissejuhatava hulgateooria raamest selles mõttes, et fikseerime konkreetselt ordinaalarvu mõiste. Ordinaalarvu määratleme erilise transitiivse potentselt järjestatud hulgana. Kardinaalarv defineeritakse spetsiaalset laadi ordinaalarvuna. Siin bakalaureusetöös kardinaalarve ei defineerita (vt siiski jaotist III.2.3).

Definitsioon I.13 (ordinaalarv, [Jec02, lk 19])**.** Hulka α kutsutakse *(von Neumanni) ordinaalarvuks* ehk *järgarvuks*, kui α on transitiivne hulk ja seose $\Subset$ suhtes potentselt järjestatud.

Muu hulgas on $\Subset$ järjestusseos, s.o hulgal α refleksiivne, antisümmeetriline ning transitiivne. Kuna ordinaalarv on definitsiooni järgi $\Subset$ suhtes potentselt järjestatud, siis $\in$ mõttes on tegu

Tabel I.5. Mõistete võrdlus kardinaal- ning ordinaalarvude korral

kardinaalarvud	–	ordinaalarvud
võimsus	–	järjestustüüp
bijektsioon (hulkade isomorfism)	–	sarnasuskujutus (järjestust säilitav isomorfism)
$X \sim Y$	–	$X \simeq Y$
$\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$	–	$\overline{X} = \overline{Y}$

range potentse järjestusega. Järelikult on $\in$ ordinaalarvude klassil irrefleksiivne regulaarsuse aksioomi kasutamata.

Ordinaalarvu tähistame reeglina kreeka väiketähega tähestiku algusest, s.o α, β, γ, …Ordinaalarvude klassi tähistame kui `Ord`.

Kehtivad järgmised ordinaalarvude omadused.

Lause I.10 ([Jec02, lk-d 19–20])**.** (1) *Kui α on ordinaalarv, siis ka järglashulk $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$ on ordinaalarv.*

(2) *Ordinaalarvu β iga element $\alpha \in \beta$ on ordinaalarv.*

(3) *Kui α ja β on ordinaalarvud, siis $\alpha \subsetneq \beta \Rightarrow \alpha \in \beta$.*

(4) *Kui α ja β on ordinaalarvud, siis välistavalt $\alpha \subsetneq \beta$ või $\beta \subsetneq \alpha$ või $\alpha = \beta$.*

(5) *Ordinaalarv α^+ on esimene ordinaalarv pärast ordinaalarvu α, st α^+ on vähim ordinaalarv, mispuhul sisaldab elemendina arvu α.*

Tõestus. Tõestame näitena väite (2).

(2) Olgu β suvaline ordinaalarv, $\alpha \in \beta$ mingi element. Definitsiooni järgi tuleb näidata, et α on transitiivne ning seose $\in$ suhtes potentselt järjestatud. Kui $\alpha = \varnothing$, pole väites kahtlust. Olgu $\alpha \neq \varnothing$. Element α on potentselt järjestatud, sest arvu β transitiivsus annab tingimusest $\alpha \in \beta$ alamhulgalisuse $\alpha \subseteq \beta$, kus β oli potentselt järjestatud.

Põhjendame ordinaalarvu α transitiivsust. Las $\gamma \in \alpha$. Kui $\gamma = \varnothing$, siis korras. Muidu olgu $\delta \in \gamma$. Hulga β transitiivsusest nii $\gamma \in \beta$ kui $\delta \in \beta$. Seose $\in$ kui range järjestuse transitiivsus hulgal β annab sisalduvuste $\delta \in \gamma \in \alpha$ tõttu $\delta \in \alpha$. Ordinaalarvu α transitiivsus järeldub lausest I.1 osast (ii). ■

Lausest I.10 järeldub, et ordinaalarvude korral on seosed $\subsetneq$ ning $\in$ samaväärsed. Vasakult paremale kasutada jaotist (3). Paremalt vasakule piisab ordinaalarvu transitiivsusest ning seose $\in$ irrefleksiivsusest klassil $\mathtt{Ord}$. Lepime kokku, et ordinaalarvude korral tähistab $\leqslant$ seost $\Subset$. Võrdväärselt tähistab $\leqslant$ seost $\subseteq$.

Ühendi ning ühisosa suhestumisest ordinaalarvudesse kirjeldab

lause I.11 ([Jec02, lk 20]). *Olgu C suvaline ordinaalarvudest koosnev hulgaline kogum.*

(1) *Ühend $\bigcup C$ on ordinaalarv, sealjuures $\bigcup C = \sup\limits_{\Subset} C$.*

(2) *Kui $C \neq \varnothing$, on ühisosa $\bigcap C$ ordinaalarv, sealjuures $\bigcap C = \inf\limits_{\Subset} C$.*

Supreemum ja infiimum defineeritakse loomulikul viisil. Näiteks kirjapildiga $\bigcap C = \inf_{\Subset} C$ peame silmas, et iga $\alpha \in C$ korral $\bigcap C \Subset \alpha$, s.o $\bigcap C \leqslant \alpha$ ehk $\bigcap C$ on arvu α alumine tõke. Ja kui x on kõigi arvude $\alpha \in C$ alumine tõke, siis $x \leqslant \bigcap C$. Teisisõnu on $\bigcap C$ hulga C suurim alumine tõke järjestuse $\Subset$ mõttes.

Tõestus. Põhjendame väite (2).

(2) Valime $\alpha \in C \neq \varnothing$. Ühisosa $\bigcap C$ on selgesti α osahulk, st $\bigcap C \subseteq \alpha$. Kogumi C olemuse järgi liigitub α ordinaalarvuks, mistõttu lause I.10 osast (3) kehtib mitterange sisalduvus $\bigcap C \Subset \alpha$. Võrduse korral ilmne, et $\bigcap C$ on ordinaalarv. Muidu kasutada lause I.10 jaotist (2).

Nägime juba, et iga $\alpha \in C$ puhul $\bigcap C \leqslant \alpha$. Olgu x niisugune, et $x \leqslant \alpha$ iga $\alpha \in C$ korral. Ordinaalarvu transitiivsusest $x \subseteq \alpha$ iga $\alpha \in C$ puhul. Ühisosa definitsioonist $x \subseteq \bigcap C$. Kokkuvõttes $\bigcap C = \inf_{\Subset} C$. ■

Tegelikkuses on infiimum $\inf_{\Subset} C$ isegi hulga C vähim element. Lausete I.11 ja I.10 jaotiste (1) põhjal moodustame ordinaalarvud $(\sup_{\Subset} C)$ ning $(\sup_{\Subset} C)^+$. Väidame, et $C \subseteq (\sup_{\Subset} C)^+$. Tõesti, kui $\alpha \in C$, siis $\alpha \subseteq \bigcup C = \sup_{\Subset} C$, kust lause I.10 osa (3) abil kehtib $\alpha \Subset \sup_{\Subset} C$. Järelikult $\alpha \in (\sup_{\Subset} C)^+$. Kuna $\varnothing \neq C \subseteq (\sup_{\Subset} C)^+$ ja $(\sup_{\Subset} C)^+$ on potentselt järjestatud, peab hulgas C sisalduma vähim element $m_0 \in C$. Vähima elemendi leidumise korral aga vähim element ja infiimum ühtivad, $m_0 = \inf_{\Subset} C$.

Vahemärkusest tuleneb

järeldus I.12. *Suvaline ordinaalarvudest koosnev transitiivne hulk τ on ordinaalarv.*

Tõestus. Eelduse järgi on τ transitiivne. Seega piisab näidata, et τ on seose $\Subset$ suhtes potentselt järjestatud. Olgu $\varnothing \neq C \subseteq \tau$ suvaline alamhulk (kui mittetühja osahulka pole, siis tulemus vahetu). Hulga C vähim element on $\bigcap C$. Tõepoolest, lause I.11 osast (2) ja vahemarkusest $\bigcap C = \inf_{\Subset} C = \min_{\Subset} C$. ■

Lause I.10 osa (1) põhjal on iga naturaalarv ordinaalarv (formaalne tõestus induktsiooniteoreemiga I.7). Naturaalarvude hulk ω koosneb niisiis ordinaalarvudest. Lause I.8 jaotise(5) järgi on hulk ω transitiivne. Järeldusest I.12 saame, et ω on samuti ordinaalarv. Sellega põhjendasime lause I.9. Naturaalarvude hulk lause I.8 osa (3) alusel iseendas ei sisaldu, osa (6) järgi $\omega = \bigcup \omega$. Järelikult lause I.11 osa (a) supreemum ei pruugi olla maksimum.

Kõigele lisaks tuleneb järeldusest I.12 fakt, et klass $\mathtt{Ord}$ on pärisklass [Jec02, lk 20]. Eeldame vastuväiteliselt, et $\mathtt{Ord}$ eksisteerib hulgana. Lause I.10 osa (2) järgi on kõik ordinaalarvude elemendid jätkuvalt ordinaalarvud, seega $\mathtt{Ord}$ oleks transitiivne hulk. Loomulikult koosneb klass $\mathtt{Ord}$ üksnes ordinaalarvudest. Järelduse I.12 tõttu kuuluks klass $\mathtt{Ord}$ ise samuti ordinaalarvude sekka. Definitsioonist johtuks $\mathtt{Ord} \in \mathtt{Ord}$, vastuolu seose $\in$ irrefleksiivsusega klassil $\mathtt{Ord}$. Burali-Forti antinoomiat ei teki.

Ordinaalarvude kõik elemendid olid ordinaalarvud. Niisiis ordinaalarv on transitiivne hulk, mis koosneb ainult transitiivsetest hulkadest. Regulaarsuse aksioomist järeldub ka vastupidine: kui hulk A on transitiivne ja kõik elemendid $a \in A$ on transitiivsed, siis A on ordinaalarv.

Lause I.13. *Ordinaalarv on parajasti niisugune transitiive hulk, mille kõik elemendid on samuti transitiivsed.*

Tõestus. Selgitame $\Leftarrow$-suuna kehtivust. Las olla A transitiivne hulk, mille elemendid on transitiivsed. Piisab näidata, et A on potentselt $\Subset$-järjestatud. Sisulisel juhul $A \neq \varnothing$. Valime mittetühja alamhulga $\varnothing \neq B \subseteq A$. Regulaarsuse aksioom ütleb, et hulgas B esineb rangelt $\in$-minimaalseid elemente. Olgu üks neist $m \in B$.

Kui m oleks kõigi B elementidega seose $\Subset$ mõttes võrreldav, siis oleks otsitav vähim element käes. Vastasel juhul vaatleme hulka

$$C := \{\, b \in B \mid \overbrace{\text{„}b \text{ pole } m\text{-iga võrreldav“}}^{\neg(b \in m \vee m \in b \vee b = m)} \,\},$$

kus vastuväitelise oletuse põhjal $C \neq \varnothing$. Niisiis leidub selleski rangelt $\in$-minimaalne element, näiteks $c_0 \in C$. Hulk c_0 ei tohi olla hulgaga m võrreldav, kuid kõik c_0 elemendid peavad olema hulgaga m võrreldavad. Kui $d \in c_0$, on välistatud $d = m$, muidu kehtiks $m \in c_0$ ehk m ja c_0 oleksid võrreldavad. Sarnaselt on välistatud $m \in d$, sest sisalduvusest $c_0 \in A$ saaksime c_0 transitiivsuse kaudu taas $m \in c_0$. Järelikult $d \in m$ ehk $c_0 \subseteq m$.

Selgesti on m ka hulgas $D \coloneqq \{ b \in B \mid \exists b' \in B \,„b$ pole b'-iga võrreldav" $\} \subseteq B$ rangelt $\in$-minimaalne element ning $c_0 \in D$. Eelmise lõiguga analoogne argument annab seega, et $m \subseteq c_0$. Kahepoolsest alamhulgalisusest johtub võrdus $c_0 = m$, mis on vastuolus hulkade c_0 ja m võrreldamatusega. Kokkuvõttes $C = \varnothing$, st m oligi $\underline{\in}$-vähim hulga B element. ■

Lause I.13 ekvivalentsi kasutame ordinaalarvuks olemise absoluutsuse tõestamisel.

Ordinaalarvud sobivad potentselt järjestatavate hulkade järjestustüübiks.

Teoreem I.14 (ordinaalarv kui potentse järjestuse tüüp, [Wea14, lk 14])**.** *Olgu* $(W, \leqslant)$ *potentselt järjestatud hulk. Leidub üheselt määratud ordinaalarv* $\alpha \in \mathtt{Ord}$ *nii, et* $W \simeq \alpha$.

Vastavat ordinaalarvu tähistame ühekordse ülakriipsuga, s.o $\alpha =: \overline{W}$.

Tõestus. Alustame ühesusest. Olgu $W \simeq \alpha_1$ ja $W \simeq \alpha_2$, kus $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathtt{Ord}$. Sarnasuse sümmeetrilisusest ja transitiivsusest $\alpha_1 \simeq \alpha_2$. Oletame vastuväiteliselt ja üldisust kaotamata, et $\alpha_1 \in \alpha_2$. Järelikult on α_1 ordinaalarvu α_2 range segment, nad ei saa olla sarnased (lause I.4 osa (1)). Vastuolu, seetõttu ikkagi $\alpha_1 = \alpha_2$.

Tõestame leiduvuse. Teoreemi I.6 alusel on iga ordinaalarvu α korral kolm mõeldavat olukorda. Kui $\alpha \simeq W$ või $\beta \in \alpha$ puhul $\beta = \beta^{\in} \simeq W$, on tulemus tõestatud. Vastasel korral leidub iga ordinaalarvu α puhul erinev ja üheselt määratud $w \in W$ nii, et $w^{<} \simeq \alpha$. Asendamisaksioomiga moodustame hulgast W hulga $\{ w^{<} \mid w \in W \}$, sellest omakorda asendamisaksioomi abil hulga $\{ \alpha \mid \alpha \in \mathtt{Ord} \wedge w^{<} \simeq \alpha \wedge w \in W \} = \{ \overline{w^{<}} \mid w \in W \}$. Vastuväite kehtivusel $\{ \alpha \mid \alpha \in \mathtt{Ord} \wedge w^{<} \simeq \alpha \wedge w \in W \} = \mathtt{Ord}$. Vastuolu, sest ordinaalid moodustavad pärisklassi, mitte hulga. ■

Defineerime veel kaks mõistet, *järglas-* ning *piirordinaalarvu*.

Definitsioon I.14 ([Jec02, lk 20])**.** Ordinaalarvu $\alpha \in \mathtt{Ord}$ nimetame *järg-* ehk *järglasordinaalarvuks*, kui leidub ordinaalarv $\beta \in \mathtt{Ord}$, mispuhul $\alpha = \beta^{+}$. Kõiki teisi ordinaalarve kutsume *piirordinaalarvudeks*.

Märgime, et kõik naturaalarvud alates ühest on järglasordinaalarvud, samas kui 0 ning ω on piirordinaalarvud [Jec02, lk 20].

Potentselt järjestatud hulkadel ning ordinaalarvude klassil tuntakse palju erinevaid induktsiooni-ning rekursiooniteoreeme. Näiteks räägitakse ordinaalarvude kontekstis *transfiniitsest* induktsioonist ja rekursioonist. Kuigi saaks ka teisiti, järeldame meie need tulemused veelgi üldisematest versioonidest: potentselt regulaarsest induktsioonist ja rekursioonist.

2.5. Potentselt regulaarne induktsioon ja rekursioon

Leidub rohkesti erisuguseid induktsiooni- ning rekursiooniteoreeme. Kõige tavalisem induktsioon ja rekursioon käib üle naturaalarvude hulga. Laiendatud analoog kehtib potentselt järjestatud hulga ning ordinaalarvude klassi jaoks. Alajaotise lõpuks tõestame väga üldise printsiibi, mis kõiki eelmisi avardab – *potentselt regulaarse induktsiooni* ning *rekursiooni teoreemiskeemid*.

2.5.1. Alumised naabertipud. E-transitiivsus, E-transitiivne sulund

Järjestatud hulkade juures tutvusime eellaste hulga ehk segmendi mõistega. Segmendi mõistet üldistab

definitsioon I.15 (alumiste naabertippude klass, [Jec02, lk 67])**.** Olgu antud klass C ning klassiseos $\mathit{E} \subseteq \mathit{C} \times \mathit{C}$. Kui $x \in \mathit{C}$, kirjutame

$$z \in \mathtt{ext}_{\mathit{E}}(x) :\doteq z \in \mathit{C} \wedge z \, \mathit{E} \, x,$$

kus klassi $\mathtt{ext}_{\mathit{E}}(x)$ kutsume *tipu x alumiste E-naabertippude* või *E-eellaste klassiks*. Teisisõnu $\mathtt{ext}_{\mathit{E}}(x) = \mathit{E}^{-1}(\{x\})$.

Vahel tähistatakse veel $\mathtt{ext}_{\mathit{E}}(x) =: \mathtt{ext}_{\mathit{C},\mathit{E}}(x) =: \mathtt{pred}_{\mathit{C},\mathit{E}}(x)$ [Kun13, lk 44]. Üldjuhul ei tarvitse eellaste klass olla hulk. Seost E nimetame *hulgalaadseks klassil C*, kui iga tipu $x \in \mathit{C}$ korral klass $\mathtt{ext}_{\mathit{E}}(x)$ on hulk. [Kun13, lk 44] Kirjutame siis kuju $\mathtt{ext}_{\mathit{E}}(x)$ asemel $\mathrm{ext}_{\mathit{E}}(x)$.

Laiendame hulga transitiivsuse mõistet klassile D ja klassiseosele E.

Definitsioon I.16 (E-transitiivsus, [HJ99, lk 253])**.** Olgu antud klass C, alamklass $\mathit{D} \subseteq \mathit{C}$ ning klassiseos $\mathit{E} \subseteq \mathit{C} \times \mathit{C}$. Klass D on E-transitiivne, kui tingimustest $u \in \mathit{D}$ ja $v \, \mathit{E} \, u$ järeldub, et $v \in \mathit{D}$. Teisisõnu peab iga $u \in \mathit{D}$ korral kehtima $\mathtt{ext}_{\mathit{E}}(u) \subseteq \mathit{D}$.

Juhul, kui $\mathit{C} = \mathtt{U}$, D on hulk ning $\mathit{E} = \in$, saame tavalise transitiivsuse. Märgime, et kui C on E-transitiivsetest hulkadest koosnev hulk, siis $\bigcup C$ on samuti E-transitiivne. Kui X on E-transitiivne hulk ja $\mathrm{ext}_{\mathit{E}}(x) \subseteq X$, siis ka $X \cup \{x\}$ on E-transitiivne. Tõestused analoogilised tavalise transitiivsusega, vrd lausega I.2.

Olgu $x \subseteq \mathit{C}$ suvaline hulk. Hulk x ei pruugi olla E-transitiivne, aga on teatud mõttes niisuguseks hulgaks jätkatav. Vastavat vähimat jätku nimetatakse *E-transitiivseks sulundiks.* Järgmises definitsioonis on seos E hulgalaadne.

Definitsioon I.17 (hulga E-transitiivne sulund, [HJ99, lk 253])**.** Hulga x *E-transitiivseks eelsulundiks* nimetatakse $\subseteq$-vähimat E-transitiivset hulka T, mispuhul $T \subseteq C$ ning $\operatorname{ext}_E(x) \subseteq T$. Tähistatakse kui $\operatorname{tc}_E(x)$. Kui vahetada alamhulgalise sisalduvuse nõue $\operatorname{ext}_E(x) \subseteq T$ tavalise sisalduvusega $x \in T$, saame hulga x *E-transitiivse sulundi* $\operatorname{TC}_E(x)$.

Olukorras, kus $E = \in$ ja $C \coloneqq \mathsf{U}$, räägitakse lihtsalt transitiivsest eelsulundist $\operatorname{tc}(x)$ ning transitiivsest sulundist $\operatorname{TC}(x)$ [Jec02, lk 64]. On lihtne näha, et hulgalaadse seose puhul $\operatorname{TC}_E(x) = \operatorname{tc}_E(x) \cup \{x\}$.

Kui seos E on hulgalaadne, siis E-transitiivne eelsulund ja sulund alati leiduvad. Piisab tõestada, et leidub E-transitiivne eelsulund.

Teoreemiskeem I.15 (E-transitiivne eelsulund leidub, [Jec02, lk 67; HJ99, lk 253])**.** *Olgu C klass, $E \subseteq C \times C$ hulgalaadne klassiseos ning $X \subseteq C$ suvaline hulk. E-transitiivne eelsulund $\operatorname{tc}_E(X)$ alati leidub.*

Tõestus. Idee on ehitada jada $(u_n)_{n\in\omega}$, mispuhul

$$\begin{cases} u_0 \coloneqq \operatorname{ext}_E(X), \\ u_{n^+} \coloneqq \bigcup\{\operatorname{ext}_E(y) \mid y \in u_n\}, \end{cases}$$

kus kõigepealt seatakse hulgaga u_n vastavusse asendamisaksioomiga $\{\operatorname{ext}_E(y) \mid y \in u_n\}$, seejärel võetakse ühend. Otsitav E-transitiivne eelsulund on jadast $(u_n)_{n\in\omega}$ ehitatav järjekordse ühendiga $\operatorname{tc}_E(X) = \bigcup \operatorname{ran}(u_n)_{n\in\omega}$.

Põhjalikum ja tehnilisem tõestus on toodud lisas B. ■

Järgmine lauseskeem iseloomustab kuuluvust transitiivsesse eelsulundisse $\operatorname{tc}_E(x)$. Toodavat samaväärset tingimust kasutame näiteks potentselt regulaarse rekursiooni teoreemiskeemi tõestuses ning lause I.28 osas (4).

Lauseskeem I.16 ([HJ99, lk 256])**.** *Olgu E hulgalaadne seos klassil C ning $x \subseteq C$ suvaline hulk. Kehtib ekvivalentsus*

$$\begin{aligned} y \in \operatorname{tc}_E(x) \Leftrightarrow{} & \text{leidub hulkade lõplik jada } (x_k)_{k\leqslant m}, \text{ kus } y \in C \\ & x_m = y \mathrel{E} x_{m-1} \mathrel{E} \cdots \mathrel{E} x_1 \mathrel{E} x = x_0 \text{ ja } m \in \omega,\ m \geqslant 1. \end{aligned}$$

Tõestus. Põhjendus naturaalarvulise induktsiooni teoreemiga I.7. Defineerime

$$S \coloneqq \{\, n \in \omega \mid \forall y(y \in u_n \Leftrightarrow y \in \mathcal{C} \text{ ja leidub jada } x_{n+1} = y\, E\, x_n\, E\, \cdots\, E\, x_1\, E\, x = x_0) \,\},$$

kus $(u_n)_{n\in\omega}$ on jada, mis pärineb E-transitiivse eelsulundi olemasolu teoreemiskeemi I.14 tõestusest lisas B, s.o $\mathrm{tc}_E(X) = \bigcup \mathrm{ran}\,(u_n)_{n\in\omega}$. Tõestuseks piisab näidata, et $S = \omega$, kuivõrd $y \in \mathrm{tc}_E(x) \Leftrightarrow \exists n \in \omega(y \in u_n)$. Kontrollime induktsiooniteoreemi eeldusi.

1) Vahetult $S \subseteq \omega$.

2) Kui $y \in u_0$, siis $y \in \mathrm{ext}_E(x)$ ehk $y \in \mathcal{C}$ ja $y\, E\, (x)$. Jadaks sobib $\{(0, y), (1, x)\}$. Teisipidi kui $y \in \mathcal{C}$ korral on antud $x_1 = y\, E\, x = x_0$, siis $y\, E\, x$, st $y \in \mathrm{ext}_E(x) = u_0$. Järelikult $0 \in S$.

3) Viimaks olgu $n \in S$ ning y' suvaline. Kui $y' \in u_{n^+}$, siis vastavalt hulga u_{n^+} definitsioonile $y' \in \bigcup\{\, \mathrm{ext}_E(y) \mid y \in u_n \,\}$. Tähendab, et mingi konkreetse $y \in u_n$ korral $y' \in \mathrm{ext}_E(y)$. Induktsioonieeldusest hulga y jaoks leidub jada $x_{n+1} = y\, E\, x_n\, E\, \cdots\, E\, x_1\, E\, x = x_0$, seetõttu jada ühendiga pikendamisel $x_{n^++1} \coloneqq y'\, E\, y\, E\, x_n\, E\, \cdots\, E\, x_1\, E\, x = x_0$. Teisipidi kui on antud $x_{n^++1} = y'\, E\, x_{n^+}\, E\, x_n\, E\, \cdots\, E\, x_1\, E\, x = x_0$ ja $y' \in \mathcal{C}$, saame induktsioonieeldusest juhul $y \coloneqq x_{n^+}$, et $x_{n_+} = x_{n+1} \in u_n$. Et $y'\, E\, x_{n+1}$ ja $y' \in \mathcal{C}$, siis $y' \in \mathrm{ext}_E(x_{n+1})$. Meenutades hulga u_{n^+} definitsiooni, saame $y' \in \bigcup\{\, \mathrm{ext}_E(y) \mid y \in u_n \,\} = u_{n^+}$. Kokkuvõttes $n^+ \in S$.

Järelikult $S = \omega$, tulemus on tõestatud. ■

2.5.2. Potentselt regulaarne seos

Induktsiooni- ning rekursiooniteoreemiskeemide juures on keskne mõiste *potentselt regulaarne seos*. Niisugune relatsioon rahuldab parasjagu kahte tingimust. Neist esimene, *klassi potentne E-regulaarsus*, annab induktsiooniga või rekursiooniga alustamiseks lähtekoha. Teine tingimus on *hulgalaadsus*, mis lubab elemendi eellased hulgaks rühmitada ja induktsiooni või rekursiooni sammu läbi viia.

Definitsioon I.18 (potentselt regulaarne seos, [Jec02, lk 67])**.** Ütleme, et *klassiseos $E \subseteq \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ on potentselt regulaarne*, kui

a. klass $\mathcal{C}$ on *potentselt E-regulaarne*, s.o kui $x \subseteq \mathcal{C}$ ja „x on hulk“ korral kas $x = \varnothing$ või hulgas x leidub rangelt E-minimaalne element;

b. seos E on *hulgalaadne* ehk iga tipu $x \in \mathcal{C}$ korral on E-eellaste klass $\mathrm{ext}_E(x)$ hulk, s.o iga $x \in \mathcal{C}$ puhul leidub X nii, et $\forall z(z \in X \Leftrightarrow z \in \mathrm{ext}_E(x))$.

Kui seos $\mathit{E} \subseteq \mathit{C} \times \mathit{C}$ on potentselt regulaarne klassil C ja $\mathit{D} \subseteq \mathit{C}$, siis on $\mathit{E}|_{\mathit{D}}$ potentselt regulaarne klassil D.

Võttes $\mathit{C} := \mathtt{U}$ ja $\mathit{E} := \in$, kehtib $\operatorname{ext}_{\mathit{E}}(x) = \{ z \in \mathtt{U} \mid z \in x \} = x$. Vastava potentse $\in$--regulaarsuse tähendus ühtib siis regulaarsuse aksioomi tähendusega. Seos $\in$ on ordinaalarvude klassil $\mathtt{Ord}$ potentselt regulaarne ilma regulaarsuse aksioomita, järeldusena lause I.11 osast (2). Kui $\mathit{C} := W$ on hulk ning võtame lineaarse järjestusseose $\mathit{E} := < \subseteq W \times W$, saame range potentselt järjestatud seose mõiste.

Kuigi definitsiooni I.18 tingimus a. käib klassi alamhulkade kohta, üldistub sama nõue alamklassidele.

Lemmaskeem I.17 ([Jec02, lk 67])**.** *Olgu E potentselt regulaarne seos klassil C. Igal mittetühjal alamklassil $\mathit{D} \subseteq \mathit{C}$ leidub range E-minimaalne element.*

Tõestus. Et $\mathit{D} \neq \varnothing$, valime temast mingi elemendi $d \in \mathit{D}$. Kui d on rangelt E-minimaalne klassis D, pole midagi tõestada. Eeldame seega, et d pole rangelt E-minimaalne klassis D. Järelikult $\operatorname{ext}_{\mathit{E}}(d) \cap \mathit{D} \neq \varnothing$. Teoreemiskeemi I.15 järgi leidub E-transitiivne eelsulund $\operatorname{tc}_{\mathit{E}}(d)$. Kuna $\operatorname{ext}_{\mathit{E}}(d) \cap \mathit{D} \neq \varnothing$ ja $\operatorname{ext}_{\mathit{E}}(d) \subseteq \operatorname{tc}_{\mathit{E}}(d)$, siis ka $\operatorname{tc}_{\mathit{E}}(d) \cap \mathit{D} \neq \varnothing$. Eraldamisaksioomi alusel on $\operatorname{tc}_{\mathit{E}}(d) \cap \mathit{D}$ hulk ning $\operatorname{tc}_{\mathit{E}}(d) \cap \mathit{D} \subseteq \mathit{C}$. Seose E potentsest regulaarsusest leidub hulgas $\operatorname{tc}_{\mathit{E}}(d) \cap \mathit{D}$ mingi rangelt E-minimaalne element, näiteks ξ.

Väidame, et ξ on klassi D rangelt E-minimaalne element. Vastasel korral leiduks $\tilde{d} \in \mathit{D}$ nõnda, et $\tilde{d} \mathrel{\mathit{E}} \xi$. Kuivõrd $\xi \in \operatorname{tc}_{\mathit{E}}(d)$, siis viimase E-transitiivsusest $\tilde{d} \in \operatorname{tc}_{\mathit{E}}(d)$. Kokkuvõttes oleks $\tilde{d} \mathrel{\mathit{E}} \xi$ ja $\tilde{d} \in \operatorname{tc}_{\mathit{E}}(d) \cap \mathit{D}$, vastuolu elemendi ξ range $\in$-minimaalsusega. Element ξ ikkagi sobib klassi D rangelt E-minimaalseks elemendiks. ∎

Kuna kõik ordinaalarvud on võrreldavad, järeldub, et igas ordinaalarvude klassi $\mathtt{Ord}$ mittetühjas alamklassis leidub $\in$-vähim element.

Tõestame mõne potentselt regulaarsete seoste omaduse. Potentselt regulaarne seos on irrefleksiivne ja transitiivne, samuti ei leidu tsüklilisi ega lõpmatult kahanevaid E-ahelaid.

Lauseskeem I.18 ([HJ99, lk 252])**.** *Olgu E potentselt regulaarne seos klassil C.*

(1) *Iga $x \in \mathit{C}$ korral $x \not\mathrel{\mathit{E}} x$ (irrefleksiivsus).*

(2) *Iga $x, y \in \mathit{C}$ korral, kui $x \mathrel{\mathit{E}} y$, siis $y \not\mathrel{\mathit{E}} x$ (asümmeetrilisus).*

(3) *Tsüklilist E-ahelat ei leidu. See tähendab, ei leidu hulki $x_0, x_1, \ldots, x_n$ jada $(x_k)_{k \leqslant n}$ mõttes nii, et*

$$x_0 \mathrel{\mathit{E}} x_1 \mathrel{\mathit{E}} \cdots \mathrel{\mathit{E}} x_n \mathrel{\mathit{E}} x_0,$$

kus $n \in \omega$, $n \geqslant 1$.

(4) *Lõpmatult kahanevat* E*-ahelat pikkusega* $\alpha \geqslant \omega$, $\alpha \in \mathtt{Ord}$, *ei leidu. See tähendab, ei saa olla jada* $(x_n)_{\alpha \in \mathtt{Ord}}$, *kus*

$$\cdots E\, x_n\, E \cdots E\, x_2\, E\, x_1\, E\, x_0.$$

Tõestus. Kõik vastuväiteliselt. Hulkadel (1) $\{x\}$, (2) $\{x, y\}$, (3) $\operatorname{ran}(x_k)_{k \leqslant n} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, (4) $\operatorname{ran}(x_n)_{\alpha \in \omega} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ poleks rangelt E-minimaalset elementi. ∎

Transitiivse eelsulundi ning sulundi kaudu defineeritakse kaks olulist mõistet: *tugev regulaarsus* ning *päranduv omadus*. Tugeva regulaarsuse mõiste tähtsus ja tähendus avaneb Zermelo – von Neumanni hierarhia kontekstis, kui regulaarsuse aksioomist loobuda, vt teoreemi I.27.

Definitsioon I.19 (tugev regulaarsus, [HJ99, lk 256])**.** Hulka x kutsutakse *tugevalt regulaarseks*, kui seos $\in$ on hulgal $\operatorname{tc}(x)$ potentselt regulaarne.

Seose $\in$ potentne regulaarsus hulgal $\operatorname{tc}(x)$ ehk hulga x tugev regulaarsus on samaväärne hulga $\operatorname{tc}(x)$ potentse $\in$-regulaarsusega, sest $y \in \operatorname{tc}(x)$ korral on hulgalaadsus $\operatorname{ext}_{\operatorname{tc}(x),\in}(y) = y$ vahetu. Juhul kui hulk on transitiivne, langeb hulga x tugev regulaarsus lisaks ühte hulga x potentse $\in$-regulaarsusega. Seda põhjusel, et transitiivse hulga puhul $x = \operatorname{tc}(x)$. Kui hulk x pole transitiivne, järeldub hulga x tugevast regulaarsusest hulga x potentne $\in$-regulaarsus, aga regulaarsuse aksioomi puudumisel vastupidist tõestada ei saa. Lauseskeemi I.16 ja transitiivse sulundi TC definitsiooni valguses pole raske mõista, et tugeva regulaarsuse definitsioonis võib transitiivse eelsulundi $\operatorname{tc}(x)$ asendada transitiivse sulundiga $\operatorname{TC}(x)$.

Tugevalt regulaarsete hulkade klassi tähistame kui $\mathtt{WF}$. Regulaarsuse aksioomi korral on kõik hulgad potentselt regulaarsed hulgale ahendatud sisalduvuse $\in$ suhtes, seega on potentselt regulaarsed ka kõik transitiivsed eelsulundid. Järelikult regulaarsuse aksioomi eeldusel on kõik hulgad tugevalt regulaarsed, $\mathtt{WF} = \mathtt{U}$.

Hulgal on päranduvalt mingisugune omadus, kui selle igal elemendil on vastav omadus, omakorda nende kõigil elementidel ja nii „lõpuni välja“.

Definitsioon I.20 (hulga päranduv omadus, [Cai18])**.** Olgu $\varphi[x]$ hulgateooria valem. Hulgal *x on päranduvalt omadus $\varphi[x]$* (*omadus $\varphi[x]$ on hulgas x päranduv*), kui hulga x transitiivse sulundi $\operatorname{TC}(x)$ igal elemendil on omadus $\varphi[x]$, s.o

$$\text{„}x \text{ on päranduvalt } \varphi[x]\text{“} \Leftrightarrow \forall z (z \in \operatorname{TC}(x) \Rightarrow \varphi[x/z]).$$

Näiteks x on päranduvalt lõplik, kui x on lõplik ja iga hulga x element on lõplik, nende elementide elemendid on lõplikud ning nõnda edasi. Niisiis hulk $\{0, 1, \{\{2\}\}\}$ on päranduvalt lõplik, samas $\{\{\{\{\omega\}\}\}\}$ mitte. Seda näidet üldistades nähtub, et üldjuhul pole päranduvuse kontrollimiseks vajalike sammude arv tõkestatud. Transitiivsus on siinkohal eriline. Piisab üksnes kahe taseme kontrollist, st hulk x on päranduvalt transitiivne parajasti siis, kui x on transitiivne ja kõik tema elemendid on transitiivsed. Päranduvast transitiivusest tuleb kohe hulga x ning selle elementide transitiivsus. Vastupidi, kui hulk x on transitiivne, siis piisab tõestada, et kõik eelsulundi $\mathrm{tc}(x)$ elemendid on transitiivsed. Ent transitiivsusest $x = \mathrm{tc}(x)$ ja hulga x kõik elemendid on eelduse järgi transitiivsed.

2.5.3. Induktsiooni- ja rekursiooniteoreemiskeemid

Oleme valmis induktsiooni- ning rekursiooniteoreemiskeemi sõnastamiseks ja tõestamiseks.

Teoreemiskeem I.19 (potentselt regulaarne induktsioon, [Jec02, lk 68])**.** *Las olla $\boldsymbol{E}$ potentselt regulaarne seos klassil $\boldsymbol{C}$. Olgu $\varphi[x]$ niisugune väide ehk hulgateooria valem, mispuhul*

1) *iga rangelt $\boldsymbol{E}$-minimaalse elemendi $\xi \in \boldsymbol{C}$ korral kehtib $\varphi[x/\xi]$,*

2) *iga $x \in \boldsymbol{C}$ puhul, kui kõigi $\boldsymbol{E}$-eelnevate $z \,\boldsymbol{E}\, x$, $z \in \boldsymbol{C}$, korral kehtib $\varphi[x/z]$, siis kehtib ka $\varphi[x]$.*

Sellisel juhul kehtib $\forall x \in \boldsymbol{C}(\varphi[x])$.

Tingimustes 1) ja 2) võime nõude 1) ära jätta. Rangelt minimaalsel elemendil ei ole eellasi, seega tingimus 2) on *vaikimisi tõene*. Tingimuse 2) saame ekvivalentselt sõnastada nii:

2') iga $x \in \boldsymbol{C}$ puhul, kui kõigi $z \in \mathrm{ext}_{\boldsymbol{E}}(x)$ korral kehtib $\varphi[x/z]$, siis kehtib ka $\varphi[x]$.

Tõestus. Fikseerime teoreemiskeemi eeldusi täitva valemi $\varphi[x]$. Oletame, et teoreemi väide ei kehti: leidugu $x \in C$ nii, et $\neg\varphi[x]$. Järelikult alamklass $\boldsymbol{D} \subseteq \boldsymbol{C}$, kus

$$d \in \boldsymbol{D} :\doteq d \in \boldsymbol{C} \wedge \neg\varphi[x/d],$$

on mittetühi, $\boldsymbol{D} \neq \varnothing$. Lemmaskeemi I.17 alusel leidub klassis $\boldsymbol{D}$ teatav rangelt $\boldsymbol{E}$-minimaalne element, näiteks $\xi \in \boldsymbol{D}$. Element ξ ei saa olla klassi $\boldsymbol{C}$ rangelt $\boldsymbol{E}$-minimaalne element, sest eelduse 1) järgi kehtiks siis $\varphi[x/\xi]$, vastuolu kuuluvusega $\xi \in \boldsymbol{D}$. Niisiis leidub elemente $z \in \boldsymbol{C}$, mispuhul $z \,\boldsymbol{E}\, \xi$.

Olgu $z \in \boldsymbol{C}$ suvaline, mil $z \,\boldsymbol{E}\, \xi$. Et ξ oli klassis $\boldsymbol{D}$ rangelt $\boldsymbol{E}$-minimaalne, peab vastuolu vältimiseks olema $\varphi[x/z]$. Niisiis iga $\boldsymbol{E}$-eelneva elemendi $z \in \boldsymbol{C}$ puhul $\varphi[x/z]$, kust tingimuse 2) järgi peab kehtima $\varphi[x/\xi]$. Vastuolu, sest $\xi \in \boldsymbol{D}$ põhjal $\neg\varphi[x/\xi]$. Järeldame, et siiski $\boldsymbol{D} = \varnothing$. ■

Induktsiooni teoreemiskeemiga tõestatakse väga oluline

teoreemiskeem I.20 (potentselt regulaarne rekursioon, [Jec02, lk 68; HJ99, lk-d 115–117]). *Olgu E potentselt regulaarne seos klassil C. Olgu G klassifunktsioon klassil $\mathrm{U} \times \mathrm{U}$. Leidub üheselt määratud klassifunktsioon F (täisfunktsioonilise valemiga $\mathcal{F}$), mispuhul*

$$F(x) = \begin{cases} G(x, F|_{\mathrm{ext}_E(x)}), & \text{kui } x \in C, \\ \varnothing & \text{mujal.} \end{cases} \tag{$*$}$$

Potentselt regulaarse rekursiooni teoreemiskeem koosneb tegelikkuses kahest teoreemiskeemist. Esimene väidab, et tõestuses toodav valem $\mathcal{F}[x, y]$ on täisfunktsiooniline, sealjuures täidab tingimust $(*)$. Teine teoreemiskeem ütleb, et kaks omadust $(*)$ rahuldavat klassifunktsiooni on võrdsed.

Tõestus. Defineerime valemi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x, y] :\doteq F(x) = y :\doteq x \in C \wedge \exists f (\text{„}f \text{ on funktsioon“ } \wedge \\ \wedge \text{ „dom } f \subseteq C \text{ on } E\text{-transitiivne“ } \wedge \\ \wedge (\forall z \in \operatorname{dom} f)(f(z) = G(z, f|_{\mathrm{ext}_E(z)})) \wedge \\ \wedge f(x) = y) \vee \\ \vee x \notin C \wedge y = \varnothing. \end{aligned} \tag{$\dagger$}$$

Tõestame esmalt, et valem $\mathcal{F}[x, y]$ on täisfunktsiooniline. Kui $x \notin C$, on asi selge: $y = \varnothing$ alati leidub ja on üheselt määratud. Fikseerime niisiis $x \in C$. Sellisel juhul on kujutise y leiduvus ja ühesus seotud vastava funktsiooniga f. Alustame ühesusest, näidates, et kujutus f on teatud mõttes üheselt määratud.

Nimelt kui leiduvad tingimust $(\dagger)$ rahuldavad funktsioonid f ja g, siis iga $z \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$ korral $f(z) = g(z)$. Põhjendame potentselt regulaarse induktsiooniga teoreemiskeemist I.19. Arusaadavalt $\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g \subseteq C$, mistõttu on seos E potentselt regulaarne hulgal $\operatorname{dom} f \cap \cap \operatorname{dom} g$. 1) Olgu $\xi \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$ ükskõik milline rangelt E-minimaalne element. Siis $f(\xi) = G(\xi, f|_{\varnothing}) = G(\xi, \varnothing) = G(\xi, g|_{\varnothing}) = g(\xi)$, kus $\varnothing = \mathrm{ext}_E(\xi)$. 2) Kehtigu väide $f(b) = g(b)$ mingi $a \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$ jaoks iga $b \in \mathrm{ext}_E(a)$ korral. Järelikult $f|_{\mathrm{ext}_E(a)} = g|_{\mathrm{ext}_E(a)}$, kust $f(a) = G(a, f|_{\mathrm{ext}_E(a)}) = G(a, g|_{\mathrm{ext}_E(a)}) = g(a)$. Kokkuvõttes funktsioonid f ja g ühtivad oma määramamispiirkondade ühisosas. Vahetult järeldub, et kui $F(x) = y_1$ ja $F(x) = y_2$, siis kindlasti $y_1 = y_2$.

Valemi $\mathcal{F}$ täisfunktsioonilisusest on puudu teadmine, et elemendi $x \in \boldsymbol{C}$ korral leidub alati hulk y, mispuhul $\boldsymbol{F}(x) = y$. Selleks näitame, et leidub sobiv kujutus f. Põhjendame kujutuse f eksistentsi taas potentselt regulaarse induktsiooniga skeemist I.19.

1) Kui $\xi \in \boldsymbol{C}$ on rangelt $\boldsymbol{E}$-minimaalne, võtame $f \coloneqq \{(\xi, \boldsymbol{G}(\xi, \varnothing))\}$. Valitud f on selgesti funktsioon, $\operatorname{dom} f = \{\xi\} \subseteq \boldsymbol{C}$, $\operatorname{dom} f$ on vaikimisi $\boldsymbol{E}$-transitiivne ja ainukese $z \coloneqq \xi \in$ $\in \operatorname{dom} f$ korral $f(z) = f(\xi) = \boldsymbol{G}(\xi, \varnothing) = \boldsymbol{G}(\xi, f|_{\varnothing}) = \boldsymbol{G}(z, f|_{\operatorname{ext}_{\boldsymbol{E}}(\xi)})$. Siin $y \coloneqq \boldsymbol{G}(\xi, \varnothing)$.

2) Leidugu induktsioonihüpoteesina mingi $a \in \boldsymbol{C}$ jaoks iga $b \in \operatorname{ext}_{\boldsymbol{E}}(a)$ korral valemi $\mathcal{F}[x/b, y]$ eksistentsikvantori-osa rahuldav f_b. Arvestades lisaks varasemat ühesust, johtub induktsioonieeldusest, et valem

$$\begin{aligned}\Phi[b, \tilde{f}] \doteq\; & b \in \operatorname{ext}_{\boldsymbol{E}}(a) \wedge \text{„}\tilde{f} \text{ on funktsioon“} \wedge \\ & \wedge \operatorname{dom} \tilde{f} = \operatorname{TC}_{\boldsymbol{E}}(b) \wedge \\ & \wedge \forall z \in \operatorname{dom} \tilde{f}(\tilde{f}(z) = \boldsymbol{G}(z, \tilde{f}|_{\operatorname{ext}_{\boldsymbol{E}}(z)})) \wedge \\ & \vee\, b \notin \operatorname{ext}_{\boldsymbol{E}}(a) \wedge \tilde{f} = \varnothing\end{aligned}$$

on täisfunktsiooniline. Võrduse $\operatorname{dom} \tilde{f} = \operatorname{TC}_{\boldsymbol{E}}(b)$ saamiseks kasutasime määramispiirkonna $\boldsymbol{E}$-transitiivsust: kuivõrd $b \in \operatorname{dom} f_b$, siis $\subseteq$-vähimusest $\operatorname{TC}_{\boldsymbol{E}}(b) \subseteq \operatorname{dom} f_b$. Eraldamisaksioomiskeem annab soovitud võrduse. Valemi Φ täisfunktsioonilisus lubab rakendada asendusaksioomiskeemi hulgale $\operatorname{ext}_{\boldsymbol{E}}(a)$. Tulemuseks on hulk $Y \coloneqq \{\, \tilde{f} \mid b \in$ $\in \operatorname{ext}_{\boldsymbol{E}}(a) \wedge \Phi[b, \tilde{f}]\,\}$. Otsitavaks funktsiooniks f sobib võtta

$$f \coloneqq \overbrace{(\bigcup Y)}^{\substack{\text{panustab määramispiirkonda} \\ \text{hulga } \bigcup_{b \in \operatorname{ext}_{\boldsymbol{E}}(a)} \operatorname{TC}_{\boldsymbol{E}}(b) \text{ elemendid}}} \cup \underbrace{\{(a, \boldsymbol{G}(a, (\bigcup Y)|_{\operatorname{ext}_{\boldsymbol{E}}(a)}))\}}_{\text{panustab määramispiirkonda hulga } a}.$$

Selge, et f on binaarne seos. Määramispiirkond on $(\bigcup_{b \in \operatorname{ext}_{\boldsymbol{E}}(a)} \operatorname{TC}_{\boldsymbol{E}}(b)) \cup \{a\}$. Kõigepealt võetakse $\boldsymbol{E}$-transitiivsete hulkade ühend, seega $\bigcup_{b \in \operatorname{ext}_{\boldsymbol{E}}(a)} \operatorname{TC}_{\boldsymbol{E}}(b)$ on $\boldsymbol{E}$-transitiivne. Kuna $\operatorname{ext}_{\boldsymbol{E}}(a) \subseteq \bigcup_{b \in \operatorname{ext}_{\boldsymbol{E}}(a)} \operatorname{TC}_{\boldsymbol{E}}(b)$, siis ka $(\bigcup_{b \in \operatorname{ext}_{\boldsymbol{E}}(a)} \operatorname{TC}_{\boldsymbol{E}}(b)) \cup \{a\}$ on $\boldsymbol{E}$-transitiivne. $\boldsymbol{E}$-transitiivse sulundi definitsioonist ja tõigast $a \in \boldsymbol{C}$ järeldub, et $(\bigcup_{b \in \operatorname{ext}_{\boldsymbol{E}}(a)} \operatorname{TC}_{\boldsymbol{E}}(b)) \cup \{a\} \subseteq \boldsymbol{C}$. Seos f on funktsioon, sest kokku kleebitakse funktsioone $\tilde{f}$, mis lõikuvates osades ühtivad, ning $a \notin (\bigcup_{b \in \operatorname{ext}_{\boldsymbol{E}}(a)} \operatorname{TC}_{\boldsymbol{E}}(b))$. Vastasel korral lauseskeemist I.16 leiduks ahel $x_m \coloneqq a \mathrel{\boldsymbol{E}} x_{m-1} \mathrel{\boldsymbol{E}} \cdots \mathrel{\boldsymbol{E}} x_1 \mathrel{\boldsymbol{E}} b \eqqcolon x_0$, kus $b \mathrel{\boldsymbol{E}} a$, $b \in \boldsymbol{C}$. Kuivõrd $b \mathrel{\boldsymbol{E}} a$, siis järelikult $x_m = a \mathrel{\boldsymbol{E}} x_{m-1} \mathrel{\boldsymbol{E}} \cdots \mathrel{\boldsymbol{E}} x_1 \mathrel{\boldsymbol{E}} b = x_0 \mathrel{\boldsymbol{E}} a = x_m$. Vastuolu lauseskeemi I.18 osaga (3).

Olgu $z \in \operatorname{dom} f = (\bigcup_{b \in \operatorname{ext}_E(a)} \operatorname{TC}_E(b)) \cup \{a\}$. Kui $z = a$, siis

$$f(z) = f(a) = G(a, (\bigcup Y)|_{\operatorname{ext}_E(a)}) = G(a, f|_{\operatorname{ext}_E(a)}) = G(z, f|_{\operatorname{ext}_E(z)}),$$

kus eelviimases võrduses kasutasime ahelat $f|_{\operatorname{ext}_E(a)} = \big(f|_{\bigcup_{b \in \operatorname{ext}_E(a)} \operatorname{TC}_E(b)}\big)|_{\operatorname{ext}_E(a)} = (\bigcup Y)|_{\operatorname{ext}_E(a)}$, mis omakorda johtub teadmisest $f|_{\bigcup_{b \in \operatorname{ext}_E(a)} \operatorname{TC}_E(b)} = \bigcup Y$ ja asjaolust $a \notin \operatorname{ext}_E(a)$. Korras. Las olla nüüd $z \neq a$ ehk $z \in \bigcup_{b \in \operatorname{ext}_E(a)} \operatorname{TC}_E(b)$. Järelikult mingisuguse $b_z \in \operatorname{ext}_E(z)$ korral $z \in \operatorname{TC}_E(b_z)$ ja hulga Y konstruktsiooni põhjal kehtib $\Phi(b_z, \tilde{f}_{b_z})$, seega

$$f(z) = \tilde{f}_{b_z}(z) = G(z, \tilde{f}_{b_z}|_{\operatorname{ext}_E(z)}) = G(z, f|_{\operatorname{ext}_E(z)}).$$

Sobib võtta $y := G(a, (\bigcup Y)|_{\operatorname{ext}_E(a)})$.

Sellega on valemi $\mathcal{F}[x, y]$ täisfunktsioonilisus põhjendatud.

Valemi $\mathcal{F}[x, y]$ täisfunktsioonilisuse tõestusest johtub tingimuse $(*)$ kehtivus. Klassifunktsiooni F ühesus tõestatakse samuti potentselt regulaarse induktsiooniga I.19. Olgu F ja F' klassifunktsioonid, mis rahuldavad nõuet $(*)$. Nende erinevus ei saa tulla väljaspoolt klassi C, kuivõrd seal $F(x) = \varnothing = F'(x)$. Olgu niisiis $x \in C$. Kui element $x = \xi$ on klassis C rangelt E-minimaalne, siis klassi G funktsioonilisusest $F(\xi) = G(\xi, F|_{\operatorname{ext}_E(\xi)}) = G(\xi, F|_\varnothing) = G(\xi, F'|_{\operatorname{ext}_E(\xi)}) = F'(\xi)$. Kehtigu klassifunktsioonide võrdus hulga x jaoks iga $z \; E \; x$, $z \in C$, korral. Järelikult $F|_{\operatorname{ext}_E(x)} = F'|_{\operatorname{ext}_E(x)}$, kust $F(x) = G(x, F|_{\operatorname{ext}_E(x)}) = G(x, F'|_{\operatorname{ext}_E(x)}) = F'(x)$.

Tulemus on tõestatud. ■

***Märkus* I.21.** a. Seose E hulgalaadsus on oluline. Muidu ei oleks rekursioonisamm $G(x, F|_{\operatorname{ext}_E(x)})$ hästi defineeritud. [Kun80, lk 104]

b. Funktsioon G oli kahe argumendiga. Esimese argumendi x puudumise korral oleks rekursioon kitsam, sest kehtiks alati $F(x_1) = F(x_2)$, kui $\operatorname{ext}_E(x_1) = \operatorname{ext}_E(x_2)$. Iseäranis oleks $F(\xi_1) = F(\xi_2)$ kõigi rangelt E-minimaalsete elementide ξ_1 ja ξ_2 korral. Kahe argumendiga funktsioonist saame ühe argumendiga versiooni, kui esimene muutuja klassis G on *fiktiivne*. [Jec02, lk 68]

c. Funktsioon G võib sisaldada parameetreid. Tõestuses pole neid ilmutatult rõhutatud. Seda seetõttu, et ilmutatud parameetritega tõestus läheb läbi sama moodi kui ilmutamata parameetriteta. Parameetrit tuleb tõestuses lihtsalt kaasas kanda, muud midagi. [HJ99, lk 117]

d. Tõestust saaks lühendada, eriti valemi $(\dagger)$ funktsiooni f ühesuse osas, võttes valemis $(\dagger)$ kohe $\operatorname{dom} f = \operatorname{TC}_E(a)$. Leiduvuse osas tuleks lisaks näidata, et $\operatorname{TC}_E(a) =$

$= (\bigcup_{b \in \mathrm{ext}_E(a)} \mathrm{TC}_E(b)) \cup \{a\}$, mis järeldub E-transitiivsuse omadustest ja E-transitiivse sulundi definitsioonist. Muutusega kaasneks aga valemi (†) süntaktilise keerukuse kasv. Autor ei tea, kas keerukuse kasvul oleks negatiivseid tagajärgi.

e. Tõestatud teoreemiskeemidest I.19 ja I.20 järelduvad eri tüüpi induktsiooni- ja rekursiooniteoreemid.

   1) Juhul, kui $E = \in|_C$, nimetatakse meetodeid *epsiloninduktsiooniks*, *epsilonrekursiooniks*. Seose $\in$ globaalne potentne regulaarsus johtub regulaarsuse aksioomist. Epsiloninduktsiooni ning -rekursiooni kasutatakse tihti, kui klass C on transitiivne. Transitiivse mittetühja klassi ainus rangelt $\in$-minimaalne element on tühi hulk $\varnothing$. [Jec02, lk 66] Niisugust epsiloninduktsiooni kasutame näiteks lause I.29 tõestuses.

   2) Kui $C \subseteq \mathtt{Ord}$ ja $E = \in|_C$, räägitakse *transfiniitsest induktsioonist* ja *rekursioonist*. Teoreemi I.14 valguses kutsutakse samamoodi induktsiooni- ning rekursiooniteoreeme suvaliste potentselt järjestatud hulkade korral.

   3) Erijuhul, kui $C = \omega$, saame *naturaalarvulise induktsiooni* ning *rekursiooni* [Jec02, lk 66]. Rõhutame, et naturaalarvuline induktsioon ei järeldu siin potentselt regulaarsest induktsioonist, sest viimase tõestuses kasutatakse esimest (transitiivse eelsulundi olemasolu teoreemi kaudu, vt lisa B).

   4) Struktuursed induktsioon-rekursioon on piisava metateooria kontekstis niisamuti potentselt E-regulaarse versiooni alamjuhud. Näiteks struktuursel induktsioonil mööda valemi struktuuri sobiks võtta $C :=$ {I järku valemid} ning $\mathcal{F}\, E\, \mathcal{G}$ parajasti siis, kui valem $\mathcal{F}$ on valemi $\mathcal{G}$ osavalem.

f. Potentselt regulaarset induktsiooni-rekursiooni võib kutsuda *Noetheri-Montague'i induktsiooniks ja rekursiooniks*. Montague andis esimesena siinse kõige üldisema versiooni [Mon55].

Sõnastame tähtsad transfiniitse induktsiooni rekursiooni variandid, mis järelduvad skeemidest I.19 ja I.20. Selles versioonis eristatakse järglas- ning piirordinaalarvusid. Järeldusskeemi I.22 kasutame näiteks Zermelo – von Neumanni hierarhia definitsioonis ja skeemi I.21 mitmes tõestuses, näiteks lause I.25 juures.

Järeldusskeem I.21 ([Jec02, lk 21])**.** *Olgu $\varphi[x]$ valem, mispuhul*

1) *kui $x = 0$, siis $\varphi[x]$,*

2) *kui järgordinaalarvu $x = \beta^+$ korral $\varphi[x/\beta]$, siis $\varphi[x]$,*

3) *kui piirordinaalarvu* $x \neq 0$ *jaoks kõigi* $\beta < x$ *korral* $\varphi[x/\beta]$*, siis* $\varphi[x]$*.*

Sel juhul kehtib võrdus $\forall x \in \mathtt{Ord}(\varphi[x])$*.*

Tõestus. Teoreemiskeemi I.19 tähistuses $\boldsymbol{E} := \in =: <$, $\boldsymbol{C} := \mathtt{Ord}$. Oletame, et kehtib implikatsiooni eeldus potentselt regulaarse induktsiooni alternatiivsest tingimusest 2') hulga x jaoks, st iga $z < x$ korral $\varphi[x/z]$. Kui ühtegi $z < x$ ei leidu, siis $x = \varnothing$ ja siinsest eeldusest 1) järeldub $\varphi[x]$. Vastasel korral on x kas järgordinaalarv või nullist erinev piirordinaalarv. Esimesel rakendada fakti, et $\beta < x$, ja eeldust 1). Teisel juhul piisab vahetult eeldusest 3). ■

Vastav rekursiooniskeem on

järeldusskeem I.22 ([Jec02, lk 22; HJ99, lk-d 115–117])**.** *Olgu* $\boldsymbol{G}_1$*,* $\boldsymbol{G}_2$ *ja* $\boldsymbol{G}_3$ *klassifunktsioonid klassil* $\mathtt{U}$ *täisfunktsiooniliste valemitega* $\mathcal{G}_1[f,y]$*,* $\mathcal{G}_2[f,y]$*,* $\mathcal{G}_3[f,y]$*. Siis leidub üheselt määratud klassifunktsioon* $\boldsymbol{F}$ *nii, et ordinaalarvude korral*

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}(0) &= \boldsymbol{G}_1(0), \\ \boldsymbol{F}(\alpha^+) &= \boldsymbol{G}_2(\boldsymbol{F}(\alpha)), \\ \boldsymbol{F}(\alpha) &= \boldsymbol{G}_3(\boldsymbol{F}|_\alpha), \text{ kui } \alpha \neq 0 \text{ on piirordinaalarv,} \end{cases}$$

ning mujal $\boldsymbol{F}(x) = \varnothing$*.*

(Tegelikuses on jälle tegu kahe kokkupandud järeldusskeemiga.)

Tõestus. Teoreemiskeemi I.20 jaoks defineerime klassifunktsiooni $\boldsymbol{G}$ klassil $\mathtt{U} \times \mathtt{U}$ valemiga $\mathcal{G}[f,y](x)$ järgmiselt:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}[f,y](x) := f = 0 \wedge \mathcal{G}_1[f,y] \vee \\ &\vee \text{„}f \text{ on funktsioon“} \wedge \exists\alpha \in \mathtt{Ord}(\operatorname{dom} f = \alpha^+ \wedge \mathcal{G}_2[f(\alpha),y]) \vee \\ &\vee \text{„}f \text{ on funktsioon“} \wedge \exists\alpha \in \mathtt{Ord}(\operatorname{dom} f = \alpha \neq 0 \wedge \\ &\qquad\qquad \wedge \text{„}\alpha \text{ on piirordinaalarv“} \wedge \mathcal{G}_3[f,y]) \vee \\ &\vee (\text{„}f \text{ pole funktsioon“} \vee \text{„}f \text{ on funktsioon“} \wedge \operatorname{dom} f \notin \mathtt{Ord}) \wedge y = \varnothing. \end{aligned}$$

Argument x on valemis $\mathcal{G}[f,y](x)$ fiktiivne (formaalselt võib ta lisada tingimusega $x = x$) ja y on funktsiooni väärtus kohal f. Vahetult on kontrollitav, et saadav $\boldsymbol{G}$ on tõepoolest klassifunktsioon. Kirjutame $\boldsymbol{G}(f) = y$, kui kehtib $\mathcal{G}[f,y](x)$. Teoreemiskeemist I.20 saame

$E := \in$ ja $C := \mathtt{Ord}$ korral üheselt määratud klassifunktsiooni F, mispuhul

$$F(x) = \begin{cases} G(x, F|_{\mathrm{ext}_\in(x)}) = G(F|_x), & \text{kui } x \in \mathtt{Ord}, \\ \varnothing & \text{mujal.} \end{cases}$$

Oleme arvestanud, et alati $\mathrm{ext}_\in(x) = x$.

Tõestuse, et F rahuldab nõutud tingimusi, lõpetab juhtude läbivaatus. Näiteks $x = 0$ korral $F(0) = G(F|_0) = G(F|_\varnothing) = G(\varnothing) = G_1(\varnothing) = G_1(0)$. Kui $x = \alpha^+$ mingi ordinaalarvu α korral, siis $F(\alpha^+) = G(F|_{\alpha^+}) = G_2(F|_{\alpha^+}(\alpha)) = G_2(F(\alpha))$. Analoogiliselt ülejäänud kaks juhtu, kasutades valemi $\mathcal{G}[f, y](x)$ määratlust. ■

Järeldusskeem I.22 annab ühe võimaliku tee ordinaalarvude aritmeetika defineerimiseks. Huvitatud lugeja suuname allikasse [Jec02, lk 23].

2.5.4. Astakufunktsioon

Lubame edasises klassifunktsiooni defineerimisel vabamat tähistust, n-ö tükati defineerimise vormi, selmet välja kirjutada vastav valem. Samuti jätame täisfunktsioonilisuse põhjenduse reeglina lugeja intuitsiooni tasemele ja nõudlikumale lugejale ise tõestamiseks.

Potentselt regulaarse seosega $E \subseteq C \times C$ käib kaasas rekursiivselt defineeritav *astakufunktsioon* $\mathtt{rank}_E : \mathtt{U} \to \mathtt{Ord}$, mispuhul $\mathtt{rank}_E(x) = \sup\{\, (\mathtt{rank}_E(z))^+ \mid z \in C, z \mathrel{E} x \,\}$, kui $x \in C$.

Teoreemiskeem I.23 (astakufunktsiooni leidumine, [Jec02, lk 68])**.** *Olgu E potentselt regulaarne seos klassil C. Leidub funktsioon $F \colon \mathtt{U} \to \mathtt{Ord}$, mispuhul*

$$\forall \tilde{z}, x \in C(\tilde{z} \mathrel{E} x \Rightarrow F(\tilde{z}) < F(x)) \tag{‡}$$

ning $F(x) =: \mathtt{rank}_E(x) = \sup\{\, (\mathtt{rank}_E(z))^+ \mid z \in C, z \mathrel{E} x \,\}$, *kui* $x \in C$.

Tõestus. Defineerime klassifunktsiooni

$$G(f) = \begin{cases} \bigcup\{\, y^+ \mid y \in \operatorname{ran} f \,\}, & \text{kui „} f \text{ on funktsioon“},\ \operatorname{ran} f \subseteq \mathtt{Ord},\ f \neq \varnothing, \\ \varnothing & \text{mujal.} \end{cases}$$

Teoreemiskeemi I.20 ja märkuse I.21 osa b. põhjal leidub üheselt määratud klassifunktsioon

$\mathcal{F}\colon \mathtt{U} \to \mathtt{Ord}$ nii, et

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} \mathcal{G}(\mathcal{F}|_{\operatorname{ext}_{\mathcal{E}}(x)}), & \text{kui } x \in \mathcal{C}, \\ \varnothing & \text{mujal,} \end{cases}$$

kus fiktiivse argumendi jätsime ära. Tähistame funktsiooni $\mathcal{F}$ kui $\mathtt{rank}_{\mathcal{E}}$. Niisiis $x \in \mathcal{C}$ korral $\mathtt{rank}_{\mathcal{E}}(x) = \mathcal{G}(\mathtt{rank}_{\mathcal{E}}|_{\operatorname{ext}_{\mathcal{E}}(x)}) = \mathcal{G}(\{\, (z, y) \in \mathtt{rank}_{\mathcal{E}} \mid z \in \mathcal{C}, z \mathrel{\mathcal{E}} x \,\})$. Kogum $\{\, (z, y) \in$ $\in \mathtt{rank}_{\mathcal{E}} \mid z \in \mathcal{C}, z \mathrel{\mathcal{E}} x \,\}$ on hulk tänu seose $\mathcal{E}$ hulgalaadsusele, asendusaksioomiskeemile ning klassifunktsiooni $\mathtt{rank}_{\mathcal{E}}$ alusvalemi täisfunktsioonilisusele.

Tõestame potentselt regulaarse induktsiooniga I.19 korraga klassifunktsiooni muutumispiirkonna alamklassilisuse $\mathtt{ran}(\mathtt{rank}_{\mathcal{E}}) \subseteq \mathtt{Ord}$ ning võrduse $\mathtt{rank}_{\mathcal{E}}(x) = \sup\{\, (\mathtt{rank}_{\mathcal{E}}(z))^+ \mid z \in \mathcal{C}, z \mathrel{\mathcal{E}} x \,\}$, kui $x \in \mathcal{C}$. Selge, kui $x \notin \mathcal{C}$. Kui $\xi \in \mathcal{C}$ on rangelt $\mathcal{E}$-minimaalne, siis

$$\mathtt{rank}_{\mathcal{E}}(\xi) = \mathcal{G}(\mathtt{rank}_{\mathcal{E}}|_{\operatorname{ext}_{\mathcal{E}}(\xi)}) = \mathcal{G}(\mathtt{rank}_{\mathcal{E}}|_{\varnothing}) = \mathcal{G}(\varnothing) = \varnothing \in \mathtt{Ord}$$

ja $\sup \varnothing = \varnothing$. Oletame nüüd, et mitte minimaalse elemendi x jaoks kõigi $z \mathrel{\mathcal{E}} x$, $z \in \mathcal{C}$, korral $\mathtt{rank}_{\mathcal{E}}(z) \in \mathtt{Ord}$. Taolises olukorras on $\mathtt{rank}_{\mathcal{E}}|_{\operatorname{ext}_{\mathcal{E}}(x)} = \{\, (z, y) \in \mathtt{rank}_{\mathcal{E}} \mid z \in \mathcal{C}, z \mathrel{\mathcal{E}} x \,\} \neq \varnothing$ funktsioon ja

$$\mathtt{ran}(\{\, (z, y) \in \mathtt{rank}_{\mathcal{E}} \mid z \in \mathcal{C}, z \mathrel{\mathcal{E}} x \,\}) = \{\, \mathtt{rank}_{\mathcal{E}}(z) \mid z \in \mathcal{C}, z \mathrel{\mathcal{E}} x \,\} \neq \varnothing$$

mittetühi ordinaalarvudest koosnev hulk, nii ka sellest asendusaksioomiga saadud järglasordinaalide hulk $\{\, \mathtt{rank}_{\mathcal{E}}(z)^+ \mid z \mathrel{\mathcal{E}} x \,\}$. Järeldame, et

$$\begin{aligned} \mathtt{rank}_{\mathcal{E}}(x) = \mathcal{G}(\mathtt{rank}_{\mathcal{E}}|_{\operatorname{ext}_{\mathcal{E}}(x)}) &= \bigcup \{\, (\mathtt{rank}_{\mathcal{E}}(z))^+ \mid z \in \mathcal{C}, z \mathrel{\mathcal{E}} x \,\} = \\ &= \sup\{\, (\mathtt{rank}_{\mathcal{E}}(z))^+ \mid z \in \mathcal{C}, z \mathrel{\mathcal{E}} x \,\} \in \mathtt{Ord}. \end{aligned}$$

Viimane võrdus ning sisalduvus tulevad lause I.11 osast (1).

Lõpuks veendume tingimuses (‡). Rangelt $\mathcal{E}$-minimaalse elemendi $x = \xi$ korral kehtib (‡) vaikimisi. Olgu nüüd $\tilde{z} \mathrel{\mathcal{E}} x$, $\tilde{z} \in \mathcal{C}$. Vahetult definitsioonist

$$\begin{aligned} \mathtt{rank}_{\mathcal{E}}(\tilde{z}) < (\mathtt{rank}_{\mathcal{E}}(\tilde{z}))^+ \in \{\, (\mathtt{rank}_{\mathcal{E}}(z))^+ \mid z \in \mathcal{C}, z \mathrel{\mathcal{E}} x \,\} &\leqslant \\ \leqslant \sup\{\, (\mathtt{rank}_{\mathcal{E}}(z))^+ \mid z \in \mathcal{C}, z \mathrel{\mathcal{E}} x \,\} &= \mathtt{rank}_{\mathcal{E}}(x). \end{aligned}$$

Tulemus on tõestatud. ■

Teoreemiskeemi I.23 tingimust (‡) rahuldav funktsioon pole üheselt määratud. Astakufunktsiooni asemele võib võtta funktsiooni, mispuhul järglase kohale pannakse järglase järglane või üldisemalt liidetakse suvaline ordinaalarv $\alpha \geqslant 1$. Astakufunktsioon on aga väärtuste mõttes vähim funktsioon, mis nõuet (‡) täidab. Tõestus vahetult potentselt regulaarse induktsiooni ja supreemumi definitsiooni põhjal.

Teoreemiskeemile I.23 leidub osaline pöördlauseskeem, mis annab piisava tingimuse klassi C potentseks E-regulaarsuseks.

Lauseskeem I.24. *Olgu E niisugune seos klassil C, et leidub funktsioon $F\colon \mathtt{U} \to \mathtt{Ord}$ omadusega*

$$\forall z, x \in C(z\, E\, x \Rightarrow F(z) < F(x)).$$

Siis klassi C igas alamklassis $\varnothing \neq D \subseteq C$ leidub rangelt E-minimaalne element. Eriti on klass C potentselt E-regulaarne.

Tõestus. Vaikimisi tõene, kui $C = \varnothing$. Olgu $C \neq \varnothing$, kust $F(C) \neq \varnothing$. Seos $\in$ on klassil $\mathtt{Ord}$ range potentne järjestus, järelikult potentselt $\in$-regulaarne seos. Olgu ξ üks klassi $F(C)$ rangelt $\in$-regulaarsetest elementidest (tegelikult isegi $\xi = \bigcap F(C)$ rangelt $\in$-vähim, lause I.11 osa (2) üldistus). Olgu $c \in C$ suvaline, mispuhul $F(c) = \xi$. Väidame, et c on kindlasti klassi C rangelt E-minimaalne element. Kui nii poleks, siis leiduks $z \in C$, mispuhul $z\, E\, c$, kust eelduse järgi $F(z) < F(c) = \xi$. Vastuolu hulga ξ minimaalsusega klassis $F(C)$.

Klasside jaoks on tulemus tõestatud. Kõik hulgad olid klassid, sestap johtub klassi C potentne E-regulaarsus. ■

Täielikku pöördlauseskeemi ei leidu, sest lauseskeemi I.24 eeldused ei taga seose hulgalaadsust. Võtame $C \coloneqq \mathtt{U}$ ning $z\, E\, x :\doteq x = \{\{\varnothing\}\} \wedge z \neq x$. Funktsioon $F\colon \mathtt{U} \to \mathtt{Ord}$,

$$F(x) = \begin{cases} \varnothing, & x \neq \{\{\varnothing\}\}, \\ \{\varnothing\}, & x = \{\{\varnothing\}\}, \end{cases}$$

rahuldab lauseskeemi I.24 eeldust. Kui $z, x \in \mathtt{U}$, siis $z\, E\, x$ tähendab, et $z \neq \{\{\varnothing\}\}$ ja $x = \{\{\varnothing\}\}$. Järelikult $F(z) = \varnothing = 0 < 1 = \{\varnothing\} = F(x)$. Ent $\{\{\varnothing\}\} \in \mathtt{U}$ ja $\mathtt{ext}_E(\{\{\varnothing\}\}) = \\ = \mathtt{U} \setminus \{\{\{\varnothing\}\}\}$ ehk tegu pole hulgaga.

2.6. Zermelo – von Neumanni kumulatiivne hierarhia

Olgu antud klassifunktsioon $\mathtt{W}\colon \mathtt{Ord} \to \mathtt{U}$ või $(\mathtt{W}_\alpha)_{\alpha\in\mathtt{Ord}}$ ehk *hierarhia*. Hierarhiat $(\mathtt{W}_\alpha)_{\alpha\in\mathtt{Ord}}$ kutsutakse *kumulatiivseks*, kui $\mathtt{W}_0 = \varnothing$, iga $\alpha \in \mathtt{Ord}$ korral $\mathtt{W}_\alpha \subsetneq \mathtt{W}_{\alpha^+} \subseteq \mathcal{P}(\mathtt{W}_\alpha)$ ja piirordinaalarvulise α puhul $\mathtt{W}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathtt{W}_\beta$. Kumulatiivsest hierarhiast võib mõelda kui järkjärgulisest hulkade „loomise“ protsessist. Alustame tühjast hulgast, $\mathtt{W}_0 = \varnothing$. Järgordinaalarvulisel sammul jäävad varasemad hulgad alles, $\mathtt{W}_\alpha \subsetneq \mathtt{W}_{\alpha^+}$, samuti lisatakse hulki juurde. Uusi hulki võetakse ainult varasemate hulkade alamhulkade seast, st $\mathtt{W}_{\alpha^+} \subseteq \mathcal{P}(\mathtt{W}_\alpha)$. Piirordinaalarvulisel sammul kogume varasematel sammudel saadud hulgad kokku, $\mathtt{W}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathtt{W}_\beta$. [Jec02, lk 171]

Kumulatiivse hierarhia $(\mathtt{W}_\alpha)_{\alpha\in\mathtt{Ord}}$ iga aste $\mathtt{W}_\alpha$ on mittetühi, kui $\alpha \geqslant 1$, ning alati transitiivne. Esimene väide tuleneb rangest sisalduvusest $\mathtt{W}_\alpha \subsetneq \mathtt{W}_{\alpha^+}$ ja nullist erinevate piirordinaalarvude korral ühendi definitsioonist. Transitiivsus on ilmne, kui $\alpha = 0$, ja vahetu mujal, sest $x \in \mathtt{W}_\alpha$ korral $x \in \mathcal{P}(\mathtt{W}_\alpha)$ ehk $x \subseteq \mathtt{W}_\alpha$. Klassist $\mathtt{W} = \bigcup_{\alpha\in\mathtt{Ord}} \mathtt{W}_\alpha$ räägitakse kui *kumulatiivsest universumist üle hierarhia* $(\mathtt{W}_\alpha)_{\alpha\in\mathtt{Ord}}$.

Zermelo – von Neumanni kumulatiivne hierarhia on kumulatiivse hierarhia mõiste erijuht. Alamhulgalise sisalduvuse mõttes on Zermelo – von Neumanni hierarhia suurim kumulatiivne hierarhia. Definitsioonis I.22 rakendame järeldusskeemi I.22.

Definitsioon I.22 (Zermelo – von Neumanni hierarhia, universum, [Jec02, lk 64]). Hierarhiat $(\mathtt{V}_\alpha)_{\alpha\in\mathtt{Ord}}$ nimetatakse *Zermelo – von Neumanni (kumulatiivseks) hierarhiaks*, kui

$$\begin{cases} \mathtt{V}_0 &= \varnothing, \\ \mathtt{V}_{\alpha^+} &= \mathcal{P}(\mathtt{V}_\alpha), \\ \mathtt{V}_\alpha &= \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathtt{V}_\beta, \text{ kui } \alpha \neq 0 \text{ on piirordinaalarv.} \end{cases}$$

Vastavat ühendklassi $\mathtt{V} = \bigcup_{\alpha\in\mathtt{Ord}} \mathtt{V}_\alpha$ kutsutakse *Zermelo – von Neumanni (kumulatiivseks) universumiks*. Vahel kirjutatakse $\mathtt{V}_\alpha$ ja $\mathtt{V}$ asemel $\mathtt{R}_\alpha$ ja $\mathtt{R}$ [Kun80, lk 95] .

Tõestame Zermelo – von Neumanni hierarhia kohta mõne lihtsama väite.

Lause I.25 ([Jec02, lk-d 64–65; Wea14, lk-d 15–16]). (1) *Kui hulk x saadakse kätte sammul α, siis kõik tema elemendid on mingist varasemast sammust $\beta < \alpha$ juba olemas. See tähendab, et iga $x \in \mathtt{V}_\alpha$ ja $y \in x$ korral leidub $\beta < \alpha$ nii, et $y \in \mathtt{V}_\beta$.*

(2) *Zermelo – von Neumanni hierarhia on kumulatiivne. Iga sammu koondhulk $\mathtt{V}_\alpha$ on transitiivne.*

(3) *Varasema sammu elemendid ei lähe kaotsi: kui* $\beta \leqslant \alpha$, *siis* $\mathtt{V}_\beta \subseteq \mathtt{V}_\alpha$.

(4) *Iga* $\alpha \in \mathtt{Ord}$ *korral* $\alpha \subseteq \mathtt{V}_\alpha$.

(5) *Iga* $\alpha \in \mathtt{Ord}$ *korral* $\alpha \in \mathtt{V}_{\alpha^+} \setminus \mathtt{V}_\alpha$.

(6) *Kui hulga* X *kõik elemendid* x *on teataval sammul* $\alpha_x \in \mathtt{Ord}$ *kätte saadud, siis hulk* X *kuulub samuti mingisse hierarhia astmesse* $\mathtt{V}_\beta$. *Predikaatarvutuse keeles*

$$\forall X(\forall x \in X \exists \alpha \in \mathtt{Ord}(x \in \mathtt{V}_\alpha) \Rightarrow \exists \beta \in \mathtt{Ord}(X \in \mathtt{V}_\beta)).$$

Tõestus. (1) Kasutame transfiniitset induktsiooni I.21 valemi

$$\varphi[\alpha] :\doteq \forall x, y(x \in \mathtt{V}_\alpha \wedge y \in x \Rightarrow \exists \beta(\beta < \alpha \wedge y \in \mathtt{V}_\beta))$$

korral. Tulemus on selge piirarvuliste α väärtuste jaoks: kui $\alpha = 0$, vaikimisi tõene, muul juhul johtub alamhulgalisus ühendilisest definitsioonist $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathtt{V}_\beta$. Kehtigu nüüd väide $\varphi[\alpha/\gamma]$ järgarvulise $\gamma^+ = \alpha$ jaoks. Siis väide $\varphi[\alpha]$ kehtib, sest eeldusel $x \in \mathtt{V}_\alpha = \mathcal{P}(\mathtt{V}_\gamma)$ saame $x \subseteq \mathtt{V}_\gamma$ ehk kui $y \in x$, siis $y \in \mathtt{V}_\gamma$. Sobib võtta $\beta := \gamma$.

(2) Vahetult kokkuleppest $\mathtt{V}_0 = \varnothing$ ning $\alpha \in \mathtt{Ord}$ korral $\mathtt{V}_{\alpha^+} \subseteq \mathcal{P}(\mathtt{V}_\alpha)$. Jääb näidata, et $\mathtt{V}_\alpha \subsetneq \mathtt{V}_{\alpha^+}$. Mitterange alamhulgalisus $\mathtt{V}_\alpha \subseteq \mathtt{V}_{\alpha^+} = \mathcal{P}(\mathtt{V}_\alpha)$ on lause I.1 osa (iv) järgi hulga $\mathtt{V}_\alpha$ transitiivsus. Transfiniitse induktsiooniga. Tühi hulk on transitiivne, transitiivsete hulkade kogumi ühend on transitiivne ning transitiivse hulga potentshulk on transitiivne, vt lause I.2 jaotisi (1) ja (4). Võrduse $\mathtt{V}_\alpha = \mathcal{P}(\mathtt{V}_\alpha)$ välistab Cantori teoreem [HJ99, lk 96], ei leidu injektsiooni hulga potentshulgast algsesse hulka.

(3) Transfiniitne induktsioon valemi $\varphi[\alpha] :\doteq \forall \beta(\beta < \alpha \Rightarrow \mathtt{V}_\beta \subseteq \mathtt{V}_\alpha)$ korral. Tulemus on ilmne piirarvuliste α väärtuste jaoks. Järgarvulise α puhul $\gamma^+ = \alpha$ oletame, et väide $\varphi[\alpha/\gamma]$ kehtib. Näitame, et järeldub väide $\varphi[\alpha]$. Kuna iga $\beta < \gamma$ korral $\mathtt{V}_\beta \subseteq \mathtt{V}_\gamma$, piisab näidata, et $\mathtt{V}_\gamma \subseteq \mathtt{V}_{\gamma^+} = \mathcal{P}(\mathtt{V}_\gamma)$. See on juba teada jaotisest (2). Kui eelduses kehtib võrdus, s.o $\beta = \alpha$, on tulemus ilmne.

(4) Transfiniitne induktsioon valemiga $\Phi[\alpha] :\doteq \alpha \subseteq \mathtt{V}_\alpha$. Kehtigu väide $\alpha \in \mathtt{Ord}$ korral. Vaja, et $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\} \subseteq \mathtt{V}_{\alpha^+}$. Eeldusest $\alpha \subseteq \mathtt{V}_\alpha$, potentshulga võtmisest järelikult $\alpha \in \mathtt{V}_{\alpha^+}$. Osa (3) järgi, sest $\alpha < \alpha^+$, saame $\mathtt{V}_\alpha \subseteq \mathtt{V}_{\alpha^+}$. Järelikult eeldusest $\alpha \subseteq \mathtt{V}_\alpha$ ka $\alpha^+ \subseteq \mathtt{V}_{\alpha^+}$. Edasi vaatleme piirordinaalarve. Juhul $\alpha = 0$ asi klaar, kuna $\varnothing$ on iga hulga osahulk. Kehtigu nüüd mingi piirarvulise $\alpha \neq 0$ jaoks väide kõigi arvude $\beta < \alpha$ korral. Näitame, et $\alpha \subseteq \mathtt{V}_\alpha$. Olgu $\gamma \in \alpha$, s.o $\gamma < \alpha$. Kuna α on piirordinaalarv ja γ^+ on järgordinaalarv, siis ka $\gamma^+ < \alpha$, lause I.10 osa (5). Induktsiooni eeldusest $\gamma^+ \subseteq \mathtt{V}_{\gamma^+}$.

Jaotisest (3) $\mathtt{V}_{\gamma^+} \subseteq \mathtt{V}_\alpha$. Et $\gamma \in \gamma^+$, siis $\gamma \in \mathtt{V}_\alpha$.

(5) Eelmise jaotise põhjal $\alpha \subseteq \mathtt{V}_\alpha$, mistõttu potentshulga võtmisest $\alpha \in \mathtt{V}_{\alpha^+}$. Seetõttu tõestame, et $\alpha \notin \mathtt{V}_\alpha$. Transfiniitse induktsiooniga ja vastuväiteliselt. Kehtigu väide $\alpha \notin \mathtt{V}_\alpha$ mingi $\alpha \in \mathtt{Ord}$ korral, st $\alpha \notin \mathtt{V}_\alpha$. Kui oleks $\alpha^+ \in \mathtt{V}_{\alpha^+}$, siis $\alpha^+ \subseteq \mathtt{V}_\alpha$, kust $\alpha \in \mathtt{V}_\alpha$, vastuolu. Liigume piirordinaalarvude juurde. Tühja hulga korral mittesisalduvus ilmne, $0 \notin \mathtt{V}_0 = \varnothing$. Kehtigu tulemus mingi piirarvulise $\alpha \neq 0$ jaoks iga ordinaalarvu $\beta < \alpha$ korral. Oletame vastuväiteliselt, et $\alpha \in \mathtt{V}_\alpha$. Piirarvulisel astmel võetakse ühend, seega leiduks mingi $\gamma < \alpha$ nii, et $\alpha \in \mathtt{V}_\gamma$. Transitiivsusest $\alpha \subseteq \mathtt{V}_\gamma$. Kuid $\gamma < \alpha$, st $\gamma \in \alpha$, järelikult $\gamma \in \mathtt{V}_\gamma$. Vastuolu induktsiooni eeldusega.

(6) Kehtigu implikatsiooni

$$\forall X(\forall x \in X \exists \alpha \in \mathtt{Ord}(x \in \mathtt{V}_\alpha) \Rightarrow \exists \beta \in \mathtt{Ord}(X \in \mathtt{V}_\beta)).$$

eeldused ja las $X \neq \varnothing$. Kuivõrd igale elemendile $x \in X$ vastab $\alpha_x \in \mathtt{Ord}$ (neid võib olla mitu), mispuhul $x \in \mathtt{V}_{\alpha_x}$, leidub ka vähim niisuguse omadusega ordinaalarv. Vastavat omadust kirjeldab valem

$$\varPhi[x, \alpha] \coloneqq x \in \mathtt{V}_{\alpha^+} \wedge x \notin \mathtt{V}_\alpha.$$

Väljendusviis on korrektne, kuna $\mathtt{V}_0 = \varnothing$, piirordinaalarvulisel sammul $\alpha \neq 0$ koondatakse ühendiga üksnes juba varem saadud hulki; ja kui juba $x \in \mathtt{V}_\delta$, $\Delta \in \mathtt{Ord}$, siis $x \in \mathtt{V}_\gamma$ iga ordinaalarvu $\gamma \geqslant \delta$ korral – jaotis (3). Valem $\varPhi[x, \alpha]$ on hulgal X täisfunktsiooniline. Leiduvus tuleneb implikatsiooni eeldusest, ühesus arvu α vähimusest.

Asendamisaksioomiskeemi alusel leidub hulk $Y_X \coloneqq \{\, \alpha \mid x \in X \wedge \varPhi[x, \alpha] \,\}$. Et $x \in X$ ja $\varPhi[x, \alpha]$ korral just $x \in \mathtt{V}_{\alpha^+}$, mitte $x \in \mathtt{V}_\alpha$, siis rakendame korra veel funktsioonilist asendust järgarvude elemendiviisiliseks võtmiseks, $Y \coloneqq \{\, \alpha^+ \mid \alpha \in Y_X \,\}$. Hulk Y koosneb ordinaalarvudest, mistõttu lause I.11 osa (1) abil järeldame, et ka $\bigcup Y$ on ordinaalarv, sealjuures $\bigcup Y = \sup_{\subseteq} Y =: \beta'$.

Asendamisaksioomiskeemi kolmandal rakendamisel saame hulga $\{\, \mathtt{V}_\gamma \mid \gamma < \beta' \,\}$. Järelikult saame võtta sellest hulgast ühendi, kusjuures ülesehituse viisi tõttu on X tema osahulk, st $X \subseteq \bigcup_{\gamma < \beta'} \mathtt{V}_\gamma$. Jaotise (3) järgi iga $\gamma < \beta'$ korral $\mathtt{V}_\gamma \subseteq \mathtt{V}_{\beta'}$, kust $\bigcup_{\gamma < \beta'} \mathtt{V}_\gamma \subseteq \mathtt{V}_{\beta'}$ ja millest omakorda $X \subseteq \mathtt{V}_{\beta'}$. Hierarhia järgmisel sammul jõutaksegi seega hulgani X, sest $X \in \mathcal{P}(\mathtt{V}_{\beta'}) = \mathtt{V}_{(\beta')^+}$. Teoreemi implikatsiooni väitesse sobib võtta $\beta \coloneqq (\beta')^+$. ■

Hulka X kutsusime tugevalt regulaarseks, kui seos $\in$ oli tolle transitiivsel eelsulundil $\mathrm{tc}(X)$ on potentselt regulaarne. Järgmine lemma ütleb, et Zermelo – von Neumanni hierarhia astmed $\mathtt{V}_\alpha$ on tugevalt regulaarsed. Astmete $\mathtt{V}_\alpha$ transitiivsuse tõttu on väide samaväärne nende hulkade $\mathtt{V}_\alpha$ potentse regulaarsusega. Tõestus ei kasuta regulaarsuse aksioomi.

Lemma I.26 ([HJ99, lk 258])**.** *Zermelo – von Neumanni kumulatiivse hierarhia iga aste* $\mathtt{V}_\alpha$ *on tugevalt regulaarne.*

Tõestus. Vaatleme sisulist juhtu $\mathtt{V}_\alpha \neq \varnothing$ ja $\varnothing \neq B \subseteq \mathtt{V}_\alpha$. Kuivõrd $B \cap \mathtt{V}_\alpha \neq \varnothing$, leidub

$$\beta \coloneqq \min \{ \tilde{\beta} \leqslant \alpha \mid B \cap \mathtt{V}_\beta \neq \varnothing \}.$$

Eriti $B \cap \mathtt{V}_\beta \neq \varnothing$. Ükskõik milline selle ühisosa element sobib algse hulga B rangelt $\in$-minimaalseks elemendiks. Olgu $\xi \in B \cap \mathtt{V}_\beta$ suvaline. Kui ξ poleks $\in$-rangelt minimaalne hulgas B, leiduks $\tilde{\xi} \in \xi \cap B$. Lause I.25 osa (1) järgi, kuna ξ on olemas sammul β, peab $\tilde{\xi}$ olema kätte saadud varasemast sammust $\tilde{\beta} < \beta$, s.o $\tilde{\xi} \in \mathtt{V}_{\tilde{\beta}}$. Siis aga $\tilde{\xi} \in B \cap \mathtt{V}_{\tilde{\beta}} \neq \varnothing$ ja $\tilde{\beta} < \beta \leqslant \alpha$. Vastuolu arvu β valikust tuleneva range minimaalsusega. ■

Kehtib klasside võrdus $\mathtt{WF} = \mathtt{V}$, st Zermelo – von Neumanni universum koosneb parajasti kõigist tugevalt regulaarsetest hulkadest. Seda ka regulaarsuse aksioomi puudumisel. Regulaarsuse aksioomi kontekstis $\mathtt{WF} = \mathtt{U}$, järelikult sel juhul on Zermelo – von Neumanni kumulatiivne hierarhia kõikehõlmav ehk $\mathtt{V} = \mathtt{U}$.

Teoreem I.27 ($\mathtt{WF} = \mathtt{V}$, [HJ99, lk 258])**.** *Zermelo – von Neumanni universum* $\mathtt{V}$ *koosneb parajasti tugevalt regulaarsetest hulkadest ehk* $\mathtt{WF} = \mathtt{V}$*, st*

$$\forall X(\text{„}X \text{ on tugevalt regulaarne“} \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathtt{Ord}(X \in \mathtt{V}_\alpha)).$$

Tõestus. Põhjendame kumbagi suunda, alustades pöördimplikatsioonist.

(„$\Leftarrow$“) Las $X \in \mathtt{V}_\alpha$, $\alpha \in \mathtt{Ord}$. Hulk $\mathtt{V}_\alpha$ on lemma I.26 järgi tugevalt regulaarne, järelikult potentselt regulaarne. Tugeva regulaarsuse definitsioonile järgnenud arutelu järgi on hulk X tugevalt regulaarne, kui vastav transitiivne sulund $\mathrm{TC}(X)$ on potentselt regulaarne. Piisab näidata, et $\mathrm{TC}(X) \subseteq \mathtt{V}_\alpha$. Toodud alamhulgalisus järeldub transitiivse sulundi $\subseteq$-vähimusest transitiivsete hulkade seas, mis sisaldavad hulka X: hulk $\mathtt{V}_\alpha$ rahuldab loetletud omadusi.

(„$\Rightarrow$“) Oletame vastuväiteliselt, et mingi tugevalt regulaarne hulk X ei kuulu ühessegi hierarhia astmesse. Lause I.25 osa (6) järgi peab leiduma $x \in X$ nii, et iga $\alpha \in \mathtt{Ord}$

korral $x \notin \mathtt{V}_\alpha$. Vaatleme hulka

$$Z \coloneqq \{\, z \in \mathrm{tc}(X) \mid \forall \alpha \in \mathtt{Ord}(z \notin \mathtt{V}_\alpha) \,\}.$$

Et $X \subseteq \mathrm{tc}(X)$, siis $x \in Z$ ehk $Z \neq \varnothing$. Olgu ξ hulga Z rangelt $\in$-minimaalne element – selline leidub, sest hulk X on tugevalt regulaarne. Kuna $\xi \in Z$, ei saa olla $\xi = \varnothing$, sest $\varnothing \in \mathtt{V}_1$. Kui $\tilde{\xi} \in \xi$, siis sulundi transitiivsusest $\xi \in \mathrm{tc}(X)$. Seetõttu peab $\tilde{\xi}$ kuuluma mingisse hulka $\mathtt{V}_\alpha$, muidu oleks $\tilde{\xi} \in Z$ ja vastuolu ξ range minimaalsusega. Lause I.25 osa (6) järgi taas ξ kuulub mingisse astmesse $\mathtt{V}_\beta$. Vastuolu kuuluvusega $\xi \in Z$. Kokkuvõttes peab X ikkagi Zermelo – von Neumanni universumisse kuuluma. ∎

2.6.1. Hulga astak

Regulaarsuse aksioomist järeldus, et kõik hulgad on tugevalt regulaarsed. Teoreemi I.27 põhjal on Zermelo – von Neumanni hierarhia kõikehõlmav. Valem

$$\Phi[X, \alpha] \doteqdot X \in \mathtt{V}_{\alpha^+} \wedge X \notin \mathtt{V}_\alpha$$

on seetõttu täisfunktsiooniline sarnase aruteluga nagu lause I.25 punktis (6) (täisfunktsioonilisus on siin kogu universumis, mitte ainult hulgal X, leiduvuses kasutatud induktsioonieeldust asendab regulaarsuse aksioom). Suvalise hulga X korral tähistame

$$\alpha = \mathtt{Rank}(X) \doteqdot \Phi[X, \alpha].$$

Ordinaalarvu $\mathtt{Rank}(X)$ kutsume *hulga X astakuks*. Suurus $\mathtt{Rank}(X)$ on esimene ordinaalarv, mispuhul $X \in \mathtt{V}_{\mathtt{Rank}(X)^+}$: iga $\beta \leqslant \mathtt{Rank}(X)$ korral $X \notin \mathtt{V}_\beta$. [Jec02, lk 64]

Järgmine lause sõnastab kolm lihtsamat astaku omadust [Jec02, lk-d 64–65] ja ühe pisut keerukama omaduse.

Lause I.28 ([Jec02, lk-d 64–65]). *Olgu X suvaline hulk ja α ordinaalarv.*

(1) $\mathtt{Rank}(\alpha) = \alpha$

(2) $X \in \mathtt{V}_\alpha \Leftrightarrow \mathtt{Rank}(X) < \alpha$

(3) *Kui $x \in X$, siis* $\mathtt{Rank}(x) < \mathtt{Rank}(X)$.

(4) *Kui $x \in \mathrm{tc}_\in(X) = \mathrm{tc}(X)$, siis* $\mathtt{Rank}(x) < \mathtt{Rank}(X)$.

Tõestus. (1) Hulga astaku definitsioon ning lause I.25 osa (5).

(2) Kui $X \in \mathtt{V}_\alpha$, siis astaku vähimusest $\mathtt{Rank}(X)^+ \leqslant \alpha$ ehk $\mathtt{Rank}(X) < \alpha$. Vastupidi kui $\mathtt{Rank}(X) < \alpha$, siis $\mathtt{Rank}(X)^+ \leqslant \alpha$. Astakufunktsiooni definitsioonist ja lause I.25 osast (3) $X \in \mathtt{V}_{\mathtt{Rank}(X)^+} \subseteq \mathtt{V}_\alpha$.

(3) Astaku määratlus ja lause I.25 osa (1).

(4) Lauseskeemi I.16 järgi kehtib ekvivalentsus

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{tc}(X) \Leftrightarrow {} & \text{leidub hulkade lõplik jada } (f_k)_{k \leqslant m}, \text{kus} \\ & f_m = x \in f_{m-1} \in \cdots \in f_1 \in X = f_0 \text{ ja } m \in \omega,\ m \geqslant 1. \end{aligned}$$

Tulemuse saab niisiis tõestada naturaalarvulise induktsiooniga I.7 hulgal

$$\begin{aligned} S \coloneqq \{\, m \in \omega \mid m = 0 \vee m \geqslant 1 \wedge {} & \text{iga } y, Y \text{ ja lõpliku jada } (f_k)_{k \leqslant m} \text{ korral, kus} \\ & f_m = y \in f_{m-1} \in \cdots \in f_1 \in Y = f_0, \\ & \text{kehtib } \mathtt{Rank}(y) < \mathtt{Rank}(Y) \,\}, \end{aligned}$$

see tähendab

$$\begin{aligned} S \coloneqq \big\{\, m \in \omega \mid m = 0 \vee m \geqslant 1 \wedge {} & \forall y, Y, f \big(\text{„}f \text{ on funktsioon“} \wedge \operatorname{dom} f = m^+ \wedge \\ & \wedge f(m) = y \wedge f(0) = Y \wedge \\ & \wedge \forall \ell (0 \leqslant \ell \leqslant m-1 \Rightarrow f(\ell^+) \in f(\ell))\big) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \mathtt{Rank}(y) < \mathtt{Rank}(Y) \,\big\}. \end{aligned}$$

Kontrollime teoreemi I.7 eelduste kehtivust. Selgesti $S \subseteq \omega$ ja $0 \in S$. Olgu nüüd $m \in S$. Näitame, et $m^+ \in S$. Valime vabalt hulgad $\tilde{y}$, $\tilde{Y}$ ja funktsiooni $\tilde{f}$, kus $\operatorname{dom} \tilde{f} = m^{++}$, $\tilde{f}(m^+) = \tilde{y}$, $\tilde{f}(0) = \tilde{Y}$ ja iga $0 \leqslant \ell \leqslant m$ puhul $\tilde{f}(\ell^+) \in \tilde{f}(\ell)$. Induktsioonieeldusest juhul $y \coloneqq \tilde{f}(m)$, $Y \coloneqq \tilde{Y}$ ja $f \coloneqq \tilde{f}|_{m^+}$ saame, et $\mathtt{Rank}(\tilde{f}(m)) < \mathtt{Rank}(\tilde{Y})$. Et $\tilde{y} \in$ $\in \tilde{f}(m)$, siis osast (3) johtuvalt $\mathtt{Rank}(\tilde{y}) < \mathtt{Rank}(\tilde{f}(m))$. Järjestuse transitiivsusest $\mathtt{Rank}(\tilde{y}) < \mathtt{Rank}(\tilde{Y})$. Seega $m^+ \in S$, teoreemist I.7 tuleneb võrdus $S = \omega$. ■

Sisalduvusseos $\in$ on regulaarsuse aksioomi tõttu kõigi hulkade klassil $\mathtt{U}$ potentselt regulaarne seos. Teoreemiskeemi I.23 järgi leidub astakufunktsioon $\mathtt{rank}_\in \colon \mathtt{U} \to \mathtt{Ord}$, mispuhul

$$\mathtt{rank}_\in(x) = \sup \{\, (\mathtt{rank}_\in(z))^+ \mid z \in x \,\}.$$

Minuskliga $\mathtt{rank}_\in$ ja majuskliga $\mathtt{Rank}$ on klassifunktsioonidena võrdsed. Seesugune teadmine läheb käiku hulga astakufunktsiooni $\mathtt{Rank}$ absoluutsuse tõestamisel.

Lause I.29 ([Kun80, lk 104]). *Sisalduvuse astakufunktsioon* $\mathtt{rank}_\in$ *ning hulga astakufunktsioon* $\mathtt{Rank}$ *ühtivad, s.o* $\mathtt{rank}_\in = \mathtt{Rank}$.

Tõestus. Tõestame tulemuse epsiloninduktsiooniga klassil $\mathtt{U}$. Hulkade klassi $\mathtt{U}$ kui mittetühja transitiivse klassi ainus rangelt epsilonminimaalne element on tühi hulk. Tühja hulga sisendil klassifunktsioonid ühtivad:

$$\mathtt{Rank}(\varnothing) = 0 = \sup \{ (\mathtt{rank}_\in(z))^+ \mid z \in \varnothing \} = \mathtt{rank}_\in(\varnothing),$$

sest $\varnothing \in \mathtt{V}_1$. Kehtigu väide mingi hulga X korral iga $x \in X$ jaoks. Siis

$$\begin{aligned} \mathtt{rank}_\in(X) &= \sup \{ \mathtt{rank}_\in(x)^+ \mid x \in X \} = \\ &= \sup \{ \mathtt{Rank}(x)^+ \mid x \in X \}. \end{aligned}$$

Järelikult $X \subseteq \mathtt{V}_{\mathtt{rank}_\in(X)}$, kust $\mathtt{Rank}(X) \leqslant \mathtt{rank}_\in(X)$. Lause I.28 osa (3) järgi iga $x \in X$ puhul $\mathtt{Rank}(x) < \mathtt{Rank}(X)$, kust $\mathtt{Rank}(x)^+ \leqslant \mathtt{Rank}(X)$. Supreemumi mõistest lähtudes $\mathtt{rank}_\in(X) = = \sup \{ \mathtt{Rank}(x)^+ \mid x \in X \} \leqslant \mathtt{Rank}(X)$. Kokkuvõttes $\mathtt{rank}_\in(X) = \mathtt{Rank}(X)$. ■

2.6.2. Tarski-Scotti võte

Tarski-Scotti võtte eesmärk on etteantud pärisklassist $\mathcal{C}$ saada selle klassiga piisavalt sarnane hulgaline „kehastus“ $\check{\mathcal{C}}$. Konstruktsioon kasutab regulaarsuse aksioomi, kuid valikuaksioomi pole tarvis. [Jec02, lk 65; Pro22, lk-d 909–910] Võtte sisu aitab selgitada

lemmaskeem I.30. *Olgu $\mathcal{C}$ mingi klass, las $\eta \in \mathcal{C}$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *iga $c \in \mathcal{C}$ korral* $\mathtt{Rank}(\eta) \leqslant \mathtt{Rank}(c)$,

(ii) *η on klassi $\mathcal{C}$ vähima astakuga $\Subset$-minimaalne element.*

Tõestus. Lause I.28 osa (3) ja eeldusena antud võrratuse vahetu järeldus. ■

Lühidalt öeldes koosneb hulk $\check{\mathcal{C}}$ klassi $\mathcal{C}$ kõigist vähima astakuga $\Subset$-minimaalsetest elementidest. Täpsemini saadakse klassi $\mathcal{C}$ hulgaline kehastus $\check{\mathcal{C}} \subseteq \mathcal{C}$ järgmiste sammudega.

1) Antud on klass $\mathcal{C} \neq \varnothing$, soovime selle hulgalist vastet $\check{\mathcal{C}} \neq \varnothing$.

2) Moodustame klassi kujutise $\mathtt{Rank}(\mathcal{C})$, mis on samuti klass. Kõik klassi $\mathcal{C}$ kuuluvad hulgad on tugevalt regulaarsed tänu regulaarsuse aksioomile, vt näiteks arutelu definitsiooni I.19 järel, seega $\mathcal{C} \subseteq \mathtt{V}$ ja $\mathtt{Rank}(\mathcal{C}) \neq \varnothing$. Lisaks $\mathtt{Rank}(\mathcal{C}) \subseteq \mathtt{Ord}$.

3) Kuivõrd klassi $\mathcal{C}$ näol on tegu ordinaalarvude klassi mittetühja alamklassiga, leidub klassis $\mathtt{Rank}(\mathcal{C})$ kindlasti $\Subset$-vähim element α_0. Põhjendus leitav lemmaskeemile I.17

järgnenud osast.

4) Defineerime klassi $\breve{\mathcal{C}}$ kui hulga $\{\alpha_0\}$ originaali ahendatuna klassile $\mathcal{C}$. Vastavalt konstruktsioonile kindlasti $\breve{\mathcal{C}} \neq \varnothing$.

$$\breve{\mathcal{C}} \coloneqq \mathtt{Rank}^{-1}(\{\alpha_0\}) \cap \mathcal{C} = \{\, \eta \in \mathcal{C} \mid \mathtt{Rank}(\eta) = \alpha_0 \,\}.$$

Elemendi α_0 valiku alusel $\eta \in \breve{\mathcal{C}}$ parajasti siis, kui $\eta \in \mathcal{C}$ ja iga $c \in \mathcal{C}$ korral $\mathtt{Rank}(\eta) \leqslant \mathtt{Rank}(c)$. Lemmaskeemi I.30 järgi koosnebki $\breve{\mathcal{C}}$ täpselt kõigist klassi $\mathcal{C}$ minimaalsetest elementidest seose $\Subset$ järgi. Arusaadavalt

$$\breve{\mathcal{C}} = (\mathtt{V}_{\alpha_0^+} \setminus \mathtt{V}_{\alpha_0}) \cap \mathcal{C} = \mathtt{V}_{\alpha_0^+} \cap \mathcal{C},$$

sest $\mathtt{V}_{\alpha_0} \cap \mathcal{C} = \varnothing$. Niisiis on klass $\breve{\mathcal{C}}$ saadav hulgast $\mathtt{V}_{\alpha_0^+}$ eraldamisaksioomiskeemi kaudu. Järelikult on $\breve{\mathcal{C}}$ hulk.

Tarski-Scotti võtet rakendatakse näiteks siis, kui tahetakse defineerida ekvivalentsiseost, aga otsene määratlus viib pärisklassini. Niisugune on lugu näiteks kardinaalarvude naiivse defineerimiskatse korral. Hulkade võrdvõimsuslikkus on teatavasti ekvivalentsiseos kõikide hulkade klassil $\mathtt{U}$, ent vastav klass $[\boldsymbol{x}]_\sim$ pole kunagi hulk, kui $x \neq \varnothing$. Teame, et $\widetilde{[\boldsymbol{x}]}_\sim$ on hulk, ning osutub, et taolistele klassidele vastaval seosel on küllaldaselt palju häid omadusi, et kutsuda saadavat ekvivalentsiklassi $\widetilde{[\boldsymbol{x}]}_\sim$ hulga x võimsuseks. Erinevalt klassikalisest von Neumanni kardinaalarvude definitsioonist ei vaja kirjeldatud konstruktsioon valikuaksioomi, aga kasutab oluliselt regulaarsuse aksioomi. [Jec02, lk 65; Pro22, lk-d 909–910]

Meil läheb Tarski-Scotti võtet tarvis hoopis mujal, Lévy-Montague'i peegeldamisprintsiibi tõestamiseks.

II peatükk

Valemi tõkestamine ja absoluutsus. Laiend ZFC^+

Hulgateoreetiline väide φ on ZFC-*hulgateooriast sõltumatu*, kui $\mathsf{ZFC} \not\vdash \varphi$ ja $\mathsf{ZFC} \not\vdash \neg\varphi$. Ekvivalentselt võime öelda, et teooriad $\mathsf{ZFC} + \varphi$ ja $\mathsf{ZFC} + \neg\varphi$ on vastastikku süntaktiliselt mittevasturääkivad. Naiivses metateoorias tõestatakse niisugust sõltumatust *mudelite* abil [Pra04, lk 132]. Peaksime leidma mudelid M_φ ning $M_{\neg\varphi}$, kus piltlikult

$$\begin{cases} M_\varphi & \models \mathsf{ZFC}, \\ M_\varphi & \models \varphi \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} M_{\neg\varphi} & \models \mathsf{ZFC}, \\ M_{\neg\varphi} & \models \neg\varphi. \end{cases}$$

ZFC on hulgateooria, sestap võiksime proovida niisuguseid mudeleid leida teooriast endast. Peaksime otsima ZFC seest nii-öelda *miniversumeid*, mis rahuldaksid ZFC aksioome, kuid täiendavalt kehtiks neis veel lisatingimus φ või $\neg\varphi$.

Niisugune protseduur oleks aga vastuolus Gödeli teise mittetäielikkuse teoreemiga. ZFC on usutavasti rekursiivselt loetletav teooria, kusjuures Peano aritmeetikat etendab näiteks von Neumanni naturaalarvude hulk. Seetõttu ei suuda ZFC klassikalises mõttes väidet $\mathsf{Con}(\mathsf{ZFC})$ tõestada, kui ZFC on süntaktiliselt mittevasturääkiv.

Õnneks on kirjeldatud takistus teatud mõttes ületatav. Meie selgitame edasises järgmist meetodit.

1) Selle asemel, et tõestada teooria $\mathsf{ZFC} + \phi$ *üldist kodeeritud mittevasturääkivust*, tõestatakse *suhteline süntaktiline mittevasturääkivus*. Näitame, et kui teoorias ZFC pole vasturääkivust, ei saa vasturääkivust olla ka laiendis $\mathsf{ZFC} + \phi$. Muu seas Weaveri [Wea14,

lk 27] järgi defineerime selleks teatava vahelaiendi ZFC^+. Teoorias ZFC-pluss on juures konstantsümbol $\mathbf{M}$ ning loenduv kogus aksioome, mis väidavad midagi hulga $\mathbf{M}$ kohta.

2) Mõisted nagu $M_\phi \models \mathsf{ZFC}$ jätame defineerimata. Nende asemel kasutame *valemi tõkendi* mõistet $\phi|_{M}$. Intuitiivses tähenduses ütleb tõkend $\phi|_{M}$, kas ϕ kehtib, kui selle tähendus on tõkestatud konteksti M. Kui valemi semantiline sisu „heade“ klasside M puhul on alati üks ja seesama, öeldakse, et valem ϕ on heade klasside suhtes *absoluutne*.

Siin peatükis defineerime valemi tõkendi mõiste, paneme kokku teooria ZFC^+ ja uurime mõlema omadusi.

1. Valemi tõkestamine. Valemi absoluutsus kvaasimudeli suhtes

1.1. Tõkestamise ja epsilon-kvaasimudeli definitsioon

Kui tahame veenduda, et mingi klassi C korral valem φ kehtib, peame valemi sisu esmalt „tõlkima“ just vastava klassi konteksti. Selleks defineerime tõkendi, täpsemini *epsilontõkendi* ehk *epsilonahendi* mõiste. On võimalik uurida üldisemat tõkestamist [Jec02, lk 161], kuid meil pole selle järele tarvidust.

Metadefinitsioon II.1 (epsilontõkend, [Jec02, lk 161])**.** Valemi $\varphi \in \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$ *epsilontõkendiks* ehk *epsilonahendiks klassile* C (defineeriva valemiga $C[q]$) nimetatakse rekursiivsete asenduste teel saadavat valemit $\varphi|_{C}$, kus

a. kui φ on atomaarne, siis $\varphi|_{C}$ on lihtsalt valem φ ise, s.o $\varphi|_{C} :\doteq \varphi$;

b. tõkendi võtmine on lausearvutuse tehetega kooskõlas, s.o kui $\varphi \doteq \neg\phi$, siis $\varphi|_{C} :\doteq \neg\phi|_{C}$, kui $\varphi \doteq (\phi_1 \Rightarrow \phi_2)$, siis $\varphi|_{C} :\doteq (\phi_1|_{C} \Rightarrow \phi_2|_{C})$;

c. kvantorid tuleb asendada tõkestatud kvantoritega, s.o kui $\varphi \doteq \forall x(\phi[x])$, siis $\varphi|_{C} :\doteq$ $:\doteq \forall x((C[q/x] \Rightarrow \phi[x]|_{C}))$ ehk $\varphi|_{C} :\doteq \forall x \in C(\phi[x]|_{C})$.

Vajadusel tuleb @metadefinitsiooni @I.1 kasutades veenduda, et klassile ahendades ei teki vastuolu @loogilise valemi määratluses muutujatele tehtud kitsendustega. Vahetu kontroll näitab, et epsilontõkendi määratlus on korrektne ses tähenduses, et kooskõla teiste lausearvutuse tehete ning eksistentsiaalkvantori suhtes järeldub toodud nõuetest. Näiteks mittevälistava disjunktsiooni puhul

$$(\phi_1 \vee \phi_2)|_{C} \doteq ((\neg\phi_1 \Rightarrow \phi_2))|_{C} \doteq (\neg\phi_1|_{C} \Rightarrow \phi_2|_{C}) \doteq \phi_1|_{C} \vee \phi_2|_{C}.$$

Valemijärjendi Γ epsilonahendiks nimetame järjendit $\Gamma|_{\mathit{C}}$, kus kõik valemid on asendatud vastavate epsilontõkenditega. Tühja järjendi tõkendiks loeme tühja järjendit. Märgime, et kui klassi M põhimuutuja q ei esine antud valemijärjendis Γ vabalt, ei esine see muutuja vabalt ka tõkestatud järjendis $\Gamma|_{\mathit{M}}$.

Epsilontõkendi abil defineeritakse *epsilon-kvaasimudeli* mõiste.

Metadefinitsioon II.2 (epsilon-kvaasimudel, [Kun80, lk 112])**.** *Valemite metahulga* $\Psi \subseteq \subseteq \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$ *epsilon-kvaasimudeliks teooria* T *suhtes* nimetatakse klassi M, mispuhul iga valemi $\psi \in \Psi$ korral kehtib $\psi|_{\mathit{M}}$ teoorias T, s.o

$$\text{iga valemi } \psi \in \Psi \text{ korral } \mathit{T} \Vdash\, \vdash \psi|_{\mathit{M}}.$$

Ülemist kirjapilti tuleb mõista nii, et klassi M definitsioon on fikseeritud ning sedagi tohib kasutada sekventsi $\vdash \psi|_{\mathit{M}}$ tõestuses. (Vahel räägitakse *teooria* S *epsilon-kvaasimudelist (teoorias* T *või teooria* T *suhtes)*, kui valemite hulga Ψ rollis on teooria S omaaksioomid, nt [Kun80, lk 119].)

***Märkus* II.3.** Teoorial T lubame lahkneda teooriast ZFC kahel viisil.

a. Teoorias T võib olla konstantsümboleid, st $\mathtt{Cons}(\mathit{T}) \neq \varnothing$. Täpsemini lubame ülimalt ühe konstantsümboli lisamist, kuivõrd rohkemaks pole meil tarvidust.

b. Teooria T omaaksioomid võivad olla erinevad: neid võib olla asendatud, ära võetud või juurde lisatud. Nõuame, et omaaksioomid on tühja antetsedendiga. Võime üldisust kaotamata eeldada, et omaaksioomid on kõik kinnised valemid (vabade muutujatega valem ning selle universaalsulund on samaaegselt tuletatavad). Terutame, et T omaaksioomid tohivad sisaldada lisatud konstantsümbolit.

Niisugust teisendatud teooriat kutsume edasises ZFC *asendusteooriaks* või lihtsalt *asendusteooriaks*. Rõhutame, et @metadefinitsioonides @II.1 ja @II.2 võivad klasside C ning M kirjeldused sisaldada asendusteooria T konstantsümbolit. Rääkides teooriast $\mathit{T} \cap \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$, peame silmas teooria T seda osa, millel pole pistmist konstantsümboliga.

***Märkus* II.4.** Termini *epsilon-kvaasimudel* toome sisse täpsuse huvides. Mõistel *mudel* on mitu küllalt sarnast, kuid detailides erinevat tähendust, mõni neist vajab aksiomaatilise teooria eelnevat kodeerimist ning põhjalikku eeltööd. Meie epsilon-on rohkem tõestusteoreetilisemat laadi. Täiendsõna *epsilon-* viitab asjaolule, et definitsioon kasutab just epsilontõkendit, mitte mingit üldisemat valemi ahendit.

Piisavalt võimekas epsilon-kvaasimudel saab oma teooriaga hästi läbi. Kui lause on teoorias kindlatel eeldustel tuletatav, saab samas teoorias eelduste tõkenditest tõestada lause tõkendi.

Metateoreemiskeem II.1 (epsilon-kvaasimudeli korrektsus, [Kun13, lk 101])**.** *Las olla teooria T asendusteooria. Olgu φ ZFC-hulgateooria kinnine valem ning Γ ZFC-teooria kinniste valemite järjend, sealjuures $T \cap \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC}) \Vdash \Gamma \vdash \varphi$. Kasutagu sekventsi $\Gamma \vdash \varphi$ mingi tõestus τ teoorias $T \cap \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$ parasjagu omaaksioome, mille konsekvendid pärinevad metahulgast $\mathcal{A}_\tau \coloneqq \{\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n\} \subseteq \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$. Leidugu valemite metahulgal $\mathcal{A}_\tau$ epsilon-kvaasimudel M teooria T suhtes, kusjuures klass M olgu mittetühi teoorias T. Eeldame, et klassi M kirjeldus $M[q]$ ei kasuta kuskil indiviidmuutujaid, mis esinevad tõestuses τ.*

Sellisel juhul kehtib ka $T \Vdash \Gamma|_M \vdash \varphi|_M$.

Tõestus. Põhjendus käib struktuurse induktsiooniga mööda tõestuse τ tuletuspuud. Baasis vaadatakse puu juuri ehk aksioomide ahendeid. Eeldusena võetakse, et teoreem kehtib eelnevate tippude jaoks, sammus näidatakse, et tulemus kehtib siis ka käesoleva tipu korral. Tipust tippu liikumisel tuleb analüüsida, kuidas valemi tõkestamine suhestub tuletusreeglitega. Lausearvutusliku reegli analüüs on lihtsam kui predikaatarvutusliku reegli uurimine. Kvantoriga reegli käsitlemine on kergem, kui tõkestamine viib lokaalses mõttes konsekvendi nõrgestamiseni. Kitsendust klassimuutujate kohta kasutatakse selleks valemi ahend oleks ikka valem ning valemijärjendi ahend oleks valemijärjend. Samuti saame siis kitsendusega tuletusreegleid vabalt kasutada.

Täispikk tõestus on toodud lisas @3. ■

1.2. Valemi tähenduse invariantsus. Valemi absoluutsus

Eelmises jaotises sõnastasime valemi tõkendi mõiste. Tõkendit $\varphi|_M$ võib mõista kui teatavat valemi tähenduse ahendamist üldisemast kontekstist (klassis $\mathtt{U}$) kitsamale juhule, nimelt klassile M. Kui valemi tähendus teatud mõttes ei muutu, öeldakse, et *valemi φ tähendus on klassi M suhtes absoluutne* või lühidalt, *valem φ on klassi M suhtes absoluutne.*

Metadefinitsioon II.5 (valemi invariantsus, absoluutsus, [Kun80, lk 117])**.** Olgu $\varphi \in$ $\in \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$ ja vabad muutujad $\mathtt{Free}(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ (erijuhul neid polegi). Olgu C ja D klassid, kusjuures $C \subseteq D$. Las olla T asendusteooria.

a. Ütleme, et *valemi φ tähendus on klasside C ja D vahel invariantne (teoorias T)*, st *valem φ on $(C \leftrightarrow D)$-invariantne (teoorias T)*, kui

$$T \Vdash \vdash \forall x_1, \ldots, x_n \in C\big(\varphi[x_1, \ldots, x_n]|_C \Leftrightarrow \varphi[x_1, \ldots, x_n]|_D\big).$$

b. *Valemi φ tähendus on klassi $\mathcal{C}$ suhtes absoluutne (teoorias $\mathcal{T}$)*, eriti lühidalt *φ on $\mathcal{C}$-*
-absoluutne (teoorias $\mathcal{T}$), kui valem φ on $(\mathcal{C}\leftrightarrow\mathtt{U})$-invariantne (teoorias $\mathcal{T}$).

Sealjuures klassile $\mathtt{U}$ tõkestamine valemit sisuliselt ei muuda, kuivõrd ülimalt lisatakse valemisse tingimusi $x = x$, kus $x \in \mathtt{Indv}$ on indiviidmuutuja. Klasside $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ definitsioonid võivad sisaldada asendusteooria $\mathcal{T}$ konstantsümbolit. Sisalduvus $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ olgu tõestatav teoorias $\mathcal{T}$.

Juba süntaktiliselt lihtne valem ei pruugi olla lihtsa hulga suhtes absoluutne, isegi mitte täisteoorias ZFC. Näiteks $\varphi[y] \doteq \forall x(x \notin y)$, mis määrab üheselt tühja hulga $y = \varnothing$, pole absoluutne hulga $\mathcal{C} \coloneqq C \coloneqq \{\{\varnothing\}\}$ suhtes. Hulga C arvates on tühi hulk ka $\{\varnothing\}$, kuna hulgas C pole ühtegi elementi, mis oleks omakorda hulga $\{\varnothing\}$ elemendiks. Pole raske tuua näidet, kus mõne hulga arvates leidub rohkem kui üks „mittestandardset“ tühja hulka. [Kun80, lk 118] Hiljem näeme, et transitiivse klassi või piisavalt võimeka transitiivse epsilon-kvaasimudeli $\mathcal{C}$ korral on olukord parem.

Valemi $(\mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D})$-invariantsuseks piisab näidata invariantsust ükskõik missuguse sellega ekvivalentse valemi jaoks, kui klassid $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ on küllaldaselt võimekad.

Metalemmaskeem II.2 ([Kun80, lk 119])**.** *Olgu teoorias $\mathcal{T} \cap \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$ tõestatav ekvivalentsi $\varphi \Leftrightarrow \psi$ universaalsulund, st*

$$\mathcal{T} \cap \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC}) \Vdash\vdash {}^{\forall x_1,\ldots,x_n}_{\forall y_1,\ldots,y_k}\big(\varphi[x_1,\ldots,x_n,y_{i_1},\ldots,y_{i_a}](y_1,\ldots,y_k) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \psi[y_1,\ldots,y_k,x_{j_1},\ldots,x_{j_b}](x_1,\ldots,x_n)\big)$$

(kus kõik vabad muutujad on näidatud ning indiviidmuutujate metahulgad ei lõiku, $\{x_1,\ldots,x_n\} \cap \cap \{y_1,\ldots,y_k\} = \varnothing$, $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_a \leqslant k \geqslant 0$, $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_b \leqslant n \geqslant 0$). Olgu $\varnothing \neq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ sulundatud ekvivalentsi mingis tõestuses τ kasutatud teooria $\mathcal{T} \cap \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$ omaaksioomide $\mathcal{A}_\tau$ epsilon-kvaasimudelid teoorias $\mathcal{T}$. Siis teoorias $\mathcal{T}$ on valemid φ ja ψ samaaegselt $(\mathcal{C}\leftrightarrow\mathcal{D})$-invariantsed.

Selgitame kirjapilti, kus valemi <u>kõik</u> vabad muutujad on nurksulgudes näidatud, kuid ümarsulgudesse on pandud täiendavad indiviidmuutujad. Niimoodi tagame, et ümarsulu muutujad ei esine valemis seotult. Võinuksime kirjutada pikemalt, et

$$\varphi[x_1,\ldots,x_n,y_{i_1},\ldots,y_{i_a},\hat{y_1},\ldots,\hat{y_k}](y_1,\ldots,y_k),$$

kuid peaksime ikkagi nõudma, et kõik vabad muutujad on näidatud. Klassi $\mathcal{C}$ mittetühjus olgu tõestatav teoorias $\mathcal{T}$.

Tõestus. Vajadusel klasside $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ indiviidmuutujaid ümber nimetades on täidetud kõik

@metateoreemiskeemi @II.1 eeldused. Nimetatud teoreemiskeemi kahekordsel rakendamisel saame teoorias T tõestused sekventsidele

$$\vdash {}_{\forall y_1,\dots,y_k\in C}^{\forall x_1,\dots,x_n\in C}\big(\varphi[x_1,\dots,x_n,y_{i_1},\dots,y_{i_a}](y_1,\dots,y_k)|_C \Leftrightarrow \Leftrightarrow \psi[y_1,\dots,y_k,x_{j_1},\dots,x_{j_b}](x_1,\dots,x_n)|_C\big), \tag{$*$}$$

$$\vdash {}_{\forall y_1,\dots,y_k\in D}^{\forall x_1,\dots,x_n\in D}\big(\varphi[x_1,\dots,x_n,y_{i_1},\dots,y_{i_a}](y_1,\dots,y_k)|_D \Leftrightarrow \Leftrightarrow \psi[y_1,\dots,y_k,x_{j_1},\dots,x_{j_b}](x_1,\dots,x_n)|_D\big). \tag{$\dagger$}$$

Sisalduvuse $C\subseteq D$ alusel seosest @($\dagger$)

$$\vdash {}_{\forall y_1,\dots,y_k\in C}^{\forall x_1,\dots,x_n\in C}\big(\varphi[x_1,\dots,x_n,y_{i_1},\dots,y_{i_a}](y_1,\dots,y_k)|_D \Leftrightarrow \Leftrightarrow \psi[y_1,\dots,y_k,x_{j_1},\dots,x_{j_b}](x_1,\dots,x_n)|_D\big). \tag{$\ddagger$}$$

Oletame, et valem φ on ($C\leftrightarrow D$)-invariantne, sidudes kokku veel $\varphi|_C$ ja $\varphi|_D$:

$$\vdash {}_{\forall y_{i_1},\dots,y_{i_a}\in C}^{\forall x_1,\dots,x_n\in C}\big(\varphi[x_1,\dots,x_n,y_{i_1},\dots,y_{i_a}](y_1,\dots,y_k)|_C \Leftrightarrow \Leftrightarrow \varphi[x_1,\dots,x_n,y_{i_1},\dots,y_{i_a}](y_1,\dots,y_k)|_D\big). \tag{$\star$}$$

Ekvivalentsi jaoks kehtib asendamisomadus, mida kasutame edasises tõestuseta. Saame järgmised üleminekud.

$$\vdash {}_{\forall y_{i_1},\dots,y_{i_a}\in C}^{\forall x_1,\dots,x_n\in C}\big(\varphi[x_1,\dots,x_n,y_{i_1},\dots,y_{i_a}](y_1,\dots,y_k)|_C \Leftrightarrow \Leftrightarrow \varphi[x_1,\dots,x_n,y_{i_1},\dots,y_{i_a}](y_1,\dots,y_k)|_D\big) \tag{$\star$ tõttu}$$

$$\vdash {}_{\forall y_1,\dots,y_k\in C}^{\forall x_1,\dots,x_n\in C}\big(\psi[y_1,\dots,y_k,x_{j_1},\dots,x_{j_b}](x_1,\dots,x_n)|_C \Leftrightarrow \Leftrightarrow \varphi[x_1,\dots,x_n,y_{i_1},\dots,y_{i_a}](y_1,\dots,y_k)|_D\big) \tag{$*$ tõttu}$$

$$\vdash {}_{\forall y_1,\dots,y_k\in C}^{\forall x_{j_1},\dots,x_{j_b}\in C}\big(\psi[y_1,\dots,y_k,x_{j_1},\dots,x_{j_b}](x_1,\dots,x_n)|_C \Leftrightarrow \Leftrightarrow \psi[y_1,\dots,y_k,x_{j_1},\dots,x_{j_b}](x_1,\dots,x_n)|_D\big) \tag{$\ddagger$ tõttu}$$

Täiesti analoogiliselt tehakse vastupidises suund, kus valem ψ on ($C\leftrightarrow D$)-invariantne. ■

Lausearvutuslikud tehted säilitavad ($C \leftrightarrow D$)-invariantsust. Meil ei lähe tühjale klassile ahendamist niikuinii kunagi tarvis, seega eeldame kahes järgmises lauseskeemis, et klass C on mittetühi, kuigi tõestusteks mittetühjuse nõuet tarvis pole (invariantsuse sekvents algab universaalkvantoritega, tõestustes ei rakendata metateoreemiskeemi @II.1).

Lemmaskeem II.3 ([Kun80, lk 118])**.** *Olgu* $(\varnothing \neq)\,\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ *klassid. Valemid*

$$\varphi[x_1, \ldots, x_n](y_1, \ldots, y_k), \quad \psi[y_1, \ldots, y_k](x_1, \ldots, x_n) \in \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$$

olgu $(\mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D})$*-invariantsed. Siis ka valemid* $\neg\varphi$ *ja* $(\varphi \Rightarrow \psi)$ *on* $(\mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D})$*-invariantsed.*

Tõestus. Olgu $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_k \in \mathcal{C}$ fikseeritud. Lubame järgnevas vabamat kirjapilti (jättes universaalkvantorid ning esinevad muutujad märkimata).

- Predikaatarvutuses kehtib samaväärsus $\varphi|_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow \varphi|_{\mathcal{D}} \equiv \neg(\varphi|_{\mathcal{C}}) \Leftrightarrow \neg(\varphi|_{\mathcal{D}})$. Tõkendi kooskõlalisusest eitusega johtuvad $\neg(\varphi|_{\mathcal{C}}) \doteq (\neg\varphi)|_{\mathcal{C}}$ ja $\neg(\varphi|_{\mathcal{D}}) \doteq (\neg\varphi)|_{\mathcal{D}}$, mistõttu ka $(\neg\varphi)|_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow (\neg\varphi)|_{\mathcal{D}}$. Eitusega korras.
- Predikaatarvutuse järeldumisest

$$(\varphi|_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow \varphi|_{\mathcal{D}}) \wedge (\psi|_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow \psi|_{\mathcal{D}}) \vDash (\varphi|_{\mathcal{C}} \Rightarrow \psi|_{\mathcal{C}}) \Leftrightarrow (\varphi|_{\mathcal{D}} \Rightarrow \psi|_{\mathcal{D}}).$$

  Tõkendi kooskõlalisusest implikatsiooniga tulenevad $(\varphi|_{\mathcal{C}} \Rightarrow \psi|_{\mathcal{C}}) \doteq (\varphi \Rightarrow \psi)|_{\mathcal{C}}$ ning $(\varphi|_{\mathcal{D}} \Rightarrow \psi|_{\mathcal{D}}) \doteq (\varphi \Rightarrow \psi)|_{\mathcal{D}}$, millest $(\varphi \Rightarrow \varphi)|_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi)|_{\mathcal{D}}$. Implikatsiooniga korras. ■

Tõkestatud kvantorid säilitavad $(\mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D})$-invariantsust, kui klass $\mathcal{C}$ on transitiivne.

Lemmaskeem II.4 ([Kun80, lk 118])**.** *Kui klass* $(\varnothing \neq)\,\mathcal{C}$ *on transitiivne,* $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ *ja valem* $\varphi[x_1, \ldots, x_n](x, y) \in \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$ *on* $(\mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D})$*-invariantne asendusteoorias* $\mathcal{T}$*, siis ka valem*

$$\exists x \in y(\varphi[x_1, \ldots, x_n](x, y))$$

on $(\mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D})$*-invariantne asendusteoorias* $\mathcal{T}$*. Siin* $\mathtt{Free}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n, x, y\}$*.*

Tõestus. Olgu $y, x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{C}$ suvalised. Lubades vabamat kirjaviisi, saame järgmise ekvivalentside ahela:

$$\begin{aligned}
(\exists x \in y\varphi[x_1,\dots,x_n](x,y))|_{\mathcal{C}} &\Leftrightarrow \exists x\big(x \in y \wedge x \in \mathcal{C} \wedge \varphi[x_1,\dots,x_n](x,y)|_{\mathcal{C}}\big) \Leftrightarrow && \text{(tõkendi def)}\\
&\Leftrightarrow \exists x\big(x \in y \wedge \varphi[x_1,\dots,x_n](x,y)|_{\mathcal{C}}\big) \Leftrightarrow && (\mathcal{C}\text{ trans., } y \in \mathcal{C})\\
&\Leftrightarrow \exists x\big(x \in y \wedge \varphi[x_1,\dots,x_n](x,y)|_{\mathcal{D}}\big) \Leftrightarrow && ((\mathcal{C}\leftrightarrow\mathcal{D})\text{-invar.})\\
&\Leftrightarrow \exists x\big(x \in y \wedge x \in \mathcal{D} \wedge \varphi[x_1,\dots,x_n](x,y)|_{\mathcal{D}}\big) \Leftrightarrow && \\
& && (\mathcal{C}\text{ trans., } y \in \mathcal{C},\ \mathcal{C} \subseteq \mathcal{D})\\
&\Leftrightarrow (\exists x \in y\varphi[x_1,\dots,x_n](x,y))|_{\mathcal{D}}. && \text{(tõkendi def)}
\end{aligned}$$

Rõhutame, et vabu muutujaid $x_1,\dots,x_n$ ei pruugi üldse olla, mis on kodeeritud juhuga $n = 0$. ■

1.3. Δ_0- ning Δ_0^T-valemid. Hulgateooria valemite Lévy hierarhia

ZFC keeles nimetatakse valemit Δ_0-*valemiks*, kui kõik valemis esinevad kvantorid on tõkestatud (kvantorid võivad üldse puududa).

Metadefinitsioon II.6 (Δ_0-valem, [Kun80, lk 118])**.** ZFC-hulgateooria valemit nimetame Δ_0-*valemiks*, kui see on saadav järgmiselt.

a. Kõik atomaarsed valemid on Δ_0-valemid.

b. Δ_0-valemite hulk on kinnine lausearvutuse tehete suhtes.

c. Δ_0-valemite hulk on kinnine tõkestatud kvantorite suhtes. Kui $\varphi(x,y)$ on Δ_0-valem, $x, y \in \mathtt{Indv}$ on indiviidmuutujad, siis $\forall x((x \in y \Rightarrow \varphi(x,y)))$ on Δ_0-valem, s.o $\forall x \in$ $\in y(\varphi(x,y))$ on Δ_0-valem.

Δ_0-valemitest pannakse kokku *Lévy süntaktiline hierarhia.*

Metadefinitsioon II.7 (hulgateooria valemite Lévy süntaktiline hierarhia, [Hab22])**.** Defineerime rekursiivselt valemite metahulkade hierarhiad

a. $\Sigma_0 \coloneqq \Delta_0$ ja $\Pi_0 \coloneqq \Delta_0$;

b. $\varphi \in \Sigma_{n+1}$ parajasti siis, kui $\varphi \doteq \exists\vec{x}(\psi[\vec{x}])$, kus $\psi[\vec{x}] \in \Pi_n$;

c. $\varphi \in \Pi_{n+1}$ parajasti siis, kui $\varphi \doteq \forall\vec{x}(\psi[\vec{x}])$, kus $\psi[\vec{x}] \in \Sigma_n$.

Öeldakse, et niimoodi jõutakse *hulgateooria valemite (süntaktilise) Lévy hierarhiani.* (Vektortähistusega mõeldakse, et kvantoreid võib olla rohkem kui üks.)

Veendumaks, missugusesse astmesse valem kuulub, piisab valemi süntaktilisest uurimisest. Selles tähenduses on @metadefinitsioon @II.7 lokaalne. Praktikas kasutatakse rohkem niisugust Lévy hierarhiat, milles kuuluvust hinnatakse ekvivalentsi täpsuseni [Jec02, lk-d 183–184; Hab22].

Metadefinitsioon II.8 (hulgateooria valemite Lévy hierarhia, [Jec02, lk-d 183–184; Hab22])**.** Olgu T asendusteooria. Ütleme, et ZFC-hulgateooria *valem* φ *on* Γ_n^{T}, kus Γ on Σ või Π, kui teoorias $\mathsf{T} \cap \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$ on tuletatav valemi φ ekvivalents Γ_n valemiga universaalsulundi mõttes. See tähendab, kui kehtib

$$\mathsf{T} \cap \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC}) \Vdash \vdash {}^{\forall x_1,\dots,x_n}_{\forall y_1,\dots,y_k}\big(\varphi[x_1,\dots,x_n,y_{i_1},\dots,y_{i_a}](y_1,\dots,y_k) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \psi[y_1,\dots,y_k,x_{j_1},\dots,x_{j_b}](x_1,\dots,x_n)\big)$$

mingisuguse $\psi \in \Gamma_n$ korral (kusjuures kõik vabad muutujad on näidatud ning $\{x_1,\dots,x_n\} \cap \cap \{y_1,\dots,y_k\} = \varnothing$, $i_1 < \dots < i_a \leqslant k \geqslant 0$, $j_1 < \dots < j_b \leqslant n \geqslant 0$). Eraldi defineeritakse

$$\Delta_n^{\mathsf{T}} \coloneqq \Sigma_n^{\mathsf{T}} \cap \Pi_n^{\mathsf{T}}.$$

Tavaliselt räägitakse vabamalt, et *omadus on* Γ_n^{T}, kus Γ on Σ, Π või Δ, mõeldes sellega, et omadust väljendav valem φ on Γ_n^{T}-valem [Jec02, lk-d 183–184].

Meil läheb edasises tarvis just Δ_0^{T}-valemeid. Rõhutame, et omaaksioome ei pruugi üldse olla, mispuhul saame $\Delta_0^{\varnothing}$-valemid. Need on valemid, mis on ekvivalentsed Δ_0-valemiga juba võrdusega predikaatarvutuse raames. Δ_0- ja Δ_0^{T}-valemite olulisus seisneb teoreemiskeemis @II.5 ning metateoreemiskeemis @II.6.

Teoreemiskeem II.5 (Δ_0-valemite absoluutsus transitiivse klassi suhtes, [Kun80, lk 119])**.** *Olgu* $(\varnothing \neq)\mathcal{C}$ *transitiivne klass asendusteoorias* T*. Iga* Δ_0*-valem* $\varphi[x_1,\dots,x_n]$ *on absoluutne klassi* $\mathcal{C}$ *suhtes ehk* $(\mathcal{C} \leftrightarrow \mathtt{U})$*-invariantne asendusteoorias* T*. Tähendab, sel juhul*

$$\forall x_1,\dots,x_n \in \mathcal{C}(\varphi[x_1,\dots,x_n]|_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow \varphi[x_1,\dots,x_n])$$

asendusteoorias T.

Tõestus. Tõestame tulemuse struktuurse induktsiooniga Δ_0-valemi definitsiooni mööda. Olgu $x_1,\dots,x_n \in \mathcal{C}$ suvalised ning lühiduse huvides jätame sulgudes need indiviidmuutujad märkimata.

- Atomaarse valemi φ korral ilmne, sest tõkend ühtib valemi endaga.
- Olgu nüüd $\varphi \doteq \neg\psi$ ning tulemus valemi ψ jaoks teada. Rakendub lemmaskeem @II.3 (juhul $D \coloneqq \mathtt{U}$. Kokkuvõttes $\varphi \Leftrightarrow \varphi|_C$.
- Kehtigu võrdus $\varphi \doteq (\psi_1 \Rightarrow \psi_2)$ ning olgu tulemus valemite ψ_1 ning ψ_2 jaoks teada. Rakendub lemmaskeem @II.3 (juhul $D \coloneqq \mathtt{U}$). Kokkuvõttes $\varphi \Leftrightarrow \varphi|_C$.
- Olgu $\varphi \doteq \forall x \in y(\psi(x, y))$, kus y on indiviidmuutuja. Samaväärselt $\varphi \equiv \neg\exists x \in$ $\in y(\neg\psi(x, y))$. Tulemus järeldub juba varasem vaadeldud induktsioonisammudest ning lemmaskeemist @II.4.

Teoreemiskeem on tõestatud. ■

Metateoreemiskeem II.6 (Δ_0^T-valemite absoluutsus transitiivse epsilon-kvaasimudeli suhtes, [Kun80, lk 119]). *Olgu T asendusteooria. Las olla $\varphi[x_1, \ldots, x_n] \in \Delta_0^T$, kusjuures kasutagu sealse ekvivalentsi $\varphi \Leftrightarrow \psi$, kus $\psi \in \Delta_0$, mingisugune universaalsulundi tõestus τ teoorias $T \cap$ $\cap$ $\mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$ parajasti omaaksioome $\mathcal{A}_\tau \subseteq \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$. Kui klass $C \neq \varnothing$ on transitiivne ning lisaks teooria T suhtes metahulga $\mathcal{A}_\tau$ epsilon-kvaasimudel, siis valem $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ on klassi C suhtes absoluutne ehk $(C \leftrightarrow \mathtt{U})$-invariantne teoorias T. See tähendab, sel juhul*

$$\forall x_1, \ldots, \in C(\varphi[x_1, \ldots, x_n]|_C \Leftrightarrow \varphi[x_1, \ldots, x_n])$$

teoorias T.

Tõestus. Vajadusel klassi C muutujaid ümber nimetades võime eeldada, et indiviidmuutujatega ebasobivaid kattuvusi pole. Sisalduvus $C \subseteq \mathtt{U}$ ilmne. Eelduse järgi on φ teoorias T ekvivalentne Δ_0-valemiga. Δ_0-valemid olid teoorias T transitiivse klassi C suhtes absoluutsed teoreemiskeemi @II.5 alusel. Vastav absoluutsus kandub üle valemile φ tänu metalemmaskeemile @II.2, võttes sealses tähistuses $D \coloneqq \mathtt{U}$. Tulemus on tõestatud. ■

1.4. Hulgateooria põhikonstruktsioonide absoluutsus või mitteabsoluutsus

Oleme tõestanud, et Δ_0^T-tüüpi omadused on „head“ ehk absoluutsed. Täpsemini, kui klass $M \neq$ $\neq \varnothing$ on teoorias T transitiivne ning piisavalt võimekas epsilon-kvaasimudel, siis omadus klassi M sees tähendab sama nagu universumis $\mathtt{U}$. Siin jaotises näitame, et arvestatav osa hulgateooria põhikonstruktsioonidest on Δ_0^T-valemiga väljendatavad, seega metateoreemiskeemi @II.6 alusel head ehk absoluutsed.

Lepime kokku järgmises tähistuses [Kun13, lk 17; Lév74]:

- ZF tähendab endiselt teooriat ZFC, kust on eemaldatud valikuaksioom;
- Z tähendab teooriat ZF, kust on eemaldatud asendusaksioomiskeem;
- $\mathsf{T} - \mathsf{S}$ on teooria T, kuid eraldamisaksioomiskeemita;
- $\mathsf{T} - \mathsf{U}$ on teooria T ühendi moodustamise aksioomita;
- $\mathsf{T} - \mathsf{P}$ on teooria T, kuid potentshulga leidumise aksioomita;
- $\mathsf{T} - \mathsf{Inf}$ on teooria T, aga lõpmatu hulga leidumise aksioomita;
- T^- on teooria T, ent regulaarsuse aksioomita;
- $\varnothing$ on nüüdki teooriat, kus omaaksioome pole, st võrdusega predikaatarvutust.

Järgmine teoreemiskeem annab paljude (kuigi mitte kõigi) hulgateooria aluskonstruktsioonide absoluutsuse piisavalt heade epsilon-kvaasimudelite suhtes. Teoreemiskeemis toodud teooriad ei pruugi olla „minimaalse tugevusega“, meile pole see oluline.

Metateoreemiskeem II.7 (hulgateooria põhikonstruktsioonide absoluutsus piisavate epsilon-kvaasimudelite suhtes, [Jec02, lk-d 164–165; Kun80, lk-d 119–120, 121, 126; Kun13, lk-d 96, 118–119])**.** *Olgu T asendusteooria, mida täpsustame allpool. Toodavad valemid (omadused, objektidega võrdumised) on väljendatavad Δ_0^{T}-valemiga ehk on teoorias $\mathsf{T} \cap \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$ ekvivalentsed Δ_0-valemiga. Teisisõnu – metateoreemiskeemi @I.6 valguses – on need valemid (omadused, objektiga võrdumised) teoorias T absoluutsed valemite metahulga $\mathtt{Ax}(\mathsf{T}) \cap \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$ suvalise transitiivse mittetühja epsilon-kvaasimudeli $\mathtt{M}$ suhtes.*

(1) *Teoorias $\mathsf{T} = \varnothing$:* i) *$x \in y$ ja $x \notin y$;* ii) *$x = y$ ja $x \neq y$;* iii) *$x \subseteq y$;* iv) *$x = \varnothing$;* v) *„x on* transitiivne“.

(2) *Teoorias $\mathsf{T} = \mathsf{Z}^- - \mathsf{S} - \mathsf{U} - \mathsf{P} - \mathsf{Inf}$:* i) *$x = \{u, v\}$ ja $x = \{u\}$;* ii) *$x = (u, v)$.*

(3) *Teoorias $\mathsf{T} = \mathsf{Z}^- - \mathsf{U} - \mathsf{P} - \mathsf{Inf}$:* i) *$Z = X \cap Y$;* ii) *$Z = X \setminus Y$ ja $Z = X'_Y$ (täiend hulga Y suhtes).*

(4) *Teoorias $\mathsf{T} = \mathsf{Z}^- - \mathsf{S} - \mathsf{P} - \mathsf{Inf}$:* i) *$Z = \bigcup X$;* ii) *$Z = X^+ = X \cup \{X\}$;* iii) *$Z = X \triangle Y$,* iv) *$Z = \bigcup\bigcup X$.*

(5) *Teoorias $\mathsf{T} = \mathsf{Z}^- - \mathsf{Inf}$:* i) *$Z = X \times Y$;* ii) *$Z = \operatorname{dom} R$ ja $Z = \operatorname{ran} R$;* iii) *„R on* seos“ *ja „f on* funktsioon“*;* iv) *$x \mathrel{R} y$ ja $y = f(x)$; $S = R|_X$ ja $g = f|_X$ (seose, funktsiooni ahendid hulgale X);* v) *$Z = R^{-1}(Y)$ (seose või funktsiooni originaal hulgast Y);* vi) „seos

R on (ir)refleksiivne/(anti-, a)sümmeetriline/transitiivne (hulgal X)“*;* vii) „R on osalise järjestuse seos / ekvivalentsiseos (hulga X suhtes)“*;* viii) „ξ on hulgas X (rangelt) R-minimaalne/-maksimaalne/-vähim/-suurim element“*;* ix) „f on injektiivne“, „f on sürjektiivne (hulga Y suhtes)“ *ja* „f on bijektiivne (hulga Y suhtes)“.

(6) *Teoorias* $\mathsf{T} = \mathsf{Z} - \mathsf{P}$*:* i) „$x$ on ordinaalarv“*;* ii) „x on järgordinaalarv“ *ja* „x on piirordinaalarv“*;* iii) „x on (von Neumanni) naturaalarv“*;* iv) $x = \omega$.

(7) *Teoorias* $\mathsf{T} = \mathsf{Z}$*:* „x on lõplik“.

Loomulikult jäävad metateoreemiskeemi @II.6 järeldused kehtima, kui võtta tugevam asendusteooria $\mathsf{T}' \supseteq \mathsf{T}$, nõudes üksnes, et klass M on valemite metahulga $\mathtt{Ax}(\mathsf{T}) \cap \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$ epsilon-kvaasimudel teoorias T'. Rakendustes kasutame kõige sagedamini olukorda, kus $\mathsf{T}' := \mathsf{ZFC}^+$. Praeguses sõnastuses on ühisosa võtmine valemite metahulgaga $\mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$ üleliigne, sest $\mathtt{Form}(\mathsf{T}) = \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$. Üldistuses teooria T' jaoks on kitsendus oluline, sest asendusteooria T' võib sisaldada konstantsümbolit.

Tõestus. Tõestused on küllalt sarnased. Vastav valem (omadus, objektiga võrdumine) tuleb teooria piirangute raames esitada ekvivalentse Δ_0-valemiga. Kuna ekvivalentsid on usutavalt tõesed, esitame need pikema tõestuseta. Kirjutame mõne juhu jaoks välja Δ_0-valemi või anname olulise vaheidee.

(1) Teooria $\mathsf{T} = \varnothing$

iv) Tühjaks hulgaks olemine $x = \varnothing$ oli definitsiooni järgi $\forall y (y \notin x)$, mis pole Δ_0-valem. Küll aga on tegu $\Delta_0^{\varnothing}$-valemiga, sest võrdusega predikaatarvutuses

$$\forall y (y \notin x) \Leftrightarrow \forall y \in x (y \neq y).$$

(2) Teooria $\mathsf{T} = \mathsf{Z}^- - \mathsf{S} - \mathsf{P} - \mathsf{Inf}$

i) Sellises teoorias on paari leidumine ühese objektina tõestatav. Sealjuures on oluline, et hulgapaari moodustamise aksioomis on ekvivalents, mitte implikatsioon, sest eraldamisaksioomiskeemi teooriale T seatud piirangu tõttu kasutada ei tohi. Paariks olemine $x = \{u, v\}$ tähendab, et

$$u \in x \wedge v \in x \wedge \forall y \in x (y = u \vee y = v),$$

mis on Δ_0-valem.

ii) Järjestatud paariks olemine $x = (u, v)$ oli defineeritud Kuratowski järgi, st $x = \{\{u\}, \{u, v\}\}$ ehk see on avaldatav kujul

$$\exists y \in x(y = \{u\}) \wedge \exists z \in x(z = \{u, v\}) \wedge \forall w \in x(w = \{u\} \vee w = \{u, v\}),$$

mis on taas Δ_0-valem.

(5) Teooria $\mathsf{T} = \mathsf{Z}^- - \mathsf{Inf}$

Otsekorrutis on vahetum. Teiste jaoks on kasulik esimese vahesammuna tõestada, et $z \in \operatorname{dom} R$ ja $z \in \operatorname{ran} R$ on absoluutsed. Rõhutame, et siin me ei nõua, et R oleks tingimata seos, kuid kui R on seos, peavad tähendused kattuma. Võtame, et

$$z \in \operatorname{dom} R \Leftrightarrow \exists a \in R \exists b \in a \exists \alpha \in \beta(a = (z, \alpha)),$$
$$z \in \operatorname{ran} R \Leftrightarrow \exists a \in R \exists b \in a \exists c \in b(b = \{c\} \wedge a = (c, z)).$$

Teise, eelmisest sõltumatu vahesammuna märgime, et kui φ on Δ_0^{T}-valem, siis kõik neli kombinatsiooni $(\forall, \exists z \in \operatorname{dom} R, \operatorname{ran} R)\varphi$ on absoluutsed. Tõepoolest,

$$(\forall z \in \operatorname{dom} R)\varphi \Leftrightarrow \forall x \in R \forall y \in x \forall z \in y \forall u \in y(x = (z, u) \Rightarrow \varphi),$$
$$(\exists z \in \operatorname{dom} R)\varphi \Leftrightarrow \neg((\forall z \in \operatorname{dom} R)\neg\varphi),$$
$$(\forall z \in \operatorname{ran} R)\varphi \Leftrightarrow \forall x \in R \forall y \in x \forall z \in y \forall u \in y(x = (u, z) \Rightarrow \varphi),$$
$$(\exists z \in \operatorname{ran} R)\varphi \Leftrightarrow \neg((\forall z \in \operatorname{ran} R)\neg\varphi).$$

(Rõhutame, et teises vahesammus ei saa absoluutsuseks kohe rakendada tulemusi $z \in \operatorname{dom} R$ ja $z \in \operatorname{ran} R$ jaoks rakendada, sest otseselt poleks kombinatsioonid $(\forall, \exists z \in \operatorname{dom} R, \operatorname{ran} R)\varphi$ varasemas mõttes ahendid indiviidmuutujaile. Tähendab, lemmaskeemid @II.3 ega @II.4 poleks otse kasutatavad.)

Antud alampunkti ülejäänud väljendused on vahesammude abiga juba kergemad. Näiteks

ii) $Z = \operatorname{dom} R \Leftrightarrow \forall z \in Z(z \in \operatorname{dom} R) \wedge (\forall x \in \operatorname{dom} R)(x \in Z)$.

(6) Teooria $\mathsf{T} = \mathsf{Z} - \mathsf{P}$

i) Lause @I.13 järgi on ordinaalarv parajasti selline transitiivne hulk, mille kõik elemendid on samuti transitiivsed.

iii) Esitada naturaalarvuks olemine piirordinaalarvu mõiste kaudu, vt @klasside osa valemit $\mathcal{N}[y]$.

iv) Kasutada piirordinaalarvu mõistet ning eelmise punkti naturaalarvuks olemise mõistet.

(7) Teooria $\mathsf{T} = \mathsf{Z}$

Lõplikkuse-osa tõestame pärast metalemmaskeemi @II.8. ■

Lõplikkuse absoluutsuse tõestamiseks kasutame

metalemmaskeemi II.8 ([Kun80, lk-d 126–127]). *Olgu $\mathsf{M} \neq \varnothing$ metahulga $\mathtt{Ax}(\mathsf{Z})$ transitiivne epsilon-kvaasimudel teoorias $\mathsf{T} \supseteq \mathsf{Z}$. Kehtivad kaks järgmist väidet:*

(a) *kui $x \subseteq \mathsf{M}$ on lõplik, siis $x \in \mathsf{M}$,*

(b) *kui $f\colon n \to \mathsf{M}$, kus $n \in \omega$, siis $f \in \mathsf{M}$.*

Tõestus. (a) Olgu $x \subseteq \mathsf{M}$ bijektsioonis naturaalarvuga $n \in \omega$. Kui $n = \varnothing$, siis $x = \varnothing$. Et $x = \varnothing$ on klassi M suhtes absoluutne, siis ka klassi M arvates $x = \varnothing$. Teooria Z on enam kui piisav näitamaks, et $\exists! y(y = \varnothing)$, sestap ka $\exists! y \in \mathsf{M}(y = \varnothing)$, kuna M on teooria Z mittetühi epsilon-kvaasimudel. Nõnda $x = \varnothing \in \mathsf{M}$. Edasi naturaalarvulise induktsiooniga (teooria Z on selleks piisav). Oletame, et mingi n jaoks on tulemus teada. Kui $x \subseteq \mathsf{M}$, $x \sim n^{+}$, siis $x' \coloneqq x \setminus \{z\} \sim n$ teatava $z \in x \subseteq \mathsf{M}$ korral. Induktsiooni eeldusest $x' \in \mathsf{M}$, sest $x' \subseteq \mathsf{M}$. Teooria Z tõestab, et hulk $x = x' \cup \{z\}$ leidub. Epsilon-kvaasimudeli eeldusest, ühendiks ja paariks olemise absoluutsusest, kuivõrd $x', z \in \mathsf{M}$, siis ka $x = x' \cup \{z\} \in \mathsf{M}$.

(b) Kui $f\colon n \to \mathsf{M}$, siis $f \subseteq n \times M$, kus $M \subseteq \mathsf{M}$ on lõplik. Osa @(a) järgi $M \in \mathsf{M}$. Teooria Z tõestab naturaalarvude hulga ω leidumise, transitiivsusest ja absoluutsusest $\omega \subseteq \mathsf{M}$ ja naturaalarvuks olemine on absoluutne. Sestap $n \in \mathsf{M}$. Teooria Z tõestab otsekorrutise leidumise $n \times M$. Sisalduvustest $n, M \in \mathsf{M}$ ning otsekorrutise absoluutsusest $n \times M \in \mathsf{M}$. Alamhulgalisuse absoluutsusest ja transitiivsusest seega $f \subseteq n \times M \subseteq \mathsf{M}$, osast @(a) kokkuvõttes $f \in \mathsf{M}$, sest f on lõplik. ■

@Metateoreemi II.7 osa @(7) tõestus. Olgu $\mathsf{M} \neq \varnothing$ teooria Z epsilon-kvaasimudel teoorias $\mathsf{T} \supseteq \mathsf{Z}$. Teatavasti

$$„x \text{ on lõplik“} \Leftrightarrow \exists n \exists f \overbrace{(„n \text{ on naturaalarv“} \wedge „f\colon n \to x \text{ on bijektsioon“})}^{\psi(f,n,x) :\doteq}.$$

Tähistame parempoolset valemit kui $\exists n \exists f \psi(f, n, x)$. Siin on kaks tõkestamata kvantorit, seega peame veel vaeva nägema. Absoluutsuseks tuleks näidata, et

$$\forall x \in M \qquad (\exists n \in M \exists f \in M \psi(f,n,x)|_M \Leftrightarrow \exists n \exists f \psi(f,n,x)).$$

Arvestades valemi $\psi(f,n,x)$ absoluutsust klassi M suhtes, piisab näidata, et

$$\forall x \in M \qquad (\exists n \in M \exists f \in M \psi(f,n,x) \Leftrightarrow \exists n \exists f \psi(f,n,x)).$$

Sisalduvusest $M \subseteq \mathsf{U}$ johtub kohe implikatsioon suunaga vasakult paremale. Vastupidises suunas @metalemmaskeemi II.8 osa @(b) järgi $f \in M$ ja tolle tõestuse sees nägime, et $n \in M$.

Tulemus on tõestatud. ■

Hilisemat arutelu lihtsustavad *objekti absoluutsuse* ja *tõkendi* mõisted. Muu hulgas lepime kokku viisis, kuidas objekti O puhul rääkida tõkestatud objektist O^M. Hoiatame, et järgmise metadefinitsiooni raames kasutatakse looksulge ka pärisklasside jaoks.

Metadefinitsioon II.9. (objekti absoluutsus, tõkend [Kun80, lk-d 128–129; Jec02, lk 182]) Defineerime absoluutsuse mõisted klassi, seose, funktsiooni ning konstandi jaoks. Olgu T asendusteooria.

a. Klass C defineeriva valemiga $C[x] \in \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$ on *klassina absoluutne (klassi M suhtes teoorias T)*, kui valem $C[x]$ on vastavalt valemina absoluutne, s.o

$$T \Vdash \vdash \forall x \in M \quad (C[x]|_M \Leftrightarrow C[x]).$$

Kui piltlikult kirjutada $C^M = \{ x \in M \mid C[x]|_M \}$, võib klassi absoluutsuse tingimust väljendada vormis $C^M = C \cap M$.

b. n-aarne klassiseos R defineeriva valemiga $R[x_1,\dots,x_n] \in \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$ on *seosena absoluutne (klassi M suhtes teoorias T)*, kui valem $R[x_1,\dots,x_n]$ on valemina vastavalt valemina absoluutne, s.o

$$T \Vdash \vdash \forall x_1,\dots,x_n \in M \quad (R[x_1,\dots,x_n]|_M \Leftrightarrow R[x_1,\dots,x_n]).$$

Kui piltlikult kirjutada $R^M = \{ (x_1,\dots,x_n) \in M^n \mid R[x_1,\dots,x_n]|_M \}$, võib nõude kirja panna kui $R^M = R \cap M^n$. Siin $n \geqslant 2$.

c. n-aarne klassifunktsioon F kõikjal klassis U^n täisfunktsionaalse defineeriva valemiga $F[x_1,\dots,x_n,y] \in \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$ on *funktsioonina absoluutne (klassi M suhtes teoorias T)*, kui

$$\mathcal{T} \Vdash \vdash \overbrace{\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{M} \exists! y \in \mathcal{M} \quad \mathcal{F}[x_1, \ldots, x_n, y]|_{\mathcal{M}}}^{\substack{\text{funktsiooni } \mathcal{F} \text{ defineeritus ehk tõkestatud va-} \\ \text{lemi } \mathcal{F}[x_1,\ldots,x_n,y]|_{\mathcal{M}} \text{ niisugune täisfunkt-} \\ \text{sionaalsus klassil } \mathcal{M}\text{, kus ka vastav } y \in \mathcal{M}}} \wedge$$

$$\wedge \underbrace{\forall x_1, \ldots, x_n, y \in \mathcal{M} \quad (\mathcal{F}[x_1, \ldots, x_n, y]|_{\mathcal{M}} \Leftrightarrow \mathcal{F}[x_1, \ldots, x_n, y])}_{\text{absoluutsus } (n+1)\text{-kohalise seosena}}.$$

Kui piltlikult kirjutada $\mathcal{F}^{\mathcal{M}} = \{ (x_1, \ldots, x_n, y) \in \mathcal{M}^{n+1} \mid \mathcal{F}[x_1, \ldots, x_n, y]|_{\mathcal{M}} \}$, siis võime tingimuse kirja panna kui $\mathcal{F}^{\mathcal{M}} = \mathcal{F}|_{\mathcal{M}}$, kus viimane $\mathcal{F}|_{\mathcal{M}}$ tähistab funktsiooni $\mathcal{F}$ ahendit klassile $\mathcal{M}$ *funktsioonide ahendamise mõttes*. Kui funktsioon $\mathcal{F}$ pole esialgu kõikjal klassil U^n määratud, mõeldakse funktsiooni $\mathcal{F}$ absoluutsusest rääkides reeglina vastava *tühilaiendi* $\tilde{\mathcal{F}}$ absoluutsust. Tühilaiend $\tilde{\mathcal{F}}$ on nõndasugune:

$$\tilde{\mathcal{F}}(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n), & \text{kui } \exists y \mathcal{F}[x_1, \ldots, x_n, y], \\ \varnothing & \text{mujal.} \end{cases}$$

Siin $n \geqslant 1$. (Kui kehtib eitus $\neg \exists y \mathcal{F}[x_1, \ldots, x_n, y]$, on tühja hulga $\varnothing$ võtmine eriti loomulik valik siis, kui valem $x = \varnothing$ on $\mathcal{M}$-absoluutne ja $\varnothing \in \mathcal{M}$.)

d. Konstant c defineeriva valemiga $\mathcal{C}[x] \in \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$ (ehk kehtib $\exists! x(\mathcal{C}[x])$ vastava unikaalse elemendiga c) on *konstandina absoluutne (klassi $\mathcal{M}$ suhtes teoorias $\mathcal{T}$)*, kui

$$\mathcal{T} \Vdash \vdash \overbrace{\exists! x \in \mathcal{M}(\mathcal{C}[x]|_{\mathcal{M}})}^{\substack{\text{konstandi } c \text{ defi-} \\ \text{neeritus klassil } \mathcal{M}}} \wedge \forall x \in \mathcal{M}(\mathcal{C}[x]|_{\mathcal{M}} \Leftrightarrow \mathcal{C}[x]).$$

Rõhutame, et teoorias $\mathcal{T}$ defineerib valem $\mathcal{C}[x]$ konstandi, kui teoorias $\mathcal{T}$ kehtib $\exists! x(\mathcal{C}[x])$. Konjunktsiooni tagumise osas võib üldisust kaotamata asendada ekvivalentsusmärgi implikatsiooniga (eelduse järgi $\exists! x \mathcal{C}[x]$). Järjendi $\forall x \in \mathcal{M}$ saab asendada järjendiga $\forall x$. Täiesti samaväärselt võiksime nõuda, et

$$\mathcal{T} \Vdash \vdash \exists! x \in \mathcal{M}(\mathcal{C}[x])$$

ehk et $c \in \mathcal{M}$. Kui tähistada $c^{\mathcal{M}}$-iga unikaalset klassi $\mathcal{M}$ elementi x, mispuhul $\mathcal{C}[x]|_{\mathcal{M}}$, siis ülemise konjunktsiooni tagumine pool väidab, et $c^{\mathcal{M}} = c$.

Konstantideks on piisavas teoorias muu hulgas $\varnothing = 0$, 1, 2, naturaalarvude hulk ω, ka $\{\omega\}$ ja nii edasi. Binaarseteks funktsioonideks on näiteks ühisosa $y = x_1 \cap x_2$, ühend $y = x_1 \cup x_2$, otsekorrutis $y = x_1 \times x_2$, kahekohaliseks seoseks näiteks $x_1 \in \bigcup\bigcup x_2$.

Toome näiteid hulkadest, konstantidest ning funktsioonidest, mis on objektidena absoluutsed piisava teooria mudelite suhtes.

Metateoreemiskeem II.9 (objektide absoluutsus piisavate epsilon-kvaasimudelite suhtes, [Kun80, lk-d 121–122, 126; Kun13, lk 120]). *Olgu T asendusteooria, mida täpsustame allpool. Toodavad objektid (funktsioonid, konstandid) on teoorias T absoluutsed (konstandina, funktsioonina, seosena) valemite metahulga* $\mathtt{Ax}(\mathsf{T}) \cap \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$ *suvalise transitiivse mittetühja epsilon-kvaasimudeli $\mathcal{M}$ suhtes.*

(1) *Teoorias $\mathsf{T} = \mathsf{Z}^- - \mathsf{U} - \mathsf{P} - \mathsf{Inf}$:* i) $\varnothing$; ii) $(u, v) \mapsto \{u, v\}$ *ja* $u \mapsto \{u\}$; iii) $(u, v) \mapsto (u, v)$; iv) $(X, Y) \mapsto X \cap Y$; v) $(X, Y) \mapsto X \setminus Y$ *ja* $(X, Y) \mapsto X'_Y$ *(täiend hulga Y suhtes);* vi) $X \mapsto \bigcap X$.

(2) *Teoorias $\mathsf{T} = \mathsf{Z}^- - \mathsf{P} - \mathsf{Inf}$:* i) $X \mapsto \bigcup X$; ii) $X \mapsto X^+ = X \cup \{X\}$; iii) $(X, Y) \mapsto X \triangle Y$; iv) $x \in \bigcup\bigcup X$ $X \mapsto \bigcup\bigcup X$; v) $1, 2, 3, \ldots, 100$ *ja nii edasi.*

(3) *Teoorias $\mathsf{T} = \mathsf{Z}^- - \mathsf{Inf}$:* i) $(X, Y) \mapsto X \times Y$; ii) $R \mapsto \operatorname{dom} R$ *ja* $R \mapsto \operatorname{ran} R$; iii) $x \in$ $\in R^{-1}(Y)$.

(4) *Teoorias $\mathsf{T} = \mathsf{Z} - \mathsf{P}$:* i) ω; ii) *kõik naturaalarvud (käsitledes fikseeritud naturaalarvu kui parameetrit).*

Noolega $\mapsto$ tähistame funktsiooni. Kui järjestatud paar (x, y) asub siin noolest vasakul, on tegu järjestatud paariga metateoorias, kui noolest paremal pool, siis Kuratowski järjestatud paariga objektteoorias. Sarnaselt metateoreemiskeemiga @II.7 võib võtta tugevama teooria $\mathsf{T}' \supseteq \mathsf{T}$. Tulemus jääb kehtima, metahulka $\mathtt{Ax}(\mathsf{T}) \cap \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$ muutma ei pea.

Tõestus. Tõestused on kõigi puhul analoogilised. Valitud teoorias on objekti ühene leidumine tõestatav. Et klass $\mathcal{M}$ on teooria mittetühi transitiivne epsilon-kvaasimudel, on tõestatav tõkestatud objekti leidumine klassis $\mathcal{M}$ (@metateoreemiskeem @II.I). Objekti ja tõkestatud objekti vahel pole erinevust, sest vastavaks objektiks olemine on absoluutne (@metateoreemiskeem @II.7). Mõnel puhul peetakse silmas tühilaiendit (ühisosa, muutumis- ning määramispiirkond). Jaotise @(4) osas (ii) konstandi $n \in \omega$ juures mõeldakse näiteks valemit $c[x, n] :\doteq x = n$, kus tuleb arvu $n \in \omega$ võtta kui juba fikseeritud parameetrit. ∎

Järgmised mõisted ei ole absoluutsed, isegi mitte valemite hulga $\mathtt{Ax}(\mathsf{ZFC})$ transitiivse epsilon-kvaasimudeli suhtes teooria ZFC laiendis: potentshulgaga võrdumine, Zermelo – von Neumanni kumulatiivse hierarhia astmeks olemine, võrdvõimsuslikkus, loenduvus. [Jec02, lk 165]

Metalauseskeem II.10 (mitteabsoluutsuse näiteid). *Leidub teooria* ZFC *laiend (asendusteooria)* $\mathcal{T}$, *kus*

(1) $\mathcal{T}$ *on* ZFC *konservatiivne laiend;*

(2) *kui* ZFC *on süntaktiliselt mittevasturääkiv, on süntaktiliselt mittevasturääkiv ka* $\mathcal{T}$*;*

(3) *leidub valemite hulga* $\mathtt{Ax}(\mathsf{ZFC})$ *mittetühi transitiivne epsilon-kvaasimudel* $\mathcal{M}$ *teoorias* $\mathcal{T}$, *mille suhtes* i) $X = \mathcal{P}(Y)$, ii) $X \sim Y$, iii) „X on loenduv“, iv) $X = \mathsf{V}_\alpha$ *ei ole absoluutsed.*

Metalause @II.10 põhjendame hiljem, vt @viide.

1.4.1. Potentselt regulaarse rekursiooni ja astaku absoluutsus

Potentselt regulaarse rekursiooni absoluutsuse küsimus väärib eraldi alamjaotust. Rekursiooni absoluutsusest johtub muu hulgas Zermelo – von Neumanni astaku absoluutsus, samuti jõustamises kasutatavate P-nimedega seotud omaduste ning konstruktsioonide absoluutsused.

Mugavuse huvides olgu siin toodud varem tõestatud

teoreemiskeem I.20 (potentselt regulaarne rekursioon, [Jec02, lk 68; HJ99, lk-d 115–117]). *Olgu* $\mathcal{E}$ *potentselt regulaarne seos klassil* $\mathcal{C}$. *Olgu* $\mathcal{G}$ *klassifunktsioon klassil* $\mathsf{U} \times \mathsf{U}$. *Leidub üheselt määratud klassifunktsioon* $\mathcal{F}$ *(täisfunktsioonilise valemiga* $\mathcal{F}$*), mispuhul*

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} \mathcal{G}(x, \mathcal{F}|_{\mathrm{ext}_{\mathcal{E}}(x)}), & \text{kui } x \in \mathcal{C}, \\ \varnothing & \text{mujal.} \end{cases} \tag{$*$}$$

Meenutame @viide, et potentselt regulaarse rekursiooni teoreemiskeem koosnes päriselt kahest teoreemiskeemist. Kui seos $\mathcal{E}$, klass $\mathcal{C}$ ja klassifunktsioon $\mathcal{G}$ on fikseeritud, saab esimesest teoreemiskeemist põhimõtteliselt teoreem vormis

$$\begin{aligned} &\text{„}\mathcal{E} \text{ on pot. reg kl-il } \mathcal{C}\text{“}, \forall x_1, x_2 \exists! y (\mathcal{G}(x_1, x_2) = y) \vdash \forall x \exists! y (\mathcal{F}(x) = y) \wedge \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \wedge \text{„}\mathcal{F} \text{ rahuldab tingimust } (*)\text{“}, \end{aligned} \tag{$\mathcal{A}$}$$

kus klassifunktsioon $\mathcal{F}$ on defineeritud teoreemiskeemi @I.20 tõestuses, vt valemit †.

Olgu $\mathcal{T} \supseteq \mathsf{ZF}$ asendusteooria ja $\mathcal{M}$ valemite metahulga $\mathtt{Ax}(\mathcal{T}) \cap \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$ transitiivne epsilon-kvaasimudel teoorias T. Siis metateoreemiskeemiga @II.1 saame tingimusest $(\mathcal{A})$, et

$$„E \text{ on pot. reg kl-il } C“|_M, \forall x_1, x_2 \in M \exists! y \in M(G^M(x_1, x_2) = y) \vdash \forall x \in M \exists! y \in M(F^M(x) = y) \wedge$$
$$\wedge „F^M \text{ rahuldab tingimust } (*)|_M“.$$

Tingimus @$(*)|_M$ on kirjutatav kujul

$$F^M(x) = \begin{cases} G^M(x, F^M|_{(\mathrm{ext}_E(x))^M}), & \text{kui } x \in C^M, \\ \varnothing, & \text{kui } x \notin C^M, \end{cases}$$

kus oleme arvestunud tühja hulga ning ahendi M-absoluutsusi. Kui klassifunktsioon G on ternaarse seosena absoluutne, siis

$$F^M(x) = \begin{cases} G(x, F^M|_{(\mathrm{ext}_E(x))^M}), & \text{kui } x \in C^M, \\ \varnothing, & \text{kui } x \notin C^M. \end{cases}$$

Kui klass C on klassina absoluutne, siis $C^M = C \cap M$. Seega, <u>kui $x \in M$</u>, võime tingimust @$(*)|_M$ veel lihtsustada:

$$F^M(x) = \begin{cases} G(x, F^M|_{(\mathrm{ext}_E(x))^M}), & \text{kui } x \in C, \\ \varnothing, & \text{kui } x \notin C. \end{cases}$$

Alumiste naabertippude osa lihtsustamiseks tõestame järgmise metalemmaskeemi. Metalemmaskeem on sõnastatud kohe tugevama teooria T' jaoks, mistõttu võime ühisosa metahulgaga $\mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$ ära jätta.

Metalemmaskeem II.11. *Olgu* $T \supseteq \mathsf{Z}^- - \mathsf{U} - \mathsf{P} - \mathsf{Inf}$ *asendusteooria ja* $M \neq \varnothing$ *valemite metahulga* $\mathtt{Ax}(\mathsf{Z}^- - \mathsf{U} - \mathsf{P} - \mathsf{Inf})$ *transitiivne epsilon-kvaasimudel teoorias* T. *Olgu*

1) „E on hulgalaadne kl-il C“$|_M$,
2) *klass* C *klassina* M*-absoluutne,*
3) *seos* E *binaarse seosena* M*-absoluutne*

teoorias T. *Kehtigu lisaks iga* $x \in C \cap M$ *korral sisalduvus* $\mathrm{ext}_E(x) \subseteq M$. *Siis klassifunktsioon* $x \mapsto \mathrm{ext}_E(x)$ *on funktsioonina* M*-absoluutne teoorias* T.

Kui $x \notin C$, siis nõue @5) kehtiks vaikimisi: rakenduks tühilaiendi eeldus, s.o saaksime selgesti kehtiva sisladuvuse $\mathrm{ext}_E(x) = \varnothing \subseteq M$. Teades klassi C absoluutsust, on eelduse @5) ühisosa $C \cap M$ sama mis C^M.

Tõestus. Alumiste naabertippude klassifunktsioon on tühilaindina määratav nõnda:

$$y = \mathrm{ext}_E(x) \Leftrightarrow x \in C \wedge \forall z \in y(z \in C \wedge z\,E\,x) \wedge \forall w(w \in C \wedge w\,E\,x \Rightarrow w \in y) \vee$$
$$\vee\, x \notin C \wedge y = \varnothing.$$

Kuivõrd „E on hulgalaadne kl-il C“$|_M$, siis teoorias T hulgalaadsuse ning ahendamise definitsiooni järgi, samuti tühja hulga absoluutsusest konstandina

$$\forall x \in M \exists! y \in M(y = \mathrm{ext}_E(x))|_M.$$

Defineeritus käes. Tähistame vastavat objekti kui $(\mathrm{ext}_E(x))^M$, millest

$$y = \mathrm{ext}_E(x) \Leftrightarrow x \in C \cap M \wedge \forall z \in y \cap M(z \in C \wedge z\,E\,x) \wedge \forall w \in M(w \in C \wedge w\,E\,x \Rightarrow w \in y) \vee$$
$$\vee\, x \notin C \cap M \wedge y = \varnothing.$$

kus oleme arvestanud klassi C absoluutsust klassina, seose E absoluutsust seosena ning juba varem tõestatud absoluutsuse tulemusi. Peame veel tõestama, et iga $x \in M$ korral $\mathrm{ext}_E(x) = (\mathrm{ext}_E(x))^M$ ehk

$$\forall x, y \in M(y = \mathrm{ext}_E(x) \Leftrightarrow y = (\mathrm{ext}_E(x))^M).$$

Olgu $x, y \in M$. Konjunktsioonidega $x \in C$ ja $x \in C \cap M$ ega nende eitustega pole muret, sest $x \in M$ niikuinii. Võrdus $y = \varnothing$ on mõlemas valemis samasugune. Teiste konjunktsioonidega $\forall z \in y(z \in C \wedge z\,E\,x)$ ning $\forall z \in y \cap M(z \in C \wedge z\,E\,x)$ on korras, sest M on transitiivne ja $y \in M$. Kolmandate konjunktsioonidega $\forall w(w \in C \wedge w\,E\,x \Rightarrow w \in y)$ ja $\forall w \in M(w \in C \wedge w\,E\,x \Rightarrow w \in y)$ pole probleemi, sest $\mathrm{ext}_E(x) \subseteq M$.

Tulemus on tõestatud. ■

Metalemmaskeemi @II.11 eelduste kehtivuse korral saame tingimuse @$(*)|_M$ viia kujule

$$\forall x \in M \qquad F^M(x) = \begin{cases} G(x, F^M|_{\mathrm{ext}_E(x)}), & \text{kui } x \in C, \\ \varnothing, & \text{kui } x \notin C. \end{cases}$$

Teine metalemmaskeem annab piisavad tingimused, millal klassi C potentsest E-regulaarsusest järeldub tõkestatud „klassi C potentne E-regulaarsus“$|_M$.

Metalemmaskeem II.12. *Olgu* $T \supseteq \mathsf{Z}^- - \mathsf{U} - \mathsf{P} - \mathsf{Inf}$ *asendusteooria ja* $M \neq \varnothing$ *valemite metahulga* $\mathtt{Ax}(\mathsf{Z}^- - \mathsf{U} - \mathsf{P} - \mathsf{Inf})$ *transitiivne epsilon-kvaasimudel teoorias* T*. Olgu klass* C *klassina* M*-absoluutne, seos* E *binaarse seosena* M*-absoluutne teoorias* T*. Siis*

$$\text{„klass } C \text{ on potentselt } E\text{-regulaarne“} \Rightarrow \text{„klass } C \text{ on potentselt } E\text{-regulaarne“}|_M.$$

Tõestus. Olgu klass C potentselt E-regulaarne, st

$$\forall x(x \neq \varnothing \wedge x \subseteq C \Rightarrow \exists \xi \in x(\forall y \in C \neg(y\, E\, \xi))).$$

Et $M \subseteq \mathsf{U}$, siis

$$\forall x \in M(x \neq \varnothing \wedge x \subseteq C \Rightarrow \exists \xi \in x(\forall y \in C \cap M \neg(y\, E\, \xi))).$$

Transitiivsusest

$$\forall x \in M(x \neq \varnothing \wedge x \subseteq C \cap M \Rightarrow \exists \xi \in x \cap M(\forall y \in C \cap M \neg(y\, E\, \xi))).$$

Arvestades klassi C klassina M-absoluutsust, seose E absoluutsust binaarse seosena, saame

$$\forall x \in M(x \neq \varnothing \wedge x \subseteq C^M \Rightarrow \exists \xi \in x \cap M(\forall y \in C^M \neg(y\, E^M\, \xi))).$$

See aga ongi soovitud „klass C on potentselt E-regulaarne“$|_M$. ■

Oleme valmis sõnastama potentselt regulaarse rekursiooni absoluutsuse metateoreemiskeemi. Rekursiooni absoluutsuseks peavad kõik koostisosad olema absoluutsed.

Metateoreemiskeem II.13 (potentselt regulaarse rekursiooni absoluutsus, [Kun80, lk 129; Kun13, lk-d 124–125])**.** *Olgu* $T \supseteq \mathsf{ZF}$ *asendusteooria ja* M *valemite metahulga* $\mathtt{Ax}(\mathsf{ZF})$ *transitiivne epsilon-kvaasimudel teoorias* T*. Olgu* E *potentselt regulaarne seos klassil* C*. Olgu* G *klassifunktsioon klassil* $\mathsf{U} \times \mathsf{U}$*. Kui*

1) *klass* C *on klassina* M*-absoluutne,*

2) *klassiseos* E *on seosena* M*-absoluutne,*

3) *klassifunktsioon* G *on binaarse funktsioonina* M*-absoluutne,*

4) „E on hulgalaadne klassil C“$|_M$

5) *iga* $x \in C \cap M$ *korral* $\mathrm{ext}_E(x) \subseteq M$,

siis metateoreemiskeemi @I.20 (üheselt määratud) klassifunktsioon F *on ühekohalise funktsioo-nina absoluutne klassi* M *suhtes.*

Tõestus. Metalemmaskeemi @II.12 eeldused on jõus. Seega „klass C on potentselt E-regulaarne“$|_M$. Et „E on hulgalaadne klassil C“$|_M$, siis „E on pot. reg kl-il C“$|_M$. Varasema arutelu põhjal saame metateoreemiskeemiga @II.1 potentselt regulaarse rekursiooni teoreemiskeemist sekventsi @$(\mathcal{A})|_M$, mille antetsedendid on praegu tõesed. Järelikult kehtib konsekvent, s.o

$$\forall x \in M \exists! y \in M (F^M(x) = y) \wedge \text{„}F^M \text{ rahuldab tingimust } (*)|_M\text{“}.$$

Defineeritus on käes. Ka metalemmaskeemi @II.11 nõuded on rahuldatud, mistõttu saame tingimuse @$(*)|_M$ viia eespool toodud lihtsustatud vormi

$$\forall x \in M \qquad F^M(x) = \begin{cases} G(x, F^M|_{\mathrm{ext}_E(x)}), & \text{kui } x \in C, \\ \varnothing, & \text{kui } x \notin C. \end{cases}$$

Absoluutsuseks peame veel põhjendama, et iga $x \in M$ puhul $F^M(x) = F(x)$. See johtub vahetult potentselt E-regulaarse induktsiooniga. ∎

Metateoreemiskeemi @II.13 rakendusena tõestame hulga astaku $\mathtt{Rank}$ absoluutsuse funktsioonina. Põhjenduses arvestame lause @I.29 väidet, et $\mathtt{Rank} = \mathtt{rank}_\in$.

Metalauseskeem II.14 ([Kun80, lk-d 129–130])**.** *Olgu* $T \supseteq \mathsf{ZF}$ *asendusteooria ja* M *valemite metahulga* $\mathtt{Ax}(\mathsf{ZF})$ *transitiivne epsilon-kvaasimudel. Hulga astak* $\mathtt{Rank}$ *on funktsioonina* M*--absoluutne teoorias* T.

Tõestus. Lause @I.29 järgi $\mathtt{Rank} = \mathtt{rank}_\in$. Funktsioon $\mathtt{rank}_\in$ on defineeritud potentselt regulaarse rekursiooniga, metalauseskeemi tõestamiseks kasutame metateoreemiskeemi @II.13. Meenutame, et teoreemiskeemiga @I.23 defineeritakse $\mathtt{rank}_\in$ nii, et $C := \mathtt{U}$, $E := \in$ ja

$$G(f) = \begin{cases} \bigcup\{\, y^+ \mid y \in \operatorname{ran} f \,\}, & \text{kui „}f \text{ on funktsioon“}, \ \operatorname{ran} f \subseteq \mathtt{Ord},\ f \neq \varnothing, \\ \varnothing & \text{mujal,} \end{cases}$$

kus klassifunktsiooni G esimene muutuja on fiktiivne. Kontrollime metateoreemiskeemi @II.13 eeldusi. Teooria T ja epsilon-kvaasimudel M sobivad. Seos $\in$ on potentselt regulaarne klassil $\mathtt{U}$

regulaarsuse aksioomi tõttu. Võttes arvesse klassifunktsiooni G fiktiivset muutujat, on tegu klassifunktsiooniga klassil $\mathtt{U} \times \mathtt{U}$. Edasi

1) $\mathtt{U}$ on klassina M-absoluutne, sest $x = x$ on absoluutne;
2) $\in$ on seosena M-absoluutne, sest $x \in y$ on absoluutne;
3) tingimused „f on funktsioon“, $\operatorname{ran} f \subseteq \mathtt{Ord}$, $f \neq \varnothing$ ja nende eitused on omadustena absoluutsed, funktsioonid $X \mapsto \bigcup X$, $R \mapsto \operatorname{ran} R$ ja $X \mapsto X^+$ on funktsioonidena absoluutsed, $\varnothing$ on konstandina absoluutne. Seetõttu on ka G funktsioonina absoluutne, sealjuures hulga $\{\, y^+ \mid y \in \operatorname{ran} f \,\}$ saamiseks kasutatav asendusaksioomiskeemi aksioomi valem Φ on absoluutne just seetõttu, et $X \mapsto X^+$ on funktsioonina absoluutne;
4) kui $x \in \mathit{M}$, siis $\operatorname{ext}_\in(x) = x$. Sellest ka $(y = \operatorname{ext}_\in(x))|_{\mathit{M}} \Leftrightarrow y = \operatorname{ext}_\in(x)$ ja $\operatorname{ext}_\in(x) \in \mathit{M}$. Tõepoolest saime, et „$\in$ on hulgalaadne klassil $\mathtt{U}$“$|_{\mathit{M}}$;
5) kui $x \in \mathtt{U} \cap \mathit{M} = \mathit{M}$, siis $x = \operatorname{ext}_\in(x)$ ja epsilon-kvaasimudeli M transitiivsuse tõttu $\operatorname{ext}_\in(x) \subseteq \mathit{M}$.

Kõik eeldused on täidetud. Kokkuvõttes ongi hulga astak $\mathtt{Rank}$ funktsioonina M-absoluutne teoorias T. ■

1.5. Epsilonisomorfism. Mostowski-Shepherdsoni transitiivne kollaps

Bijektsiooni nimetatakse mõnikord „hulkade isomorfismiks“. Algebralisest seisukohast on niisugune kirjeldus ootuspärane. Üks põhilistest algebra uurimisobjektidest on algebraline struktuur, selle eri kehastused. „Algebraline isomorfism“ nõuab peale struktuuri põhihulkade bijektiivsuse veel tehete säilitamist. Hulk on aga vaadeldav struktuurina, millel pole ainsatki tehet, ning algebraline isomorfism lihtsustubki tavaliseks üksüheseks pealekujutuseks.

Hulgateoorias on kesksel kohal hulgad. Väga loomulik on uurida täiendavat tüüpi isomorfismi: bijektsiooni, mis austab hulgateoreetilist sisalduvust $\in$. Sellist kujutust kutsutakse *epsilonisomorfismiks*.

Definitsioon II.10 (hulkade epsilonisomorfism, [Wea14, lk 22])**.** Olgu X ja Y hulgad. Bijektsiooni $f\colon X \to Y$, kus

$$\forall x_1, x_2 \in X (x_1 \in x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \in f(x_2)),$$

kutsutakse *epsilonisomorfismiks (hulgast X hulka Y)*. Vastavaid hulki X ja Y kutsutakse *epsilonisomorfseteks* ning kirjutatakse $X \approx Y$.

Hulkade $\{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}$ ning $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ võrdlemine näitab, et ekvivalentsust ei saa reeglina implikatsiooniga asendada. Epsilonisomorfismi pöördkujutus on samuti epsilonisomorfism ning hulkade epsilonisomorfsus, $X \approx Y$, on ekvivalentsusseos kõigi hulkade klassil U. Epsilonisomorfsus on varem defineeritud sarnasusseose erijuht, kus range osalise järjestusena vaadeldakse sisalduvust $\in$. Teisisõnu on epsilonisomorfsus sarnasus ühe loomuliku hulkade järjestuse mõttes.

Teatud mõttes säilitab epsilonisomorfism $X \leftrightarrow Y$-invariantsust.

Lauseskeem II.15 ([Wea14, lk 22])**.** *Las* $\varphi \in \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$*,* $\mathtt{Free}(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\}$ *(erijuhul neid polegi ehk* $n = 0$*). Puudugu valemist* φ *indiviidmuutujad* $y_1, \dots, y_n$*. Kehtib järgmine väide.*

$$\forall X, Y, f \Big(X \overset{f}{\approx} Y \Rightarrow {}^{\forall x_1, \dots, x_n \in X}_{\forall y_1, \dots, y_n \in Y} \big(y_1 = f(x_1) \wedge \dots \wedge y_n = f(x_n) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\varphi[x_1, \dots, x_n]|_X \Leftrightarrow \varphi[x_1/y_1, \dots, x_n/y_n]|_Y)\big)\Big)$$

Tõestus. Las X ja Y suvalised hulgad ning $f\colon X \to Y$ on epsilonisomorfism. Tõestame väite esimese implikatsiooni struktuurse induktsiooniga valemite ehitamisviisi järgi. Baasis on ainsad atomaarsed valemid kujul $x_i \in x_j$ ja $x_i = x_j$, kus võib olla $i = j$. Kvantoreid pole, seega tõkestamine neid valemeid ei muuda. Teoreem väidab, et $y_i = f(x_i)$ ja $y_j = f(x_j)$ korral kehtivad

$$x_i \in x_j \Leftrightarrow y_i \in y_j,$$
$$x_i = x_j \Leftrightarrow y_i = y_j.$$

Neist ülemine tuleneb otse epsilonisomorfismi kooskõlalisusest sisalduvusega $\in$. Alumise saame funktsioonilisusest ning injektiivsusest. (Kui vabu muutujaid valemis φ pole, on ZFC keele valemis kindlasti universaalkvantor, st tegu ei saaks olla atomaarse valemiga.)

Sammudes tuleb analüüsida eituse, implikatsiooni ning universaalkvantori juhte. Eituse ning implikatsiooni osas saab lisaks induktsioonieeldusele kasutada samasugust loogilist samaväärsust ning järeldumist nagu @lauseskeemis @II.3. Pöörame seetõttu tähelepanu universaalkvantorile.

Eeldame, et teoreemi väide kehtib valemi $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ jaoks. Olgu $x_i \in \{x_1, \dots, x_n\}$ suvaline indiviidmuutuja. Peame näitama, et kokkulepitud tähistuste ning eelduste kehtivuse korral

$$\forall_{\substack{x_1,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_n\in X\\ y_1,\dots,\hat{y}_i,\dots,y_n\in Y}}\Big(y_1=f(x_1)\wedge\dots\wedge\widehat{y_i=f(x_i)}\wedge\dots\wedge y_n=f(x_n)\Rightarrow \\ \Rightarrow\big((\forall x_i\varphi[x_1,\dots,x_n])[x_1,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_n]|_X\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow(\forall x_i\varphi[x_1,\dots,x_n])[x_1/y_1,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_n/y_n]|_Y\big)\Big),$$

kus katusega tähistame, et vastav süntaktiline osa järjendist puudub. Valime $x_1,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_n\in$ $\in X$ ja $y_1,\dots,\widehat{y_i},\dots,y_n\in Y$ nõndamoodi, et $y_1=f(x_1),\dots,\widehat{y_i=f(x_i)},\ \dots,y_n=f(x_n)$. Peame näitama, et

$$\forall x_i\in X(\varphi[x_1,\dots,x_n]|_X)\Leftrightarrow\forall x_i\in Y(\varphi[x_1/y_1,\dots,x_i,\dots,x_n/y_n]|_Y).$$

Selguse huvides tõestame samaväärse tulemuse

$$\forall x_i\in X(\varphi[x_1,\dots,x_n]|_X)\Leftrightarrow\forall y_i\in Y(\varphi[x_1/y_1,\dots,x_i/y_i,\dots,x_n/y_n]|_Y).$$

Põhjendame kumbagi pidi implikatsiooni.

(„$\Rightarrow$“) Kehtigu $\forall x_i\in X(\varphi[x_1,\dots,x_n]|_X)$. Olgu $y_i\in Y$ suvaline. Sürjektiivsuse alusel leidub $x_i\in X$ nii, et $f(x_i)=y_i$. Implikatsiooni eelduse järgi $\varphi[x_1,\dots,x_n]|_X$. Sellele rakendame induktsioonieelduse $\Rightarrow$-suunda, kust johtub $\varphi[x_1/y_1,\dots,x_i/y_i,\dots,x_n/y_n]|_Y$. Kuna $y_i\in Y$ oli suvaline, siis ka $\forall y_i\in Y\varphi[x_1/y_1,\dots,x_i/y_i,\dots,x_n/y_n]|_Y$.

(„$\Leftarrow$“) Kehtigu $\forall y_i\in Y(\varphi[x_1/y_1,\dots,x_1/y_1,\dots,x_n/y_n]|_Y)$. Olgu $x_i\in X$ suvaline. Funktsioonilisuse alusel leidub $y_i\in Y$ nii, et $f(x_i)=y_i$. Muus osas sarnane ekvivalentsi $\Rightarrow$-suunaga, ainult induktsioonieeldusest võtta kasutusele $\Leftarrow$-suund.

Tulemus on tõestatud. ∎

Epsilonisomorfismi mõistet võib kahel moel üldistada. Esiteks, hulgad X ja Y saab asendada klassidega $\boldsymbol{X}$ ja $\boldsymbol{Y}$ ning epsilonisomorfismi $f\colon X\to Y$ klassifunktsiooniga $\boldsymbol{F}\colon\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{Y}$. Täiesti analoogiliselt lauseskeemiga II.10 on tõestatav nimetatud asendustega üldistus. Meil taolist üldistatud lauseskeemi tarvis ei lähe. Teises epsilonisomorfismi üldistusviisis asendatatakse sisalduvused $\in$ suvaliste seostega $\boldsymbol{R}$ ja $\boldsymbol{S}$.

Mostowski-Shepherdsoni teoreemiskeemi üldises variandis läheb tarvis mõlemat üldistusviisi sisaldava isomorfismi definitsiooni.

Definitsioon II.11 (klasside ($\boldsymbol{R}$,$\boldsymbol{S}$)-isomorfism, [Jec02, lk 69]). Olgu $\boldsymbol{X}$ ja $\boldsymbol{Y}$ klassid, olgu $\boldsymbol{R}$

seos klassil X, S seos klassil Y. Bijektiivset klassifunktsiooni $F\colon X \to Y$, kus

$$\forall x_1, x_2 \in X (x_1 \, R \, x_2 \Leftrightarrow F(x_1) \, S \, F(x_2)),$$

kutsutakse (R,S)-*isomorfismiks (klassist X klassi Y)*. Vastavaid klasse X ja Y kutsutakse (R,S)-*-isomorfseteks* ning kirjutatakse $(X,R) \approx (Y,S)$. Kui $R = S = \in$, räägime lihtsalt klasside epsilonisomorfismist.

Järgnevas kasutame just $(R,\in)$-isomorfisme ning klasside epsilonisomorfisme. Jaotise lõpus näeme, et „heade“ klassi C ning seose E korral leidub üheselt määratud transitiivne klass $\pi(C)$, mis on algse klassiga $(R,\in)$-isomorfne. Vastav teoreem kannab Mostowski ning Shepherdsoni nimesid.

Kui kaks transitiivset klassi on epsilonisomorfsed, on need klassid tegelikult võrdsed ning epsilonisomorfism on samasusteisendus.

Lemmaskeem II.16 ([Jec02, lk 69]). *Olgu T_1 ja T_2 transitiivsed klassid ning $F\colon T_1 \to T_2$ epsilonisomorfism. Siis $T_1 = T_2$ ja $F\colon T_1 \to T_1$ on identsusteisendus.*

Tõestus. Tõestame epsiloninduktsiooniga klassil T_1 (kasutame regulaarsuse aksioomi) väite, et F on identsusteisendus. Transitiivse hulga ainus rangelt $\in$-minimaalne element on $\varnothing$, mille jaoks epsilonisomorfismi eeldus ütleb selgesti, et $F(\varnothing) = \varnothing$. Oletame, et mingi $t \in T_1$ puhul on võrdus $F(t') = t'$ olemas iga $t' \in t$ jaoks. Tõestame, et siis ka $F(t) = t$.

Näitame kahtepidi sisalduvust. Kui $t' \in t$, siis sisalduvuse austamise nõudest ja induktsioonieeldusest $t' = F(t') \in F(t)$. Järelikult $t \subseteq F(t)$. Kui $u \in F(t)$, siis klassi T_2 transitiivsusest $u \in T_2$, kuna $F(t) \in T_2$. Sürjektiivsuse järgi leidub $u_1 \in T_1$, mispuhul $F(u_1) = u$. Seega $F(u_1) \in F(t)$. Kooskõlalisusest sisalduvusega $u_1 \in t$. Induktsioonieeldusest ja elemendi u_1 valiku järgi $u = F(u_1) = u_1 \in t$. Nõnda $F(t) \subseteq t$.

Kokkuvõttes $F(t) = t$. Märkuse @I.21 jaotise @e. osa @1) alusel on F identsusteisendus. Ülejäänud tulemus johtub vahetult klassifunktsiooni F bijektiivsusest (klasside T_1, T_2 suhtes). ■

Potentselt regulaarse rekursiooniga tõestatakse *Mostowski kollapsifunktsiooni* leidumine.

Definitsioon II.12 (Mostowski kollapsifunktsioon, [Jec02, lk 68]). Olgu C klass ja E potentselt regulaarne seos klassil C. Funktsiooni $\pi\colon \mathtt{U} \to \mathtt{U}$, kus iga $x \in C$ korral

$$\pi(x) = \{\pi(z) \mid z \in C, z \, E \, x \} = \{\pi(z) \mid z \in \mathtt{ext}_E(x) \},$$

mujal võrdne tühja hulgaga, nimetatakse *Mostowski kollapsifunktsiooniks*. Veel tähistatakse $\pi = \pi_{C,E} = \mathrm{mos}_{C,E}$ [Kun13, lk 56].

Rekursiooniteoreemiskeemi @I.20 tähenduses võtta $G(f) = \operatorname{ran} f$. Mostowski kollapsifunktsiooni väärtus väljaspool konkreetset klassi C ei paku meile huvi. Edasises käsitleme Mostowski kollapsifunktsiooni kui klassifunktsiooni $\pi\colon C \to \pi(C)$. Klassi $\pi(C)$ kutsutakse *klassi C Mostowski-Shepherdsoni (transitiivseks) kollapsiks.*

Mostowski kollapsifunktsioon $\pi\colon C \to \pi(C)$ on arusaadavalt sürjektiivne. Lisaks kehtib

lemmaskeem II.17 ([Jec02, lk 68])**.** *Olgu C klass ja E potentselt regulaarne seos klassil C.*

(1) *Mostowski-Shepherdsoni kollaps $\pi(C)$ on transitiivne klass.*

(2) *Mostowski kollapsifunktsioon on „$(E, \in)$-kasvav“, s.o*

$$\forall x, y \in C \ (x \, E \, y \Rightarrow \pi(x) \in \pi(y)).$$

(3) *Mostowski kollapsifunktsioon pole üldiselt injektiivne klassil C. Kui aga Mostowski kollapsifunktsioon on injektiivne klassil C, siis on see ka „$(\in,E)$-kasvav“, st*

$$\forall x, y \in C \ (x \, E \, y \Leftarrow \pi(x) \in \pi(y)).$$

Niisiis, kui kollapsifunktsioon on injektiivne, on Mostowski kollapsifunktsioon $(E, \in)$--isomorfism klasside C ning $\pi(C)$ vahel.

Tõestus. (1) Las olla $y \in \pi(C)$ suvaline. Järelikult leidub $x \in C$ nii, et $\pi(x) = y$. Transitiivsuseks näitame, et $y \subseteq \pi(C)$. Olgu $y' \in y = \pi(x)$. Vastavalt Mostowski kollapsifunktsiooni määratlusele on olemas $z \in C$, kus $z \, E \, x$ ja mispuhul $y' = \pi(z)$. Otse klassi $\pi(C)$ määratlusest $y' \in \pi(C)$.

(2) Vahetu kollapsifunktsiooni definitsioonist.

(3) Olgu $x, y \in C$. Kui $\pi(x) \in \pi(y)$, siis definitsiooni järgi leidub $z \, E \, y$, $z \in C$, nii, et $\pi(z) = \pi(x)$. Injektiivsusest $z = x$, seega $x \, E \, y$ ehk π on $(\in,E)$-kasvav. Osa @(2) ja sürjektiivsuse põhjal ongi tegu $(E, \in)$-isomorfismiga klasside C ning $\pi(C)$ vahel.

Injektiivsuse vastunäiteks sobib klass (hulk) $\mathcal{C} \coloneqq C \coloneqq \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}$ seosega $\mathcal{E} \coloneqq E \coloneqq \; \in|_C$. Siis $\pi(\varnothing) = \pi(\{\{\varnothing\}\}) = \varnothing$ ja $\pi(C) = \{\varnothing\}$. ■

Kui Mostowski kollapsifunktsioon on injektiivne, leidub klassis C täpselt üks rangelt E-minimaalne element. Seda seetõttu, et alati $\mathrm{ext}_{\mathit{E}}(\xi) = \varnothing$, kui ξ on rangelt E-minimaalne. Vastupidine ei kehti, nagu näitab hulk $\mathit{C} := C := \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}\}$ seosega $\mathit{E} := \in|_C$. Ainus $\in|_C$-minimaalne element on $\varnothing$. Siiski $\pi(\{\varnothing\}) = \pi(\{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}) = \{\varnothing\}$, sest $\mathrm{ext}_{\in|_C}(\{\varnothing\}) = \mathrm{ext}_{\in|_C}(\{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}) = \{\varnothing\}$. Näide ning Mostowski kollapsifunktsiooni definitsioon viivad loomulikul viisil *ekstensionaalse seose* definitsioonini.

Definitsioon II.13 (ekstensionaalne seos, [Jec02, lk 68])**.** Olgu C klass ning E seos sellel klassil. Ütleme, et *seos E on ekstensionaalne (klassil C)*, kui

$$\forall x, y \in \mathit{C}(x \neq y \Rightarrow \mathtt{ext}_{\mathit{E}}(x) \neq \mathtt{ext}_{\mathit{E}}(y)).$$

Klassi C kutsutakse E-ekstensionaalseks.

Ekstensionaalsuse korral saab klassis C olla ülimalt üks rangelt E-minimaalne element. Seose ekstensionaalsus on Mostowski kollapsifunktsiooni $\pi\colon \mathit{C} \to \pi(\mathit{C})$ injektiivsuse jaoks tarvilik ning piisav.

Lemmaskeem II.18 ([Jec02, lk-d 68–69])**.** *Olgu C klass ning E potentselt regulaarne seos sellel klassil. Siis Mostowski kollapsifunktsioon π on injektiivne parajasti siis, kui seos E on ekstensionaalne klassil C, s.o*

$$\text{„}\pi\colon \mathit{C} \to \pi(\mathit{C}) \text{ on injektiivne“} \Leftrightarrow \text{„}\mathit{E} \text{ on ekstensionaalne“}.$$

Tõestus. („$\Rightarrow$“) Kui $\mathrm{ext}_{\mathit{E}}(x) = \mathrm{ext}_{\mathit{E}}(y)$, siis kollapsifunktsiooni definitsiooni põhjal $\pi(x) = \pi(y)$ ja injektiivsusest $x = y$.

(„$\Leftarrow$“) Tõestame potentselt E-regulaarse induktsiooniga injektiivsuse, st

$$\forall x, y \in \mathit{C}(\pi(x) = \pi(y) \Rightarrow x = y).$$

Kui $x \in \mathit{C}$ on rangelt E-minimaalne, tulemus kehtib, sest $\varnothing = \pi(x) = \pi(y)$ tõttu on y rangelt E-minimaalne klassis C, ekstensionaalsusest johtus minimaalse elemendi ühesus ehk $x = y$. Olgu nüüd $x \in \mathit{C}$ mingi niisugune, mispuhul kõigi $z \mathrel{\mathit{E}} x$, $z \in \mathit{C}$, jaoks tulemus $\pi(z) = \pi(y') \Rightarrow z = y'$ kehtib iga $y' \in \mathit{C}$ korral. Las $y \in \mathit{C}$ ja $\pi(x) = \pi(y)$, tahame tõestada, et $x = y$. Ekstensionaalsuse tõttu piisab näidata, et $\mathrm{ext}_{\mathit{E}}(x) = \mathrm{ext}_{\mathit{E}}(y)$. Kahtepidi alamhulgalisusega. Kui $z \mathrel{\mathit{E}} x$, siis $\pi(z) \in \pi(x) = \pi(y)$. Seega leidub $y' \mathrel{\mathit{E}} y$, $y' \in \mathit{C}$, nii, et $\pi(y') = \pi(z)$. Induktsioonieeldusest $y' = z$, seetõttu $z \mathrel{\mathit{E}} y$. Kokkuvõttes $z \in \mathrm{ext}_{\mathit{E}}(y)$ ehk $\mathrm{ext}_{\mathit{E}}(x) \subseteq \mathrm{ext}_{\mathit{E}}(y)$. Vastupidi analoogiliselt. ■

Oleme eelneva aruteluga tõestanud ka Mostowski-Shepherdsoni transitiivse kollapsi teoreemi.

Teoreemiskeem II.19 (Mostowski-Shepherdsoni transitiivne kollaps, [Jec02, lk 69]). *Olgu $\mathcal{C}$ klass ning E potentselt regulaarne ekstensionaalne seos. Leidub üheselt määratud transitiivne klass T nii, et klassid $\mathcal{C}$ ja T on $(E,\in)$-isomorfsed. Isomorfism on samuti unikaalne. Sealjuures T on Mostowski-Shepherdsoni transitiivne kollaps $\pi(\mathcal{C})$, $T = \pi(\mathcal{C})$, ja isomorfism on Mostowski kollapsifunktsioon $\pi\colon \mathcal{C} \to \pi(\mathcal{C})$, st $(\mathcal{C},E) \overset{\pi}{\approx} (\pi(\mathcal{C}),\in)$.*

Klassi $\mathcal{C}$ omadusena on $\in|_{\mathcal{C}}$-ekstensionaalsus samaväärne väitega, et klass $\mathcal{C}$ on ekstensionaalsuse aksioomi epsilon-kvaasimudel ehk tuletatav on ekstensionaalsuse aksioomi $\mathcal{C}$-ahend. Sellest pärineb ka mõiste terminoloogiline valik. [Wea14, lk 23] Samaväärsuse põhjendus on üsna vahetu, mõistlik on kasutada ekstensionaalsuse aksioomi järgset märkust $\Rightarrow$-suuna ebavajalikkusest võrduse aksioomide kontekstis.

Meile pakub huvi eeskätt Mostowski-Shepherdsoni teoreemi järeldus hulkade jaoks. Seda rakendame Lévy-Montague'i peegeldusprintsiibi tõestuses.

Järeldusskeem II.20 ([Wea14, lk 23]). *Olgu X hulk, mis on iseendale tõkestatuna ekstensionaalne. Leidub hulgaga X epsilonisomorfne transitiivne hulk T, s.o $X \approx T$.*

1.6. Lévy-Montague'i peegeldumisprintsiip

Algavas jaotises tõestame *Lévy-Montague'i peegeldumisprintsiibi*. Printsiip väidab, et ükskõik missuguse kinnise ZFC-keele valemi φ jaoks leidub ülimalt loenduv ning transitiivne hulk M nii, et $\varphi \Leftrightarrow \varphi|_M$. Meie kasutame peegeldumisteoreemiskeemi tõestamaks, et teooria ZFC^+ on teooria ZFC konservatiivne laiend.

Peegeldumisprintsiibi tõestuses kasutatakse lemmaskeemi, milles ehitatakse fikseeritud valemi jaoks teatud „rahuldushulk“ või „tunnistajate hulk“. Täielikus tõestuses kasutame nii regulaarsuse aksioomi kui ka valikuaksioomi.

Lemmaskeem II.21 ([Wea14, lk-d 25–26; Jec02, lk 169]). *Olgu $\varphi[x_1,\ldots,x_{n+1}] \in \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$ ja $\{x_1,\ldots,x_{n+1}\} = \mathtt{Free}(\varphi)$, $n \geqslant 0$. Olgu $i \in \{1,\ldots,n+1\}$ fikseeritud metanaturaalarv. Las olla M_0 ülimalt loenduv hulk. Siis leidub mittetühi ülimalt loenduv hulk M, kus $M_0 \subseteq M$ ning*

$$\forall x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_{n+1} \in M \big(\exists x_i \varphi[x_1,\ldots,x_{n+1}] \Rightarrow \exists x_i \in M \varphi[x_1,\ldots,x_{n+1}]\big).$$

Tõestus. Kehtigu tähistused lemmaskeemi püstitusest. Defineerime klassid $\mathcal{C}_{x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_{n+1}}[c]$, kus $x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_{n+1}$ on parameetrid ning

$$c \in \mathcal{C}_{x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_{n+1}} :\doteq \varphi[x_1, \ldots, x_i/c, \ldots, x_{n+1}].$$

Regulaarsuse aksioomi kasutanud Tarski-Scotti võttega@viide loome neist hulgad $\check{\mathcal{C}}_{x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_{n+1}}$, sealjuures $\check{\mathcal{C}}_{x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_{n+1}} \neq \varnothing$, kui $\mathcal{C}_{x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_{n+1}} \neq \varnothing$. Muuseas kehtib

$$\forall x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_{n+1} \big(\overbrace{\exists x_i \varphi[x_1, \ldots, x_{n+1}]}^{\mathcal{C}_{x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_{n+1}} \neq \varnothing} \Rightarrow \exists x_i \in \check{\mathcal{C}}_{x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_{n+1}} \varphi[x_1, \ldots, x_{n+1}]\big), \qquad (*)$$

kuna $\check{\mathcal{C}} \subseteq \mathcal{C}$. Toodud implikatsioon on lemma väitega küllalt sarnane, kuid hulga $\check{\mathcal{C}}_{x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_{n+1}}$ võimsus pole teada, samuti on teadmata sisalduvus $M_0 \subseteq \check{\mathcal{C}}_{x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_{n+1}}$.

Rekursiivse definitsiooni teoreemiga (@viide) moodustame hulkade jada $(M'_j)_{j\in\omega}$, kus

$$\begin{cases} M'_0 & := M_0 \cup \{\varnothing\}, \\ M'_{j+} & := M'_j \cup \bigcup \{ \check{\mathcal{C}}_{x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_{n+1}} \mid x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_{n+1} \in M'_j \}. \end{cases}$$

Tähistame ära jada $(M'_j)_{j\in\omega}$ ühendi, $M' := \bigcup \operatorname{ran}(M'_j)_{j\in\omega}$. Konstruktsiooni, ühendi tähenduse ning tingimuse @$(*)$ abil saab ilma valikuaksioomita näidata, et M' rahuldab *peaaegu* kõiki lemma tingimusi, v.a võib-olla ülimalt loenduvust.

Valikuaksioomi abil saame aga kokku panna kõiki tingimusi rahuldava hulga M. Loome hulga $\mathcal{P}(M')$, vaatleme sellel valikufunktsiooni ν eriväärtusega $\varnothing$. Defineerime uue hulkade jada $(M''_j)_{j\in\omega}$ nõnda, et

$$\begin{cases} M''_0 & := M_0, \\ M''_{j+} & := M''_j \cup \overbrace{\{ \nu(\check{\mathcal{C}}_{x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_{n+1}} \cap M') \mid x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_{n+1} \in M''_j \}}^{\substack{\text{kõigepealt } (M''_j)^n \text{, siis asendusega} \\ (x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_{n+1}) \mapsto \check{\mathcal{C}}_{x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_{n+1}} \cap M', \\ \text{viimaks hulga kujutis } \nu\text{-ga}}}. \end{cases}$$

Ühend $M := \bigcup \operatorname{ran}(M''_j)_{j\in\omega}$ täidab kõiki ülesande nõudeid. Loomulikult $M_0 \subseteq M$. Hulk M pole tühi: äärmisel juhul oleks $M_0 = \varnothing$, lisaks kõigi jada liikmete M''_j ning $x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_{n+1} \in M''_j$ korral $\check{\mathcal{C}}_{x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_{n+1}} \cap M' = \varnothing$, ent isegi siis valikufunktsiooni eriväärtuse tõttu $\varnothing \in M''_{j+}$ ja nii ka $\varnothing \in M$. Ülimalt loenduvust põhjendab niisugune skeem:

$$\begin{cases} M''_0 & := \overbrace{M_0}^{\substack{\text{ülimalt} \\ \text{loenduv}}}, \\ M''_{j+} & := \underbrace{M''_j}_{\substack{\text{ülimalt} \\ \text{loenduv}}} \cup \underbrace{\{ \nu(\check{\mathcal{C}}_{x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_{n+1}} \cap M') \mid x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_{n+1} \in M''_j \}}_{\substack{\text{ülimalt sama suur kui } (M''_j)^n, \\ \text{seega ülimalt loenduv}}}, \end{cases}$$

kus lõpuks $M = \bigcup \operatorname{ran}(M''_j)_{j\in\omega}$ on ülimalt loenduvate hulkade (M''_j) loenduv ühend, seega ülimalt loenduv. (Range tõestus, et hulgad M''_j on ülimalt loenduvad, käib naturaalarvulise induktsiooniga.)

Põhjendamata on lemma implikatsioon. Olgu $i \in \{1, \dots, n\}$. Valime $x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_{n+1} \in \in M$ nõnda, et $\exists x_i \varphi[x_1, \dots, x_{n+1}]$. Tingimusest @(∗) johtub, et $\exists x_i \in \check{\mathcal{C}}_{x_1,\dots,\hat{x_i},\dots,x_{n+1}} \varphi[x_1, \dots, x_{n+1}]$. Olgu mingi selline $x_i \in \check{\mathcal{C}}_{x_1,\dots,\hat{x_i},\dots,x_{n+1}}$ tähistatud kui c'. Jada $(M''_j)_{j\in\omega}$ konstruktsiooni põhjal $M''_0 \subseteq M''_1 \subseteq M''_2 \subseteq \cdots$, seetõttu mingi $J \in \omega$ korral $x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_{n+1} \in M''_J$. Kuivõrd alati $M''_j \subseteq M'_j$, eriti $M''_J \subseteq M'_J$, siis $x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_{n+1} \in M'_J$. Seega $c' \in M'_{J^+}$, nõnda ka $c' \in M'$. Järelikult valikufunktsiooni rakendamine kujul $\nu(\check{\mathcal{C}}_{x_1,\dots,\hat{x_i},\dots,x_{n+1}} \cap M')$ on ühisosa mittetühjuse tõttu sisukas: $\nu(\check{\mathcal{C}}_{x_1,\dots,\hat{x_i},\dots,x_{n+1}} \cap M') =: c'' \in \check{\mathcal{C}}_{x_1,\dots,\hat{x_i},\dots,x_{n+1}}$ korral $c'' \in M_{J^+}$, kust $\exists x_i \in M_{J^+} \varphi[x_1, \dots, x_{n+1}]$ ning viimaks $\exists x_i \in M \varphi[x_1, \dots, x_{n+1}]$.

Tulemus on tõestatud. ∎

Lemmaskeemi @II.21 saab üldistada suvalise metalõpliku arvu valemite $\phi_1, \dots, \phi_m$ jaoks, kus $m \geq 1$ ja vähemalt ühes valemis on vähemalt üks vaba muutuja [Wea14, lk-d 25–26; Jec02, lk 169]. Kui muutujate kollisiooni ei teki ning tähistame $\texttt{Free}(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_m) =: \{x_1, \dots, x_{n+1}\}$, piisab võtta $\varphi[x_1, \dots, x_{n+1}] \coloneqq \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_m$. Niisugust üldistust kasutame Lévy-Montague'i peegeldumisprintsiibi tõestuse struktuurse induktsiooni universaalkvantoriga osas.

Teoreemiskeem II.22 (Lévy-Montague'i peegeldumisprintsiip, [Wea14, lk 26; Jec02, lk-d 168, 170])**.** *Suvalise kinnise valemi $\varphi \in \texttt{Form}(\texttt{ZFC})$ korral leidub (täpselt) loenduv transitiivne hulk M nii, et $\varphi \Leftrightarrow \varphi|_M$.*

Hulka M kutsutakse *valemit φ peegeldavaks hulgaks.* Lévy-Montague'i peegeldumisprintsiibi tõestuses toome valemina φ_0 sisse ekstensionaalsuse aksioomi, et hiljem rakendada Mostowski-Shepherdsoni transitiivse kollapsi teoreemiskeemi.

Tõestus. Olgu φ_0 ekstensionaalsuse aksioom. Las olla $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ parajasti kõik valemite φ_0 ja φ osavalemid, korduvatele osavalemitele anname erinevad indeksid. Nende hulgas on kindlasti atomaarne valem, mis sisaldab vaba muutujat, ning valemid φ_0 ja φ ise. Vaatame need m valemit muutujate kollisiooni vältimiseks ühehaaval läbi. Kui $i, j, k \in \{1, \dots, m\}$ ja valem φ_i sisaldab vaba muutujat x_ℓ, mis muus valemis φ_j, $i \neq j$, esineb seotult, asendame *ühtlaselt* kõigis valemites $\varphi_{k\neq i}$ universaalkvantori alla jäävad muututuja x_ℓ esinemised. Sealjuures valime asendusmuutuja nii, et see ei esineks üldse üheski valemitest $\varphi_1, \dots, \varphi_m$. Uusi valemeid tähistame kui $\varphi_1 \mapsto \varphi'_1, \dots, \varphi_m \mapsto \varphi'_m$, muide $\varphi'_i \doteq \varphi_i$. Kordame protsessi teiste probleemsete muutujate jaoks valemitega $\varphi'_1, \dots, \varphi'_m$, saades mingi metalõpliku arvu K sammu järel kollisioonita valemid $\varphi_1^{(K)}, \dots, \varphi_m^{(K)}$. Oluline on märkida, et valemid φ_i ja $\varphi_i^{(K)}$

on loogiliselt samaväärsed, s.o $\varphi_i \equiv \varphi_i^{(K)}$, mistõttu on tuletatavad ekvivalentsid $\varphi_i \Leftrightarrow \varphi_i^{(K)}$ ja nende universaalsulundid, $i = 1, \ldots, m$. Samuti säilivad peatehted (implikatsioon jääb implikatsiooniks, eitus eituseks ning universaalkvantor universaalkvantoriks) ja vabade, seotud muutujate absoluutarvud. Edasises tõestuses kasutame nii algseid valemeid $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ kui ka uusi valemeid $\varphi_1^{(K)}, \ldots, \varphi_m^{(K)}$.

Rakendame lemmaskeemi @II.21 üldistust valemitele $\neg\varphi_1^{(K)}, \ldots, \neg\varphi_m^{(K)}$. Eelmise lõigu põhjal on lemmaskeemi rakendamine korrektne. Võttes mainitud lemmaskeemi mõttes $M_0 \coloneqq \omega$, tähistame saadavat *täpselt* loenduvat hulka tähega N. Olgu $\varphi_i = \varphi_i[x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_i}}]$, $\mathtt{Free}(\varphi_i) = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_i}}\}$, kus $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_{n_i} \geqslant 0$. Tõestame, et iga $i \in \{1, \ldots, m\}$ korral on φ_i hulga N suhtes absoluutne, st

$$\forall x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_i}} \in N\, (\varphi_i[x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_i}}] \Leftrightarrow \varphi_i[x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_i}}]\big|_M). \qquad (*)$$

Kasutame selleks struktuurset induktsiooni mööda valemite φ_0 ning φ ehitust. Induktsiooni tehes võime piirduda valemitega $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, sest need ongi parajasti valemite φ_0 ja φ_0 osavalemid.

Kui φ_i on atomaarne valem, siis tõkestamine valemit ei muuda, tulemus kehtib. Las $\varphi_i \doteq \neg\varphi_{j_1}$ või $\varphi_i \doteq (\varphi_{j_1} \Rightarrow \varphi_{j_2})$, $j_1 \neq j_2 \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i\}$. Kui @$(*)$ kehtib valemite φ_{j_1} ja φ_{j_2} jaoks, saame tulemuse üle kanda valemile φ_i nagu lemmaskeemi @II.3 tõestuseski. Uurime seega universaalkvantoriga valemeid. Olgu $\varphi_i[x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_i}}] \coloneqq \forall x_p \varphi_j[x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_i}}, x_p]$, $x_p \notin \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_i}}\}$, $j \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i\}$. Eeldame, et φ_j jaoks @$(*)$ kehtib ehk

$$\forall x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_i}}, x_p \in N\, (\varphi_j[x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_i}}, x_p] \Leftrightarrow \varphi_j[x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_i}}, x_p]\big|_N).$$

Näitame, et siis ka

$$\forall x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_i}} \in N\, \big(\forall x_p(\varphi_j[x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_i}}, x_p]) \Leftrightarrow \forall x_p \in N(\varphi_j[x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_i}}, x_p]\big|_M)\big).$$

Varasema ekvivalentsi põhjal ning metalemmaskeemi @II.2 järgi piisab tõestada, et induktsioonieeldusel

$$\forall \tilde{x}_{i_1}, \ldots, \tilde{x}_{i_{n_i}}, \tilde{x}_p \in N\, (\varphi_j^{(K)}[\tilde{x}_{i_1}, \ldots, \tilde{x}_{i_{n_i}}, x_p] \Leftrightarrow \varphi_j^{(K)}[\tilde{x}_{i_1}, \ldots, \tilde{x}_{i_{n_i}}, x_p]|_N)$$

kehtib

$$\forall \tilde{x}_{i_1}, \ldots, \tilde{x}_{i_{n_i}} \in N\, \big(\forall \tilde{x}_p(\varphi_j^{(K)}[\tilde{x}_{i_1}, \ldots, \tilde{x}_{i_{n_i}}, \tilde{x}_p]) \Leftrightarrow \forall \tilde{x}_p \in N(\varphi_j^{(K)}[\tilde{x}_{i_1}, \ldots, \tilde{x}_{i_{n_i}}, \tilde{x}_p]|_N)\big),$$

kus katusega on märgitud asendamisel saadud indiviidmuutujaid. $\Rightarrow$-suund on ilmne: kasutada induktsioonieeldust ning üleminekut universumilt U hulgale N, s.o sisalduvust $N \subseteq \mathsf{U}$. Põhjendame $\Leftarrow$-suuna. Olgu $\tilde{x}_{i_1}, \ldots, \tilde{x}_{i_{n_i}}, \tilde{x}_p \in N$ suvalised, kehtigu $\forall \tilde{x}_p \in N(\varphi_j^{(K)}[\tilde{x}_{i_1}, \ldots, \tilde{x}_{i_{n_i}}, \tilde{x}_p]|_N)$. Oletame vastuväiteliselt, et $\forall \tilde{x}_p(\varphi_j^{(K)}[\tilde{x}_{i_1}, \ldots, \tilde{x}_{i_{n_i}}, \tilde{x}_p])$ ei kehti. Siis $\exists \tilde{x}_p(\neg\varphi_j^{(K)}[\tilde{x}_{i_1}, \ldots, \tilde{x}_{i_{n_i}}, \tilde{x}_p])$. Hulga N konstruktsiooni järgi $\exists \tilde{x}_p \in N(\neg\varphi_j^{(K)}[\tilde{x}_{i_1}, \ldots, \tilde{x}_{i_{n_i}}, \tilde{x}_p])$. Induktsioonieelduse ja ekvivalentsitehte olemuse põhjal saame, et $\exists \tilde{x}_p \in N(\neg\varphi_j^{(K)}[\tilde{x}_{i_1}, \ldots, \tilde{x}_{i_{n_i}}, \tilde{x}_p]|_N)$. Vastuolu eeldusega $\forall \tilde{x}_p \in N(\varphi_j^{(K)}[\tilde{x}_{i_1}, \ldots, \tilde{x}_{i_{n_i}}, \tilde{x}_p]|_N)$.

Niisiis kehtib väide @($*$) iga φ_i jaoks, $i = 1, \ldots, m$. Muude seas on see väide tõene valemite φ_0 ning φ korral. Valemid φ_0 ja φ on kinnised, nende jaoks lihtsalt $\varphi_0 \Leftrightarrow \varphi_0|_N$ ja $\varphi \Leftrightarrow \varphi|_N$. Esimene ekvivalents $\varphi_0 \Leftrightarrow \varphi_0|_N$ ütleb, et hulk N on iseendale tõkestatuna ekstensionaalne. Rakendub Mostowski-Shepherdsoni transitiivse kollapsi teoreemiskeemi järeldusskeem @II.20: saame transitiivse hulga M, mispuhul $M \approx N$. Sestap hulk M on täpselt loenduv ning lauseskeemi @I.15 alusel (kinnise valemi φ jaoks) johtub, et $\varphi|_N \Leftrightarrow \varphi|_M$. Ekvivalentsi transitiivsusest $\varphi \Leftrightarrow \varphi|_M$.

Kokkuvõttes hulk M rahuldab teoreemiskeemi nõudeid. Tulemus on tõestatud. ■

Lévy-Montague'i peegeldumisprintsiip üldistub samuti metalõpliku arvu valemite $\phi_1, \ldots, \phi_m$ jaoks, võttes $\varphi :\doteq \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_m$, kui indiviidmuutujate kollisiooni pole.

2. Laiendamine teooriaks ZFC^+

Laiend ZFC^+ on asendusteooria. ZFC^+ pärib kõigepealt kogu teooria ZFC, sealhulgas signatuuri, aksioomid ja tuletusreeglid. Seda täiendatakse kolmes osas:

a. lisatakse konstantsümbol $\mathbf{M}$,

b. lisatakse kõigi ZFC omaaksioomide ahendid hulgale $\mathbf{M}$,

c. lisatakse väide, et $\mathbf{M}$ on loenduv ja transitiivne.

Teooria ZFC^+ kasulikkus peitub faktis, et hulk $\mathbf{M}$ ise ja temast hiljem koostatavad *jõustamislaiendid* $\mathbf{M}[G]$ on aksioomide metahulga $\mathtt{Ax}(\mathsf{ZFC})$ epsilon-kvaasimudelid. Seega saame ligipääsu konkreetsetele hulgalistele epsilon-kvaasimudelitele. Ilmutamata kujul avaldub sellise ligipääsu tähtsus näiteks metateoreemiskeemis @II.25. Teooriat ZFC^+ vaatame Weaveri [Wea14, lk 27] ning Joseph R. Shoenfieldi [Kun80, lk-d 233, 235] eeskujul.

Teooriat ZFC, kuhu on lisatud konstantsümbol $\mathbf{M}$, kuid pole lisatud ühtegi omaaksioomi, tähistame kui ZFC'. Tähistust ZFC' kasutame ainult järgmise metateoreemiskeemi tõestuses.

Skeem väidab, et laiend ZFC^+ ei muuda nende väidete tuletatavust, mis on kirja pandavad ZFC keeles. Tõestuses kasutatud *deduktsiooni-teoreemiskeemi* sõnastus on toodud lisas @D.

Metateoreemiskeem II.23 (ZFC^+ kui ZFC konservatiivne laiend)**.** ZFC^+ *on* ZFC konservatiivne laiend*, st*

$$\forall \Gamma \in \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})^{\operatorname{len}\Gamma}, \forall \varphi \in \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC}) \qquad \mathsf{ZFC} \Vdash \Gamma \vdash \varphi \text{ parajasti siis, kui } \mathsf{ZFC}^+ \Vdash \Gamma \vdash \varphi.$$

Tõestus. $\Rightarrow$-suund on selge, sest ZFC^+ on ZFC laiend ehk ZFC-teooria on ZFC^+-teooria alamteooria. Tõestame $\Leftarrow$-suuna. Oletame, et $\mathsf{ZFC}^+ \Vdash \Gamma \vdash \varphi$, olgu τ sekventsi $\Gamma \vdash \varphi$ mingi tõestus. Tuletus τ saab peale ZFC vahendite kasutada teadmist, et $\mathbf{M}$ on loenduv ja transitiivne, ning metalõplikku arvu $\mathbf{M}$-tõkestatud ZFC omaaksioome $\varphi_1', \ldots, \varphi_m'$. Nimetame omaaksioomides $\varphi_1', \ldots, \varphi_m'$ seotud muutujaid ümber nii, et need ei kattuks valemi φ vabade muutujatega. Olgu saadud valemid $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$. Puudugu indiviidmuutuja M tõestusest τ ja erinegu kõigist muutujatest valemites $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$. Defineerime abivalemi $\mathtt{CT}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_m}[M]$, kus

$$\mathtt{CT}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_m}[M] :\doteq \text{„}M \text{ on loenduv“} \wedge \text{„}M \text{ on transitiivne“} \wedge \varphi_1|_M \wedge \cdots \wedge \varphi_m|_M.$$

Indiviidmuutujate kollisiooni olla ei saa, sest valemite φ_i näol on (sisuliselt) tegu ZFC--hulgateooria aksioomidega, tähendab kinniste valemitega.

Valemi $\mathtt{CT}$ konstruktsioonist seega $\mathsf{ZFC}' + \mathtt{CT}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_m}[M/\mathbf{M}] \Vdash \Gamma \vdash \varphi$. Deduktsiooni-teoreemiskeemist johtub, et $\mathsf{ZFC}' \Vdash \Gamma, \mathtt{CT}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_m}[M/\mathbf{M}] \vdash \varphi$. Struktuurne induktsioon mööda tuletusreegleid annab $\mathsf{ZFC}' \Vdash \Gamma, \mathtt{CT}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_m}[M] \vdash \varphi$ (iga iganes reegel, mis sobib konstandi $\mathbf{M}$ jaoks, sobib indiviidmuutuja M jaoks). Edasi tuletusreegli $(\exists\vdash)^*$ abil $\mathsf{ZFC}' \Vdash \Gamma, \exists M(\mathtt{CT}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_m}[M]) \vdash \varphi$. Arusaadavalt siis $\mathsf{ZFC}' \Vdash \Gamma \vdash (\exists M(\mathtt{CT}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_m}[M]) \Rightarrow \varphi)$. Viimaks

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \exists M(\mathtt{CT}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_m}[M])}\text{(peegeld., aksioomid)}}{\Gamma \vdash \exists M(\mathtt{CT}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_m}[M])}(\operatorname{len}(\Gamma) \times (\mathrm{S}+)) \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash (\exists M(\mathtt{CT}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_m}[M]) \Rightarrow \varphi)}\text{(eeld)}}{\Gamma \vdash \varphi}(\vdash\not\Rightarrow)^\ddagger,$$

kus vasakpoolne haru kasutab Lévy-Montague'i peegeldumisprintsiipi @II.17 valemil $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_m$, samuti teadmist, et $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_m$ on teoorias ZFC' tuletav, kuna valemite $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ näol on sisuliselt tegu ZFC aksioomidega.

Järelikult $\mathsf{ZFC}' \Vdash \Gamma \vdash \varphi$. Kuivõrd ZFC' oli lihtsalt ZFC koos konstantsümboliga $\mathbf{M}$, johtub (taas struktuurse induktsiooniga mööda tuletusreegleid, @vb viide) soovitud tulemus $\mathsf{ZFC} \Vdash \Gamma \vdash \varphi$. ■

Kui teoorias ZFC pole süntaktilist vasturääkivust, ei saa süntaktilist vasturääkivust olla teoorias ZFC^+.

Metajäreldus II.24 ([Wea14, lk-d 27–28])**.** *Kui teooria* ZFC *on süntaktiliselt mittevasturääkiv, on süntaktiliselt mittevasturääkiv ka* ZFC^+*.*

Tõestus. Oletame, et ZFC^+ on süntaktiliselt vasturääkiv. Plahvatusprintsiibi tõttu on tuletatavad kõik keeles kirja pandavad valemid, eriti on tuletatav $\vdash \varphi \wedge \neg\varphi$ mingi (iga) $\varphi \in \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$ korral. Metateoreemiskeemi @II.23 alusel oli ZFC^+ teooria ZFC konservatiivne laiend, sestap $\mathsf{ZFC} \Vdash \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$. Niisiis on süntaktiliselt vasturääkiv ka teooria ZFC. ■

Kontiinumihüpoteesi sõltumatuse tõestus tugineb järgmisele metateoreemiskeemile. Taas rakendame deduktsiooni-teoreemiskeemi.

Metateoreemiskeem II.25 (väite ϕ sõltumatus, [Wea14, lk 28])**.** *Olgu* $\phi \in \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$ *kinnine valem. Olgu* N *valemite hulga* $\mathtt{Ax}(\mathsf{ZFC}) \cup \{\phi\}$ *mittetühi epsilon-kvaasimudel teoorias* ZFC^+*. Siis kui teooria* ZFC *on süntaktiliselt mittevasturääkiv, on süntaktiliselt mittevasturääkiv ka* $\mathsf{ZFC} + \phi$*.*

(Teisisõnu, lause ϕ on teooriast ZFC sõltumatu.)

Tõestus. Olgu teooria $\mathsf{ZFC} + \phi$ süntaktiliselt vasturääkiv. Plahvatusprintsiibist muu seas $\mathsf{ZFC} + \phi \Vdash \vdash \Psi \wedge \neg\Psi$ mingi (iga) kinnise valemi $\Psi \in \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$ jaoks. Deduktsiooni-teoreemiskeemist $\mathsf{ZFC} \Vdash \phi \vdash \Psi \wedge \neg\Psi$. Kuna ZFC^+ on teooria ZFC laiend, siis $\mathsf{ZFC}^+ \Vdash \phi \vdash \Psi \wedge \neg\Psi$. Metateoreemiskeemi @II.1 järgi, võttes $T \coloneqq \mathsf{ZFC}^+$, $\Gamma \doteq \phi$, $\varphi \doteq \Psi \wedge \neg\Psi$, $M \coloneqq N$ ning vajadusel epsilon-kvaasimudeli N muutujaid ümber nimetades, saame $\mathsf{ZFC}^+ \Vdash \phi|_N \vdash (\Psi \wedge \neg\Psi)|_N$. (Metateoreemiskeemis @II.1 nõutakse valemi $\varphi \doteq \Psi$ kinnisust.) Eelduse järgi oli $\mathsf{ZFC}^+ \Vdash \vdash \phi|_N$, niisiis reegli $(\vdash \Rightarrow)^\ddagger$ kaudu $\mathsf{ZFC}^+ \Vdash \vdash (\Psi \wedge \neg\Psi)|_N$ ehk ahendamise definitsiooni põhjal $\mathsf{ZFC}^+ \Vdash \vdash \Psi|_N \wedge \neg\Psi|_N$. Tähendab, teooria ZFC^+ on süntaktiliselt vasturääkiv, metajäreldusest @II.24 oleks sütaktiliselt vasturääkiv ka teooria ZFC. ■

2.1. Mitteabsoluutseid hulgateooria omadusi ja konstruktsioone

Oleme valmis põhjendama varasemat metalauseskeemi @II.10, @viide. Rääkides „välisest seisukohast“, kasutame mõistete ja seoste tähendusi n-ö tavalises, universumi $\mathbf{U}$ vaatenurgast lähtudes. Kui ütleme „sisemisest seisukohast“, siis mõtleme samu mõisteid ja seoseid ahendatuna hulgale $\mathbf{M}$. Välisest seisukohast rääkides öeldakse tihti „meie“, sisemisese seisukoha korral räägitakse „nendest“ või „$\mathbf{M}$-elanikest“. [Kun80, lk 141; Wea14, lk 45]

Metalauseskeem II.10 (mitteabsoluutsuse näiteid)**.** *Leidub teooria* ZFC *laiend (asendusteooria)* $\mathcal{T}$*, kus*

(1) $\mathcal{T}$ *on* ZFC *konservatiivne laiend;*

(2) *kui* ZFC *on süntaktiliselt mittevasturääkiv, on süntaktiliselt mittevasturääkiv ka* $\mathcal{T}$*;*

(3) *leidub valemite hulga* $\mathtt{Ax}(\mathsf{ZFC})$ *mittetühi transitiivne epsilon-kvaasimudel* $\mathcal{M}$ *teoorias* $\mathcal{T}$*, mille suhtes* i) $X = \mathcal{P}(Y)$, ii) $X \sim Y$, iii) „X on loenduv“, iv) $X = \mathsf{V}_\alpha$ *ei ole absoluutsed.*

Tõestus. Teooria $\mathcal{T}$ rolli sobib ZFC^+. Väited @1) ja @2) on vastavalt @metateoreemiskeem @II.23 ja @metajäreldus II.24. Teooria ZFC^+ ülesehituse põhjal on hulk $\mathbf{M}$ valemite hulga $\mathtt{Ax}(\mathsf{ZFC})$ transitiivne epsilon-kvaasimudel, arusaadavalt mittetühi, näiteks $\omega^{\mathbf{M}} = \omega \in \mathbf{M}$.

i) Uurime hulka $X \coloneqq \mathcal{P}^{\mathbf{M}}(\omega^{\mathbf{M}}) = \mathcal{P}^{\mathbf{M}}(\omega) \in \mathbf{M}$. Transitiivsusest $\mathcal{P}^{\mathbf{M}}(\omega) \subseteq \mathbf{M}$, ja kuna välisest seisukohast on $\mathbf{M}$ loenduv, siis on $\mathcal{P}^{\mathbf{M}}(\omega)$ universumi mõttes ülimalt loenduv: meie arvates leidub bijektsioon hulkade ω ning $\mathcal{P}^{\mathbf{M}}(\omega)$ vahel. Cantori teoreemi tõttu on $\mathcal{P}(\omega)$ mitteloenduv. Johtub, et $\mathcal{P}^{\mathbf{M}}(\omega) \neq \mathcal{P}(\omega)$.

ii), iii) Hulk $\mathcal{P}^{\mathbf{M}}(\omega)$ on universumi mõttes ka vähemalt loenduv. Iga naturaalarvu $n \in \omega$ korral $n^{\mathbf{M}} = n \in \mathbf{M}$ (transitiivsus ja metateoreemiskeem @II.9 jaotis @(4) osa @ii)). Sestap $\{n\} \in \mathbf{M}$. Kuivõrd $\{n\} \subseteq \omega$ ja alamhulgalisus on absoluutne, siis $\{n\}^{\mathbf{M}} = \{n\} \in \mathcal{P}^{\mathbf{M}}(\omega)$ iga $n \in \omega$ puhul (metateoreemiskeem @II.9 jaotis @(1) osa @ii)). Järeldame, et „välisest seisukohast“ lähtudes on $\mathcal{P}^{\mathbf{M}}(\omega)$ vähemalt loenduv, kokkuvõttes osa @i) põhjal täpselt loenduv. Sisemisest seisukohast pole $\mathcal{P}^{\mathbf{M}}(\omega)$ loenduv, põhjenduseks Cantori teoreemi ahendus ning @metateoreemiskeem @II.1. Järelikult ei saa loenduvus ega võrdvõimsuslikkus $\mathbf{M}$-absoluutsed olla.

iv) Osaga @i) sarnane analüüs näiteks V_{ω^+} jaoks. Välimisest seisukohast on ${\mathsf{V}_\alpha}^{\mathbf{M}} \in \mathbf{M}$ ülimalt loenduv, sest transitiivsusest ∎

Ehkki tegu pole absoluutsete omadustega, võime mitteabsoluutsust ositi ohjeldada.

Metalause II.26 ([Kun80, lk 130])**.** *Olgu* $\mathcal{T} \supseteq \mathsf{ZF}$ *asendusteooria. Olgu* $\mathcal{M}$ *valemite metahulga* $\Psi \subseteq \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$ *mittetühi transitiivne epsilon-kvaasimudel teoorias* $\mathcal{T}$*, kus metahulka* Ψ *täpsustame allpool. Kehtivad järgmised väited.*

(1) *Valemihulgaga* $\Psi = \mathtt{Ax}(\mathsf{Z} - \mathsf{P})$*: klass* $\mathcal{M}$ *on potentshulga moodustamise aksioomi epsilon-kvaasimudel parajasti siis, kui iga* $X \in \mathcal{M}$ *korral* $\mathcal{P}(X) \cap \mathcal{M} \in \mathcal{M}$*.*

(2) *Valemihulgaga* $\Psi = \mathtt{Ax}(\mathsf{Z})$*: iga* $X \in \mathcal{M}$ *korral on hulk* $\mathcal{P}(X)$ *klassina absoluutne kvaasi-*

mudeli $\mathtt{M}$ suhtes, st $\mathcal{P}(X)^{\mathtt{M}} = \mathcal{P}(X) \cap \mathtt{M}$.

(3) *Valemihulgaga $\Psi = \mathtt{Ax}(\mathsf{Z}^- - \mathsf{Inf})$: võrdvõimsuslikkus on klassist $\mathtt{M}$ ülespoole absoluutne, st iga $X, Y \in \mathtt{M}$ korral $(X \sim Y)|_{\mathtt{M}} \Rightarrow X \sim Y$.*

(4) *Valemihulgaga $\Psi = \mathtt{Ax}(\mathsf{ZF})$: iga $\alpha \in \mathtt{Ord} \cap \mathtt{M} = \mathtt{Ord}^{\mathtt{M}}$ puhul on Zermelo – von Neumanni kumulatiivse hierarhia α. aste klassina absoluutne kvaasimudeli $\mathtt{M}$ suhtes, st $\mathsf{V}_\alpha{}^{\mathtt{M}} = \mathsf{V}_\alpha \cap \mathtt{M}$.*

Tõestus. (1) Meenutame potentshulga moodustamise aksioomi I peatükist @viide:

$$\vdash \forall X \exists Y \forall Z (Z \in Y \Leftrightarrow Z \subseteq X).$$

Selle ahend klassile $\mathtt{M}$ on, arvestades @metateoreemiskeemi @II.7,

$$\vdash \forall X \in \mathtt{M} \exists Y \in \mathtt{M} \forall Z \in \mathtt{M} (Z \in Y \Leftrightarrow Z \subseteq X).$$

Väite ekvivalentsi tõestamiseks tuleks näidata mõlemas suunas, et tõkestatud potentshulga moodustamise aksioomi mõttes sobib võtta $Y := \mathcal{P}(X) \cap \mathtt{M}$. Märgime, et hulga $\mathcal{P}(X)$ ühese leidumise tagab siinkohal asjaolu, et $\mathsf{T} \supseteq \mathsf{ZF} \supseteq \mathsf{Z}$.

(„$\Rightarrow$“) Kehtigu potentshulga moodustamise aksioom. Teoorias Z on tõestatav potentshulkade ühene leidumine. Klass $\mathtt{M}$ on valemihulga Z mittetühi transitiivne epsilon-kvaasimudel teoorias T. @Metateoreemiskeemi @II.1 mõttes läheb potentshulga ühese leiduvuse tõestus läbi klassis $\mathtt{M}$. Järelikult iga $X \in \mathtt{M}$ jaoks on hulk $Y := \mathcal{P}(X)^{\mathtt{M}}$ korrektselt määratud, sealjuures

$$\forall Z \in \mathtt{M} (Z \in \mathcal{P}(X)^{\mathtt{M}} \Leftrightarrow Z \subseteq X).$$

Kvaasimudeli $\mathtt{M}$ transitiivsuse alusel ekvivalentselt

$$\forall Z (Z \in \mathcal{P}(X)^{\mathtt{M}} \Leftrightarrow Z \subseteq X \wedge Z \in \mathtt{M}).$$

Samal ajal $\forall Z (Z \in \mathcal{P}(X) \cap \mathtt{M} \Leftrightarrow Z \subseteq X \wedge Z \in \mathtt{M})$ ühisosa ning potentshulga määratlustest. Ekstensionaalsusaksioomist $\mathcal{P}(X)^{\mathtt{M}} = \mathcal{P}(X) \cap \mathtt{M}$.

(„$\Leftarrow$“) Valime $X \in \mathtt{M}$. Võtame $Y := \mathcal{P}(X) \cap \mathtt{M}$. Kuuluvus $Y \in \mathtt{M}$ eeldusest $\mathcal{P}(X) \cap \mathtt{M} \in \mathtt{M}$. Väide $\forall Z \in \mathtt{M} (Z \in \mathcal{P}(X) \cap \mathtt{M} \Leftrightarrow Z \subseteq X)$ kehtib selgesti ühisosa ning potentshulga definitsioonide põhjal.

(2) Tõestatud jaotise (1) tarvilikkuse osas, s.o $\Rightarrow$-suunas.

(3) Vahetu, sest $M \subseteq \mathtt{U}$, bijektiivseks funktsiooniks olemine on absoluutne klassi M suhtes, vt @metateoreemiskeemi @II.7 jaotise @(5) osasid @iii) ja @viii).

(4) Olgu $\alpha \in \mathtt{Ord} \cap M$. Transitiivusest tuleneva sisalduvuse $\mathtt{V}_\alpha{}^M \subseteq M$ tõttu piisab tõestada, et iga $x \in M$ korral $x \in \mathtt{V}_\alpha{}^M \Leftrightarrow x \in \mathtt{V}_\alpha$. Hulga astaku definitsiooni ning lause @I.25 osa @(3) abil on teoorias ZF tõestatav väite $x \in \mathtt{V}_\alpha \Leftrightarrow \mathtt{Rank}(x) < \alpha$ universaalsulund, lause @I.28 osa @(2). Metateoreemiskeemi @II.1 järgi on tõestatav selle universaalsulundi M-ahend, kust tuleb hulga astakufunktsiooni absoluutsuse ning sisalduvuste $\alpha, x \in M$ põhjal väide $x \in \mathtt{V}_\alpha{}^M \Leftrightarrow \mathtt{Rank}(x_1) < \alpha$. Järelikult tõesti $x \in \mathtt{V}_\alpha \Leftrightarrow x \in \mathtt{V}_\alpha{}^M$.

■

III peatükk

Jõustamine

Hulk $\mathbf{M}$ on valemihulga $\mathtt{Ax}(\mathsf{ZFC})$ mittetühi epsilon-kvaasimudel teoorias ZFC^+, sealjuures loenduv ja transitiivne. Metateoreemiskeemi @II.1 mõttes lähevad hulgas $\mathbf{M}$ läbi kõik teoreemid ning konstruktsioonid nagu universumis $\mathtt{U}$, kuigi mitteabsoluutsete võtete ja elementide puuduse tõttu ei pruugi tõkestatud tegevuse tulemus ühtida tõkestamata tegevuse tulemiga. Palju tuttavaid objekte on kvaasimudelis $\mathbf{M}$ siiski tuvastavad, kas või $\varnothing$, ω, ω^2, põhjenduseks metateoreemiskeem @II.9.

Transitiivsusest ja välisest loenduvusest johtub, et hulk $\mathbf{M}$ sisaldab, meie universumi seisukohast lähtuvalt, üksnes ülimalt loenduvaid elemente. Teiste seas on päriselt loenduvad $\mathcal{P}(\omega)^{\mathbf{M}} = \mathcal{P}(\omega) \cap \mathbf{M}$ (@metalauseskeemi @II.10 jaotise @(3) osad @(i–iii) ja @metalause @I.26 osa @(2)) ning ${\aleph_1}^{\mathbf{M}}$, kus $\aleph_1$ on väiksuselt teine lõpmatu kardinaalarv. Ei saa järeldada, et kontiinumihüpotees kvaasimudelis $\mathbf{M}$ kehtib: ükski bijektsioon $f\colon \mathcal{P}(\omega)^{\mathbf{M}} \to {\aleph_1}^{\mathbf{M}}$ ei pruugi hulka $\mathbf{M}$ kuuluda. Metateoreemiskeemist @II.1 selliste bijektsioonide ehitamisel abi pole, sest funktsiooni $f\colon \mathcal{P}(\omega)^{\mathbf{M}} \to {\aleph_1}^{\mathbf{M}}$ konstruktsioon sisaldab konstantsümbolit $\mathbf{M}$. Metateoreemiskeemi nõuete seas oli tõik, et valemid on just ZFC-keeles. Üleüldse defineerisime valemi ahendamise ainult ZFC-keele valemitele. $\mathbf{M}$-kodanikud ei tea, et neil on erinevaid hulki ja funktsioone puudu, meie aga küll.

Oletame, et tõesti ükski bijektsioon $f\colon \mathcal{P}(\omega)^{\mathbf{M}} \to {\aleph_1}^{\mathbf{M}}$ ei kuulu hulka $\mathbf{M}$, $f \notin \mathbf{M}$. Metateoreemiskeemi @II.25 näol tahaksime kontiinumihüpoteesi kooskõlalisuse tõestamiseks leida valemihulgale $\mathtt{Ax}(\mathsf{ZFC}) \cup \{\phi\}$ mittetühja transitiivse epsilon-kvaasimudeli $\mathbb{N}$, kus ϕ väidab, et $\mathcal{P}(\omega) \sim \aleph_1$. Kõige naiivsemad katsed kvaasimudeli $\mathbb{N}$ ehitamiseks nurjuvad. Katsetame näiteks varianti $\mathbb{N} \coloneqq \mathbf{M} \cup \{f\}$. Niisuguse valikuga on vähemalt kolm muret.

1) Hulk $\mathbb{N}$ ei ole ilmtingimata transitiivne. Probleemi võime lahendada, võttes hoopis

$\mathbb{N} := \mathrm{TC}(\mathbf{M} \cup \{f\})$. Selline hulk $\mathbb{N}$ on muide välisest seisukohast loenduv, sest hulgad $\mathbf{M}$ ja $\{f\}$ on regulaarsed ja päranduvalt ülimalt loenduvad.

2) Kõigest ühe elemendi f lisamine ega transitiivse sulundi rakendamine ei taga, et $\mathbb{N}$ jääks valemihulga $\mathtt{Ax}(\mathsf{ZFC})$ epsilon-kvaasimudeliks $\mathbb{N}$. Näiteks, kas vastavalt nõuetele kehtib sisalduvus $\bigcup(\omega^2 \times f^3) \times f \times \mathcal{P}^{\mathbb{N}}(\aleph_5{}^{\mathbb{N}}) \in \mathbb{N}$? Kui ühehaaval võimalikke puuduolevaid elemente veel lisada, satume tagasi punktidesse @1) ja @2) ehk astume tsüklisse.

3) Eeldame, et kavala nipiga õnnestuks funktsioon $f \colon \mathcal{P}(\omega)^{\mathbf{M}} \to \aleph_1{}^{\mathbf{M}} \in \mathbb{N}$ nii, et $\mathbb{N}$ on jätkuvalt valemihulga $\mathtt{Ax}(\mathsf{ZFC})$ transitiivne epsilon-kvaasimudel. Ikkagi langeme lõksu, kuivõrd objektid $\mathcal{P}(\omega)^{\mathbb{N}}$ ja $\aleph_1{}^{\mathbb{N}}$ ei pruugi ühtida algsete hulkadega $\mathcal{P}(\omega)^{\mathbf{M}}$ ja $\aleph_1{}^{\mathbf{M}}$. Uues kvaasimudelis $\mathbb{N}$ aga just olekski tarvis bijektsiooni $g \colon \mathcal{P}(\omega)^{\mathbb{N}} \to \aleph_1{}^{\mathbb{N}} \in \mathbb{N}$. [Wea14, lk 30]

Seega laiendamist või üldisemalt, transitiivse epsilon-kvaasimudeli $\mathbb{N}$ koostamist tuleb teha väga suure hoole ning tõsise tähelepanelikkusega. *Jõustamise meetod* (van *forsseerimine*, ingl *forcing*) seda võimaldabki. Lihtsustatult öeldes

- hulk $\mathbb{N} := N$ ehitatakse hulga $\mathbf{M}$ laiendina, täpsemini $N := \mathbf{M}[G]$.
- Vajaliku objekti otsese lisamise asemel vaadeldakse hulka $\varnothing \neq P \in \mathbf{M}$, mis koosneb puudu olnud objekti n-ö osalistest konstruktsioonidest, lähendustest. Lähendused on $\mathbf{M}$-kodanikele nähtavad, sest $P \in \mathbf{M}$. Hulka P kutsutakse *tingimuskogumiks*.
- Lähenduste-tingimuste kogum $G \subseteq P$ on „heade omadustega“, kui tegu on *geneerilise ideaaliga*. Sealjuures kuigi $G \subseteq P$, on reeglina $G \notin \mathbf{M}$. Seega geneeriline ideaal G tuleb juurde võtta, lisada. Hoolimata sellest, et lähendused ise on hulgas $\mathbf{M}$ olemas, sest $G \subseteq \mathbf{M}$.
- Tagamaks, et on saadav N on jätkuvalt valemihulga $\mathtt{Ax}(\mathsf{ZFC})$ transitiivne epsilon-kvaasimudel, ei saa piirduda hulga G lisamisega ega sellejärgse lõpliku lappimisega. Lisamist tehakse hoopis kahe potentselt regulaarse rekursiooniga. Esimese potentselt regulaarse rekursiooniga tähendatakse üles kõik „potentsiaalsed“ hulga N elemendid (*P-nimed*). Teises rekursioonis „leitakse üles“ hulka $N = \mathbf{M}[G]$ kuuluvad elemendid (*P-nimede kandjad*).
- Jõustamise põhiteoreemiskeem ütleb, et kirjeldatud konstruktsioon on korrektne ning sisukas.

Selgub, et $\mathbf{M}[G]$ on $\subseteq$-vähim aksioomide hulga $\mathtt{Ax}(\mathsf{ZFC})$ transitiivne epsilon-kvaasimudel, kus $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{M}[G]$ ja $G \in \mathbf{M}[G]$ [Kun80, lk 189]. Kvaasimudelist $\mathbf{M}$ puuduva G lisamise soov on lõppeks niisiis võrreldav algebras tehtavaga, kui ehitatakse korpuse laiendeid. Alustades näiteks korpusest $\mathbb{R}$, lisatakse element i nii, et saadav N oleks ikkagi korpus ning $\mathrm{i}^2 = -1$. Teame, et $N = \mathbb{R}[\mathrm{i}] = \mathbb{C}$. Jõustamine kui laiendamisprotsess on komplitseeritum kui korpuse laiendamine, sest ZFC on korpuseteooriast aksioomide mõttes keerulisem. Algebralisest analoogiast pärineb ka tähistus $\mathbf{M}[G]$.

Vahetult järgnevas defineerime vajaminevad mõisted täpsemalt. Seejärel teeme läbi tingimuskogumi ja geneerilise ideaali tähendust ilmestava näite. Tõestame osaliselt jõustamise põhiteoreemi koos tarvilike eeltulemustega. Kontiinumihüpoteesi sõltumatuse tõestuses, millest meie anname üksnes üldsise ülevaate, laiendatakse hulk $\mathbf{M}$ kaheks uueks loenduvaks, transitiivseks epsilon-kvaasimudeliks $\mathbb{N}_1$ ja $\mathbb{N}_2$. Peale hulgateooria aksioomide mudeldaksid need $\mathbb{N}_1$ ning $\mathbb{N}_2$ vastavalt valemeid ϕ ja $\neg\phi$, kus ϕ tähistab kontiinumihüpoteesi. Täpsemini leitakse kaks hulka $\varnothing P_1, P_2 \subseteq \mathbf{M}$ ja geneerilist ideaali $G_1 \subseteq P_1, G_2 \subseteq P_2$, mille abil moodustatakse jõustamisprotseduuriga sobivad $\mathbb{N}_1 \coloneqq N_1 \coloneqq \mathbf{M}[G_1]$ ja $\mathbb{N}_2 \coloneqq N_2 \coloneqq \mathbf{M}[G_1]$. Meie kontiinumihüpoteesi sõltumatust tõestada ei jõua, piirdume üksnes sobivate hulkade P_1 ja P_2 välja toomisega ning viidetega kirjandusele.

Jõustamise defineeris esimesena matemaatik Paul Joseph Cohen 1963.–1964. aastal [Coh63; Coh64]. Teooriat täiendasid, avasid või lihtsustasid Dana Stewart Scott, Robert Martin Solovay ning Joseph Robert Shoenfield [Kun80, lk 235], samuti Petr Vopěnka ning Petr Hájek [Jec02, lk 224]. Meie teooriakäsitlus tugineb eeskätt Nik Weaverile [Wea14], Herbert Kenneth Kunenile [Kun80; Kun13] ja läbi nende Joseph Robert Shoenfieldile [Kun80, lk-d 235–236].

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@edasises laused, lemmad, nende skeemid ja metavariandid hetkel ei klapi...

1. Jõustamise põhimõisted ja -konstruktsioonid

Jõustamise teooria arendamiseks on eri võimalusi. Meie kasutame Weaveri [Wea14] järgi *ideaale* ning järjestusena osahulgalist üksnes alamhulgalist sisalduvust $\subseteq$. Räägime edasises taas abstraktsemalt epsilon-kvaasimudelist M, mitte konkreetsest kvaasimudelist $\mathbf{M}$.

1.1. Jõustamiskogum. Geneeriline ideaal

Defineerime puuduvate objektide lähendamisega seotud mõisted.

Definitsioon III.1 (jõustamiskogum, tugevus, geneeriline ideaal, [Wea14, lk 30])**.** Olgu M valemihulga $\texttt{Form}(\mathsf{ZFC})$ loenduv transitiivne epsilon-kvaasimudel teoorias $\mathsf{T} \supseteq \mathsf{ZFC}$.

a. Suvalist hulga M mittetühja elementi $\varnothing \neq P \in M$ kutsutakse *tingimuskogumiks*. Paari

$(P, \subseteq_P) \in M$ nimetatakse *jõustamiskogumiks.* (Siin $\subseteq_P :== \{ (x, y) \in P \times P \mid x \subseteq y \}$.)

- Tingimuskogumi P elemente $p \in P$ kutsutakse *jõustamistingimusteks.*
- Kui $p, q \in P$ on jõustamistingimused ja $p \subseteq q$, siis ütleme, et q *on tugevam kui* p või p *on nõrgem kui* q. Rõhutame, et tugevus on defineeritud *mitterangena* ehk refleksiivsena, iga tingimus on muuseas iseendast tugevam. Võib mõelda, et tugevam jõustamistingimus annab lähendatava objekti kohta rohkem teavet kui nõrgem tingimus [HJ99, lk-d 275–276].
- Kaks jõustamistingimust $p, q \in P$ on *ühitatavad* ehk *teineteisega kooskõlas*, kui leidub mõlemast tugevam tingimus $r \in P$, s.o $p, q \subseteq r$. Ühitavate tingimuste jagatav teave pole vastuoluline.

b. Tingimuskogumi P alamhulki $D \subseteq P$ kutsutakse *alamkogumiteks.*

- Alamkogum $T \subseteq P$ on P *suhtes tugev* (*tihe*), kui igal jõustamistingimusel $p \in P$ leidub temast tugevam tingimus q hulgas T, $q \in T$.
- Olgu $G \subseteq P$ alamkogum, mis täidab allpoolseid nõudeid @1) ja @2).
  1) G on nõrgemate tingimuste suhtes kinnine. See tähendab, iga jõustamistingimuse $g', g \in P$ korral, kui $g \in G$ ja $g' \subseteq g$, siis ka $g' \in G$. Teisisõnu peab kehtima $g^{\subseteq} \cap P \subseteq G$ ehk $\mathcal{P}(g) \cap P \subseteq G$.
  2) G sisaldab oma elementide kooskõlalisuse tunnistajaid. Teisiti öeldes on G $\subseteq$-suunatud hulk. Pikemalt väljendatuna peab iga tingimuse $g_1, g_2 \in G$ korral leiduma mõlemast tugevam jõustamistingimus $h \in G$.

  Nõudeid @1) ja @2) täitvat alamkogumit $G \subseteq P$ kutsutakse *ideaaliks.*
- Ideaali $G \subseteq P$ nimetatakse *geneeriliseks ideaaliks*, kui see lõikub iga M-nähtava P suhtes tugeva alamkogumiga T. Tähendab $G \cap T \neq \varnothing$, kui $T \in M$ on P suhtes tugev alamkogum.

(Hulga M elemente $m \in M$ kutsume aeg-ajalt M-*nähtavateks.*)

Jõustamisteooria ideaalil on põhimõtteliselt sama tähendus nagu ideaalil järjestusteoorias osaliselt järjestatud hulga $(P, \subseteq_P)$ kontekstis. Üks erinevus on fakt, et järjestusteoorias nõutakse ideaalilt veel mittetühjust, st $G \neq \varnothing$. Meile pole ideaali tühjus-mittetühjus otseselt oluline, kuivõrd tegutseme genereerilise ideaaliga, mille jaoks on mittetühjus tõestatav. Põhjenduseks märgime, et tingimuskogum P ise on P suhtes tugev, kust $G \cap P \neq \varnothing$ annab, et $G \neq \varnothing$. Teine, sarnane erinevus on meie nõue, et $P \neq \varnothing$, mis vastupidi puudub järjestusteooria ideaali definitsioonist. Lahknevust selgitab taas jõustamisteooria keskendumine genereerilisele ideaalile. Olukorras $P = \varnothing$ ei leiduks ühtegi genereerilist ideaali, samuti järeldub järjestusteooria ideaali mittetühjusest kohe hulga P mittetühjus. Kolmandaks, jõustamisteooria ideaali definitsioon on formaalselt antud valemihulga $\mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$ loenduva transitiivne epsilon-kvaasimudeli M kontekstis, milleks järjestusteooria üldisemas käsitluses pole tarvidust. Viimaks kasutatakse järjestusteoorias sisalduvuse $\subseteq_P$ asemel üldisemat mitteranget eeljärjestust $\preccurlyeq$ hulgal P. M--nähtavaid eeljärjestusi $\preccurlyeq \in M$ võib kasutada ka jõustamisteoorias, kuigi täiendavat võimekust võrreldes sisalduvusega $\subseteq_P$ ei lisandu, vt [Wea14, lk-d 121–122].

Jõustamisteooria ideaali ning hulgateooria ideaali võrdlus on üsna identne jõustamis- ja järjestusteooria ideaalide kõrvutamisega, kui järjestusteooria eeljärjestuseks võtta $\subseteq$. Arutelu lahkneb teise erinevuse koha pealt. Hulgateoorias alustatakse suvalisest hulgast S ja seejärel võetakse $P \coloneqq \mathcal{P}(S)$, mistõttu $P \neq \varnothing$ on vahetu järeldus. Tingimuskogum P ei pruugi olla ühegi hulga potentshulgaks, välises mõttes ei saakski olla, kui P on välises mõttes loenduv – järeldus Cantori teoreemist. Märgime, et tühi hulk kuulub hulgateooria ideaali, sest $\varnothing \in \mathcal{P}(S)$. Jõustamisteoorias kutsutakse niisugust tingimushulka P, mispuhul $\varnothing \in P$, *juurega tingimuskogumiks*. Juurelisuse eeldamine on teatud kontekstis kasulik ega vii üldisuse kaoni, vt jaotist @III.1.5.4. Teine muutus on kooskõlalisuse tunnistaja osas. Nimelt nõutakse hulgateooria ideaali puhul kooskõlalisuse tunnistajana just ühendit. Tähendab, tingimus @2) asendatakse tugevama nõudega, et iga $g_1, g_2 \in G$ korral $g_1 \cup g_2 \in G$. Meil pole nii spetsiifilist kooskõlalisuse tunnistajat tarvis. Üldise topoloogia ideaal on hulgateooria mõttes ideaal, kus lisaks nõutakse kogu lähtehulga S puudumist, $S \notin G$.

Soovitame lugejal alati veenduda, missugust ideaali (filtri) määratlust on autor kasutanud. Eelnenud võrdluses kasutatud definitsioonid on toodud lisas @D.

1.2. Mõistete sisu selgitav näide

Tegemist on jõustamisteooria klassikalise näitega [Jec02, lk 202; Wea14, lk-d 31–32; Kun80, lk-d 192–193], kuid mille sisu oleme kirjandusest põhjalikumalt avanud.

Vaatleme konkreetsuse mõttes valemihulga $\mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$ loenduva transitiivse epsilon-kvaasimudeli osas hulka $\mathbf{M}$. Nägime, et $\mathbf{M}$ ei sisalda kõiki funktsioone $f \colon \mathcal{P}(\omega)^{\mathbf{M}} \to \aleph_1{}^{\mathbf{M}}$. On palju teisigi funktsioone, mis välisest seisukohas peavad hulgast $\mathbf{M}$ puuduma. Näiteks ei tohi välise loenduvuse tõttu hulgas $\mathbf{M}$ olla kõiki funktsioone hulgast $\omega^{\mathbf{M}} = \omega$ hulka $\{0,1\}^{\mathbf{M}} = \{0,1\}$. Teatavasti kodeerivad niisugused funktsioonid naturaalarvude hulga ω alamhulki, mida on välisest (ja sisemisest) seisukohast lähtudes mitteloenduv kogus, kuid välisest vaatenurgast peab hulka $\mathbf{M}$ kuuluma loenduvalt palju naturaalarvulisi alamhulki.

Naturaalarvude hulk ω ja kaheelemendiline $\{0,1\}$, samuti $\omega \times \{0,1\}$, on konstantidena $\mathbf{M}$-absoluutsed. Iga funktsioon $g\colon \omega \to \{0,1\}$ on hulga $\omega \times \{0,1\}$ osahulk, $g \subseteq \omega \times \{0,1\}$. Osahulgaks olemine on $\mathbf{M}$-absoluutne, ka funktsioonilisus. Loetletud faktidest ei piisa kõigi funktsioonide $g\colon \omega \to \{0,1\}$ kuulumiseks hulka $\mathbf{M}$, absoluutsus seda ei taotlegi. Absoluutsuse definitsioon algab tõkestatud kvantoritega, seega räägib see just hulga $\mathbf{M}$ elementidest. Absoluutsus väidab, et kui $g \in \mathbf{M}$, siis meie universum $\mathbb{U}$ ja $\mathbf{M}$ nõustuvad hinnangus, kas g on funktsioon hulgast ω hulka $\{0,1\}$. Olukorras $(g\colon \omega \to \{0,1\}) \notin \mathbf{M}$ – väline loenduvus ütleb, et niisuguseid funktsioone on mitteloenduv kogus – ei teki absoluutsusega vastuolu, just põhjusel, et $g \notin \mathbf{M}$.

Oletame, et tahame juurde lisada ükskõik millist puudunud funktsiooni $g\colon \omega \to \{0,1\}$. Kirjeldame, kuidas võiks taolise lähte- ning sihthulgaga „geneerilist“ kujutust geneerilise ideaaliga „lähendada“. Võtame jõustamiskogumiks $(P, \subseteq_P)$, kus tingimuskogumiks on

$$P \coloneqq \{\, h\colon A \to \{0,1\} \mid A \subseteq \omega \wedge \text{„}A \text{ on lõplik“} \,\}.$$

Korrektsuseks peame tõestama, et $P \in \mathbf{M}$. Eelmise lõigu arutelu põhjal annaks seotud objektide ja omaduste absoluutsuse kasutamine, et $P^{\mathbf{M}} \in \mathbf{M}$, kus

$$P^{\mathbf{M}} = \{\, (h\colon A \to \{0,1\}) \in \mathbf{M} \mid A \subseteq \omega \wedge \text{„}A \text{ on lõplik“} \,\},$$

millest meile *a priori* ei piisa. Oleks tarvis, et $P^{\mathbf{M}} = P$. Selgesti $P^{\mathbf{M}} \subseteq P$. Tõestame vastupidise sisalduvuse $P^{\mathbf{M}} \supseteq P$. Olgu $h \in P$ suvaline. Põhjenduses teeme sisuliselt läbi metalemmaskeemi @II.8 @(b) osa tõestuse funktsiooni $h\colon A \to \{0,1\}$ jaoks. Naturaalarvuhulga ω absoluutsusest ja hulga $\mathbf{M}$ transitiivsusest $\omega \subseteq \mathbf{M}$. Kui $A \subseteq \omega$, siis $A \subseteq \mathbf{M}$. Metalemmaskeemi @II.8 osa @(a) põhjal $A \in \mathbf{M}$, sest A on lõplik. Seega otsekorrutise absoluutsusest $A \times \{0,1\} \in \mathbf{M}$, hulga $\mathbf{M}$ transitiivsusest $A \times \{0,1\} \subseteq \mathbf{M}$. Arusaadavalt $h \subseteq A \times \{0,1\} \subseteq \mathbf{M}$. Kuna h on lõplik, siis uuesti @metalemmaskeemi @II.8 osa @(a) järgi $h \in \mathbf{M}$. Kokkuvõttes $P^{\mathbf{M}} \supseteq P$, kust $P^{\mathbf{M}} = P$ ja $P \in \mathbf{M}$, nagu soovisime.

Tingimuskogumi P elemendid ehk tingimused on siin kõikvõimalikud lõplikud funktsioonid $h\colon A \to \{0,1\}$. Funktsiooni $g\colon \omega \to \{0,1\}$ lähendamist võib mõista nii, et võetakse üha pikemaid funktsioone (lõplikke jadasid), mis jadaga $g\colon \omega \to \{0,1\}$ igal võrreldaval kohal ühtivad. Üks tingimus h_2 on tugevam tingimusest h_1, kui $h_1 \subseteq h_2$. Teisisõnu on h_2 funktsiooni h_1 jätk ja vastupidi, h_1 funktsiooni h_2 ahend. Tingimused $h_1, h_2 \in P$ on ühitatavad või teineteisega kooskõlas, kui neile leidub ühine jätk $h_{12} \in P$, kus $h_1, h_2 \subseteq h_{12}$. Niisugune laiend h_{12} leidub parajasti siis, kui h_1, h_2 on funktsioonidega ühitatavad, st iga $n \in \operatorname{dom}(h_1) \cap \operatorname{dom}(h_1)$ korral $h_1(n) = h_2(n)$. Sealjuures sobib kooskõlalisuse tunnistajaks ka funktsioonide ühend

$h_1 \cup h_2$.

Kõik tingimused pole ühitatavad, *kaugeltki mitte*. Nullide-ühtede jada $(h(k))_{k \in n}$ pikkusega $\operatorname{dom}(h) = n \in \omega$ on ühitatav parajasti $n+1$ hulga P funktsiooniga, mille määramispiirkond sisaldub arvus n. Kõiki funktsioone hulgas P määramispiirkonnaga ülimalt n on $2^{n+1} - 1$. Vastav suhe $(n+1)/(2^{n+1}-1)$ läheneb lõpliku jada pikkuse kasvades selgesti nullile. Asümptootiline tihedus on null, selles mõttes on ühitatavaid funktsioone kõigi hulga P jadade seas kõigest tühine kogus. Tingimuste kooskõlalisus pole ka ekvivalentsiseos. Transitiivsust ei ole, kuna võime paarikaupa kooskõlalisust säilitades „vahetada“ binaarse rekursiooni haru: 00 on kooskõlas 0-iga, mis on kooskõlas 01-ga. Tipud 00 ja 01 ühitatavad pole.

Antud juhul on kooskõlalised parajasti niisugused funktsioonid, mis tekivad binaarse rekursiooni ühes „fikseeritud“ harus. Üks näide kooskõlaliste funktsioonidega alamkogumist on ideaal. Ideaali teine tingimus, kooskõlalisuse tunnistaja olemasolu ideaalis, tagab otseselt ideaali kuuluvate jadade ühitatavuse. Kinnisus nõrgemate tingimuste suhtes tagab, et kui funktsioon h kuulub ideaali, siis kuuluvad sinna ka kõik funktsiooni h ahendid. Selles mõttes mäletab ideaal endasse kuuluvate funktsioonide konstruktsiooni binaarses rekursioonis. Mainime praegu täpsemalt selgitamata, et kinnisusest nõrgemate tingimuste suhtes järelduvad tugevuse abitulemused ning tuleneb hiljem defineeritava jõustamisseose koherentsus. Paraku ei lähenda ideaal ilmtingimata ühtegi täisfunktsiooni $g\colon \omega \to \{0, 1\}$, kuna ideaali ei pruugi kuuluda kuitahes suure pikkusega jadasid. Ideaal saab olla ka auklik, sisaldamata naturaalarvu $n \in \omega$ korral ühtegi funktsiooni, mis oleks kohal n määratud. Aukude puudumisel poleks pikkuse probleem võimalik, kuna funktsioonide h_k, kus $k = 0, \ldots, n \in \omega$ ja $k \in \operatorname{dom}(h_k)$, kooskõlalisuse tunnistaja on vähemalt pikkusega $n + 1$.

Ideaali „auklikkuse probleemi“ lahendaks täiendav geneerilisuse omadus. Põhjus seisneb asjaolus, et hulgad T_n, kus $n \in \omega$ ja

$$T_n \coloneqq \{\, u \in P \mid n \in \operatorname{dom} u \,\} \subseteq P,$$

kuuluvad hulka $\mathbf{M}$ ning on hulga P suhtes tugevad. Kuuluvus hulka $\mathbf{M}$ johtub teadmisest, et $P \in \mathbf{M}$, hulgale $\mathbf{M}$ tõkestatud eraldamisaksioomiskeemist ning valemi $n \in \operatorname{dom} u$ absoluutsusest. Tugevus hulga P suhtes tuleneb juhtude läbi vaatamisest. Olgu $h \in P$ suvaline. On kaks varianti: kas $n \in \operatorname{dom} h$ või $n \notin \operatorname{dom} h$. Esimesel juhul $h \in T_n$ ja tugevuse refleksiivsuse tõttu asi korras. Teisel juhul võime funktsiooni h laiendada funktsiooniks u, võttes näiteks $u \coloneqq h \cup \{(n, 0)\}$, ning $u \in T_n$ on tugevam kui h. Ideaali geneerilisuse implikatsiooni eeldus on täidetud. Seega kui $G \subseteq P$ on geneeriline ideaal, siis iga $n \in \omega$ korral $T_n \cap G \neq \varnothing$. Järelikult auke ei saa geneerilises ideaalis olla, iga $n \in \omega$ korral leidub $h \in G$, mispuhul $n \in \operatorname{dom} h$.

Kuna auke pole, ei saa olla pikkuse probleemi.

Geneerilise ideaali $G \subseteq P$ poolt lähendatava funktsiooni $g\colon \omega \to \{0,1\}$ kohta võime veel öelda, et $g = \bigcup G$. Ühend kleebib siin kõik g osalised konstruktsioonid kokku, aukude puudumise ja liimitavate lõplike jadade ühitatavuse tõttu on tegu täisfunktsiooniga hulgal ω. Reaalarvude binaarsest esitusest kantuna kutsutakse niisugust funktsiooni g *Coheni geneeriliseks reaalarvuks*. Teisest vaatenurgast lisab G uue loenduva „geneerilise“ naturaalarvuhulga, sest $\{\, n \in \omega \mid g(n) = 1 \,\}$ on funktsiooni g abiga absoluutselt eraldatav. Sõna „geneeriline“ viitab siin meie teadmatusele sellest, missugune on lisatav funktsioon g. Näiteks pole teada (ja antud juhul polegi võimalik teada saada) kujutuse g väärtust ühegi sisendi korral. Võiksime algset tingimuskogumit muuta, võttes tingimuskogumiks P_0, kus

$$P_0 \coloneqq \{\, h \in P \mid 0 \in \operatorname{dom} h \wedge h(0) = 0 \,\}.$$

Nõnda jätkates saaksime jadad $g_{P_{012\ldots n}}$, mille kohta teame kõiki väärtusi kohani $n \in \omega$, kuid kirjeldus on ikkagi osaline, mitte täielik. Alles olukorras, kus jõustamiskogum on järgmise jaotise mõttes *triviaalne*, saab kirjeldus olla täielik, kuid siis pole laiendamisel mõtet: juba alguses kehtiks $G \in \mathbf{M}$.

Funktsiooni g väärtuste teada saamise võimatus johtub Rasiowa-Sikorski lemmast, mis ütleb, et iga $p \in P$ korral leidub geneeriline ideaal $G \subseteq P$ nii, et $p \in G$. Antud näite kontekstis tähendab see, et ükskõik mis valikuid oleme binaarses rekursioonis seni teinud, jääb ikka alles „valikute komplekt“, mis viib geneerilise ideaalini. Järgmises jaotiseses tehtavast järeldub muide, et siinne G ei kuulu hulka $\mathbf{M}$, s.o $G \notin \mathbf{M}$.

Täpsuse huvides mainime veel, et toodud tingimuskogumi P enda elemendid pole tavamõttes saadavad mitte binaarse, vaid *ternaarse* rekursiooniga, kus nulli või ühe võtmise asemel on kolmandaks variandiks „mitte millegi“ valimine, valimata jätmine (ehk funktsiooni defineerimata jätmine vastaval sisendil).

1.3. Geneerilise ideaali leiduvus ja kuuluvus

Ükskõik millise tingimuskogumi P korral leidub alati ideaal $G \subseteq P$, nimelt tühi hulk. Vastamata on küsimus, kas geneerilisuse omadusega ideaal üldse leidub. Rasiowa-Sikorski lemma väidab, et geneeriline ideaal on alati olemas, sealjuures võime nõuda lisatingimuse kehtivust. Teise küsimusena uurime, millal kuulub geneeriline ideaal algsesse epsilon-kvaasimudelisse M, st millal kehtib $G \in M$.

Teoreem III.1 (Rasiowa-Sikorski lemma, [Wea14, lk 32])**.** *Olgu K ülimalt loenduv hulk,*

$P \in K$ ja $\varnothing \neq P \subseteq K$. Iga $p_0 \in P$ jaoks leidub geneeriline ideaal $G \subseteq P$ nii, et $p_0 \in G$.

Teoorias $\mathsf{T} \supseteq \mathsf{ZFC}$ aksioomide hulga $\mathtt{Ax}(\mathsf{ZFC})$ transitiivse ja loenduva epsilon-kvaasimudeli M korral on Rasiowa-Sikorski lemma eeldused loomulikult täidetud. Ent hulga M transitiivsust ega mudeldatavust pole siin üldse tarvis, mistõttu pole me seda teoreemi sõnastuses nõudnud. Geneerilise ideaali leiduvust võiks siin samuti mõista niisuguses üldisemas kontekstis.

Hulga K loenduvus on aga määrava tähtsusega. See on üks tulemus, mille jaoks on tarvis meie kvaasimudeli M loenduvust. Tõestuses pole valikuaksioomi vaja.

Rasiowa-Sikorski lemma tõestus. Hulk K on ülimalt loenduv, seega hulga P suhtes tugevaid alamkogumeid hulgas K on samuti ülimalt loenduv kogus, üks neist P ise. Olgu $(T_k)_{k\in\omega}$ tugevate hulkade ammendav loend (kordused lubatud), kusjuures $T_0 \coloneqq P$. Et $P \neq \varnothing$, siis iga $k \in \omega$ korral $T_k \neq \varnothing$. Iga $k \in \omega$ puhul $T_k \subseteq P \subseteq K$, järelikult ühend $T \coloneqq \bigcup_{k\in\omega} T_k = \bigcup \operatorname{ran}(T_k)_{k\in\omega}$ on ülimalt loenduv. Nummerdame hulga T elemendid ammendavalt jadana $(\tau_k)_{k\in\omega}$, kus kordused lubatud.

Paneme tähele, et hulk T on potentselt järjestatav: saame järjestuse naturaalarvuhulgalt ω üle kanda ja vältida valikuaksioomi kasutamist. Nimelt kahe elemendi $t_1, t_2 \in T$ kõrvutamiseks võrdleme vähimaid indekseid $k_1, k_2 \in \omega$, mispuhul $\tau_{k_1} = t_1$, $\tau_{k_2} = t_2$. Geneerilise ideaali komplekteerimiseks ehitame kujutuse $(u_n)_{n\in\omega}$. Jada n^+. sammul valime P suhtes tugevast hulgast T_{n^+} vähima elemendi, mis ühtlasti on tugevam jada eelmisest liikmest u_n. Täpsemini $u\colon \omega \to T$, kus

$$\begin{cases} u_0 & \coloneqq p_0, \\ u_{n^+} & \coloneqq \boldsymbol{G}(n^+, u(n)), \end{cases}$$

milles $\boldsymbol{G}\colon \omega \times T \to T$ ja

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}(k,x) = t \Leftrightarrow t \in T_k \wedge \exists \ell \in \omega\big(t = \tau_\ell \wedge \tau_\ell \supseteq x \wedge \\ \wedge \forall m \in \omega(t = \tau_m \wedge \tau_m \supseteq x \Rightarrow l \leqslant m)\big). \end{aligned}$$

Funktsiooni $\boldsymbol{G}$ definitsioon on korrektne: nõutav element arv $\ell \in \omega$ ja element $t = \tau_l \in T_k$ alati leiduvad, sest T_k on P suhtes tugev. Jada u_n ehitust võib põhjendada näiteks @järeldusskeemi @I.22 variandiga, milles fiktiivse muutuja x on hoopis aktiivne ja p_0 on parameeter.

Geneeriliseks ideaaliks sobib võtta

$$\begin{aligned} G \coloneqq\ & \mathcal{P}(\operatorname{ran}(u_n)_{n\in\omega}) \cap P = \\ & = \{\, p \in P \mid \exists n \in \omega(p \subseteq u_n) \,\}. \end{aligned}$$

Selgesti $G \subseteq P$. Kehtib lisatingimus $p_0 \in G$, sest $P \ni p_0 \subseteq u_0$. Alamhulgalisuse $\subseteq$ transitiivsusest johtub G kinnisus nõrgemate tingimuste suhtes. Tingimuste $g, g' \in G$, kus $g \subseteq u_n$, $g' \subseteq u_{n'}$, kooskõlalisuse tunnistajaks sobib $u_{\max\{n,n'\}}$, sest kujutus $(u_n)_{n\in\omega}$ on $\subseteq$-kasvav. Kokkuvõttes on G ideaal. Geneerilisus on vahetu, sest $(T_k)_{k\in\omega}$ oli ammendav loetelu P suhtes tugevatest hulkadest ning $u_k \in T_k$ iga $k \in \omega$ korral. ■

Rasiowa-Sikorski lemma rakendamisel kasutame hulga M transitiivsust selleks, et saada alamhulgaline sisalduvus $P \subseteq M$.

Kui K on ülimalt loenduv sisemisest seisukohast lähtuvalt, saaksime Rasiowa-Sikorski lemma üle kanda epsilon-kvaasimudelisse M metateoreemiskeemiga @II.1. Samas rangelt definitsiooni @III.1 mõttes geneerilist ideaali hulgas $K := M$ me niimoodi ei saa. Hulk M ei ole sisemisest vaatenurgast ehk M-kodanike jaoks loenduv. Hulk M pole M-kodanikele isegi hulk, vaid pärisklass U. Hulga M sees ei pruugi olla tõestuses vaja läinud tugevate hulkade jada $(T_k)_{k\in\omega}$, seega ka mitte jadasid $(\tau_k)_{k\in\omega}$ ega $(u_n)_{n\in\omega}$. Eriti kehtib toodud arutelu juhul $M := \mathbf{M}$.

Missuguste tingimuskogumite P korral leidub geneeriline ideaal $G \in M$? Vastuse annab järgmine

lause III.2 (geneerilise ideaali kuuluvus kvaasimudelisse, [Wea14, lk 33])**.** *Olgu M aksioomide hulga* $\mathtt{Ax}(\mathsf{ZFC})$ *transitiivne ja loenduv epsilon-kvaasimudel teoorias* $\mathsf{T} \supseteq \mathsf{ZFC}$*. Ütleme, et* jõustamistingimus $p \in P$ on triviaalne, *kui kõik sellest tugevamad tingimused hulgas P on omavahel kooskõlas. Kehtib tulemus*

$$\forall \varnothing \neq P \in M\big(\exists p \in P(\text{„}p \text{ on triviaalne“}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \exists G \in M(\text{„}G \subseteq P \text{ on geneeriline ideal“})\big).$$

Tõestus. Anname tõestuse idee.

(„$\Rightarrow$“) Kui $p \in P$ on triviaalne tingimus, sobib võtta

$$G := \{\, g \in P \mid \exists s \in P(p, g \subseteq s) \,\},$$

sealjuures $G \in M$, sest defineeriv tingimus $\exists s \in P(p, g \subseteq s)$ on M-absoluutne, $P \in M$ ning M on eraldamisaksioomiskeemi epsilon-kvaasimudel.

(„$\Leftarrow$“) Triviaalse tingimuse puudumisest johtub, et hulk $P \setminus G$ on P suhtes tugev. Kui oleks $G \in M$, siis hulkade vahe M-absoluutsusest funktsioonina $P \setminus G \in M$. Ideaali geneerilisus nõuaks võimatut lõikuvust $G \cap (P \setminus G) \neq \varnothing$, vastuolu. ■

Reeglina jõustamiskogumis triviaalset tingimust ei leidu, seega tavaliselt $G \notin M$ ning laiendamine on sisukas.

***Jaotise @1.2 näite jätk,* [Kun80, lk-d 192–193].** Meenutame, et tingimuskogumiks $P \in \in \mathbf{M}$ oli

$$P = \{\, p\colon A \to \{0,1\} \mid A \subseteq \omega \wedge \text{„}A \text{ on lõplik“} \,\}.$$

Niisugusel tingimuskogumil pole kunagi geneerilist ideaali $G \in \mathbf{M}$, sest triviaalne jõustamistingimus puudub. Kui $p \in P$ on suvaline, siis $\max A + 1 \notin \operatorname{dom} p =: A$. Tingimused $q_0 := p \cup \{(\max A + 1, 0)\}$ ja $q_1 := p \cup \{(\max A + 1, 1)\}$ on tugevamad kui p, kuid pole omavahel kooskõlas (mõlemast tugevam tingimus ei oleks funktsioon).

Saime, et $G \notin \mathbf{M}$. Kas on mõeldav, et sellest hoolimata $g := \bigcup G \in \mathbf{M}$? Vastus on eitav. Nimelt alamkogum $T := \{\, q \in P \mid \neg(q \subseteq g) \,\}$ on P suhtes tugev. Kui $p \in P$ ja $A := \operatorname{dom} p$, siis

$$q := p \cup \bigl(\{(\max A + 1, 0), (\max A + 1, 1)\} \setminus \{(\max A + 1, g(\max A + 1))\}\bigr)$$

on tugevam kui p ning $q \in T$. Samal ajal $G \cap T = \varnothing$, sest olukorras $g' \in G$ arusaadavalt $g' \subseteq \bigcup G = g$. Kui oleks $g \in \mathbf{M}$, annaks $\mathbf{M}$-tõkestatud eraldamisaksioomiskeem, et $T \in \mathbf{M}$. Ideaali geneerilisusest tuleneks $G \cap T \neq \varnothing$, vastuolu. $\triangle$

1.4. Tugevuse abimõisted ja -lemmad

Sõnastame kaks lemmat, mida on mugav kasutada jõustamise põhiteoreemi tõestuses [Wea14, lk-d 38–39]. Lemmade endi põhjenduseks kasutame omakorda abilemmat. Abilemma ütleb, et geneeriline ideaal lõikub ka teatud hulkadega, mis ei tarvitse olla P suhtes tugevad.

Abilemma III.3 ([Wea14, lk-d 38–39])**.** *Olgu M aksioomide hulga* $\mathsf{Ax}(\mathsf{ZFC})$ *transitiivne ja loenduv epsilon-kvaasimudel teoorias $\mathsf{T} \supseteq \mathsf{ZFC}$. Las olla $G \subseteq P$ geneeriline ideaal. Olgu $D \in M$ alamkogum $D \subseteq P$, mispuhul iga G element on mingi D elemendiga ühitatav. Siis $G \cap D \neq \varnothing$.*

Tõestus. Vaatleme hulka

$$T_D := \{\, \tau \in P \mid \text{„}\tau \text{ on tugevam kui mingi } D \text{ element“} \vee \\ \vee \text{„}\tau \text{ pole ühegi } D \text{ elemendiga ühitatav“} \,\}.$$

Selgesti $T_D \subseteq P$. Lisaks $T_D \in M$, sest see on eraldatud M-nähtavast hulgast P eraldamisaksioomi abil, kusjuures eraldamiseks kasutatav valem on M-absoluutne ning parameeter D on samuti M-nähtav.

Alamkogum T_D on hulga P suhtes tugev. Tõesti, olgu $p \in P$. On kaks võimalust. Kui p pole ühegi T_D elemendiga kooskõlas, siis kohe $p \in T_D$ ja tugevuse refleksiivsuse tõttu korras. Kui p on ühitatav mingi D elemendiga d, siis nende kooskõlalisuse tunnistaja $q \supseteq p, d$ on tugevam kui $d \in D$, sestap $q \in T_D$, korras. Ideaali geneerilisusest johtub, et $G \cap T_D \neq \varnothing$.

Valime $g \in G \cap T_D$. Abilemma eelduse järgi on $g \in G$ hulga D mingi elemendiga kooskõlas, seega $g \in T_D$ kaudu kehtib hulga T_D defineerinud disjunktsiooni esimene pool. Tähendab, g on tugevam kui teatav D element d'. Ideaal on nõrgemate tingimuste suhtes kinnine, kust $d' \in G$ ja viimaks $d' \in G \cap D \neq \varnothing$. ∎

Lemmade sõnastamiseks on mõistlik defineerida paar täiendavat tugevusega seotud mõistet.

Definitsioon III.2 (hulga tugevus, ülitugevus, täielik ülitugevus, [Wea14, lk 30])**.** a. Alamkogumit $T \subseteq P$ nimetatakse *tingimuse p suhtes tugevaks*, kui hulgas T leidub p-st tugevam element.

b. Alamkogumit $T \subseteq P$ nimetatakse *alamkogumi $E \subseteq P$ suhtes tugevaks*, kui T on iga $e \in E$ suhtes tugev. (Varem oli defineeritud tugevus konkreetselt P suhtes.)

c. Ütleme, et alamkogum $T \subseteq P$ on *tingimuse p suhtes ülitugev*, kui T on hulga

$$\{\, q \in P \mid \text{„}q \text{ on tugevam kui } p\text{“} \,\} = p^{\supseteq} \cap P$$

suhtes tugev (kogum $p^{\supseteq}$ on pärisklass). Erijuhul sisaldab T kõiki p-st tugevamaid elemente, $p^{\supseteq} \cap P \subseteq T$. Sel juhul räägime alamkogumi T *täielikust ülitugevusest p suhtes.*

Täielikust ülitugevusest p suhtes johtub ülitugevus iga p-st tugevama elemendi suhtes. Ülitugevusest p suhtes järeldub tugevus kõigi p-st tugevamate elementide suhtes.

Sõnastame ja tõestame lemmad. Mõlemat tõestuses rakendame abilemmat @III.3.

Lemma III.4 ([Wea14, lk-d 38–39])**.** *Olgu M aksioomide hulga* $\mathtt{Ax}(\mathsf{ZFC})$ *transitiivne ja loenduv epsilon-kvaasimudel teoorias* $\mathsf{T} \supseteq \mathsf{ZFC}$*. Las olla $G \subseteq P$ geneeriline ideaal. Kui alamkogum $T \subseteq P$ on M-nähtav ja ükskõik millise $g' \in G$ suhtes ülitugev, siis $G \cap T \neq \varnothing$.*

Tõestus. Eelduste põhjal $T \subseteq P$ ja $T \in M$. Näitame, et iga G element on ühitatav mingi T elemendiga. Las $g \in G$. Ideaali definitsiooni põhjal leidub g ja g' kooskõlalisuse tunnistaja q. Hulk T on ülitugev g' suhtes, järelikult tugev q suhtes. Tugevuse tunnistaja $T \ni \tau \supseteq q$ tunnistab ka elementide g ja τ ühitatavust. Abilemma @III.3 nõuded on rahuldatud, võttes $D \coloneqq T$, seega $G \cap T \neq \varnothing$. ∎

Teine lemma ütleb, et iga alamkogum $H \supseteq G$ on mingi G elemendi suhtes täielikult ülitugev.

Lemma III.5 ([Wea14, lk-d 38–39]). *Olgu M aksioomide hulga $\mathtt{Ax}(\mathsf{ZFC})$ transitiivne ja loenduv epsilon-kvaasimudel teoorias $\mathsf{T} \supseteq \mathsf{ZFC}$. Las olla $G \subseteq P$ geneeriline ideaal. Kui alamkogum $H \subseteq P$ on M-nähtav ja $G \subseteq H$, siis H on mingi tingimuse $\tilde{g} \in G$ suhtes täielikult ülitugev.*

Tõestus. Kuna $G \subseteq H$, siis $G \cap (P \setminus H) = \varnothing$. Vältimaks abilemma @III.3 rakendumist hulgale $D \coloneqq P \setminus H$ ja seega vastuolu tingimusega $G \cap (P \setminus H) \neq \varnothing$, peab leiduma niisugune $\tilde{g} \in G$, mis pole ühegi $P \setminus H$ elemendiga kooskõlas. Iseäranis ongi H tingimuse $\tilde{g}$ suhtes täielikult ülitugev. Kui ükskõik milline $\tilde{g}$-st tugevam q ei kuuluks hulka H, kehtiks $q \in P \setminus H$, mis sobiks g ja q kooskõlalisuse tunnistajaks, vastuolu $\tilde{g}$ valikuga. ■

1.5. P-nimed, Weaveri P-nimed. P-nimede kandjad. Jõustamislaiend $M[G]$

Üldiselt jäi geneeriline ideaal $G \subseteq P$ väljapoole loenduvast epsilon-kvaasimudelist M. Lause @III.2 järgi kuulus $G \in M$ parajasti siis, kui tingimuskogumis P leidus triviaalne tingimus. Tavaliselt triviaalset tingimust ei eksisteeri, seega peame kvaasimudelile M geneerilise ideaali G lisama. Sealjuures tuleb tagada, et saadav $M[G]$ oleks jätkuvalt valemihulga $\mathtt{Ax}(\mathsf{ZFC})$ transitiivne epsilon-kvaasimudel teoorias ZFC^+. [Wea14, lk 33]

Mudeldamise säilitamiseks peame jõustamislaiendis arvestama „uute hulkadega“, mis kvaasimudelis M olid nähtamatud. Kui M-kodanik saaks „ilmutuse“ geneerilisest ideaalist $G \notin M$, võiks niisugune kodanik moodustada varem tundmatuid kvaasimudeli M hulkade $X \in M$ alamhulki:

$$R^{-1}(G) \coloneqq \{\, x \in X \mid \exists p \in G((x,p) \in R) \,\},$$

kus $R \subseteq X \times P$ on suvaline M-nähtav seos. Paraku on uusi M-hulki palju rohkem. Kui uus $Y \in M$ on käes, võib hulga X asendada hulgaga Y ja pöördseoste moodustamist korrata. Vajame meetodit, kuidas ühekorraga uusi hulki kirjeldada. [Wea14, lk 34]

Osutub, et uute hulkade leidmise protsessi saame jagada kahte ossa [Wea14, lk 34].

1) Kõigepealt moodustame seoste hierarhia $(\mathsf{V}^P_\alpha)_{\alpha \in \mathtt{Ord}}$, mida kutsutakse *$P$-nimede hierarhiaks*. Hierarhia moodustamine ei sõltu geneerilisest ideaalist G, kuid viiakse läbi meie universumis.

   - Weaveri [Wea14, lk 34] eeskujul eraldame P-nimede hulgast *ülespoole $\subseteq$-kinnised*

P-nimed. P-nimede ja ülespoole kinniste P-nimede $(\mathtt{W}^P_\alpha)_{\alpha\in\mathtt{Ord}}$ moodustamise rekursioon on absoluutne, niisuguses tähenduses läheb P-nimede konstruktsioon läbi epsilon-kvaasimudeli M sees.

2) Saadud seostest ehk P-nimede moodustame pöördseosed, saadav hulk on $M[G]$. Vastavaid pöördseoseid kutsume *P-nimede kandjateks*. Protsess toimub tüüpiliselt väljaspool epsilon-kvaasimudelit M, sest reeglina $G \notin M$. [Kun80, lk-d 188–189]

***Märkus* III.3.** Bakalaureusetöös toodud *Weaveri P-nimi* ja Weaveri [Wea14, lk 34] mõttes *P-nimi* lõpuni ei kattu. Weaveri [Wea14, lk 34] P-nimi oleks meie mõttes **M**-*tõkestatud Weaveri P-nimi*, vt @allpool. Tegime niisuguse muudatuse, et paremini avada tavaliste ning Weaveri P-nimede omavahelist seost, mis on kahe nimevariandi paralleelseks rakendamiseks tarvilik. Mõlemat variandi tundes saame valida sellise P-nime, mille kasutamine on parasjagu lihtsam. Märgime ka, et ainult Weaveri [Wea14, lk 34] definitsiooniga piirdudes poleks varasemate absoluutsuse tulemuste kasutamine võimalik, sest vastav definitsioon poleks antav teooria ZFC keeles, sisaldades konstantsümbolit **M**.

Järgnevas neljas alamjaotises defineerime nimetatud mõisted rangelt ja tõestame nende kohta käivaid lihtsamaid omadusi.

1.5.1. P-nime definitsioon ja absoluutsus

Alustame *P-nimede* definitsioonist ehk seosete hierarhiast. P-nimed ehitatakse transfiniitse rekursiooniga (järeldusskeem @I.22, tingimuskogum P on parameetri rollis).

Definitsioon III.4 (P-nimi, nimeastak, [Wik22; Kun80, lk 188])**.** Olgu P tingimuskogum. Hierarhiat $(\mathtt{V}^P_\alpha)_{\alpha\in\mathtt{Ord}}$ nimetatakse *P-nimede hierarhiaks*, kui

$$\begin{cases} \mathtt{V}^P_0 &= \varnothing, \\ \mathtt{V}^P_{\alpha^+} &= \mathcal{P}(\mathtt{V}^P_\alpha \times P), \\ \mathtt{V}^P_\alpha &= \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathtt{V}^P_\beta, \text{ kui } \alpha \neq 0 \text{ on piirordinaalarv.} \end{cases}$$

Vastavat ühendklassi $\mathtt{V}^P = \bigcup_{\alpha\in\mathtt{Ord}} \mathtt{V}^P_\alpha$ kutsutakse *P-nimede klassiks*. Elemente $\tau \in \mathtt{V}^P$ kutsutakse *P-nimedeks*. Hulga x *nimeastak* defineeritakse järgmiselt:

$$\mathtt{nRank}(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{kui } x \in \mathtt{V}^P_{\alpha^+} \land x \notin \mathtt{V}^P_\alpha, \\ \varnothing & \text{mujal.} \end{cases}$$

Weaveri [Wea14, lk 34] järgi defineerime *ülespoole $\subseteq$-kinnised P-nimed, nimeastaku.*

Definitsioon III.5 (ülespoole $\subseteq$-kinnine ehk Weaveri P-nimi, [Wea14, lk 34])**.** Olgu P tingimuskogum. Hierarhiat $(\mathtt{W}^P_\alpha)_{\alpha\in\mathtt{Ord}}$ nimetatakse *P-nimede hierarhiaks*, kui

$$\begin{cases} \mathtt{W}^P_0 &= \varnothing, \\ \mathtt{W}^P_{\alpha^+} &= \{\, \tau \in \mathcal{P}(\mathtt{W}^P_\alpha \times P) \mid \text{„}\tau \text{ on ülespoole } \subseteq\text{-kinnine“} \,\}, \\ \mathtt{W}^P_\alpha &= \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathtt{W}^P_\beta, \text{ kui } \alpha \neq 0 \text{ on piirordinaalarv,} \end{cases}$$

kus

$$\text{„}\tau \text{ on ülespoole } \subseteq\text{-kinnine“} :\doteq (\forall\sigma \in \operatorname{dom}\tau)(\forall p,q \in P)\big((\sigma,p) \in \tau \wedge p \subseteq q \Rightarrow (\sigma,q) \in \tau\big).$$

Vastavat ühendklassi $\mathtt{W}^P = \bigcup_{\alpha\in\mathtt{Ord}} \mathtt{W}^P_\alpha$ kutsutakse *ülespoole $\subseteq$-kinniste P-nimede klassiks.* Elemente $\tau \in \mathtt{W}^P$ kutsutakse *ülespoole $\subseteq$-kinnisteks P-nimedeks.* Lühemalt räägime *Weaveri P-nimedest.* Hulga x *Weaveri nimeastak* defineeritakse järgmiselt [Wea14, lk 34]:

$$\bar{\mathtt{n}}\mathtt{Rank}(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{kui } x \in \mathtt{W}^P_{\alpha^+} \wedge x \notin \mathtt{W}^P_\alpha, \\ \varnothing & \text{mujal.} \end{cases}$$

Järgmine lause avab (Weaveri) P-nimede struktuuri ning tavalise ning Weaveri P-nimede omavahelist seost.

Lause III.6. (1) *Tühi hulk $\varnothing$ on (Weaveri) P-nimi (Weaveri) nimeastakuga* 0. *Iga $1 \geqslant \alpha \in$ $\in \mathtt{Ord}$ puhul $\varnothing \in \mathtt{V}^P_\alpha \cap \mathtt{W}^P_\alpha$.*

(2) *Kui τ on (Weaveri) P-nimi ja $x \in \tau$, siis $x = (\sigma,p)$, kus σ on mingisugune (Weaveri) P-nimi, $p \in P$ ning ($\bar{\mathtt{n}}\mathtt{Rank}(\sigma) < \bar{\mathtt{n}}\mathtt{Rank}(\tau)$) $\mathtt{nRank}(\sigma) < \mathtt{nRank}(\tau)$.*

(3) *Iga ordinaalarvu α,β korral, kui $\alpha \leqslant \beta$, siis $\mathtt{V}^P_\alpha \subseteq \mathtt{V}^P_\beta$* [Van16, lk 21] *ja $\mathtt{W}^P_\alpha \subseteq \mathtt{W}^P_\beta$.*

(4) *Kui hulk τ koosneb paaridest (σ,p), kus σ on P-nimi ja $p \in P$, siis τ on P-nimi. Kui hulk τ koosneb paaridest (σ,p), kus σ on Weaveri P-nimi, $p \in P$, ja τ on ülespoole $\subseteq$-kinnine, siis τ on Weaveri P-nimi.*

(5) *Iga $\alpha \in \mathtt{Ord}$ korral $\mathtt{W}^P_\alpha \subseteq \mathtt{V}^P_\alpha$.*

(6) *Iga τ korral kehtib implikatsioon*

$$„\tau \text{ on Weaveri } P\text{-nimi“} \Rightarrow „\tau \text{ on } P\text{-nimi“}.$$

Vastupidine implikatsioon reeglina ei kehti.

(7) *Iga hulga τ puhul* $\bar{\mathtt{n}}\mathtt{Rank}(\tau) \leqslant \mathtt{nRank}(\tau)$. *Kui τ on Weaveri P-nimi, siis* $\bar{\mathtt{n}}\mathtt{Rank}(\tau) = \mathtt{nRank}(\tau)$.

Tõestus. Põhjendame näitlikustamiseks väite @(3) Weaveri P-nimede ning väite @(4) P-nimede jaoks.

(3) Induktsioonihüpoteesi tugevdamiseks toome sisse abimuutuja γ ning tõestame väite

$$\forall \gamma \in \mathtt{Ord}\, \overbrace{\forall \beta, \alpha(\alpha < \beta \leqslant \gamma \Rightarrow \mathtt{W}^P_\alpha \subseteq \mathtt{W}^P_\beta}^{\varphi[\gamma]}).$$

Kasutame teoreemiskeemi @I.19 ühe eeldusega transfiniitset versiooni valemile $\varphi[\gamma]$. Oletame, et mingi $\gamma \in \mathtt{Ord}$ jaoks kehtib iga $\delta < \gamma$ korral väide $\varphi[\gamma/\delta]$, s.o ekvivalentselt võtame induktsioonieelduseks

$$\forall \beta', \alpha'(\alpha' < \beta' \leqslant \delta \Rightarrow \mathtt{W}^P_{\alpha'} \subseteq \mathtt{W}^P_{\beta'}),$$

ja näitame, et siis kehtib ka $\varphi[\gamma]$. Olgu $\beta \leqslant \gamma$. Väide $\varphi[\gamma]$ on vahetult tuletatav, kui β on piirordinaalarv. Olgu sestap $\beta := b^+$. Kui nüüd $\alpha < b$, siis induktsioonieeldusest $\mathtt{W}^P_\alpha \subseteq \mathtt{W}^P_b$, võttes $\alpha' := \alpha$, $\beta' := b$ ning $\delta := b^+$. Järelikult piisab tõestada, et $\mathtt{W}^P_b \subseteq \mathtt{W}^P_{b^+}$.

Las $\tau \in \mathtt{W}^P_b$, siis τ on ülespoole $\subseteq$-kinnine ning leidub $b' < b$ nii, et $\tau \subseteq \mathtt{W}^P_{b'} \times P$. Taas pea identsest induktsioonieeldusest $\mathtt{W}^P_{b'} \subseteq \mathtt{W}^P_b$, millest $\tau \subseteq \mathtt{W}^P_{b'} \times P \subseteq \mathtt{W}^P_b \times P$. Seetõttu

$$\tau \in \{\, \sigma \in \mathcal{P}(\mathtt{W}^P_b \times P) \mid „\sigma \text{ on ülespoole } \subseteq\text{-kinnine“} \,\} = \mathtt{W}^P_{b^+}.$$

Kokkuvõttes $\mathtt{W}^P_b \subseteq \mathtt{W}^P_{b^+}$, nagu oli tarvis.

(4) Tõestame tulemuse üksnes P-nimede jaoks, Weaveri P-nimede korral on tõestus analoogiline. Koosnegu τ paaridest (σ, p), kus σ on P-nimi ja $p \in P$. Asendusaksioomiskeemiga moodustame hulga

$$\mathtt{nRank}(\operatorname{dom} \tau) = \{\, \alpha \in \mathtt{Ord} \mid \exists \sigma, p((\sigma, p) \in \tau \wedge \alpha = \mathtt{nRank}(\sigma)) \,\}.$$

Lause @I.11 ning lause @I.10 osa (5) järgi on $\left(\bigcup \mathtt{nRank}(\operatorname{dom}\tau)\right)^{+} =: \beta$ ordinaalarv, sealjuures suurem kui kõik ordinaalarvud hulgas $\mathtt{nRank}(\operatorname{dom}(\tau))$. Osa @(3) ja nimeastaku definitsiooni põhjal $\tau \subseteq \mathtt{V}^P_\beta \times P$, kust hiljemalt $\tau \in \mathtt{V}^P_{\beta+}$. Seega $\tau \in \mathtt{V}^P$ ehk tegu tõesti P-nimega. ■

Järelmise lause põhieesmärk on tõestada, et omadus „τ on (Weaveri) P-nimi“ on absoluutne piisava epsilon-kvaasimudeli suhtes. Selleks ehitame vastavale omadusele karakteristliku klassifunktsiooni. Kasutame potentselt regulaarset rekursiooni. Seoseks $z\ E\ x$ võtame $z \in \bigcup\bigcup x$. P-nimeks olemise absoluutsuse tuleneb potentselt regulaarse rekursiooni absoluutsusest, metateoreemiskeemist @II.13.

Lause III.7 (P-nimeks olemise absoluutsus)**.** (1) *Seos* $z\ \mathit{E}\ x :\doteq z \in \bigcup\bigcup x$ *on potentselt regulaarne klassil* $\mathtt{U}$*.*

(2) i) *Olgu* $\mathit{G}_1\colon \mathtt{U}\times\mathtt{U} \to \{0,1\}$ *klassifunktsioon* [Kun80, lk 188], *kus*

$$\mathit{G}_1(\tau, f) = \begin{cases} 1, & \text{kui „}\tau\text{ on seos“} \wedge (\forall\sigma \in \operatorname{dom}\tau)(f(\sigma)=1) \wedge (\forall p \in \operatorname{ran}\tau)(p \in P), \\ 0 & \text{vastasel korral.} \end{cases}$$

Tähistame klassil $\mathtt{U}$ *seosega* E *osast @(1) ja klassifunktsiooniga* G_1 *läbi viidud rekursiooni ühest tulemust kui* F_1*. Kehtib ekvivalents* $\tau \in \mathtt{V}^P \Leftrightarrow \mathit{F}_1(\tau) = 1$ [Kun80, lk 188] *ehk*

$$\text{„}\tau\text{ on }P\text{-nimi“} \Leftrightarrow \mathit{F}_1(\tau) = 1.$$

ii) *Olgu* $\mathit{G}_2\colon \mathtt{U}\times\mathtt{U} \to \{0,1\}$ *klassifunktsioon, kus*

$$\mathit{G}_2(\tau, f) = \begin{cases} 1, & \text{kui „}\tau\text{ on seos“} \wedge (\forall\sigma \in \operatorname{dom}\tau)(f(\sigma)=1) \wedge (\forall p \in \operatorname{ran}\tau)(p \in P) \wedge \\ & \qquad \wedge \text{„}\tau\text{ on ülespoole }\subseteq\text{-kinnine“}, \\ 0 & \text{vastasel korral.} \end{cases}$$

Tähistame klassil $\mathtt{U}$ *seosega* E *osast @(1) ja klassifunktsiooniga* G_2 *läbi viidud rekursiooni ühest tulemust kui* F_2*. Kehtib ekvivalents* $\tau \in \mathtt{W}^P \Leftrightarrow \mathit{F}_2(\tau) = 1$ *ehk*

$$\text{„}\tau\text{ on Weaveri }P\text{-nimi“} \Leftrightarrow \mathit{F}_2(\tau) = 1.$$

(3) *Olgu* M *aksioomide hulga* $\mathtt{Ax}(\mathsf{ZF})$ *transitiivne epsilon-kvaasimudel teoorias* $\mathit{T} \supseteq \mathsf{ZF}$*, sh* $P \in \mathit{M}$*. Omadused* „τ on P-nimi“ [Kun80, lk 188] *ja* „τ on Weaveri P-nimi“ *on* M-

-absoluutsed.

Lause @III.7 osa (3) on tegelikult omaette metalauseskeem.

Tõestus. (1) Seos $z \mathrel{E} x :\doteq z \in \bigcup\bigcup x$ on hulgalaadne, sest $\mathrm{ext}_{\mathit{E}}(x) = \{\, z \in \mathit{U} \mid z \mathrel{\mathit{E}} x \,\} = \bigcup\bigcup x$ on hulk. Põhjendame, miks klass $\mathtt{U}$ on potentselt E-regulaarne. Kui $x \neq \varnothing$, siis saame regulaarsuse aksioomi kasutades valida vähima astakuga elemendi $\xi \in x$. See ξ sobib rangelt E-minimaalseks elemendiks hulgas x. Vastasel korral leiduks $\xi' \in x$ nii, et $\xi' \in \bigcup\bigcup \xi$. Eriti siis $\xi' \in \mathrm{tc}_{\in}(\xi)$, lause @I.28 osa @(4) järgi $\mathtt{Rank}(\xi') < \mathtt{Rank}(\xi)$. Vastuolu elemendi ξ valikuga.

(2) Tõestame tulemuse üksnes Weaveri P-nimede jaoks, tavaliste P-nimede korral on tõestus analoogiline.

ii) Selgesti on $\mathit{G}_2(\tau, f)$ klassifunktsioon klassil $\mathtt{U} \times \mathtt{U}$, seose E potentne regulaarsus klassil $\mathtt{U}$ osast @(1). Rekursioon on korrektne (teoreemiskeem @I.20). Olgu rekursioonist saadud üheselt määratud klassifunktsioon F_2. Tõestame, et kehtib ekvivalents

$$„\tau \text{ on Weaveri } P\text{-nimi“} \Leftrightarrow \mathit{F}_2(\tau) = 1.$$

Potentselt regulaarse induktsiooniga seose E järgi. Oletame, et mingi hulga τ jaoks kehtib ekvivalents kõigi $\sigma \in \bigcup\bigcup \tau$ korral. Näitame, et sellest järeldub ekvivalents τ jaoks. Vaatleme kahte juhtu.

(„$\Leftarrow$“) $\mathit{F}_2(\tau) = 1$. Siis $\mathit{G}_2(\tau, \mathit{F}_2(\tau)|_{\bigcup\bigcup \tau}) = 1$. Järelikult τ on ülespoole $\subseteq$-kinnine seos, mille elemendid $(\sigma, p) \in \tau$ on sellised, et $\mathit{F}_2(\sigma) = 1$ ja $p \in P$. Kuratowski järjestatud paari definitsioonist $\sigma \mathrel{\mathit{E}} \tau$, induktsioonihüpoteesist on σ Weaveri P-nimi. Niisiis hulk τ koosneb paaridest (σ, p), kus σ on Weaveri P-nimi, $p \in P$, ja τ on ülespoole $\subseteq$-kinnine. Lause @III.6 osa @(4) põhjal on τ Weaveri P-nimi.

(„$\Rightarrow$“) $\mathit{F}_2(\tau) = 0$. Siis $\mathit{G}_2(\tau, \mathit{F}_2(\tau)|_{\bigcup\bigcup \tau}) = 0$. Peab kehtima klassifunktsiooni G_2 konjunktsiooni eitus. Kui τ pole ülespoole $\subseteq$-kinnine, pole vahetult definitsioonist tegu Weaveri P-nimega. Lause @III.6 osa @(2) järgi on Weaveri P-nimi seos, koosnedes sealjuures paaridest (σ, p), kus σ on Weaveri P-nimi ja $p \in P$. Seega kui τ pole seos või kui leidub $p \in \mathrm{ran}\,\tau$ nii, et $p \notin P$, ei saa τ olla Weaveri P-nimi. Viimane variant on, et leidub $\sigma \in \mathrm{dom}\,\tau$, mispuhul $\mathit{F}_2(\sigma) = 0$. Induktsioonihüpoteesist pole siis σ Weaveri P-nimi, kust ka τ pole Weaveri P-nimi.

(3) Tõestame tulemuse taas Weaveri P-nimede jaoks. Osa @(2) põhjal on hulk τ Weaveri P--nimi parajasti siis, kui $F_2(\tau) = 1$. Ekvivalentsi tõestus on teoorias T kenasti tehtav, seega läheb see metateoreemiskeemi @II.1 mõttes läbi epsilon-kvaasimudelis M. Funktsioon F_2 defineerisime potentselt regulaarse rekursiooniga. Absoluutsuse tõestamiseks piisab niisiis näidata, et F_2 saamise rekursioon on M-absoluutne.

Kontrollime metateoreemiskeemi @II.13 eeldusi. Teooria T ja epsilon-kvaasimudel M sobivad. Edasi

1) $\mathtt{U}$ on klassina M-absoluutne, sest $x = x$ on absoluutne;
2) E on seosena M-absoluutne, sest $z \in \bigcup\bigcup x$ on absoluutne;
3) tingimused „τ on seos“, $(\forall\sigma \in \operatorname{dom}\tau)(f(\sigma) = 1)$, $(\forall p \in \operatorname{ran}\tau)(p \in P)$ ja nende eitused on absoluutsed, $P \in M$. Funktsioonid $\tau \mapsto \operatorname{dom}\tau$, $\tau \mapsto \operatorname{ran}\tau$ on funktsioonidena absoluutsed, 0, 1 on konstantidena absoluutsed. Seetõttu on ka G funktsioonina absoluutne;
4) kui $x \in M$, siis $(y = \bigcup\bigcup x)|_M \Leftrightarrow y = \bigcup\bigcup x$. Samuti $\bigcup\bigcup x \in M$, sest $x \mapsto \bigcup\bigcup x$ on funktsioonina absoluutne. Seega tõesti saame, et „E on hulgalaadne klassil $\mathtt{U}$“$|_M$;
5) kui $x \in \mathtt{U} \cap M = M$, siis $\operatorname{ext}_\in(x) = \bigcup\bigcup x \in M$ ja epsilon-kvaasimudeli M transitiivsuse tõttu $\operatorname{ext}_\in(x) \subseteq M$.

Kõik eeldused on täidetud. Kokkuvõttes ongi omadus „τ on Weaveri P-nimi“ teoorias T M-absoluutne. ■

Lause @III.7 osa (3) väite ümbersõnastusena võime öelda, et klassid $\mathtt{V}^P$ ja $\mathtt{W}^P$ on M--absoluutsed piisava epsilon-kvaasimudeli M suhtes, st

$$(\mathtt{V}^P)^M = \mathtt{V}^P \cap M, \qquad (\mathtt{W}^P)^M = \mathtt{W}^P \cap M.$$

Definitsioon III.6 (tõkestatud (Weaveri) P-nimede klass)**.** Olgu M aksioomide hulga $\mathtt{Ax}(\mathsf{ZFC})$ transitiivne ja loenduv epsilon-kvaasimudel teoorias $T \supseteq \mathsf{ZFC}$. Las P olla tingimuskogum hulgas M.

a. *Tõkestatud P-nimede klassiks M^P* [Kun80, lk 189] kutsutakse hulka

$$M^P \coloneqq \{\, \tau \in M \mid \text{„}\tau \text{ on } P\text{-nimi“} |_M \,\} = \{\, \tau \in M \mid \text{„}\tau \text{ on } P\text{-nimi“} \,\} = \\ = \mathtt{V}^P \cap M = (\mathtt{V}^P)^M.$$

b. *Tõkestatud Weaveri P-nimede klassiks M^P_W* [Wea14, lk 34] kutsutakse hulka

$$M^P_W \coloneqq \{\, \tau \in M \mid \text{„}\tau \text{ on Weaveri } P\text{-nimi“} |_M \,\} = \{\, \tau \in M \mid \text{„}\tau \text{ on Weaveri } P\text{-nimi“} \,\} \\ = \mathtt{W}^P \cap M = (\mathtt{W}^P)^M.$$

P-nimedest ja Weaveri P-nimedest on kõige olulisemad just tõkestatud nimed. Tõestame, et lause @III.6 osa (2) esimese pool kehtib analoogselt tõkestatud (Weaveri) P-nimede jaoks.

Lemma III.8. *Olgu M aksioomide hulga $\mathtt{Ax}(\mathsf{ZFC})$ transitiivne ja loenduv epsilon-kvaasimudel teoorias $\mathsf{T} \supseteq \mathsf{ZFC}$. Kui τ on tõkestatud (Weaveri) P-nimi ja $y \in \tau$, siis $y = (\sigma, p)$, kus σ on mingisugune tõkestatud (Weaveri) P-nimi, $p \in P$.*

Tõestus. (Weaveri) P-nimeks olemise absoluutsuse tõttu on tõkestatud (Weaveri) P-nimed ka päriselt (Weaveri) P-nimed. Kui τ on tõkestatud (Weaveri) P-nimi ja $y \in \tau$, siis lause @III.6 osa (2) järgi $y = (\sigma, p)$, kus σ on (Weaveri) P-nimi, $p \in P$. Kuratowski järjestatud paari definitsiooni järgi $\sigma \in \bigcup\bigcup \tau$. Ühendi absoluutsusest funktsioonina $\bigcup\bigcup \tau \in M$, transitiivsusest $\bigcup\bigcup \tau \subseteq M$, sestap $\sigma \in M$. Uuesti (Weaveri) P-nimeks olemise absoluutsusest tulenevalt on σ tõkestatud Weaveri P-nimi. ∎

1.5.2. P-nime kandja definitsioon ja absoluutsus

Siin jaotises defineerime (Weaveri) P-nimede kandjad ehk moodustame seoste hierarhia kaudu sobivad pöördseosed. Olgu $D \subseteq P$ suvaline alamkogum. Kui τ_1 on P-nimi ja τ_2 Weaveri P-nimi, tähistame vastavaid kandjaid kui $\mathtt{val}_D(\tau_1)$ ning $\overline{\mathtt{val}}_D(\tau_2)$. Need hulgad ehitatakse potentselt regulaarse rekursiooniga klassidel $\mathtt{V}^P$ ning $\mathtt{W}^P$, piltlikult defineeritakse [Kun80, lk 189; Wea14, lk 35]

$$\begin{cases} \mathtt{val}_D(\varnothing) = \varnothing, \\ \mathtt{val}_D(\tau_1) = \{\, \mathtt{val}_D(\sigma_1) \mid \sigma_1 \in {\tau_1}^{-1}(D) \,\} \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} \overline{\mathtt{val}}_D(\varnothing) = \varnothing, \\ \overline{\mathtt{val}}_D(\tau_2) = \{\, \overline{\mathtt{val}}_D(\sigma_2) \mid \sigma_2 \in {\tau_2}^{-1}(D) \,\}. \end{cases}$$

Siin tähistab ${\tau_i}^{-1}(D)$ hulga D originaali seosega τ_i, tähendab

$$\sigma_i \in {\tau_i}^{-1}(D) \Leftrightarrow \exists p \in D((\sigma_i, p) \in \tau_i).$$

Kandja saamise rekursioon on loogiline ses mõttes, et kui τ_i jaoks kandjat defineeritakse, on „varasemad kandjad“ juba valmis, s.o

$$\exists p \in D((\sigma_i, p) \in \tau_i) \Rightarrow \mathtt{nRank}(\sigma_i) < \mathtt{nRank}(\tau_i)$$

tänu lause @III.6 osale @(2).

Vastavate rekursioonide range vorm on toodud järgmises

lauses III.9 ([Vso22])**.** *Olgu $D \subseteq P$, kus P tingimuskogum.*

(1) *Seos $\sigma\, \boldsymbol{E}\, \tau :\doteq \sigma \in \tau^{-1}(D)$ on potentselt regulaarne klassidel $\mathtt{V}^P$ ja $\mathtt{W}^P$.*

(2) *Olgu $\boldsymbol{G}\colon \mathtt{U} \times \mathtt{U} \to \mathtt{U}$ klassifunktsioon, kus*

$$\boldsymbol{G}(\tau, f) = \boldsymbol{G}(f) = \begin{cases} \operatorname{ran} f, & \text{kui „} f \text{ on funktsioon“}, \\ \varnothing & \text{vastasel korral.} \end{cases}$$

(Muutuja τ on fiktiivne.)

i) *Tähistame klassil $\mathtt{V}^P$ seosega $\boldsymbol{E}$ osast @(1) ja klassifunktsiooniga $\boldsymbol{G}$ läbi viidud rekursiooni ühest tulemust kui $\mathtt{val}_D$. Kehtib väide*

$$(\forall \tau \in \mathtt{V}^P) \qquad \mathtt{val}_D(\tau) = \{\, \mathtt{val}_D(\sigma) \mid \sigma \in \tau^{-1}(D)\,\}.$$

ii) *Tähistame klassil $\mathtt{W}^P$ seosega $\boldsymbol{E}$ osast @(1) ja klassifunktsiooniga $\boldsymbol{G}$ läbi viidud rekursiooni ühest tulemust kui $\overline{\mathtt{val}}_D$. Kehtib väide*

$$(\forall \tau \in \mathtt{W}^P) \qquad \overline{\mathtt{val}}_D(\tau) = \{\, \overline{\mathtt{val}}_D(\sigma) \mid \sigma \in \tau^{-1}(D)\,\}.$$

Tõestus. (1) Klasside $\mathtt{V}^P$ ja $\mathtt{W}^P$ potentse $\boldsymbol{E}$-regulaarsuse tõestamiseks kasutame lauseskeemi @I.24. Piisab näidata, et leidub klassifunktsioon $\boldsymbol{F}\colon \mathtt{U} \to \mathtt{Ord}$ nii, et

$$\forall \sigma, \tau \in \mathtt{V}^P(\sigma\, \boldsymbol{E}\, \tau \Rightarrow \boldsymbol{F}(\sigma) < \boldsymbol{F}(\tau)).$$

Sobib võtta $\boldsymbol{F} := \mathtt{nRank}$, vastav range võrratus põhjendatud vahetult eelnevas. Klassi $\mathtt{W}^P$

korral võtta $F := \bar{\mathtt{n}}\mathtt{Rank}$ või kasutada kohe Weaveri P-nimede $\varrho \in \mathtt{W}^P$ jaoks kehtivat võrdust $\mathtt{nRank}(\varrho) = \bar{\mathtt{n}}\mathtt{Rank}(\varrho)$ (lause @III.6 osa @(7)).

Hulgalaadsuseks märgime, et

$$\begin{aligned}\mathrm{ext}_{\mathtt{V}^P, E}(\tau) &= \{\, \sigma \in \mathtt{V}^P \mid \sigma\, E\, \tau \,\} = \\ &= \{\, \sigma \in \mathtt{V}^P \mid \sigma \in \tau^{-1}(D) \,\} = \\ &= \{\, \sigma \in \tau^{-1}(D) \mid \sigma \in \mathtt{V}^P \,\} = \\ &= \{\, \sigma \in \tau^{-1}(D) \mid \text{„}\sigma \text{ on } P\text{-nimi“} \,\}\end{aligned}$$

on eraldamisaksioomiskeemi põhjal hulk. Analoogiliselt

$$\mathrm{ext}_{\mathtt{W}^P, E}(\tau) = \{\, \sigma \in \tau^{-1}(D) \mid \text{„}\sigma \text{ on Weaveri } P\text{-nimi“} \,\}.$$

(2) Tõestame Weaveri P-nimede jaoks, tavaliste korral igati analoogiline. Olgu $\tau \in \mathtt{W}^P$. Teoreemiskeemist @I.20 (arvestades, et τ on praegusel juhul klassifunktsioonis G fiktiivne)

$$\begin{aligned}\overline{\mathtt{val}}_D(\tau) &= G(\tau, \overline{\mathtt{val}}_D|_{\mathrm{ext}_{\mathtt{W}^P, E}(\tau)}) = \\ &= G(\overline{\mathtt{val}}_D|_{\mathrm{ext}_{\mathtt{W}^P, E}(\tau)}) = \\ &= \operatorname{ran} \overline{\mathtt{val}}_D|_{\mathrm{ext}_{\mathtt{W}^P, E}(\tau)} = \\ &= \{\, \overline{\mathtt{val}}_D(\sigma) \mid \sigma \in \mathrm{ext}_{\mathtt{W}^P, E}(\tau) \,\} = \\ &= \{\, \overline{\mathtt{val}}_D(\sigma) \mid \sigma \in \mathtt{W}^P \wedge \sigma\, E\, \tau \,\} = \\ &= \{\, \overline{\mathtt{val}}_D(\sigma) \mid \sigma \in \mathtt{W}^P \wedge \sigma \in \tau^{-1}(D) \,\} = \\ &= \{\, \overline{\mathtt{val}}_D(\sigma) \mid \sigma \in \tau^{-1}(D) \,\}.\end{aligned}$$

Viimases võrduses kasutame tingimuse $\sigma \in \mathtt{W}^P$ ära jätmiseks teadmist, et τ oli Weaveri P-nimi, sisalduvust $D \subseteq P$ ning lause @III.6 osa @(2). ∎

Saame anda range *(Weaveri) P-nime kandjate* määratluse.

Definitsioon III.7 ((Weaveri) P-nime kandja)**.** Olgu P tingimuskogum, las $D \subseteq P$ alamkogum. Olgu $\mathtt{val}_D$ ja $\overline{\mathtt{val}}_D$ klassifunktsioonid vastavalt lause @III.9 osa @(2) jaotistest @i) ning @ii).

a. Klassi $\mathtt{val}_D(\mathtt{V}^P)$ elemente $\mathtt{val}_D(\tau)$, $\tau \in \mathtt{V}^P$, kutsume *P-nimede D-kandjateks* [Kun80, lk 189].

b. Klassi $\overline{\mathtt{val}}_D(\mathtt{W}^P)$ elemente $\overline{\mathtt{val}}_D(\tau)$, $\tau \in \mathtt{W}^P$, kutsume *Weaveri P-nimede D-kandjateks* [Wea14, lk 35].

Kui hulk D on kontekstist selge, räägime lihtsalt *(Weaveri) P-nimede kandjatest.* Kirjanduses kohtab P-nime kandja $\mathtt{val}_D(\tau)$ jaoks tähistusi $\mathtt{val}(\tau, D)$ [Kun13, lk 247], τ^D [Wea14, lk 35] ja τ_D [Kun80, lk 189]. Erandkorras, kui on tarvis rõhutada tingimuskogumit P, kirjutame $\mathtt{val}$ asemel $\mathtt{val}^P$.

P-nime D-kandjate klassifunktsioonid $\mathtt{val}_D$ ja $\overline{\mathtt{val}}_D$ on funktsioonidena absoluutsed piisava epsilon-kvaasimudeli N suhtes, kui sealjuures $D \in N$. Niisugune absoluutsus on oluline alles hiljem, kui tõestame jõustamislaiendi $M[G]$ vähimust. [Kun80, lk 189]

Metalauseskeem III.10 (kandja klassifunktsioonide absoluutsus funktsioonina)**.** *Las olla N aksioomide hulga $\mathtt{Ax}(\mathsf{ZF})$ transitiivne epsilon-kvaasimudel teoorias $T \supseteq \mathsf{ZF}$. Olgu $P \in N$ tingimuskogum, $D \subseteq P$ alamkogum ning lisaks $\underline{D \in N}$. Siis*

(1) *klassifunktsioon $\mathtt{val}_D$ on funktsioonina N-absoluutne [Kun80, lk 189],*

(2) *klassifunktsioon $\overline{\mathtt{val}}_D$ on funktsioonina N-absoluutne.*

Tõestus. Täiesti analoogilised, tõestame Weaveri P-nime kandjate jaoks.

(2) Kontrollime metateoreemiskeemi @II.13 eeldusi. Teooria T ja epsilon-kvaasimudel N sobivad. Edasi

1) $\mathtt{W}^P$ on klassina N-absoluutne, lause @III.7 osa @(3);

2) E ehk $\sigma \in \tau^{-1}(D)$ on seosena N-absoluutne, sest $\sigma \in \tau^{-1}(D) \Leftrightarrow \exists p \in D((\sigma, p) \in \tau)$ ja $\exists p \in D((\sigma, p) \in \tau)$ on absoluutne;

3) tingimus „f on funktsioon“ ja selle eitus on absoluutsed. Funktsioon $\tau \mapsto \operatorname{dom} \tau$ funktsioonina absoluutne, $\varnothing$ konstandina absoluutne. Seetõttu ka rekursioonist pärit G, kus

$$G(\tau, f) = G(f) = \begin{cases} \operatorname{ran} f, & \text{kui „}f\text{ on funktsioon“}, \\ \varnothing & \text{vastasel korral}, \end{cases}$$

on funktsioonina absoluutne;

4) kui $\tau \in N$, siis $(y = \tau^{-1}(D))|_N \Leftrightarrow y = \tau^{-1}(D)$, metateoreemiskeem @II.7 osa @(5)

jaotis @(v). Samuti $\tau^{-1}(D) \in N$, sest $\tau \mapsto \operatorname{dom}\tau$ on funktsioonina absoluutne ja

$$\tau^{-1}(D) = \{\, \sigma \in \operatorname{dom}\tau \mid \exists p \in D((\sigma, p) \in \tau) \,\}$$

on saadav eraldamisaksioomiskeemiga. Eriti just N-ahendatud eraldamisaksioomiga, sest eraldamistingimus on absoluutne ning $\underline{D \in N}$. Seega tõesti saame, et „E on hulgalaadne klassil $\mathtt{U}$“$|_N$;

5) kui $\tau \in \mathtt{W}^P \cap N = N^P_W$, siis $\operatorname{ext}_E(x) = \tau^{-1}(D) \in N$ ja epsilon-kvaasimudeli N transitiivsuse tõttu $\operatorname{ext}_E(x) \subseteq N$.

Kõik eeldused on täidetud. Kokkuvõttes ongi $\overline{\mathtt{val}}_D$ on funktsioonina N-absoluutne. ∎

Kavatsetud rakenduses on alamkogum D just geneeriline ideaal G. Piisab G kinnisusest nõrgemate tingimuste suhtes, et näidata kandjate klasside võrdusi $\mathtt{val}_G(\mathtt{V}^P) = \overline{\mathtt{val}}_G(\mathtt{W}^P)$ ja $\mathtt{val}_G(M^P) = \overline{\mathtt{val}}_G(M^P_W)$. Nende klasside võrduse tõestame järgnevas alamjaotises *genereeritud Weaveri P-nimede abil.* Samuti läheb tarvis lihtsat

lemmat III.11 ([Wea14, lk 35]). *Olgu P tingimuskogum ning $D \subseteq P$ alamkogum. Kui τ on Weaveri P-nimi, siis $\mathtt{val}_D(\tau) = \overline{\mathtt{val}}_D(\tau)$.*

Tõestus. Vahetu transfiniitne induktsioon ükskõik kumma nimeastaku järgi või potentselt regulaarne induktsioon seosel $\sigma \in \bigcup\bigcup\tau$. ∎

1.5.3. P-nime poolt genereeritud Weaveri P-nimi. Laiend $M[G]$

Toome sisse *P-nime τ poolt genereeritud Weaveri P-nime* $\mathtt{gW}(\tau)$ mõiste. Mõte on defineerida

$$\begin{cases} \mathtt{gW}(\varnothing) = \varnothing, \\ \mathtt{gW}(\tau) = \{\, (\mathtt{gW}(\sigma), q) \mid q \in P \wedge \exists p \in P((\sigma, p) \in \tau \wedge p \subseteq q) \,\}. \end{cases}$$

Niisiis saadakse genereeritud Weaveri P-nimi algsest P-nimest rekursiooniga, varasemast astmest võetakse kaasa juba loodud genereeritud nimed ning uuel astmel tagatakse ülespoole $\subseteq$-kinnisus.

***Märkus* III.8.** Siinne *genereeritud Weaveri P-nimi* on Weaveri [Wea14, lk 35] mõttes *genereeritud P-nime* üldistus. Lisaks märkuses @III.3 kirjeldatud lahknevusele on erinevus selles, et Weaveri definitsioon ei ole (ega peagi olema) rekursiivse iseloomuga, samas kui meie määratlus on ja peabki olema rekursiivne. Weaver [Wea14] ei kasuta üldse tavalisi P-nimesid. Weaver lähtub P-nime genereerimisel hulgast τ_0, mille elementideks on paarid (σ, p), kus σ on Weaveri P-nimi, kuid hulk τ_0 pole ülespoole $\subseteq$-kinnine [Wea14, lk 35]. Seega piisab Weaveri P-nime saamiseks võtta hulgast τ_0 üks kord „ülespoole $\subseteq$-sulund“. Meie lähtekohaks on hulk τ, mille paaride esimene koordinaat võib olla tavaline P-nimi. Sestap peame „ülespoole $\subseteq$-sulundit“ võtma korduvalt ja rekursiivselt.

Rekursiooni range kuju, omadused ja absoluutsus on kirjas

lemmas III.12. *Olgu P tingimuskogum ning seos $\sigma \mathit{E} \tau :\doteq \sigma \in \bigcup\bigcup\tau$ klassil $\mathtt{V}^P$. Olgu $\mathit{G}\colon \mathtt{U}\times\mathtt{U}\to\mathtt{U}$ klassifunktsioon, kus*

$$\mathit{G}(\tau,f)=\begin{cases}\big\{x\in \operatorname{ran} f\times P \mid (\exists\sigma\in\operatorname{dom}\tau)(\exists q\in P)\big((f(\sigma),q)=x\wedge\exists p\in P((\sigma,p)\in\tau\wedge p\subseteq q)\big)\big\}, & \\ \qquad\text{kui „}\tau\text{ on seos“ ja „}f\text{ on funktsioon“}, & \\ \varnothing \qquad \text{vastasel korral.} & \end{cases}$$

(Muutuja τ on aktiivne ning P on parameetri rollis.) Tähistame klassil $\mathtt{V}^P$ seosega E ja klassifunktsiooniga G läbi viidud rekursiooni ühest tulemust kui $\mathtt{gW}$. Siis

$$(\forall\tau\in\mathtt{V}^P)\qquad \mathtt{gW}(\tau)=\{\,(\mathtt{gW}(\sigma),q)\mid q\in P\wedge\exists p\in P((\sigma,p)\in\tau\wedge p\subseteq q)\,\}.$$

Lisaks saame järgmised võrdused ja omadused.

(1) *Iga P-nime τ korral on $\mathtt{gW}(\tau)$ Weaveri P-nimi. Iga Weaveri P-nime τ korral $\mathtt{gW}(\tau)=\tau$.*

(2) *Kehtib klasside võrdus $\mathtt{gW}(\mathtt{V}^P)=\mathtt{W}^P$.*

(3) *Olgu M aksioomide hulga $\mathtt{Ax}(\mathsf{ZF})$ transitiivne ja loenduv epsilon-kvaasimudel teoorias $\mathit{T}\supseteq \supseteq \mathsf{ZF}$, sealjuures $P\in\mathit{M}$. Klassifunktsioon $\mathtt{gW}\colon \mathtt{V}^P\to\mathtt{W}^P$ on funktsioonina M-absoluutne.*

(4) *Kehtib tõkestatud nimedest koosnevate klasside võrdus $\mathtt{gW}(M^P)=M^P_W$, kus $P\in M$.*

Osa (3), metalemmaskeem, annab muuseas Weaveri P-nimedele alternatiivse kirjelduse genereeritud Weaveri P-nimede kaudu.

Tõestus. Olgu $\tau \in \mathtt{V}^P$ suvaline. Siis

$$\begin{aligned}
\mathtt{gW}(\tau) = \boldsymbol{G}(\tau, \mathtt{gW}|_{\bigcup\bigcup\tau}) = \\
&= \big\{x \in \operatorname{ran}(\mathtt{gW}|_{\bigcup\bigcup\tau}) \times P \mid (\exists\sigma \in \operatorname{dom}\tau)(\exists q \in P)\big((\mathtt{gW}(\sigma), p) = x \wedge \\
&\qquad\qquad \wedge \exists p \in P((\sigma, p) \in \tau \wedge p \subseteq q)\big)\big\} = \\
&= \{\, (\mathtt{gW}(\sigma), q) \mid \sigma \in \textstyle\bigcup\bigcup\tau \wedge q \in P \wedge \exists p \in P((\sigma, p) \in \tau \wedge p \subseteq q) \,\} = \\
&= \{\, (\mathtt{gW}(\sigma), q) \mid q \in P \wedge \exists p \in P((\sigma, p) \in \tau \wedge p \subseteq q) \,\}.
\end{aligned}$$

Põhjendame konspektiivselt ka võrdusi ning omadusi.

(1) Kui τ on P-nimi, siis $\mathtt{gW}(\tau)$ on Weaveri P-nimi. Näiteks transfiniitne induktsioon tavalise nimeastaku järgi või potentselt regulaarse induktsiooni abil seosega $\sigma \in \bigcup\bigcup\tau$. Sammus kasutada lause @III.6 osa @(4) ja põhjendada ülespoole $\subseteq$-kinnisust. Weaveri P-nimede püsipunktilisus samuti transfiniitse induktsiooniga (Weaveri) nimeastaku järgi või samasuguse potentselt regulaarse induktsiooniga. Sammus $\tau \subseteq \mathtt{gW}(\tau)$ korral kasutada lause @III.6 osa @(2), suunas $\tau \supseteq \mathtt{gW}(\tau)$ nime τ ülespoole $\subseteq$-kinnisust.

(2) Osa (1) põhjal.

(3) Taas metateoreemiskeemi @II.13 eelduste kontroll. Enamiku põhjendusi saab üle kanda analoogilistest lausetest @III.7 ja @III.10. Tõestame üksnes, et käesoleva lemma $\boldsymbol{G}$ on funktsioonina absoluutne.

   3) Tingimused „τ on seos“, „f on funktsioon“ ja nende eitused on absoluutsed. Funktsioonid $\tau \mapsto \operatorname{dom}\tau$, $(f, X) \mapsto \operatorname{ran} f \times X$ on funktsioonidena absoluutsed (metateoreemiskeem @II.9), samuti $P \in \boldsymbol{M}$, seega $f \in \boldsymbol{M}$ korral $\operatorname{ran} f \times P \in \boldsymbol{M}$. Klass $\boldsymbol{M}$ mudeldab eraldamisaksioomiskeemi ning vastav eraldamistingimus on metateoreemiskeemi @II.7 järgi absoluutne. Tühi hulk $\varnothing$ on konstandina absoluutne. Kokkuvõttes on ka $\boldsymbol{G}$ funktsioonina absoluutne.

(4) Osade (1) ja (3) põhjal, vt ka @tõkestatud nimede definitsiooni.

Tulemus on tõestatud. ■

Olgu D_{cl} nõrgemate tingimuste suhtes kinnine alamkogum. Siis iga P-nime τ korral $\mathtt{val}_{D_{\mathrm{cl}}}(\tau) = \overline{\mathtt{val}}_{D_{\mathrm{cl}}}(\mathtt{gW}(\tau)) = \mathtt{val}_{D_{\mathrm{cl}}}(\mathtt{gW}(\tau))$. Tähendab, P-nime τ ja selle poolt genereeritud Weaveri P-nime $\mathtt{gW}(\tau)$ D_{cl}-kandjad ühtivad.

Lemma III.13. *Olgu P tingimuskogum ning $D_{\mathrm{cl}} \subseteq P$ olgu nõrgemate tingimuste suhtes* *kinnine alamkogum. Kehtib väide*

$$\forall \tau \in \mathtt{V}^P \qquad \mathtt{val}_{D_{\text{cl}}}(\tau) = \overline{\mathtt{val}}_{D_{\text{cl}}}(\mathtt{gW}(\tau)) = \mathtt{val}_{D_{\text{cl}}}(\mathtt{gW}(\tau)).$$

Tõestus. Olgu $\tau \in \mathtt{V}^P$ suvaline. Lemma @III.12 osa (1) järgi on $\mathtt{gW}(\tau)$ Weaveri P-nimi. Lemmast @III.11 $\overline{\mathtt{val}}_{D_{\text{cl}}}(\mathtt{gW}(\tau)) = \mathtt{val}_{D_{\text{cl}}}(\mathtt{gW}(\tau))$. Järelikult peame üksnes põhjendama, miks $\mathtt{val}_{D_{\text{cl}}}(\tau) = \mathtt{val}_{D_{\text{cl}}}(\mathtt{gW}(\tau))$. Kasutame potentselt regulaarset rekursiooni seosega $\sigma \in \bigcup\bigcup\tau$. Kehtigu $\mathtt{val}_{D_{\text{cl}}}(\sigma) = \mathtt{val}_{D_{\text{cl}}}(\mathtt{gW}(\sigma))$ iga $\sigma \in \bigcup\bigcup\tau$ korral.

- $\underline{\mathtt{val}_{D_{\text{cl}}}(\tau) \subseteq \mathtt{val}_{D_{\text{cl}}}(\mathtt{gW}(\tau))}$. Las $x \in \mathtt{val}_{D_{\text{cl}}}(\tau)$, siis $x = \mathtt{val}_{D_{\text{cl}}}(\sigma)$, kus $\sigma \in \tau^{-1}(D_{\text{cl}})$. Tähendab, et leidub $p \in D_{\text{cl}}$ nii, et $(\sigma, p) \in \tau$. Kuna $D_{\text{cl}} \subseteq P$, siis $p \in P$, $p \subseteq p$ ja $(\sigma, p) \in \tau$. Lemma @III.11 alusel $(\mathtt{gW}(\sigma), p) \in \mathtt{gW}(\tau)$. Seega leidub $p \in D_{\text{cl}}$ nõnda, et $(\mathtt{gW}(\sigma), p) \in$ $\in \mathtt{gW}(\tau)$, vastavalt kandja määratlusele $\mathtt{val}_{D_{\text{cl}}}(\mathtt{gW}(\sigma)) \in \mathtt{val}_{D_{\text{cl}}}(\mathtt{gW}(\tau))$. Induktsioonihüpoteesist $\mathtt{val}_{D_{\text{cl}}}(\mathtt{gW}(\sigma)) = \mathtt{val}_{D_{\text{cl}}}(\sigma)$, mistõttu ka $x = \mathtt{val}_{D_{\text{cl}}}(\sigma) \in \mathtt{val}_{D_{\text{cl}}}(\mathtt{gW}(\tau))$.
- $\underline{\mathtt{val}_{D_{\text{cl}}}(\tau) \supseteq \mathtt{val}_{D_{\text{cl}}}(\mathtt{gW}(\tau))}$. Las $x \in \mathtt{val}_{D_{\text{cl}}}(\mathtt{gW}(\tau))$, siis $x = \mathtt{val}_{D_{\text{cl}}}(\mathtt{gW}(\sigma))$ ja leidub $q \in D_{\text{cl}}$ nii, et $(\mathtt{gW}(\sigma), q) \in \mathtt{gW}(\tau)$. Sestap leidub $p \in P$, mille korral $(\sigma, p) \in \tau$ ja $p \subseteq q$. Alamkogum D_{cl} oli nõrgemate tingimuste suhtes kinnine, järelikult $p \in D_{\text{cl}}$. Niisiis leidub $p \in D_{\text{cl}}$, mispuhul $(\sigma, p) \in \tau$. Seetõttu $\mathtt{val}_{D_{\text{cl}}}(\sigma) \in \mathtt{val}_{D_{\text{cl}}}(\tau)$. Induktsioonieeldusest $\mathtt{val}_{D_{\text{cl}}}(\sigma) = \mathtt{val}_{D_{\text{cl}}}(\mathtt{gW}(\sigma))$, mistõttu ka $x = \mathtt{val}_{D_{\text{cl}}}(\mathtt{gW}(\sigma)) \in \mathtt{val}_{D_{\text{cl}}}(\tau)$. ■

Oleme valmis tõestama kandjate klasside võrdusi.

Lause III.14. *Olgu M aksioomide hulga $\mathtt{Ax}(\mathsf{ZFC})$ transitiivne ja loenduv epsilon-kvaasimudel teoorias $\mathsf{T} \supseteq \mathsf{ZFC}$. Olgu $P \in M$ tingimuskogum ja $G \subseteq P$ nõrgemate tingimuste suhtes kinnine alamkogum. Siis $\mathtt{val}_G(\mathtt{V}^P) = \overline{\mathtt{val}}_G(\mathtt{W}^P)$ ja $\mathtt{val}_G(M^P) = \overline{\mathtt{val}}_G(M^P_W)$.*

Tõestus. Lause @III.6 osa (6) põhjal $\mathtt{V}^P \supseteq \mathtt{W}^P$ ja lause @III.7 osa (3) absoluutsusest $M^P \supseteq M^P_W$. Seetõttu pöördsisalduvused $\mathtt{val}_G(\mathtt{V}^P) \supseteq \overline{\mathtt{val}}_G(\mathtt{W}^P)$ ja $\mathtt{val}_G(M^P) \supseteq \overline{\mathtt{val}}_G(M^P_W)$ on ilmsed, kuna Weaveri P-nimede τ korral $\mathtt{val}_G(\tau) = \overline{\mathtt{val}}_G(\tau)$. Sisalduvus $\mathtt{val}_G(\mathtt{V}^P) \subseteq$ $\subseteq \overline{\mathtt{val}}_G(\mathtt{W}^P)$ lemmast @III.13, s.o võrdusest $\mathtt{val}_G(\tau) = \overline{\mathtt{val}}_G(\mathtt{gW}(\tau))$. Sisalduvuse $\mathtt{val}_G(M^P) \subseteq$ $\subseteq \overline{\mathtt{val}}_G(M^P_W)$ jaoks lisaks tarvis teadmist, et kui $\tau \in M$, siis $\mathtt{gW}(\tau) \in M$ – lemma @I.12 osa @(3). ■

Anname jõustamislaiendi $M[G]$ definitsiooni. Definitsioonis esinevad võrdused järelduvad lausest @III.14, lemmast @III.11 ning tõkestatud nimede hulkade määratlusest.

Definitsioon III.9 (jõustamislaiend, [Wea14, lk 35; Kun80, lk 189])**.** Olgu M aksioomide hulga $\mathtt{Ax}(\mathsf{ZFC})$ transitiivne ja loenduv epsilon-kvaasimudel teoorias $\mathsf{T} \supseteq \mathsf{ZFC}$. Olgu $P \in M$

jõustamiskogum ja $G \subseteq P$ geneeriline ideaal. Asendusaksioomiskeemiga saadavat hulka $M[G]$,

$$\begin{aligned} M[G] &\coloneqq \mathtt{val}_G(M^P) = \mathtt{val}_G(M^P_W) = \overline{\mathtt{val}}_G(M^P_W) = \\ &= \{\, \mathtt{val}_G(\tau) \mid \tau \in M \wedge „\tau \text{ on } P\text{-nimi“} \,\} = \\ &= \{\, \mathtt{val}_G(\tau) \mid \tau \in M \wedge „\tau \text{ on Weaveri } P\text{-nimi“} \,\}, \end{aligned}$$

kutsutakse *jõustamislaiendiks*. Algset kvaasimudelit M nimetatakse sellises kontekstis *jõustamislaiendi $M[G]$ baas-kvaasimudeliks*. Erandkorras, kui on tarvilik rõhutada tingimuskogumit P, kirjutame $M[G]$ asemel $M^P[G]$.

Tõkestatud P-nimede ja tõkestatud Weaveri P-nimede kandjad ühtisid. Tähendab, lõpuks saadav jõustamislaiend $M[G]$ on neil üks ja seesama. Selline teadmine lubab edasisi jõustamislaiendi $M[G]$ kohta käivaid tõestusi lihtsustada: sõltuvalt olukorrast kasutame P-nimesid või Weaveri P-nimesid.

Märgime veel, et kui P-nimede korral $\sigma \subseteq \tau$, siis mõistagi $\sigma^{-1}(G) \subseteq \tau^{-1}(G)$ ja seetõttu $\mathtt{val}_G(\sigma) \subseteq \mathtt{val}_G(\tau)$. Vastupidine implikatsioon reeglina ei kehti. Näiteks võib võtta $P \coloneqq \{1, \{\omega\}\}$, $G \coloneqq \{1\}$, $\sigma \coloneqq \{(0,1)\}$, $\tau \coloneqq \{(0,1),(0,\{\omega\})\}$. Siis $\mathtt{val}_G(\sigma) = \{\mathtt{val}_G((0,1))\} = \{0\} = \{\varnothing\} = \mathtt{val}_G(\tau)$, kuid $\tau \nsubseteq \sigma$.

1.5.4. Juurega jõustamis- ning tingimuskogum

Mõnes jõustamisteooria aspektis ning rakenduses on kasulik eeldada, et tingimuskogum P on *juurega*, s.o $\varnothing \in P$ [Wea14, lk 85; Kun80, lk-d 186, 239]. Näitame, et sellise eelduse saab @lause @III.15 mõttes teha üldisust kaotamata. Kõigepealt sõnastame definitsiooni.

Definitsioon III.10 (juurega jõustamiskogum, tingimuskogum)**.** Tingimuskogumit P kutsutakse *juurega tingimuskogumiks*, kui $\varnothing \in P$. Järjestatud kolmikut $(P, \subseteq_P, \varnothing)$, kus P on juurega, nimetatakse *juurega jõustamiskogumiks.*

Selgesti iga $p \in P$ puhul $\varnothing \subseteq P$ ehk juurega tingimuskogumis on tühi hulk vähimaks elemendiks.

Järgmise @lause tähenduses pole vahet, kas tingimuskogumilt eeldada juurelisust või mitte.

Lause III.15 (juurega ja juureta jõustamine, [Kun80, lk 239])**.** *Las olla M valemihulga $\mathsf{Form}(\mathsf{ZFC})$ loenduv transitiivne epsilon-kvaasimudel teoorias $\mathsf{T} \supseteq \mathsf{ZFC}$. Olgu P juureta tingimuskogum kvaasimudelis M. s.o $\varnothing \notin P$. Tähistame $Q \coloneqq P \cup \{\varnothing\}$. Siis*

(1) *kui P on juureta M-tingimuskogum, siis Q on juurega M-tingimuskogum,*

(2) *G on geneeriline ideaal hulgas P parajasti siis, kui $G \cup \{\varnothing\}$ on geneeriline ideaal hulgas Q,*

(3) *vastavad jõustamislaiendid on võrdsed, $M^P[G] = M^{G\cup\{\varnothing\}}[Q]$.*

Enne tõestuse kallale asumist peame osa (3) jaoks tegema eeltööd. Sisalduvusega $M^P[G] \subseteq$ $\subseteq M^{G\cup\{\varnothing\}}[Q]$ on olukord kergem, vastupidise sisalduvusega keerulisem. Leidub Q-nimesid, mis ei ole P-nimed, sest parasjagu kehtib eeldus $\varnothing \notin P$. Tuleb näidata, et iga tõkestatud Q-nime korral leidub tõkestatud P-nimi, mille kandjad ühtivad. Otsitava nime moodustame klassifunktsiooniga $\mathtt{rW}$, mis seab Weaveri Q-nimega vastavusse sobiva Weaveri P-nime. Definitsiooni @III.9 raames võime põhjendused tuua Weaveri P-nimede kaudu. Weaveri P-nimedega on mugavam tõestada lemmat @III.17 ja seega ka lauset @III.15.

Klassifunktsiooni $\mathtt{rW}\colon \mathtt{W}^Q \to \mathtt{W}^P$ moodustamise idee on lihtne: suvalisest Q-nimest tuleb rekursiivselt eemaldada paarid, mille teiseks argumendiks on tühi hulk.

$$\begin{cases} \mathtt{rW}(\varnothing) = \varnothing, \\ \mathtt{rW}(\tau) = \{\, (\mathtt{rW}(\sigma), q) \mid (\sigma, q) \in \tau \wedge q \neq \varnothing \,\}. \end{cases}$$

Rekursiooni range vormi, omadused ja absoluutsuse leiab järgmisest lemmast (osa (3) on metalemmaskeem).

Lemma III.16. *Olgu P juureta tingimuskogum ning $Q \coloneqq P \cup \{\varnothing\}$ juurega tingimuskogum. Defineerime seose $\sigma \mathrel{\boldsymbol{E}} \tau :\doteq \sigma \in \bigcup\bigcup \tau$ klassil $\mathtt{W}^Q$. Olgu $\boldsymbol{G}\colon \mathtt{U} \times \mathtt{U} \to \mathtt{U}$ klassifunktsioon, kus*

$$\boldsymbol{G}(\tau, f) = \begin{cases} \bigl\{ x \in \tau \mid (\exists \sigma \in \operatorname{dom} \tau)(\exists q \in P)\bigl((f(\sigma), q) = x\bigr)\bigr\}, \\ \qquad\qquad \text{kui „}\tau\text{ on seos“ ja „}f\text{ on funktsioon“}, \\ \varnothing \qquad\quad \text{vastasel korral.} \end{cases}$$

(Muutuja τ on aktiivne ning P on parameetri rollis.) Tähistame klassil $\mathtt{W}^Q$ seosega $\boldsymbol{E}$ ja klassifunktsiooniga $\boldsymbol{G}$ läbi viidud rekursiooni ühest tulemust kui $\mathtt{rW}$. Siis

$$(\forall \tau \in \mathtt{W}^Q) \qquad \mathtt{rW}(\tau) = \{\, (\mathtt{rW}(\sigma), q) \mid (\sigma, q) \in \tau \wedge q \neq \varnothing \,\}.$$

Lisaks saame järgmised võrdused ja omadused.

(1) *Iga Weaveri Q-nime τ korral on $\mathtt{rW}(\tau)$ Weaveri P-nimi. Iga Weaveri P-nime τ korral $\mathtt{rW}(\tau) = \tau$.*

(2) *Kehtib klasside võrdus $\mathtt{rW}(\mathtt{W}^Q) = \mathtt{W}^P$.*

(3) *Olgu* $\mathcal{M}$ *aksioomide hulga* $\mathtt{Ax}(\mathsf{ZF})$ *transitiivne ja loenduv epsilon-kvaasimudel teoorias* $\mathcal{T} \supseteq \supseteq \mathsf{ZF}$*, sealjuures* $P \in \mathcal{M}$*. Klassifunktsioon* $\mathtt{rW}\colon \mathtt{W}^Q \to \mathtt{W}^P$ *on funktsioonina* $\mathcal{M}$*-absoluutne.*

(4) *Kehtib tõkestatud nimedest koosnevate klasside võrdus* $\mathtt{rW}(M^Q_W) = M^P_W$*, kus* $P \in M$*.*

Tõestuses kasutame muu hulgas fakti, et $\mathtt{W}^P \subseteq \mathtt{W}^Q$. See on vahetult tõestatav potentselt regulaarse rekursiooniga, kasutades sammus lause @III.6 osi @(2), @(4) ning lisaks asjaolu, et tühja hulga kohalolek ei saa kuidagi mõjutada nime ülespoole $\subseteq$-kinnisust.

Tõestus. Olgu $\tau \in \mathtt{W}^Q$ suvaline. Siis

$$\begin{aligned}\mathtt{rW}(\tau) &= \mathcal{G}(\tau, \mathtt{rW}|_{\bigcup\bigcup\tau}) = \\ &= \big\{x \in \tau \mid (\exists\sigma \in \operatorname{dom}\tau)(\exists q \in P)\big((\mathtt{rW}(\sigma), q) = x\big)\big\} = \\ &= \{\, (\mathtt{rW}(\sigma), q) \mid (\sigma, q) \in \tau \wedge q \neq \varnothing \,\}.\end{aligned}$$

Viimases võrduses olema kasutanud Q-nimede jaoks lause @III.6 osa (2) ja teadmist, et $\varnothing \notin P$. Põhjendame lühidalt võrdusi ning omadusi. Väga analoogiline @lemmaga @III.12.

(1) Potentselt regulaarse induktsiooni abil seosega $\sigma \in \bigcup\bigcup\tau$.

(2) Osa (1) põhjal, kasutades lisaks teadmist $\mathtt{W}^P \subseteq \mathtt{W}^Q$.

(3) Taas metateoreemiskeemi @II.13 eelduste kontroll. Sarnane @lausega @III.7, @metalauseskeemiga @III.10 ja lemmaga @III.12. Lisaks, kuna $P \in \mathcal{M}$, $\varnothing \in \mathcal{M}$ ning ühend on funktsioonina $\mathcal{M}$-absoluutne, siis $Q \in \mathcal{M}$.

(4) Osade (1) ja (3) põhjal, vt ka @tõkestatud nimede definitsiooni. ■

Vajame veel järgmist lemmat kandjate kohta. Siin täidab $D_{\text{cw}} \neq \varnothing$ ideaalisuse teist tingimust, st igal kahel hulga D_{cw} elemendil leidub kooskõlalisuse tunnistaja hulgas D_{cw}.

Lemma III.17. *Olgu* M *valemihulga* $\mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$ *loenduv transitiivne epsilon-kvaasimudel teoorias* $\mathsf{T} \supseteq \mathsf{ZFC}$*,* $P \in M$ *juureta tingimuskogum ning* $Q := P \cup \{\varnothing\}$*. Olgu* $\varnothing \neq D_{\text{cw}} \subseteq P$ *alamkogum, mis sisaldab oma elementide kooskõlalisuse tunnistajaid. Siis*

(1) *iga Weaveri* P*-nime* τ *korral* $\mathtt{val}^P_{D_{\text{cw}}}(\tau) = \mathtt{val}^Q_{D_{\text{cw}}\cup\{\varnothing\}}(\tau)$*,*

(2) *iga Weaveri* Q*-nime* τ *korral* $\mathtt{val}^P_{D_{\text{cw}}}(\mathtt{rW}(\tau)) = \mathtt{val}^Q_{D_{\text{cw}}\cup\{\varnothing\}}(\tau)$*.*

Tõestus. Osa @(1) järeldub osast @(2), sest $\mathtt{W}^P \subseteq \mathtt{W}^Q$ ning lemma @III.15 jaotisest @(1) $\mathtt{rW}(\tau) = \tau$, kui $\tau \in \mathtt{W}^P$. Põhjendame osa @(2). Jälle kasutame potentselt regulaarset induktsiooni. Kehtigu $\mathtt{val}^P_{D_{\mathrm{cw}}}(\mathtt{rW}(\sigma)) = \mathtt{val}^Q_{D_{\mathrm{cw}}\cup\{\varnothing\}}(\sigma)$ iga $\sigma \in \bigcup\bigcup\tau$ korral.

- $\underline{\mathtt{val}^P_{D_{\mathrm{cw}}}(\mathtt{rW}(\tau)) \supseteq \mathtt{val}^Q_{D_{\mathrm{cw}}\cup\{\varnothing\}}(\tau)}$. Las $x \in \mathtt{val}^Q_{D_{\mathrm{cw}}\cup\{\varnothing\}}(\tau)$, siis $x = \mathtt{val}^Q_{D_{\mathrm{cw}}\cup\{\varnothing\}}(\sigma)$, kus $\sigma \in \tau^{-1}(D_{\mathrm{cw}} \cup \{\varnothing\})$. Tähendab, et leidub $p \in D_{\mathrm{cw}} \cup \{\varnothing\}$ nii, et $(\sigma, p) \in \tau$. Kuivõrd P oli juureta tingimuskogum ja $D \neq \varnothing$, leidub $\varnothing \neq p' \in D$. Olgu $q \in D$ tingimuste p, p' koosõlalisuse tunnistaja. Weaveri Q-nimede ülespoole $\subseteq$-kinnisusest $(\sigma, q) \in \tau$, kusjuures $p' \subseteq q$ alusel $q \neq \varnothing$. Et $(\sigma, q) \in \tau$, $q \neq \varnothing$, siis lemma @III.15 põhjal $(\mathtt{rW}(\sigma), q) \in$ $\in \mathtt{rW}(\tau)$, kandjate definitsioonist $\mathtt{val}^P_{D_{\mathrm{cw}}}(\mathtt{rW}(\sigma)) \in \mathtt{val}^P_{D_{\mathrm{cw}}}(\mathtt{rW}(\tau))$. Induktsioonieeldusest $\mathtt{val}^P_{D_{\mathrm{cw}}}(\mathtt{rW}(\sigma)) = \mathtt{val}^Q_{D_{\mathrm{cw}}\cup\{\varnothing\}}(\sigma)$, mistõttu ka $x = \mathtt{val}^Q_{D_{\mathrm{cw}}\cup\{\varnothing\}}(\sigma) \in \mathtt{val}^P_{D_{\mathrm{cw}}}(\mathtt{rW}(\tau))$.
- $\underline{\mathtt{val}^P_{D_{\mathrm{cw}}}(\mathtt{rW}(\tau)) \subseteq \mathtt{val}^Q_{D_{\mathrm{cw}}\cup\{\varnothing\}}(\tau)}$. Las $x \in \mathtt{val}^P_{D_{\mathrm{cw}}}(\mathtt{rW}(\tau))$, siis $x = \mathtt{val}^P_{D_{\mathrm{cw}}}(\mathtt{rW}(\sigma))$ ja leidub $q \in D_{\mathrm{cw}}$ nii, et $(\mathtt{rW}(\sigma), q) \in \mathtt{rW}(\tau)$. Sestap @III.15 põhjal $(\sigma, q) \in \tau$. Kandja määratlusest ning sisalduvusest $D_{\mathrm{cw}} \subseteq D_{\mathrm{cw}} \cup \{\varnothing\}$ johtuvalt $\mathtt{val}^Q_{D_{\mathrm{cw}}\cup\{\varnothing\}}(\sigma) \in \mathtt{val}^Q_{D_{\mathrm{cw}}\cup\{\varnothing\}}(\tau)$. Induktsioonihüpoteesist $\mathtt{val}^Q_{D_{\mathrm{cw}}\cup\{\varnothing\}}(\sigma) = \mathtt{val}^P_{D_{\mathrm{cw}}}(\mathtt{rW}(\sigma))$, mistõttu ka $x = \mathtt{val}^P_{D_{\mathrm{cw}}}(\mathtt{rW}(\sigma)) \in$ $\in \mathtt{val}_{D_{\mathrm{cw}}}(\tau)$.

Lemma on tõestatud. ■

Saame anda lause @III.15 tõestuse.

Lause @III.15 tõestus. (1) Et $P \in M$, siis tühja hulga $\varnothing$ M-absoluutsusest konstandina ja ühendi M-absoluutsusest funktsioonina (metateoreemiskeem @II.9) järeldub $Q =$ $= P \cup \{\varnothing\} \in M$.

(2) Rutiinne geneerilise ideaali tingimuste kasutamine. Piisavuse-osas rakendada lisaks eeldust, et P on juureta tingimuskogum.

(3) Kehtivad võrdused

$$\begin{aligned} M^P[G] &= \mathtt{val}^P_G(M^P_W) = && \text{(def)} \\ &= \mathtt{val}^P_G(\mathtt{rW}(M^Q_W)) = && \text{(lemma @III.16 @(4))} \\ &= \mathtt{val}^Q_{G\cup\{\varnothing\}}(M^Q_W) = && \text{(lemma @III.17 @(2))} \\ &= M^Q[G \cup \{\varnothing\}]. && \text{(def)} \end{aligned}$$

Tulemus on tõestatud. ■

Varem nägime, et jõustamislaiendi omadustega tegeledes võime kasutada tavalisi P-nimesid või Weaveri P-nimesid. Valiku teeme selle järgi, kumb meetod on parajasti mugavam. Praeguse jaotise järeldusena võime lisaks nõuda või jätta nõudmata, et tingimuskogum P omab juurt.

Näiteks eeldame tingimuskogumi juurelisust kanooniliste P-nimede juures. Üldise märkusena konstateerime, et töö raamidest väljuva *itereeritud* ehk *järkjärgulise jõustamise* puhul on samuti kombeks võtta juurega jõustamiskogum [Wea14, lk 85; Kun80, lk-d 239, 253].

1.5.5. Kanooniliste P-nimede definitsioon ja absoluutsus

Siin jaotises defineerime kahte tüüpi *kanoonilised P-nimed* [Kun80, lk 190]. Hiljem tõestame nende abiga, et jõustamislaiend on tõepoolest laiend, s.o $M \subseteq M[G]$, ning et alati $G \in M[G]$.

Olgu P juurega tingimuskogum. Et oleme juba mitu sarnast definitsiooni ja rekursiooni eelnevalt läbi teinud, anname kohe kanooniliste nimede definitsiooni.

Definitsioon III.11 (kanoonilised P-nimed, [Kun80, lk 190]). Hulga x *kanooniliseks P-nimeks* nimetatakse hulka $\mathtt{can}(x)$, kus

$$\mathtt{can}(x) = \{\, (\mathtt{can}(y), \varnothing) \mid y \in x \,\}.$$

Kirjandusest leiab veel tähistusi $\check{x}$ ja $\mathtt{encode}(x)$. *Konstantseks kanooniliseks P-nimeks* kutsume hulka Γ, mispuhul

$$\Gamma \coloneqq \{\, (\mathtt{can}(p), p) \mid p \in P \,\}.$$

Kanoonilised P-nimed on defineeritakse kõigi hulkade jaoks ja potentselt regulaarse rekursiooniga. Kui aga kanoonilised P-nimed on kord defineeritud, on konstantne kanooniline P-nimi saadav hulgast

$$\{(p,p) \in P \times P\} = \{\, x \in P \times P \mid \exists p \in P(x = (p,p)) \,\}$$

asendusaksioomiskeemi abil täiendava rekursioonita. Asendatakse $(p,p) \mapsto (\mathtt{can}(p), p)$.

Kanooniliste P-nimede idee on „märgistada“ kõik hulga x elemendid geneerilise ideaali $G \subseteq$ $\subseteq P$ elemendiga [Wea14, lk 35]. P-nime kandja definitsiooni järgi korjab $\mathtt{val}_G(\mathtt{can}(x))$ siis üles kõik kandjad $\mathtt{val}_G(\mathtt{can}(y))$, kus $y \in x$. Vahetu epsiloninduktsioon näitab, et $\mathtt{val}_G(\mathtt{can}(x)) = x$. Tühi hulk on kindlasti G element, sest P oli juurega jõustamistingimus ja $G \neq \varnothing$ on kinnine nõrgemate tingimuste suhtes. Üldist tulemust $\mathtt{val}_G(\mathtt{can}(x)) = x$ teades pole keeruline mõista, et $\mathtt{val}_G(\Gamma) = G$. Konstantne kanooniliste P-nimi Γ märgistab ära kõik tingimuskogumi P elemendid, aga üksnes iseendaga [Wea14, lk 35]. Geneeriline ideaal korjab kandjatena üles ainult endasse kuuluvate teiste koordinaatidega P-nimed. Kanooniliste P-nimede korral on määrava tähtsusega nende absoluutsus funktsioonina, s.o kui $x \in M$, siis $\mathtt{can}(x) \in M$, ja $\Gamma \in M$. Eriti pole võimalik kasutada Γ määratluses hulka G, kuna reeglina $G \notin M$.

Sõnastame seni öeldu rangelt lausena.

Lause III.18 ([Kun80, lk 190]). *Olgu P juurega tingimuskogum. Defineerime klassifunktsiooni $\mathtt{G}\colon \mathtt{U}\times\mathtt{U}\to\mathtt{U}$, kus*

$$\mathtt{G}(x,f)=\mathtt{G}(f)=\begin{cases}\operatorname{ran} f\times\{\varnothing\}, & \text{kui „}f\text{ on funktsioon“},\\ \varnothing & \text{vastasel korral.}\end{cases}$$

(Muutuja x on fiktiivne.) Tähistame klassil $\mathtt{U}$ seosega $\in$ ja klassifunktsiooniga $\mathtt{G}$ läbi viidud rekursiooni ühest tulemust kui $\mathtt{can}$. Siis

$$(\forall x\in\mathtt{U})\qquad \mathtt{can}(x)=\{\,(\mathtt{can}(y),\varnothing)\mid y\in x\,\}.$$

Lisaks saame järgmised võrdused ja omadused.

(1) *Kanoonilised P-nimed on P-nimed. Iga hulga x puhul on $\mathtt{can}(x)$ P-nimi. Konstantne kanooniline P-nimi Γ on P-nimi.*

(2) *Olgu $\varnothing\in G\subseteq P$ alamkogum. Iga hulga x korral $\mathtt{val}_G(\mathtt{can}(x))=x$. Samuti $\mathtt{val}_G(\Gamma)=$ $=G$.*

(3) *Olgu $\mathtt{M}$ aksioomide hulga $\mathtt{Ax}(\mathsf{ZF})$ transitiivne ja loenduv epsilon-kvaasimudel teoorias $\mathtt{T}\supseteq$ $\supseteq\mathsf{ZF}$, sealjuures $P\in\mathtt{M}$. Klassifunktsioon $\mathtt{can}\colon\mathtt{U}\to\mathtt{V}^P$ on funktsioonina $\mathtt{M}$-absoluutne. Samuti $\Gamma\in\mathtt{M}$.*

Tõestus. Tegemist epsilonrekursiooniga, seose $\in$ potentne regulaarsus tuleneb regulaarsuse aksioomist. Kui x on ükskõik milline hulk, siis

$$\begin{aligned}\mathtt{can}(x)&=\mathtt{G}(x,\mathtt{can}|_{\mathrm{ext}_\in(x)})=\\&=\mathtt{G}(\mathtt{can}|_{\mathrm{ext}_\in(x)})=\\&=\mathtt{G}(\mathtt{can}|_x)=\\&=\operatorname{ran}(\mathtt{can}|_x)\times\{\varnothing\}=\\&=\{\,\mathtt{can}(y)\mid y\in x\,\}\times\{\varnothing\}=\\&=\{\,(\mathtt{can}(y),\varnothing)\mid y\in x\,\}.\end{aligned}$$

(1) Epsiloninduktsiooniga. Oletame, et iga $y\in x$ puhul juba teame, et $\mathtt{can}(y)$ on P-nimi. Siis $\mathtt{can}(x)=\{\,(\mathtt{can}(y),\varnothing)\mid y\in x\,\}$ on P-nimi tänu lause @III.6 osale @(4). Pärast

seda järeldub sama lause samast punktist, et $\Gamma = \{\, (\mathtt{can}(p), p) \mid p \in P \,\}$ on P-nimi.

(2) Taas epsiloninduktsiooniga. Saame

$$\begin{aligned}
\mathtt{val}_G(\mathtt{can}(x)) &= \{\, \mathtt{val}_G(\mathtt{can}(y)) \mid \exists g \in G((\mathtt{can}(y), g) \in \mathtt{can}(x)) \,\} = && (\approx \text{def}) \\
&= \{\, \mathtt{val}_G(\mathtt{can}(y)) \mid y \in x \,\} = && (\varnothing \in G) \\
&= \{\, y \mid y \in x \,\} = && (\text{ind-eeldus}) \\
&= x. && (\text{hulk } x)
\end{aligned}$$

(3) Metateoreemiskeemi @II.13 eelduste kontroll. Analoogiline lausega @III.7, metalauseskeemiga @III.9 ja lemmadega @III.12, @III.16. Seetõttu põhjendame kõigest, miks $\Gamma \in \mathtt{M}$. Esiteks, kuna $P \in \mathtt{M}$ ja otsekorrutis on funktsioonina $\mathtt{M}$-absoluutne, siis $P \times P \in \mathtt{M}$. Eraldamisaksioomiskeemi mudeldamisest ja tingimuse $\exists p \in P(x = (p, p))$ absoluutsusest

$$\{(p,p) \in P \times P\} = \{\, x \in P \times P \mid \exists p \in P(x = (p,p)) \,\} \in \mathtt{M}.$$

Klassifunktsiooni `can` ja järjestatud paari absoluutsustest funktsioonidena on ka

$$(x, y) \mapsto (\mathtt{can}(x), y)$$

funktsioonina absoluutne. Asendamisaksioomiskeemi mudeldamisest sestap

$$\{\, (\mathtt{can}(p), p) \mid p \in P \,\} = \{\, (\mathtt{can}(p), p) \mid (p,p) \in P \times P \,\} = \Gamma \in \mathtt{M}.$$

Lause on tõestatud. ■

1.6. Jõustamislaiendi $M[G]$ lihtsamad omadused

Nüüdseks oleme teinud piisavalt eeltööd, et tõestada jõustamise põhiteoreemiskeemi kaks lihtsamat osa.

Teoreemiskeem III.19 (jõustamise põhiteoreemiskeem, I osa, [Kun80, lk-d 190–191; Wea14, lk-d 35–36; Jec02, lk 203]). *Olgu M aksioomide hulga $\mathtt{Ax}(\mathsf{ZFC})$ transitiivne ja loenduv epsilonkvaasimudel teoorias $\mathsf{T} \supseteq \mathsf{ZFC}$. Las olla P tingimuskogum ning $G \subseteq P$ geneeriline ideaal. Kehtivad järgmised väited.*

(1) $M \subseteq M[G]$, $G \in M[G]$, $M[G] \neq \varnothing$

(2) *$M \supseteq M[G]$ ja $M = M[G]$ parajasti siis, kui $G \in M$.*

(3) *Olgu N aksioomide hulga $\mathtt{Ax}(\mathsf{ZFC})$ transitiivne epsilon-kvaasimudel teoorias $\mathsf{T} \supseteq \mathsf{ZFC}$, mispuhul $M \subseteq \mathit{N}$ ning $G \in \mathit{N}$. Siis $M[G] \subseteq \mathit{N}$.*

(4) *$M[G]$ on (välisest seisukohast) transitiive ning loenduv.*

Tõestuses on olulisel kohal kanoonilised P-nimed, konstantne kanooniline P-nimi ning P-nime kandja klassifunktsiooni $\mathtt{val}$ absoluutsus funktsioonina.

Tõestus. (1) Las $x \in M$. Kanoonilise P-nime kandja funktsiooni $\mathtt{can}$ M-absoluutsusest funktsioonina $\mathtt{can}(x) \in M$. Vastavalt jõustamislaiendi definitsioonile $\mathtt{val}_G(\mathtt{can}(x)) \in$ $\in M[G]$. Lause @III.18 osast @(2) $\mathtt{val}_G(\mathtt{can}(x)) = x$, seega $x \in M[G]$. Analoogiliselt, kuna konstantne P-nimi $\Gamma \in M$, siis $G = \mathtt{val}_G(\Gamma) \in M[G]$. Arusaadavalt $M[G] \neq \varnothing$, kas või $G \in M[G]$, aga ka $M \subseteq M[G]$ ja $M \neq \varnothing$.

(2) Osale @(1) toetudes teame, et alati $M \subseteq M[G]$. Nõnda piirdume väitega, et $M \supseteq M[G]$ parajasti siis, kui $G \in M$. Kui $G \notin M$, siis jällegi osast @(1) $M \subsetneq M[G]$, sest $G \in M[G]$. Olgu nüüd $G \in M$. Kvaasimudel M rahuldab sel juhul metalauseskeemi @III.10 tingimusi, mistõttu $\mathtt{val}^G$ on funktsioonina M-absoluutne. Kui $x \in M$, siis $\mathtt{val}_G(x) \in M$, kust tulebki $\mathtt{val}_G(M^P) = M[G] \subseteq M$, kuna $M^P \subseteq M$.

(3) Kuna $M \subseteq \mathit{N}$, siis ka $M^P \subseteq \mathit{N}$. Kvaasimudel N rahuldab metalauseskeemi @III.10 eeldusi. Sestap $\mathtt{val}_G(M^P) = M[G] \subseteq \mathit{N}$.

(4) Olgu $x \in M[G]$. Definitsiooni järgi leidub $\tau \in M^P$ nii, et $\mathtt{val}_G(\tau) = x$. Kandja määratlusest tulenevalt on kõik hulga x elemendid $y \in x$ seetõttu kujul $y = \mathtt{val}_G(\sigma)$, kus mingi $g \in G$ korral $(\sigma, g) \in \tau$. Lemma @III.8 ja järjestatud paari põhiomaduse põhjal on σ tõkestatud P-nimi, sestap $y = \mathtt{val}_G(\sigma) \in M[G]$. Transitiivsus välisest seisukohast lähtuvalt on tõestatud.

Põhjendame loenduvuse, arutelu lähtub välisest seisukohast. $M^P \subseteq M$, seega M^P on ülimalt loenduv. Kujutus $M^P \ni \tau \mapsto \mathtt{val}_G(\tau) \in M[G]$ on sürjektiivne, järelikult ka $M[G]$ on ülimalt loenduv. Teisalt $M \subseteq M[G]$ ning M oli loenduv. Kokkuvõttes on $M[G]$ (välisest seisukohast) loenduv. ■

Järgmisena tõestame, et jõustamislaiend rahuldab viit lihtsamat ZFC-teooria aksioomi.

Teoreemiskeem III.20 (jõustamise põhiteoreemiskeem, II osa, [Kun80, lk-d 191, 202; Wea14, lk 36]). *Olgu M aksioomide hulga $\mathtt{Ax}(\mathsf{ZFC})$ transitiivne ja loenduv epsilon-kvaasimudel teoorias $\mathsf{T} \supseteq \mathsf{ZFC}$. Las olla P tingimuskogum ning $G \subseteq P$ geneeriline ideaal. Jõustamis-*

laiend $M[G]$ rahuldab (1) *ekstensionaalsusaksioomi,* (2) *regulaarsuse aksioomi,* (3) *hulgapaari moodustamise aksioomi,* (4) *ühendi moodustamise aksioomi,* (5) *lõpmatu hulga leidumise aksioomi.*

Aksioomi rahuldamise all peame silmas, et teoorias T on tuletatav vastava aksioomi epsilontõkend hulgale $M[G]$. Sekventsimärgid jätame mugavuse tõttu välja toomata.

Tõestus. Tõestame vastavalt toodud nummerdusele. Toome kõigepealt välja aksioomid algsel kujul.

(1) $\forall X \forall Y (X = Y \Leftrightarrow \forall z (z \in X \Leftrightarrow z \in Y))$

(2) $\forall X (X \neq \varnothing \Rightarrow \exists x (x \in X \wedge \neg \exists z (z \in X \wedge z \in x)))$

(3) $\forall X \forall Y \exists Z \forall z (z \in Z \Leftrightarrow z = X \vee z = Y)$

(4) $\forall X \exists Y \forall z (z \in Y \Leftrightarrow \exists Z (z \in Z \wedge Z \in X))$

(5) $\exists A (\varnothing \in A \wedge \forall a (a \in A \Rightarrow a^+ \in A))$

Kasutades rohkem tõkestatud kvantoreid, kirjutame aksioomid teisel kujul ümber. Alternatiivsed kujud on tühja omateooria ehk võrdusega predikaatarvutuse mõttes ekvivalentselt algsetega. Meenutame, et niisugust vahetust lubab teha metalemmaskeem @II.2.

(1) $\forall X \forall Y (X = Y \Leftrightarrow \forall z \in X (z \in Y) \wedge \forall z \in Y (z \in X))$

(2) $\forall X (X \neq \varnothing \Rightarrow \exists x \in X (\neg \exists z \in X (z \in x)))$

(3) $\forall X \forall Y \exists Z (X \in Z \wedge Y \in Z \wedge \forall z \in Z (z = X \vee z = Y))$

(4) $\forall X \exists Y \forall z (z \in Y \Leftrightarrow \exists Z \in X (z \in Z))$

(5) $\exists A (\varnothing \in A \wedge \forall a \in A (a^+ \in A))$

Nende valemite epsilontõkendid hulgale $M[G]$ on järgmised.

(1') $\forall X, Y \in M[G] (X = Y \Leftrightarrow \forall z \in X (z \in Y) \wedge \forall z \in Y (z \in X))|_{M[G]}$

(2') $\forall X \in M[G] (X \neq \varnothing \Rightarrow \exists x \in X (\neg \exists z \in X (z \in x)))|_{M[G]}$

(3') $\forall X, Y \in M[G] \exists Z \in M[G] (X \in Z \wedge Y \in Z \wedge \forall z \in Z (z = X \vee z = Y))|_{M[G]}$

(4') $\forall X \in M[G] \exists Y \in M[G] \forall z \in M[G] (z \in Y \Leftrightarrow \exists Z \in X (z \in Z))|_{M[G]}$

(5') $\exists A \in M[G] (\varnothing \in A \wedge \forall a \in A (a^+ \in A))|_{M[G]}$

Valemite @(1')–@(4') sulgavaldiste kõik koostisosad on absoluutsed iga mittetühja transitiivse hulga suhtes tänu metateoreemiskeemi @II.7 osale (1). Lemmaskeemide @II.3 ja @II.4 järgi säilitavad lausearvutuslikud tehted ning tõkestatud kvantorid absoluutsust. Nimetatud sulgavaldistes muud polegi. Kuna teoreemiskeemi @III.20 järgi on jõustamislaiend $M[G]$ mittetühi ja transitiivne, võime sulgavaldiste tõkestamise neis ära jätta. Valemi @(5') puhul on täiendava koostisosana hulga a järglaseks $a^+ = a \cup \{a\}$ olemine. Niisuguse absoluutsuse saame metateoreemiskeemi @II.7 osast (4). Eelnevalt peame aga teadma, et $M[G]$ on teooria $\mathsf{Z}^- - \mathsf{S} - \mathsf{P} - \mathsf{Inf}$ aksioomide hulga epsilon-kvaasimudel teoorias T. Kui põhjendame ahendatud aksioomide kehtivust ülemise järjekorra alusel, on punktini (5') jõudes see puuduv eeldus täidetud. Järjekorra kokkuleppest kinni pidades võime sestap ka valemis @(5) sulgavaldise tõkestamisest loobuda.

(1') $\forall X, Y \in M[G](X = Y \Leftrightarrow \forall z \in X(z \in Y) \wedge \forall z \in Y(z \in X))$

(2') $\forall X \in M[G](X \neq \varnothing \Rightarrow \exists x \in X(\neg \exists z \in X(z \in x)))$

(3') $\forall X, Y \in M[G] \exists Z \in M[G](X \in Z \wedge Y \in Z \wedge \forall z \in Z(z = X \vee z = Y))$

(4') $\forall X \in M[G] \exists Y \in M[G] \forall z \in M[G](z \in Y \Leftrightarrow \exists Z \in X(z \in Z))$

(5') $\exists A \in M[G](\varnothing \in A \wedge \forall a \in A(a^+ \in A))$

Väited @(1') ja @(2') johtuvad kohe vastavalt üldistest, tõkestamata ekstensionaalsuse ning regulaarsuse aksioomidest. Väited erinevad aksioomidest üksnes selle poolest, et tõkestamata üldisuskvantor on asendatud tõkestatud üldisuskvantoriga, mis väite kehtivust ei mõjuta. Lõpmatu hulga leidumise aksioomi alusel sobiks tõkestatud varianti @(5') võtta $A := \omega$, kui oleks teada $\omega \in M[G]$. Baas-kvaasimudel M rahuldab metateoreemiskeemi @II.9 osa (4) eeldusi, järelikult $\omega \in M$. Teoreemiskeemi @I.19 osa (1) põhjal $M \subseteq M[G]$, seega $\omega \in M[G]$ nagu soovitud. Järele on jäänud väited @(3') ja (4').

Tõestame tõkestatud hulgapaari leidumise aksioomi @(3') ehk

$$\forall X, Y \in M[G] \exists Z \in M[G](X \in Z \wedge Y \in Z \wedge \forall z \in Z(z = X \vee z = Y)).$$

Hulgapaari tähistamise tavast tulenevalt piisab tõestada, et

$$\forall X, Y \in M[G] \exists Z \in M[G](Z = \{X, Y\}),$$

kus kirjapildiga $\{X, Y\}$ peame silmas meie universumi järjestamata hulgapaari elementidega X ja Y. Valime $X, Y \in M[G]$. Jõustamislaiendi definitsiooni järgi leiduvad τ_X, $\tau_Y \in M^P$ nii, et $X = \mathtt{val}_G(\tau_X)$ ja $Y = \mathtt{val}_G(\tau_Y)$. Järjestatud ja järjestamata paaride moodustamised on funktsioonidena M-absoluutne, sestap $\tau := \{(\tau_X, \varnothing), (\tau_Y, \varnothing)\} \in M$. Lause @III.6 osa @(4)

põhjal $\tau \in M^P$. P-nime kandja määratluse alusel $\mathtt{val}_G(\tau) = \{\mathtt{val}_G(\tau_X), \mathtt{val}_G(\tau_Y)\}$, hulkade X, Y valiku põhjal $\{\mathtt{val}_G(\tau_X), \mathtt{val}_G(\tau_Y)\} = \{X, Y\}$. Jõustamislaiendi definitsioonist $\mathtt{val}_G(\tau) = \{X, Y\} \in M[G]$, mida soovisimegi.

Asume tõkestatud ühendi moodustamise aksioomi

$$\forall X \in M[G] \exists Y \in M[G] \forall z \in M[G] (z \in Y \Leftrightarrow \exists Z \in X (z \in Z))$$

kallale. Siingi piisab, kui näitame, et

$$\forall X \in M[G] \exists Y \in M[G] \forall z \in M[G] (Y = \bigcup X),$$

kuid tingimuses $Y = \bigcup X$ kindlam veendumine taandub ikkagi pikema suluavaldise kontrollile. Olgu $X \in M[G]$ suvaline. Mingi $\tau \in M^P_W$ korral $X = \mathtt{val}_G(\tau)$. Tahame leida tõkestatud Weaveri P-nime ϱ, mispuhul

$$\begin{aligned}
\mathtt{val}_G(\varrho) = \bigcup X = \bigcup \mathtt{val}_G(\tau) = \\
&= \bigcup \{\, \mathtt{val}_G(\sigma) \mid \sigma \in \tau^{-1}(G) \,\} = \\
&= \{\, \mathtt{val}_G(\pi) \mid (\exists \sigma \in \operatorname{dom} \tau)(\pi \in \sigma^{-1}(G) \wedge \sigma \in \tau^{-1}(G)) \,\} = \\
&= \{\, \mathtt{val}_G(\pi) \mid (\exists \sigma \in \operatorname{dom} \tau)(\exists g_1 \in G)((\pi, g_1) \in \sigma) \wedge \exists g_2 \in G((\sigma, g_2) \in \tau) \,\} = \\
&= \{\, \mathtt{val}_G(\pi) \mid (\exists \sigma \in \operatorname{dom} \tau)(\exists g \in G)((\pi, g) \in \sigma \wedge (\sigma, g) \in \tau) \,\}.
\end{aligned}$$

Viimases võrduses kasutasime ideaali kooskõlalisuse tunnistajate omadust ning Weaveri P-nimede ülespoole $\subseteq$-kinnisust. Väidame, et sobib võtta

$$\varrho \coloneqq \{\, (\pi, p) \in \bigcup \operatorname{dom} \tau \mid (\exists \sigma \in \operatorname{dom} \tau)((\pi, p) \in \sigma \wedge (\sigma, p) \in \tau) \,\}.$$

Kuna $(\sigma, p) \in \tau$ ja $(\pi, p) \in \sigma$, siis lause @III.6 osa (2) kahekordsest rakendamisest järeldub, et π on Weaveri P-nimi ja $p \in P$. Järelikult koosneb ϱ paaridest (π, p), mille esimene koordinaat π on Weaveri P-nimi ja teine koordinaat p tingimuskogumi P element. Kui $(\pi, p) \in \varrho$ ning $q \in P$ on tugevam kui p, siis nimede σ ja τ ülespoole $\subseteq$-kinnisusest $(\pi, q) \in \sigma$ ja $(\pi, q) \in \tau$, järelikult lause @III.6 osa (4) põhjal on ϱ Weaveri P-nimi. Seose määramispiirkonna ning ühendi absoluutsustest funktsioonidena, kuivõrd $\tau \in M$, siis $\bigcup \operatorname{dom} \tau \in M$. Kvaasimudel M mudeldab eraldamisaksioomiskeemi, sealjuures $\tau \in M$, $P \in M$ ja tingimuse

$$(\exists \sigma \in \operatorname{dom} \tau)((\pi, p) \in \sigma \wedge (\sigma, p) \in \tau)$$

absoluutsuse põhjal $\varrho \in M_W^P$. Niisiis $\mathtt{val}_G(\varrho) \in M[G]$. Lõpuks

$$\begin{aligned}\mathtt{val}_G(\varrho) &= \{\, \mathtt{val}_G(\pi) \mid \pi \in \varrho^{-1}(G) \,\} = \\ &= \{\, \mathtt{val}_G(\pi) \mid (\exists g \in G)((\pi, g) \in \varrho) \,\} = \\ &= \{\, \mathtt{val}_G(\pi) \mid (\exists g \in G)((\pi, g) \in \bigcup \operatorname{dom} \tau \wedge (\exists \sigma \in \operatorname{dom} \tau)((\pi, g) \in \sigma \wedge (\sigma, g) \in \tau)) \,\}.\end{aligned}$$

Kuna $(\pi, g) \in \bigcup \operatorname{dom} \tau$ kehtib parajasti siis, kui $(\exists \sigma \in \operatorname{dom} \tau)((\pi, g) \in \sigma)$, siis

$$\begin{aligned}\mathtt{val}_G(\varrho) &= \{\, \mathtt{val}_G(\pi) \mid (\exists g \in G)((\pi, g) \in \bigcup \operatorname{dom} \tau \wedge (\exists \sigma \in \operatorname{dom} \tau)((\pi, g) \in \sigma \wedge (\sigma, g) \in \tau)) \,\} = \\ &= \{\, \mathtt{val}_G(\pi) \mid (\exists g \in G)(\exists \sigma \in \operatorname{dom} \tau)((\pi, g) \in \sigma \wedge (\sigma, g) \in \tau) \,\} = \\ &= \{\, \mathtt{val}_G(\pi) \mid (\exists \sigma \in \operatorname{dom} \tau)(\exists g \in G)((\pi, g) \in \sigma \wedge (\sigma, g) \in \tau) \,\} = \\ &= \bigcup \mathtt{val}_G(\tau) = \bigcup X.\end{aligned}$$

Üle-eelviimases võrduses kasutasime samaliigiliste tõkestatud kvantorite kommutatiivsust.

Tulemus on tõestatud. ■

Jaotise viimase tulemusena tõestame, et nime kandja astak ei saa olla suurem kui vastava nime astak. Taolist astakute võrratust rakendame pärast põhiteoreemiskeemis võrduse $\mathtt{Ord}^M = \mathtt{Ord}^{M[G]}$ põhjendamiseks.

Lemma III.21. *P-nime kandja astak ei ületa nime astakut: iga $\tau \in \mathsf{V}^P$ korral kehtib mitterange võrratus $\mathtt{Rank}(\mathtt{val}_G(\tau)) \leqslant \mathtt{Rank}(\tau)$.*

Lemma tõestus ei kasuta G ideaalisust ega geneerilisust.

Tõestus. Potentselt regulaarse induktsiooniga klassil V^P seosega $\sigma \in \tau^{-1}$. Korrektsus lause @III.9 osast (1). Oletame, et iga $\sigma \in \tau^{-1}$ korral $\mathtt{Rank}(\mathtt{val}_G(\sigma)) \leqslant \mathtt{Rank}(\sigma)$. Siis

$$\begin{aligned}\mathtt{Rank}(\mathtt{val}_G(\tau)) &= \sup\{\, (\mathtt{Rank}(\mathtt{val}_G(\sigma)))^+ \mid \mathtt{val}_G(\sigma) \in \mathtt{val}_G(\tau) \,\} = && \text{(lause @I.29)} \\ &= \sup\{\, (\mathtt{Rank}(\mathtt{val}_G(\sigma)))^+ \mid \sigma \in \tau^{-1}(G) \,\} \leqslant && \text{(lause @III.9 (2) i))} \\ &\leqslant \sup\{\, (\mathtt{Rank}(\sigma))^+ \mid \sigma \in \tau^{-1}(G) \,\} \leqslant && \text{(ind-eeld)} \\ &\leqslant \sup\{\, (\mathtt{Rank}(\sigma))^+ \mid \sigma \in \bigcup\bigcup \tau \,\} \leqslant && \text{(ülemhulk)} \\ &\leqslant \sup\{\, (\mathtt{Rank}((\sigma, p))^+ \mid (\sigma, p) \in \tau \,\} = && \text{(lause @I.28 (4))} \\ &= \mathtt{Rank}\,\tau. && \text{(lause @I.29)}\end{aligned}$$

Kokkuvõttes $\mathtt{Rank}(\mathtt{val}_G(\tau)) \leqslant \mathtt{Rank}\,\tau$, nagu oli soovitud. ■

2. Jõustamise põhiteoreemiskeem

Olgu P tingimuskogum ja las olla $\tau_1, \ldots, \tau_n$ tõkestatud (Weaveri) P-nimed. Olgu $\Phi[\tau_1, \ldots, \tau_n] \in$ $\in \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$, sealjuures $\mathtt{Free}(\Phi) = \{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$, $n \geqslant 0$. On loomulik küsida, milliste geneeriliste ideaalide jaoks kehtib väide

$$(\Phi|_{M[G]})[\tau_1/\mathtt{val}_G(\tau_1), \ldots, \tau_n/\mathtt{val}_G(\tau_n)]$$

või kuidas niisuguse väite paikapidavuses veenduda. Struktuurselt kõige lihtsam on juht, kui üheainsa elemendi $p \in P$ kuuluvus geneerilisse ideaali $p \in G$ tagab koheselt väite kehtivuse vastava jõustamislaiendi jaoks. Kui tõepoolest järeldub valemi Φ kehtivus kuuluvusest $p \in G$, siis öeldakse, et p *jõustab valemit* Φ ja kirjutatakse $p \Vdash_P \Phi$. [Wea14, lk 37]

Definitsioon III.12 (jõustamisseos, [Wea14, lk 37; Kun80, lk 194])**.** Olgu M aksioomide hulga $\mathtt{Ax}(\mathsf{ZFC})$ transitiivne ja loenduv epsilon-kvaasimudel teoorias $\mathsf{T} \supseteq \mathsf{ZFC}$. Olgu $P \subseteq M$ tingimuskogum. Olgu $\Phi[\tau_1, \ldots, \tau_n] \in \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$, sealjuures $\mathtt{Free}(\Phi) = \{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$, $n \geqslant 0$. Kirjutame

$$\begin{aligned} p \Vdash_P \Phi[\tau_1, \ldots, \tau_n] \mathrel{:\doteq} \forall G' \forall y'_1, \ldots, y'_n \big(& G' \subseteq P \wedge \text{„}G' \text{ on geneeriline ideaal“} \wedge \\ & \wedge y'_1 = \mathtt{val}_{G'}(\tau_1) \wedge \cdots \wedge y'_n = \mathtt{val}_{G'}(\tau_n) \wedge \\ & \wedge p \in G' \Rightarrow \Phi[\tau_1/y'_1, \ldots, \tau_n/y'_n]|_{M[G']} \big) \end{aligned}$$

ja avaldist „$p \Vdash_P \Phi[\tau_1, \ldots, \tau_n]$“ loeme kui *tingimus* p *jõustab valemit* $\Phi[\tau_1, \ldots, \tau_n]$.

Rakendustes on alati $p \in P$ ning $\tau_1, \ldots, \tau_n$ on tõkestatud (Weaveri) P-nimed. Rõhutame, et jõustamisseos $\Vdash_P$ sõltub epsilon-kvaasimudelist M, tingimuskogumist P ja valemist $\Phi[\tau_1, \ldots, \tau_n]$. Vahel tähistataksegi jõustamisseost kui $\Vdash_{M,P}$. Jõustamisseose näol on sisuliselt tegu süntaktilise kokkuleppega, nagu osutab märk $\mathrel{:\doteq}$. Oleme kasutanud geneerilise ideaali tähisena G asemel G', sest jõustamise põhiteoreemiskeemi III osas tuleb seosele $p \Vdash_P \Phi[\tau_1, \ldots, \tau_n]$ ümber omakorda ümbris „Iga genereerilise ideaali G. . .“ korral. Sarnane lugu on ülakomadega y-tähtede juures.

Jõustamise põhiteoreemiskeemi kaks esimest osa tõestasime @eelmises jaotises. Põhiteoreemiskeemi kolmas osa väidab lihtsustatult kahte asja [Wea14, lk 37]. Olgu $G \subseteq P$ geneeriline ideaal ja $\tau_1, \ldots, \tau_n$ tõkestatud (Weaveri) P-nimed.

(1) Väite $(\Phi|_{M[G]})[\tau_1/\mathtt{val}_G(\tau_1), \ldots, \tau_n/\mathtt{val}_G(\tau_n)]$ kehtivus on tihedalt seotud jõustamisseosega. Nimelt kehtib $(\Phi|_{M[G]})[\tau_1/\mathtt{val}_G(\tau_1), \ldots, \tau_n/\mathtt{val}_G(\tau_n)]$ parajasti siis, kui leidub valemit $\Phi[\tau_1, \ldots, \tau_n]$ jõustav tingimus $p \in G$. Kirjeldatud ekvivalentsi kutsutakse *tõe-*

suslemmaks (ingl *truth lemma*). [Wea14, lk-d 41–42; Wik22]

(2) Teadmine, kas mingi $p \in P$ jõustab valemit $\Phi[\tau_1, \ldots, \tau_n]$ ehk kas $p \Vdash_P \Phi[\tau_1, \ldots, \tau_n]$ või mitte, on olemas ja kättesaadav baas-kvaasimudelis M. Täpsemini leidub hulk $\mathtt{F}_{\Phi[\tau_1,\ldots,\tau_n]} \in M$ nii, et $p \in \mathtt{F}_{\Phi[\tau_1,\ldots,\tau_n]}$ parajasti siis, kui $p \Vdash_P \Phi[\tau_1, \ldots, \tau_n]$, ning nõuet $p \in \mathtt{F}_{\Phi[\tau_1,\ldots,\tau_n]}$ on võimalik väljendada M-ahendatud valemiga. Taolist väidet kutsutakse *defineeritavuse lemmaks* (ingl *definability lemma*). [Wea14, lk-d 41–42; Wik22]

Kolmanda põhiteoreemiskeemi osa tõestus on küllaltki tehniline ja mahukas [Wea14, lk-d 37–42]. Ruumi kaalutlustel meie seda täispikkuses ei tõesta. Järgmises jaotises toome siiski III osa range sõnastuse ning anname tõestuse struktuuri üldkirjelduse. Mainime veel, et teatud mõttes pole vahet, kas tõestame põhiteoreemiskeemi jõustamisseose $\Vdash_P$ kõigi P-nimede või ainult Weaveri P-nimede jaoks.

Lauseskeem III.22. *Las olla M aksioomide hulga $\mathtt{Ax}(\mathsf{ZFC})$ transitiivne ja loenduv epsilon-kvaasimudel teoorias $\mathsf{T} \supseteq \mathsf{ZFC}$. Las olla P tingimuskogum ning $G \subseteq P$ geneeriline ideaal. Võtame $\Phi[\tau_1, \ldots, \tau_n] \in \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$, sealjuures $\mathtt{Free}(\Phi) = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$, $n \geqslant 0$ Olgu $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ tavalised P-nimed ning $\tau_1 \coloneqq \mathtt{gW}(\sigma_1), \ldots, \tau_n \coloneqq \mathtt{gW}(\sigma_n)$.*

Iga $p \in P$ korral kehtib ekvivalentsus

$$p \Vdash_P \Phi[\sigma_1, \ldots, \sigma_n] \Leftrightarrow p \Vdash_P \Phi[\sigma_1/\tau_1, \ldots, \sigma_1/\tau_1].$$

Tõestus. Otse jõustamisseose definitsioonist ning teadmisest, et $\mathtt{val}_G(\sigma_i) = \mathtt{val}_G(\mathtt{gW}(\sigma_i)) = \mathtt{val}_G(\tau_i)$, $i = 1, \ldots, n$. ■

2.1. Tõesuslemma ja defineeritavuse lemma

Sõnastame tõesuslemma ja defineeritavuse lemma tõkestatud Weaveri P-nimede jaoks. Tõestuses kasutatakse järgmist märkust. Kõige tähtsamad on punktid @b. ja @c, osa @a. kasutatakse osa @b. põhjendamisel.

***Märkus* III.13** („Saame nõuda, et … on tugevam kui …“, [Wea14, lk 38])**.** Olgu P tingimuskogum ja $G \subseteq P$ geneeriline ideaal.

a. Kui $p \in G$ ja $q \in G$, leidub $r \in G$, mis on tugevam kui p ja q. Niisiis, kui p on antud, saame elementi q valides nõuda, et q on tugevam kui p (võttes kohe $q \coloneqq r$).

b. Olgu antud (tõkestatud) Weaveri P-nimi τ, $(\sigma, p) \in \tau$ ja $p \in G$. Elementi $(\sigma, q) \in \tau$, $q \in G$, valides saame nõuda, et q on tugevam kui p. See järeldub osast @a. ning Weaveri P-nimede ülespoole $\subseteq$-kinnisusest.

c. Kui $p \Vdash_P \varPhi[\tau_1, \dots, \tau_n]$ ja q on tugevam kui p, siis ka $q \Vdash_P \varPhi[\tau_1, \dots, \tau_n]$. Põhjuseks ideaali kinnisus nõrgemate tingimuste suhtes: kui $q \in G$ ja $p \in P$ on nõrgem kui q, siis $p \in G$. Seega kui $g \in G$ ja $p \in G$ korral $p \Vdash_P \varPhi[\tau_1, \dots, \tau_n]$, saame nõuda, et p on tugevam kui g.

Omadust punktis @c., kus tugevamad tingimused jõustavad vähemalt samu valemeid nagu nõrgemad tingimused, kutsutakse *jõustamisseose* $\Vdash_P$ *koherentsuse omaduseks* (ingl *coherence*, [Wik22]). Märkuse osas @b seisneb Weaveri P-nimede oluline eelis tavaliste P-nimede ees [Wea14, lk-d 34–35, 38, 130].

Sõnastame *tõesuslemma* ning *defineeritavuse lemma* ehk jõustamise põhiteoreemiskeemi III osa.

Teoreemiskeem III.23 (jõustamise põhiteoreemiskeem, III osa, [Wea14, lk-d 39, 41–42])**.** *Olgu M aksioomide hulga* $\mathtt{Ax}(\mathsf{ZFC})$ *transitiivne ja loenduv epsilon-kvaasimudel teoorias* $\mathsf{T} \supseteq \supseteq \mathsf{ZFC}$. *Olgu $P \subseteq M$ tingimuskogum. Olgu $\varPhi[\tau_1, \dots, \tau_n] \in \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$, sealjuures $\mathtt{Free}(\varPhi) = = \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$, $n \geqslant 0$.*

Iga tõkestatud Weaveri P-nime $\tau_1, \dots, \tau_n \in M_W^P$ korral kehtivad järgmised väited.

(1) *Tõesuslemma:*

$$\begin{aligned}\forall G \forall y_1, \dots, y_n \Big(& G \subseteq P \wedge \text{„}G \text{ on geneeriline ideaal“} \wedge \\ & \wedge y_1 = \mathtt{val}_G(\tau_1) \wedge \dots \wedge y_n = \mathtt{val}_G(\tau_n) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \big(\varPhi[\tau_1/y_1, \dots, \tau_n/y_n]|_{M[G]} \Leftrightarrow \exists p \in G (p \Vdash_P \varPhi[\tau_1, \dots, \tau_n]) \big) \Big)\end{aligned}$$

(2) *Defineeritavuse lemma: iga $p \in P$ korral*

i) $\big(p \Vdash_P \varPhi[\tau_1, \dots, \tau_n] \Leftrightarrow p \in \mathtt{F}_{\varPhi[\tau_1, \dots, \tau_n]}\big)$,

ii) $\mathtt{F}_{\varPhi[\tau_1, \dots, \tau_n]} \in M$ *ja tingimust* $p \in \mathtt{F}_{\varPhi[\tau_1, \dots, \tau_n]}$ *on võimalik väljendada M-ahendatud valemiga*

Toonitame, et hulkadel $\mathtt{F}_{\varPhi[\tau_1, \dots, \tau_n]}$ on konkreetne definitsioon [Wea14, lk-d 37–38, 41], mida siin töös pole välja toodud. Kõigepealt defineeritakse potentselt regulaarse rekursiooniga $\mathtt{F}_{\varPhi[\tau_1, \dots, \tau_n]}$ atomaarse võrduse jaoks, kui $\varPhi[\tau_i, \tau_j] :\doteq \tau_i = \tau_j$ [Wea14, lk-d 37–38]. Väide @(2) @ii) järeldub metateoreemiskeemi @II.13 abil. Järgmisena sätestatakse, missugune on $\mathtt{F}_{\varPhi[\tau_1, \dots, \tau_n]}$ atomaarse sisalduvuse korral, kus $\varPhi[\tau_i, \tau_j] :\doteq \tau_i \in \tau_j$ [Wea14, lk 41]. Seda tehakse rekursiooni kasutamata, rajades definitsiooni juba olemasolevale võrdusele [Wea14, lk 41]. Viimaks defineeritakse $\mathtt{F}_{\varPhi[\tau_1, \dots, \tau_n]}$ struktuurse rekursiooniga kõigi ülejäänud, mitteatomaarsete valemite $\varPhi[\tau_1, \dots, \tau_n]$ jaoks [Wea14, lk 41].

Tõestuse üldstruktuuri kirjeldus. Sarnaselt hulkade $\mathtt{F}_{\Phi[\tau_1,\ldots,\tau_n]}$ ehitamisega viiakse tõestus läbi kolmes staadiumis. Kõigepealt tõestatakse väited @(1) ja @(2) atomaarse võrduse korral potentselt regulaarse induktsiooniga [Wea14, lk-d 39–40]. Seejärel asutakse atomaarse sisalduvuse kallale. Sisalduvuse korral pole induktsiooni tarvis, piisab tuginemisest juba tõestatud võrduse-osale [Wea14, lk-d 41–42]. Ülejäänud valemite jaoks tõestatakse väited @(1) ja @(2) struktuurse induktsiooniga, mil baasjuhud on võrduse ning sisalduvuse näol juba olemas. Sammus tuleb vaadata kolme juhtu, kus eitus, implikatsioon või universaalkvantor on valemi $\Phi[\tau_1, \ldots, \tau_n]$ peatehteks. [Wea14, lk 42]

Tõestuse staadiumite alamosade, samuti sammu alamosade tõestused on üksteisega küllalt sarnased. Tõestuse igas osas kasutatakse märkuse @III.13 osasid @b. ja @c, lisaks seni kasutamata lemmasid @III.4 ja @III.5. [Wea14, lk-d 38–42]

Võrduse jaoks leiab lugeja pikema tõestuse näiteks allikast Weaver [Wea14, lk-d 37–42]. ■

2.2. Laiend $M[G]$ rahuldab teooria ZFC aksioome

Teoreemiskeemis @III.20 nägime, et $M[G]$ rahuldas ekstensionaalsusaksioomi, regulaarsuse aksioomi, hulgapaari ja ühendi moodustamise aksioome ning lõpmatu hulga leidumise aksioomi. Siin jaotises tõestame, et jõustamislaiend $M[G]$ täidab ka eraldamisaksioomiskeemi ning potentshulga moodustamise aksioomi. Asendamisaksioomiskeemi ning valikuaksioomi rahuldamise esitame tõestuseta. Veel põhjendame, miks on baas-kvaasimudelil M ja jõustamislaiendil $M[G]$ ühesugused ordinaalarvud.

Teoreemiskeem III.24 (jõustamise põhiteoreemiskeem, II osa jätk, [Wea14, lk-d 42–43])**.** *Olgu M aksioomide hulga $\mathtt{Ax}(\mathsf{ZFC})$ transitiivne ja loenduv epsilon-kvaasimudel teoorias $\mathsf{T} \supseteq$ $\supseteq \mathsf{ZFC}$. Las olla P tingimuskogum ning $G \subseteq P$ geneeriline ideaal. Jõustamislaiend $M[G]$ rahuldab eraldamisaksioomiskeemi.*

Tõestuses eeldame, et $x, Y, p_1, \ldots, p_k, X, \sigma, \tau, \tau_1, \ldots, \tau_n$ on süntaktiliselt erinevad indiviidmuutujad.

Tõestus. Olgu $k \geqslant 0$ metanaturaalarv ja $\mathcal{S}[x, \hat{Y}, p_1, \ldots, p_k](X) \in \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$, kus $\mathtt{Free}(\mathcal{S}) \subseteq$ $\subseteq \{x, X, p_1, \ldots, p_k\}$. Vastav eraldamisaksioomiskeem oli

$$\forall p_1 \cdots \forall p_k \forall X \exists Y \forall x (x \in Y \Leftrightarrow x \in X \wedge \mathcal{S}[x, \hat{Y}, p_1, \ldots, p_k](X)).$$

Absoluutsuse tulemusi arvestades tuleb meil tõestada, et

$$\forall p_1, \ldots, p_k, X \in M[G] \exists Y \in M[G] \forall x \big(x \in Y \Leftrightarrow x \in X \wedge \mathcal{S}[x, \hat{Y}, p_1, \ldots, p_k](X)|_{M[G]}\big).$$

Jõustamislaiendi definitsioonist tõttu saame valida $p_i \coloneqq \mathtt{val}_G(\tau_i)$, $X \coloneqq \mathtt{val}_G(\tau)$, kus $\tau, \tau_i \in M_W^P$ ja $i = 1, \ldots, k$. Peame tõestama, et leidub $\varrho \in M_W^P$, mispuhul $Y = \mathtt{val}_G(\varrho)$, kus

$$Y = \{\, x \in X \mid \mathcal{S}[x, \hat{Y}, p_1, \ldots, p_k](X)|_{M[G]} \,\}.$$

Väidame, et sobib võtta

$$\begin{aligned}\varrho &\coloneqq \{\, z \in \tau \mid (\exists \sigma \in \operatorname{dom} \tau)(\exists p \in P)(z = (\sigma, p) \land p \Vdash_P \mathcal{S}[x/\sigma, \hat{Y}, p_1/\tau_1, \ldots, p_k/\tau_k](X/\tau)) \,\} \\ &= \{\, (\sigma, p) \in \tau \mid p \Vdash_P \mathcal{S}[x/\sigma, \hat{Y}, p_1/\tau_1, \ldots, p_k/\tau_k](X/\tau) \,\}.\end{aligned}$$

Selgitame, miks $\varrho \in M_W^P$. Defineeritavuse lemma põhjal on $p \Vdash_P \mathcal{S}[x/\sigma, \hat{Y}, p_1/\tau_1, \ldots, p_k/\tau_k](X/\tau)$ väljendatav mingi valemi M-ahendina. Kuna $\tau, \tau_i \in M$ ning M rahuldab eraldamisaksioomiskeemi, siis $\varrho \in M$. Hulk ϱ koosneb järjestatud paaridest, mille esimene koordinaat on Weaveri P-nimi ja teine koordinaat hulga P element. Kui $(\sigma, p) \in \tau$ ja $q \in P$ on tugevam kui p, siis τ ülespoole $\subseteq$-kinnisusest $(\sigma, q) \in \tau$. Jõustamisseose $\Vdash_P$ koherentsusest $q \Vdash_P \mathcal{S}[x/\sigma, \hat{Y}, p_1/\tau_1, \ldots, p_k/\tau_k](X/\tau)$, sestap $(\sigma, q) \in \varrho$. Järelikult ϱ on ülespoole $\subseteq$-kinnine. Lause @III.6 osa (4) alusel on ϱ Weaveri P-nimi. Kokkuvõttes $\varrho \in M_W^P$.

Jääb näidata, et $\mathtt{val}_G(\varrho) = Y$. Tõestame kumbagi pidi sisalduvused.

- $\underline{\mathtt{val}_G(\varrho) \subseteq Y}$. Olgu $x \in \mathtt{val}_G(\varrho)$. Siis leidub $\sigma \in \varrho^{-1}(G)$ nii, et $x = \mathtt{val}_G(\sigma)$. Järelikult $(\sigma, g) \in \varrho$ mingi $g \in G$ korral. Esiteks, hulga ϱ definitsioonist $(\sigma, g) \in \tau$, st $\sigma \in$ $\in \tau^{-1}(G)$ ehk $x = \mathtt{val}_G(\sigma) \in \mathtt{val}_G(\tau) = X$. Teiseks, samuti hulga ϱ definitsioonist, kehtib $g \Vdash_P \mathcal{S}[x/\sigma, \hat{Y}, p_1/\tau_1, \ldots, p_k/\tau_k](X/\tau)$. Kuivõrd $g \in G$, järeldub jõustamisseose $\Vdash_P$ definitsioonist, võttes $G' \coloneqq G$, $n \doteq k+2$, $\tau_1 \doteq \tau_1, \ldots, \tau_k \doteq \tau_k$, $\tau_{k+1} \doteq \sigma$, $\tau_{k+2} \doteq \tau$ ja $\Phi[\tau_1, \ldots, \tau_n] \doteq \mathcal{S}[x/\sigma, \hat{Y}, p_1/\tau_1, \ldots, p_k/\tau_k](X/\tau) \land (\tau = \tau)$, et

  $$\Big(\mathcal{S}[x/\sigma, \hat{Y}, p_1/\tau_1, \ldots, p_k/\tau_k](X/\tau) \land (\tau = \tau)\Big)[\tau_1/p_1, \ldots, \tau_k/p_k, \tau_{k+1}/x, \tau_{k+2}/X]\Big|_{M[G]}$$

  kus $y'_j \coloneqq p_j = \mathtt{val}_G(\tau_j)$, $j = 1, \ldots, k$, $y'_{k+1} \coloneqq x = \mathtt{val}_G(\sigma)$, $y'_{k+2} \coloneqq X = \mathtt{val}_G(\tau)$. Tehes vastavad asendused, saame

  $$\Big(\mathcal{S}[x/\sigma/x, \hat{Y}, p_1/\tau_1/p_1, \ldots, p_k/\tau_k/p_k](X/\tau/X) \land (X = X)\Big)\Big|_{M[G]},$$

  mis on süntaktiliselt sama kui

  $$\Big(\mathcal{S}[x, \hat{Y}, p_1, \ldots, p_k](X) \land X = X\Big)|_{M[G]}.$$

Võrduse $\tau = \tau$ tõime sisse muutujate arvu kindlaks fikseerimiseks ja selle tulemusel tekkinud võrduse $X = X$ võib ära jätta. Kokkuvõttes saame, et kehtib $\mathcal{S}[x, \hat{Y}, p_1, \ldots, p_k](X)|_{M[G]}$. Varasemast $x \in X$, mistõttu ongi $x \in Y$, nagu oli soovitud.

- $\underline{\mathtt{val}_G(\varrho) \supseteq Y}$. Olgu $x \in Y$. Hulga Y määratlusest $x \in X = \mathtt{val}_G(\tau)$, sestap leidub $\sigma \in \tau^{-1}(G)$ nõnda, et $x = \mathtt{val}_G(\sigma)$. Järelikult $(\sigma, p) \in \tau$ teatava $p \in G$ puhul. Samuti hulga Y definitsioonist kehtib $\mathcal{S}[x, \hat{Y}, p_1, \ldots, p_k](X)|_{M[G]}$, mille võime kirja panna ka kui
$$\Big((\mathcal{S}[x/\sigma/x, \hat{Y}, p_1/\tau_1/p_1, \ldots, p_k/\tau_k/p_k](X) \wedge X = X)(X/\tau/X)\Big)\Big|_{M[G]}.$$
Tõesuslemma $\Rightarrow$-suunast, võttes sobivalt
$$\Phi[\tau_1, \ldots, \tau_n] :\doteq \mathcal{S}[x/\sigma, \hat{Y}, p_1/\tau_1, \ldots, p_k/\tau_k](X/\tau) \wedge \tau = \tau,$$
järeldub võrduse $\tau = \tau$ ära jätmisel, et mingi $q \in G$ korral
$$q \Vdash_P \mathcal{S}[x/\sigma, \hat{Y}, p_1/\tau_1, \ldots, p_k/\tau_k](X/\tau).$$
Märkuse @III.13 põhjal saame nõuda, et q on tugevam kui p. Weaveri P-nimede ülespoole $\subseteq$-kinnisusest $(\sigma, q) \in \tau$, sest $(\sigma, p) \in \tau$. Järelikult $(\sigma, q) \in \tau$, kusjuures q jõustab valemit $\mathcal{S}[x/\sigma, \hat{Y}, p_1/\tau_1, \ldots, p_k/\tau_k](X/\tau)$. Hulga ϱ definitsiooni põhjal $(\sigma, q) \in \varrho$. Et $q \in G$, siis $x = \mathtt{val}_G(\sigma) \in \mathtt{val}_G(\varrho)$ ehk $x \in \mathtt{val}_G(\varrho)$, mida soovisimegi.

Eraldamisaksioomiskeemi tõkestatud variandi kehtivus on tõestatud. ■

Oleme valmis põhjendama, et baas-kvaasimudelil M ning jõustamislaiendil $M[G]$ on ühed ning samad ordinaalarvud.

Teoreemiskeem III.25 (jõustamise põhiteoreemiskeem, I osa jätk, [Wea14, lk-d 35–36; Kun80, lk 191])**.** *Olgu M aksioomide hulga $\mathtt{Ax}(\mathsf{ZFC})$ transitiivne ja loenduv epsilon-kvaasimudel teoorias $\mathsf{T} \supseteq \mathsf{ZFC}$. Las olla P tingimuskogum ning $G \subseteq P$ geneeriline ideaal. Jõustamislaiendil $M[G]$ ja baas-kvaasimudelil M on igas mõttes samad ordinaalarvud,*
$$\mathtt{Ord} \cap M = \mathtt{Ord}^M = \mathtt{Ord}^{M[G]} = \mathtt{Ord} \cap M[G].$$

Tõestus. Oleme näidanud, et teoreemiskeemi eelduste täitmisel on jõustamislaiend aksioomide hulga $\mathtt{Ax}(\mathsf{Z} - \mathsf{P})$ mittetühi transitiivne epsilon-kvaasimudel. Metateoreemiskeemi @II.7 osa @(6) põhjal on ordinaalarvuks olemine järelikult $M[G]$-absoluutne. Metadefinitsiooni @II.8 osa @a. põhjal on ordinaalarvude klass $\mathtt{Ord}$ klassina $M[G]$-absoluutne, s.o

$\mathtt{Ord}^{M[G]} = \mathtt{Ord} \cap M[G]$. Loomulikult $\mathtt{Ord} \cap M = \mathtt{Ord}^M$. Järelikult piisab tõestada, et $\mathtt{Ord} \cap M = \mathtt{Ord} \cap M[G]$.

Teoreemiskeem @I.19 osa (1) järgi on jõustamislaiend $M[G]$ baas-kvaasimudeli M laiend, $M \subseteq M[G]$. Seega sisalduvus $\mathtt{Ord} \cap M \subseteq \mathtt{Ord} \cap M[G]$ kehtib. Põhjendame teisipidi alamhulgalisust $\mathtt{Ord} \cap M \supseteq \mathtt{Ord} \cap M[G]$. Valime $\mathtt{val}_G(\tau) \in \mathtt{Ord} \cap M[G]$, $\tau \in M^P$. Lemma @III.21 järgi ei saa nime kandja astak olla suurem kui algse nime astak, $\mathtt{Rank}(\mathtt{val}_G(\tau)) \leqslant \mathtt{Rank}(\tau)$. Ordinaalarvud on astakufunktsiooni püsipunktid, lause @I.28 osa (1). Seega $\mathtt{Rank}(\mathtt{val}_G(\tau)) = \mathtt{val}_G(\tau)$, mistõttu $\mathtt{val}_G(\tau) \leqslant \mathtt{Rank}(\tau)$. Metalauseskeemi II.14 põhjal on astakufunktsioon $\mathtt{Rank}$ funktsioonina M-absoluutne, mistõttu $\tau \in M^P_W \subseteq M$ alusel $\mathtt{Rank}(\tau) \in M$. Kui $\mathtt{val}_G(\tau) = \mathtt{Rank}(\tau)$, järeldub kohe $\mathtt{val}_G(\tau) \in M$. Kui $\mathtt{val}_G(\tau) < \mathtt{Rank}(\tau)$, järeldub $\mathtt{val}_G(\tau) \in M$ hulga M transitiivsusest.

Tulemus on tõestatud. ■

Viimasena tõestame, et jõustamislaiend $M[G]$ rahuldab potentshulga moodustamise aksioomi. Metalause @II.26 osa @(1) põhjal piisab näidata, et iga $X \in M[G]$ korral $\mathcal{P}(X) \cap M[G] \in M[G]$. Tegelikkuseks võiksime isegi piirduda tõestusega, et leidub hulk $Y \in M[G]$, mispuhul $\mathcal{P}(X) \cap M[G] \subseteq Y$ [Pál74, lk 19]. Oleme tõestanud, et jõustamislaiend rahuldab eraldamisaksioomiskeemi ning hulgast Y saaksime hulga $\mathcal{P}(X) \cap M[G]$ eraldada absoluutse tingimusega $Z \subseteq X$.

Oletame, et P on juurega tingimuskogum. Eeldus ei too kaasa üldisuse kadu, vt lause @III.15. Olgu τ mingi P-nimi. Tõestuses kasutame selle põhjal moodustatud P-nime $\mathtt{sub}$, kus

$$\begin{aligned}\mathtt{sub}(\tau) &\coloneqq (\mathcal{P}(\tau) \cap M^P) \times \{\varnothing\} = \\ &= (\mathcal{P}^M(\tau) \cap \mathtt{V}^P) \times \{\varnothing\} = && \text{(metalause @II.26 (2), def @III.9)} \\ &= \{\, (\sigma, \varnothing) \mid \sigma \subseteq \tau \wedge \text{„}\sigma \text{ on tõkestatud } P\text{-nimi“} \,\}.\end{aligned}$$

Kuna $\mathtt{sub}(\tau)$ koosneb paaridest, kus esimene koordinaat on P-nimi ja teine on hulga P element, on tegu P-nimega. Kui $\tau \in M$, siis $\mathcal{P}^M(\tau) \in M$, P-nimeks olemise absoluutsusest $\mathcal{P}^M(\tau) \cap \mathtt{V}^P \in M$. Otsekorrutise absoluutsusest funktsioonina ja kuuluvusest $\{\varnothing\} \in M$ samuti $\mathcal{P}^M(\tau) \cap \mathtt{V}^P) \times \{\varnothing\} \in M$. Järelikult kui $\tau \in M^P$, siis ka $\mathtt{sub}(\tau) \in M^P$ ja $\mathtt{val}_G(\mathtt{sub}(\tau)) \in M[G]$.

Teoreemiskeemis tõestame, et $M[G] \ni X \coloneqq \mathtt{val}_G(\tau)$ korral sobib võtta $Y \coloneqq \mathtt{val}_G(\mathtt{sub}(\tau))$. Tähendab, $\mathcal{P}(X) \cap M[G] \subseteq \mathtt{val}_G(\mathtt{sub}(\tau))$.

Teoreemiskeem III.26 (jõustamise põhiteoreemiskeem, II osa jätk, [Wea14, lk 43]). *Olgu M*

aksioomide hulga $\mathsf{Ax}(\mathsf{ZFC})$ *transitiivne ja loenduv epsilon-kvaasimudel teoorias* $\mathsf{T} \supseteq \mathsf{ZFC}$. *Las olla* P *tingimuskogum ning* $G \subseteq P$ *geneeriline ideaal. Jõustamislaiend* $M[G]$ *rahuldab potentshulga moodustamise aksioomi.*

Tõestus. Olgu $X \in M[G]$. Järelikult leidub mingi $\tau \in M^P_W$, mispuhul $X = \mathtt{val}_G(\tau)$. Eelnevale arutelule tuginedes tõestame, et $\mathcal{P}(X) \cap M[G] \subseteq \mathtt{val}_G(\mathtt{sub}(\tau))$. Las $Z \in \mathcal{P}(X) \cap M[G]$. Seega mingi $\sigma \in M^P$ puhul $Z = \mathtt{val}_G(\sigma)$ ja $Z = \mathtt{val}_G(\sigma) \subseteq \mathtt{val}_G(\tau) = X$. Defineerime hulga

$$\varrho \coloneqq \{\, (\pi, p) \in \tau \mid p \Vdash_P (\pi \in \sigma) \,\}.$$

Koordinaatide nõuete, st lause @III.6 osade @(2) ja @(4) põhjal on ϱ P-nimi. Lauseskeemi @III.22 ning defineeritavuse lemma alusel on $p \Vdash_P (\pi \in \sigma)$ esitatav M-ahendatud valemiga. Seega $\varrho \in M^P$. Selgesti $\varrho \subseteq \tau$, kust $(\varrho, \varnothing) \in \mathtt{sub}(\tau)$. Tühi hulk kuulub alati juurega tingimuskogumi geneerilisse ideaali, sestap $\mathtt{val}_G(\varrho) \in \mathtt{val}_G(\mathtt{sub}(\tau))$.

Tõestuse lõpetamiseks piisab näidata, et $Z = \mathtt{val}_G(\varrho)$ ehk $\mathtt{val}_G(\sigma) = \mathtt{val}_G(\varrho)$. Uurime kumbagi pidi sisalduvust.

- $\underline{\mathtt{val}_G(\varrho) \subseteq \mathtt{val}_G(\sigma)}$. Olgu $z \in \mathtt{val}_G(\varrho)$. Siis $z = \mathtt{val}_G(\varrho')$ teatava $\varrho' \in \varrho^{-1}(G)$ korral. Seetõttu mingi $p \in G$ puhul $(\varrho', p) \in \varrho$. Hulga ϱ definitsioonist $p \Vdash_P (\varrho' \in \sigma)$. Tõesuslemma $\Leftarrow$-suunast ja sisalduvuse absoluutsusest $\mathtt{val}_G(\varrho') \in \mathtt{val}_G(\sigma)$. Seega $z \in \mathtt{val}_G(\sigma)$, korras.

- $\underline{\mathtt{val}_G(\varrho) \supseteq \mathtt{val}_G(\sigma)}$. Olgu $z \in \mathtt{val}_G(\sigma)$. Et $\mathtt{val}_G(\sigma) \subseteq \mathtt{val}_G(\tau)$, siis ka $z \in \mathtt{val}_G(\tau)$. Järelikult mingisuguse $\sigma' \in \tau^{-1}(G)$ korral $z = \mathtt{val}_G(\sigma')$. Tahaksime, et $z \in \mathtt{val}_G(\varrho)$, milleks tõestame, et $\mathtt{val}_G(\sigma') \in \mathtt{val}_G(\varrho)$. Selleks piisab leida $p \in G$, mispuhul $(\sigma', p) \in \varrho$, st $(\sigma', p) \in \tau$ ja $p \Vdash_P (\sigma' \in \sigma)$.

  Kuivõrd $\sigma' \in \tau^{-1}(G)$, leidub $p' \in G$ nõnda, et $(\sigma', p') \in \tau$. Kuna $z \in \mathtt{val}_G(\sigma)$, siis $\mathtt{val}_G(\sigma') \in \mathtt{val}_G(\sigma)$. Sisalduvuse absoluutsusest ning Tõesuslemma $\Rightarrow$-suunast leidub $q \in G$, mille korral $q \Vdash_P (\sigma' \in \sigma)$. Märkuse @III.13 osast @c. johtuvalt saame nõuda, et q on tugevam kui p'. Valime $p \coloneqq q$. Seega $p \in G$, $q \Vdash_P (\sigma' \in \sigma)$ ning nime τ ülespoole $\subseteq$-kinnisusest $(\sigma', q) \in \tau$. Seda soovisimegi. ■

Märgime, et $\subseteq$-kinnisuse lihtsustav toime avaldub just tõestuse viimases lõigus. Lugeja võib veenduda, et kehtib ka vastupidine alamhulgalisus, st $\mathcal{P}(X) \cap M[G] \supseteq \mathtt{val}_G(\mathtt{sub}(\tau))$. Kasuks tuleb varasem teadmine, et P-nime kandja klassifunktsioon $\mathtt{val}$ on alamhulgalisuse suhtes monotoonne. Tähendab, kui $\sigma \subseteq \tau$, siis ka $\mathtt{val}_G(\sigma) \subseteq \mathtt{val}_G(\tau)$, mis on teada jaotise @III.1.5.3 lõpust.

Toome tõestuseta väite, et jõustamislaiend $M[G]$ rahuldab asendamisaksioomiskeemi ning valikuaksioomi.

Teoreemiskeem III.27 (jõustamise põhiteoreemiskeem, II osa jätk, [Wea14, lk-d 43–44; Kun80, lk-d 201–202])**.** *Olgu M aksioomide hulga* $\mathtt{Ax}(\mathsf{ZFC})$ *transitiivne ja loenduv epsilon-kvaasimudel teoorias* $\mathsf{T} \supseteq \mathsf{ZFC}$*. Las olla P tingimuskogum ning $G \subseteq P$ geneeriline ideaal. Jõustamislaiend $M[G]$ rahuldab* (1) *asendamisaksioomiskeemi,* (2) *valikuaksioomi.*

Viide tõestusele. Põhjenduse võib leida nt allikatest Weaver [Wea14, lk-d 43–44] ja Kunen [Kun80, lk-d 201–202]. ∎

2.3. Kontiinumihüpoteesi sõltumatus

Kõige lõpetuseks kirjeldame üldsõnaliselt kontiinumihüpoteesi sõltumatuse ZFC-hulgateooriast. Piirdume väite sõnastamisega, tingimuskogumite defineerimisega ning viidetega kirjandusele.

Läviordinaalarvuks kutsutakse ordinaalarvu α, mis pole ühegi väiksema ordinaalarvuga $\beta < \alpha$ üksüheses vastavuses, s.o $\neg(\beta \sim \alpha)$ [HJ99, lk 129; Wea14, lk 17]. Potentselt järjestatava hulga X *kardinaalarvuks* nimetatakse läviordinaalarvu α, mispuhul $X \sim \alpha$. Kardinaalarv on konkreetse hulga X korral üheselt määratud. [HJ99, lk 130] Cantori-Zermelo teoreem ütleb, et valikuaksioomi olemasolul on kõik hulgad potentselt järjestatavad, seetõttu on eelnevaga defineeritud iga hulga jaoks selle juurde kuuluv kardinaalarv [HJ99, lk-d 137–138]. Kardinaalarvu tähistame kahe ülakriipsuga [Oja06, lk-d 62–63], $\alpha =: \overline{\overline{X}}$.

Kardinaalarvude klass $\mathtt{Card}$ ei moodusta hulka. Lõplikud kardinaalarvud on parajasti von Neumanni naturaalarvude hulga ω elemendid [Jec02, lk 27]. Lõpmatud kardinaalarvud võib sättida teatavasse hierarhiasse, *alefite hierarhiasse* $(\aleph_\alpha)_{\alpha \in \mathtt{Ord}}$ [HJ99, lk 131]. Kardinaalarv $\aleph_0 = \omega$ on vähim lõpmatu kardinaalarv, $\aleph_1$ väiksuselt teine ja nõnda edasi. Cantori teoreem kardinaalarvude ja potentshulga vahekorrast [HJ99, lk 96] ütleb muu seas, et $\overline{\overline{\mathcal{P}(\aleph_0)}} > \aleph_0$.

Tekib küsimus, kas $\aleph_0 < \aleph_1 < \overline{\overline{\mathcal{P}(\aleph_0)}}$ või $\aleph_0 < \overline{\overline{\mathcal{P}(\aleph_0)}} = \aleph_1$. Kontiinumihüpoteesiga ($\mathtt{CH}$) pakuti, et $\overline{\overline{\mathcal{P}(\aleph_0)}} = \aleph_1$. Osutus aga, et ZFC-hulgateooria raames pole võimalik tõestada ei kontiinumihüpoteesi ega selle eitust. Vähemalt mitte siis, kui teooria ZFC on mittevasturääkiv. Teisisõnu, kontiinumihüpotees on ZFC-hulgateooriast *sõltumatu*. Või, kolmandas sõnastuses, $\mathsf{ZFC} + \mathtt{CH}$ ja $\mathsf{ZFC} + \neg\mathtt{CH}$ on vasturääkivustelt ühesugused teooriaga ZFC.

Kontiinumihüpoteesi sõltumatuse ZFC-hulgateooriast saab tõestada jõustamismeetodi abil, tuginedes metateoreemiskeemile @II.25. Metateoreemiskeemi @II.25 tähistuses tuleks võtta $\phi := \mathtt{CH}$ ja hulga $\mathsf{N} := N$ rolli sobiva tingimuskogumi P jõustamislaiend $\mathbf{M}[G]$.

Teoreem III.28 (kontiinumihüpoteesi sõltumatus)**.** *Kontiinumihüpotees on* ZFC*-hulgateooriast sõltumatu.*

***Tõestuse üldskeem,* [Wea14, lk-d 47–52].** Tõestamaks, et $\mathsf{ZFC} + \mathtt{CH}$ on vasturääkivuselt ühesugune teooriaga ZFC, võib tingimuskogumiks P_1 võtta

$$P_1 \coloneqq \{(f\colon A \to B) \in \mathbf{M} \mid \text{„}f \text{ on bijektsioon“} \wedge \\ \wedge A \subseteq \mathcal{P}(\omega)^{\mathbf{M}} \wedge B \subseteq \aleph_1{}^{\mathbf{M}} \wedge \\ \wedge \text{„}A,\ B \text{ on loenduvad“}|_{\mathbf{M}}\}.$$

$\mathbf{M}$-ahendatud eraldamisaksioomiskeemi ning absoluutsuse tulemuste põhjal $P_1 \in \mathbf{M}$. Olgu $G_1 \subseteq P_1$ geneeriline ideaal, mis leidub Rasiowa-Sikorski lemma põhjal. Tingimuskogumil P_1 on olulise omadusena ω-*kinnisus*, õieti $\mathbf{M}$-tõkestatud ω-kinnisus. Selle omaduse abil tõestatakse, et $\mathcal{P}(\omega)^{\mathbf{M}[G_1]} \sim \aleph_1{}^{\mathbf{M}[G_1]}$. [Wea14, lk-d 47–48]

Tõestamaks, et $\mathsf{ZFC} + \neg\mathtt{CH}$ on vasturääkivuselt ühesugune teooriaga ZFC, saab tingimuskogumiks P_2 võtta

$$P_2 \coloneqq \{(f\colon A \to \{0,1\}) \in \mathbf{M} \mid \text{„}f \text{ on bijektsioon“} \wedge \\ \wedge A \subseteq \omega \times \aleph_2{}^{\mathbf{M}} \wedge \\ \wedge \text{ „}A,\ B \text{ on lõplikud“}\}.$$

Sarnaselt $P_2 \in \mathbf{M}$ ja leidub geneeriline ideaal $G_2 \subseteq P_2$. Nüüd on määravaks omaduseks tingimuskogumi P_2 $\mathbf{M}$-tõkestatud *loenduvate antiahelate omadus* ehk (c.ac.c)$|_{\mathbf{M}}$. Sellele omadusele toetudes saab näidata, et $\overline{\overline{\mathcal{P}(\omega)}}^{\mathbf{M}[G_2]} \geqslant \aleph_2{}^{\mathbf{M}[G_2]}$. [Wea14, lk-d 49–52]

Põhjalikuma selgituse leiab lugeja näiteks allikast [Wea14, lk-d 45–52]. ∎

Lisad

Lisa A. Näide tuletusest Gentzeni süsteemis

Tõestame, et Gentzeni aksiomaatilises süsteemis kehtib konjunktsiooni abisümboli $\wedge$ jaoks vasakule sissetoomise reegel, kui $\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}$ on korrektne valem:

$$\frac{\Gamma, \mathcal{F}, \mathcal{G} \vdash \mathcal{H}}{\Gamma, \mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \vdash \mathcal{H}}\ {\scriptstyle (\wedge\vdash)^{\ddagger}}\ .$$

Õieti põhjendame, miks võib sekventsist $\Gamma, \mathcal{F}, \mathcal{G} \vdash \mathcal{H}$ alati „hüpata“ sekventsini $\Gamma, \mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \vdash \mathcal{H}$.

Tõestuspuu ehitame suunaga alt üles. Kõigepealt kirjutame abiavaldise $\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}$ määratluse pikemalt lahti.

$$\frac{\Gamma, \neg(\mathcal{F} \Rightarrow \neg\mathcal{G}) \vdash \mathcal{H}}{\Gamma, \mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \vdash \mathcal{H}}\ {\scriptstyle (\wedge\doteq)}$$

Edasi rakendame juba tuntud lausearvutuslikke reegleid. Eituse paremalt eemaldamise reegel $(\vdash \not\neg)$ valmistab ette eituse paremale sissetoomist $(\vdash \neg)$. Eituse paremale sissetoomisega ja struktuursete reeglite abil vabaneme implikatsioonist antetsedendis.

$$\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Gamma, \mathcal{F}, \mathcal{G} \vdash \mathcal{H}$}
\RightLabel{\scriptsize (S+)}
\UnaryInfC{$\Gamma, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \neg\mathcal{H} \vdash \mathcal{H}$}
\RightLabel{\scriptsize (S$\sim$)}
\UnaryInfC{$\Gamma, \mathcal{G}, \neg\mathcal{H}, \mathcal{F} \vdash \mathcal{H}$}
\RightLabel{\scriptsize (S$\sim$)}
\UnaryInfC{$\Gamma, \neg\mathcal{H}, \mathcal{F}, \mathcal{G} \vdash \mathcal{H}$}
\AxiomC{}
\RightLabel{\scriptsize (var)}
\UnaryInfC{$\Gamma, \neg\mathcal{H}, \mathcal{F}, \mathcal{G} \vdash \neg\mathcal{H}$}
\RightLabel{\scriptsize $(\vdash\neg)$}
\BinaryInfC{$\Gamma, \neg\mathcal{H}, \mathcal{F} \vdash \neg\mathcal{G}$}
\RightLabel{\scriptsize $(\vdash\Rightarrow)^{\ddagger}$}
\UnaryInfC{$\Gamma, \neg\mathcal{H} \vdash (\mathcal{F} \Rightarrow \neg\mathcal{G})$}
\RightLabel{\scriptsize (S+)}
\UnaryInfC{$\Gamma, \neg\mathcal{H}, \neg(\mathcal{F} \Rightarrow \neg\mathcal{G}) \vdash (\mathcal{F} \Rightarrow \neg\mathcal{G})$}
\RightLabel{\scriptsize (S$\sim$)}
\UnaryInfC{$\Gamma, \neg(\mathcal{F} \Rightarrow \neg\mathcal{G}), \neg\mathcal{H} \vdash (\mathcal{F} \Rightarrow \neg\mathcal{G})$}
\AxiomC{}
\RightLabel{\scriptsize (var)}
\UnaryInfC{$\Gamma, \neg(\mathcal{F} \Rightarrow \neg\mathcal{G}), \neg\mathcal{H} \vdash \neg(\mathcal{F} \Rightarrow \neg\mathcal{G})$}
\RightLabel{\scriptsize $(\vdash\neg)$}
\BinaryInfC{$\Gamma, \neg(\mathcal{F} \Rightarrow \neg\mathcal{G}) \vdash \neg\neg\mathcal{H}$}
\RightLabel{\scriptsize $(\vdash\not\neg)$}
\UnaryInfC{$\Gamma, \neg(\mathcal{F} \Rightarrow \neg\mathcal{G}) \vdash \mathcal{H}$}
\RightLabel{\scriptsize $(\wedge\doteq)$}
\UnaryInfC{$\Gamma, \mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \vdash \mathcal{H}$}
\end{prooftree}$$

Jääb üle tõestada, et sekventsist $\mathit{\Gamma}, \mathcal{F}, \mathcal{G} \vdash \mathcal{H}$ saame tuletada sekventsi $\mathit{\Gamma}, \neg\mathcal{H} \vdash (\mathcal{F} \Rightarrow \neg\mathcal{G})$. Implikatsiooni sissetoomise $(\vdash\Rightarrow)^{\ddagger}$ järel on uuesti rakendatav eituse paremale sissetoomine $(\vdash\neg)$. Struktuursed reeglid annavad nõutud lõppkuju.

Muude abitehete, näiteks eksistentsikvantori jaoks leiab tuletusreeglid allikast [PP04, lk-d 88, 97].

Lisa B. Transitiivse eelsulundi teoreemiskeemi tõestus

Põhjendame täpsemalt, miks E-transitiivne eelsulund alati leidub. Tõestuse põhiidee tõime jaotise I.2.5.1 teoreemiskeemi I.15 esmakordses sõnastuses.

Teoreemiskeem I.15 (E-transitiivne eelsulund leidub, [Jec02, lk 67; HJ99, lk 253])**.** *Olgu C klass, $E \subseteq C \times C$ hulgalaadne klassiseos ning $X \subseteq C$ suvaline hulk. E-transitiivne eelsulund $\mathrm{tc}_E(X)$ alati leidub.*

Tõestus. Loetavuse lihtsustamiseks jaotame tõestuse alamosadeks.

(a) *Abidefinitsioonid*

Defineerime kõigepealt täisfunktsioonilise abioperatsiooni $y = \biguplus_E z$, mida läheb tõestuses tarvis.

$$y = \biguplus_E z \doteq y = \bigcup\{\, \mathrm{ext}_E(z') \mid z' \in z \cap C \,\}$$

Olgu $z \in C$. Hulgalaadsuse põhjal leidub iga $z' \in z \cap C$ jaoks E-eellaste hulk $\mathrm{ext}_E(z')$. Asendamise-kustutamise teoreemiskeemiga ehitame hulgast z uue hulga $\{\, \mathrm{ext}_E(z') \mid z' \in$ $\in z \cap C \,\}$. Ekstensionaalsuse järgi on viimane hulk üheselt määratud. Ühendi leidumise ning ekstensionaalsuse tõttu leidub ka üheselt määratud hulk $\bigcup\{\, \mathrm{ext}_E(z') \mid z' \in z \cap C \,\}$. Niisiis ongi valem $y = \biguplus_E z$ täisfunktsiooniline argumendi $z \in C$ suhtes.

Edasi defineerime olulise abivalemi `Recun`, mis teeb tõestusesisest naturaalarvulist rekursiooni, sealjuures vajamata ühtegi varasemat rekursiooniteoreemi.

$$\mathtt{Recun}[n, y, u, p_1] \doteq \text{„}u \text{ on funktsioon“} \wedge \mathrm{dom}\, u = n^+ \wedge (0, \mathrm{ext}_E(p_1)) \in u \wedge$$
$$\wedge \forall m \forall z (m < n \wedge (m, z) \in u \Rightarrow (m^+, y) \in u \wedge y = \biguplus_E z)$$

Abitähistused on hulgateooria baaskeelele taandatavad. Märgime, et valemi $\mathtt{Recun}[n, y, u, p_1]$ definitsiooni sisse on kirjutatud tingimused $n \in \mathrm{dom}\, u$ ning $u(n^+) = \biguplus_E u(n)$.

Viimaks määrame valemile $\Phi[n, y, p_1/X]$ tähenduseks

$$\begin{aligned}\Phi[n, y, p_1/X] :\doteq{}& n \in \omega \land \exists u(\mathtt{Recun}[n, y, u, p_1/X]) \lor \\ &\lor n \notin \omega \land y = \varnothing.\end{aligned}$$

Meenutame, et X on jätkuvalt hulk, mille jaoks objekti $\mathrm{tc}_E(X)$ leidumist tõestame. Kui õnnestub näidata, et $\Phi[n, y, p_1/X]$ on täisfunktsiooniline, siis hulgast ω tuleneb asendamisaksioomiskeemiga hulk

$$Y := \mathrm{ran}\,(u_n)_{n\in\omega} = \{\underbrace{\mathrm{ext}_E(X)}_{u(0)}, \underbrace{\textstyle\bigcup_E \mathrm{ext}_E(X)}_{u(1)}, \underbrace{\textstyle\bigcup_E\bigcup_E \mathrm{ext}_E(X)}_{u(2)}, \underbrace{\textstyle\bigcup_E\bigcup_E\bigcup_E \mathrm{ext}_E(X)}_{u(3)}, \ldots\}.$$

Otsitav hulk oleks $\mathrm{tc}_E(X) = \bigcup Y$. Asume niisiis põhjendama valemi $\Phi[n, y, p_1/X]$ täisfunktsioonilisust.

(b) *Valemi $\Phi[n, y, p_1/X]$ täisfunktsioonilisus*

Tõestuses kasutame kaks korda naturaalarvulise induktsiooni teoreemi I.7. Lemmana läheb meil vaja teadmist, et kui $n \in \omega$ jaoks leiduvad u ning v nõnda, et $\mathtt{Recun}[n, y, u, p_1]$ ja $\mathtt{Recun}[n, y, u/v, p_1]$, siis $u = v$. Võtame

$$S_1 := \{\, k \in \omega \mid \forall u \forall v(\mathtt{Recun}[n/k, y, u, p_1/X] \land \mathtt{Recun}[n/k, y, u/v, p_1/X] \Rightarrow u = v) \,\}.$$

Mõistagi 1) $S_1 \subseteq \omega$, 2) $0 \in S_1$, sest leidub ülimalt üks funktsioon u, mispuhul $(0, \mathrm{ext}_E(X)) \in u$ ja $\mathrm{dom}\, u = 0^+ = \{0\}$. 3) Olgu nüüd $k \in S_1$ suvaline, s.o $k \in \omega$ korral implikatsioon kehtib. Näitame, et $k^+ \in S_1$. Oletame, et suvaliste v_1, v_2 korral on jõus eeldused $\mathtt{Recun}[n/k^+, y, u/v_1, p_1/X]$ ning $\mathtt{Recun}[n/k^+, y, u/v_2, p_1/X]$. Näitame, et $v_1 = v_2$. Võtame induktsiooni eelduses $u := v_1|_{k^+}$ ja $v := v_2|_{k^+}$. Induktsiooni eelduse implikatsiooni järeldusena $v_1|_{k^+} = v_2|_{k^+}$, eriti $v_1(k) = v_2(k)$. Kuna $y = \bigcup_E z$ oli täisfunktsiooniline, siis ka $v_1(k^+) = \bigcup_E v_1(k) = \bigcup_E v_2(k) = v_2(k^+)$. Kokkuvõttes $v_1 = v_2$, mistõttu $k^+ \in S_1$. Induktsiooniteoreemist I.7 tuleneb $S_1 = \omega$. Funktsiooni u ühesusest johtub niisamuti väärtuse y ühesus. Kui mingi $k \in \omega$ korral leiduksid erisugused $y_1 \neq y_2$, siis oleksid ka vastavad funktsioonid u_1 ja u_2 erinevad, kuna väärtused kohal k ei ühtiks.

Analoogiliselt tõestatakse, et $S_2 = \omega$, kus

$$S_2 := \{\, k \in \omega \mid \exists u(\mathtt{Recun}[n/k, y, u, p_1/X] \,\}.$$

Lühidalt 1) $S_2 \subseteq \omega$, 2) $0 \in S_1$, sest sobib võtta $u := \{(0, \mathrm{ext}_E(X))\}$, 3) ning kui $k \in \omega$

korral leidub u, siis k^+ puhul võime võtta $u' \coloneqq u \cup \{(k^+, \Cup_E u(k))\}$.

Viimaks põhjendame, miks valem $\Phi[n, y, p_1/X]$ on täisfunktsiooniline, st $\forall n \exists! y' \Phi[n, y/y'](p_1/X)$. Tõestame otse. Kui $n \notin \omega$, siis korras. Olgu $n \in \omega$ suvaline. Teame, et leiduvad üheselt määratud u ja y nii, et $\mathtt{Recun}[n, y, u, p_1/X]$. Sobibki võtta vastav y ehk $y' \coloneqq \mathrm{ext}_E(X)$, kui $n = 0$, ja $y' \coloneqq u(n) = \Cup_E u(n-1)$, kui $n \geqslant 1$.

Oleme valmis rakendama arvuhulgale ω asendamisaksioomiskeemi valemi $\Phi[n, y, p_1/X] \doteq$ $\doteq \Phi[n, y, \hat{Y}](p_1/X)$ korral. Olgu saadavaks hulgaks Y, s.o

$$y \in Y \Leftrightarrow \exists n (n \in \omega \wedge \Phi[n, y, \hat{Y}](p_1/X)).$$

Alles nüüd, kus hulk Y on olemas, saame defineerida lühitõestuses kasutatud jada $(u_n)_{n\in\omega}$, võttes

$$(u_n)_{n\in\omega} \coloneqq \{\, (n, y) \in \omega \times Y \mid \Phi[n, y, p_1/X] \,\}.$$

Vahetult $Y = \mathrm{ran}\,(u_n)_{n\in\omega}$. Puudub ainult selgitus, miks $\bigcup Y = \mathrm{tc}_E(X)$.

(c) *Võrdus* $\bigcup Y = \mathrm{tc}_E(X)$ *ehk* $\bigcup \mathrm{ran}\,(u_n)_{n\in\omega} = \mathrm{tc}_E(X)$

Kontrollime E-transitiivse eelsulundi tingimusi. Esiteks, kuna $u_0 = \mathrm{ext}_E(X)$, siis $\mathrm{ext}_E(X) \subseteq$ $\subseteq \bigcup Y$. Teiseks, alamhulgaline sisalduvus klassis, $\bigcup Y \subseteq C$, tõestatakse niisamuti naturaalarvulise induktsiooniga. Induktsiooni baasis $\mathrm{ext}_E(X) \subseteq C$ ja sammus suvalise Z korral, kui $Z \subseteq C$, siis $\Cup_E Z \subseteq C$. Kolmandaks, hulk $\bigcup Y$ on E-transitiivne. Kui $x \in \bigcup Y$, siis $x \in u_n$ mingisuguse $n \in \omega$ korral. Võttes $z \mathrel{E} x$, kus $z \in C$, saame $z \in \bigcup Y$. Seda seetõttu, et

$$\begin{aligned} z \in \mathrm{ext}_E(x) &\subseteq \bigcup \{\, \mathrm{ext}_E(z') \mid z' \in u_n \,\} = \\ &= \bigcup \{\, \mathrm{ext}_E(z') \mid z' \in u_n \cap C \,\} = \\ &= \Cup_E u_n = u_{n^+} \subseteq \bigcup \mathrm{ran}\,(u_n)_{n\in\omega} = \bigcup Y. \end{aligned}$$

Olgu nüüd $T \subseteq C$ suvaline E-transitiivne hulk, mispuhul $\mathrm{ext}_E(X) \subseteq T$. Neljandaks näitame, et siis $\bigcup Y \subseteq T$ ehk $\bigcup Y$ on $\subseteq$-vähim niisuguste omadustega hulk. Piisab tõestada, et iga $n \in \omega$ korral $u_n \subseteq T$. Kasutame naturaalarvulist induktsiooni. Võtame

$$S \coloneqq \{\, n \in \omega \mid u_n \subseteq T \,\},$$

selgesti 1) $S \subseteq \omega$, 2) $0 \in S$, kuna $u_0 = \mathrm{ext}_E(X) \subseteq T$ hulga T valiku järgi. 3) Olgu nüüd $n \in S$, seega $u_n \subseteq T$. Et T oli E-transitiivne, siis iga $z' \in u_n$ korral $\mathrm{ext}_E(z') \subseteq$

$\subseteq T$. Teisisõnu järeldub, et $u_{n^+} = \bigcup\{\operatorname{ext}_{\mathtt{E}}(z') \mid z' \in u_n \cap \mathtt{C}\} \subseteq T$, nagu oligi tarvis. Induktsiooniteoreem I.7 annab võrduse $S = \omega$, hulga S olemusest lähtuvalt saame $\bigcup Y \subseteq T$.

Transitiivse eelsulundi ühesus tuleneb $\subseteq$-vähimusest ja ekstensionaalsusest. Teoreem on tõestatud. ■

Lisa C. Epsilon-kvaasimudeli korrektsuse tõestus

Metateoreemiskeem II.1 (epsilon-kvaasimudeli korrektsus, [Kun13, lk 101]). *Las olla teooria T asendusteooria. Olgu φ ZFC-hulgateooria kinnine valem ning Γ ZFC-teooria kinniste valemite järjend, sealjuures $\mathsf{T} \cap \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC}) \Vdash \Gamma \vdash \varphi$. Kasutagu sekventsi $\Gamma \vdash \varphi$ mingi tõestus τ teoorias $\mathsf{T} \cap \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$ parasjagu omaaksioome, mille konsekvendid pärinevad metahulgast $\mathcal{A}_\tau \coloneqq \{\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n\} \subseteq \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$. Leidugu valemite metahulgal $\mathcal{A}_\tau$ epsilon-kvaasimudel $\mathtt{M}$ teooria T suhtes, kusjuures klass $\mathtt{M}$ olgu mittetühi teoorias T. Eeldame, et klassi $\mathtt{M}$ kirjeldus $\mathtt{M}[q]$ ei kasuta kuskil indiviidmuutujaid, mis esinevad tõestuses τ.*

Sellisel juhul kehtib ka $\mathsf{T} \Vdash \Gamma|_{\mathtt{M}} \vdash \varphi|_{\mathtt{M}}$.

Tõestus. Kasutame struktuurset induktsiooni mööda tõestuse τ puud. Kirjapildiga $\Gamma_i \vdash \varphi_i$ tähistame vastava puu mingit vaatluse all olevat tippu.

* Baas (aksioomid)
  (a) Loogilised ja poolloogilised aksioomid
    (1) Puhta loogika aksioomid

    Oletame, et $\Gamma_i \vdash \varphi_i$ on puhta loogika aksioom, st $\Gamma_i \doteq \varphi_i$ ehk $\varphi_i \vdash \varphi_i$. Pärast tõkestamist järelikult $\varphi_i|_{\mathtt{M}} \vdash \varphi_i|_{\mathtt{M}}$, seega tegemist endiselt aksioomiga ning kehtib $\Gamma_i|_{\mathtt{M}} \vdash \varphi_i|_{\mathtt{M}}$.

    (2) Võrduse aksioomid

    ZFC keeles on kahte tüüpi võrduseaksioome: refleksiivsuse aksioomid ning asendused predikaatsümbolitesse. i) Refleksiivsus. Sekventsi $\Gamma_i \vdash \varphi_i$ korral oleks Γ_i tühi järjend ning $\varphi_i \doteq x_j = x_j$ mingi $x_j \in \mathtt{Indv}$ korral, kusjuures x_j ei esine klassi $\mathtt{M}$ määratluses. Tegu oleks niisiis sekventsiga $\vdash x_j = x_j$. Tühja järjendi ahend ning atomaarse valemi ahend ühtivad algsega, mistõttu taas $\Gamma_i|_{\mathtt{M}} \vdash \varphi_i|_{\mathtt{M}}$. ii) Asendus predikaatsümbolisse. Sekvents $\Gamma_i \vdash \varphi_i$ on kas $x_{j_1} = y_{j_1}, x_{j_2} = y_{j_2} \vdash (x_{j_1} = x_{j_2} \Rightarrow y_{j_1} = y_{j_2})$ või $x_{j_1} = y_{j_1}, x_{j_2} = y_{j_2} \vdash (x_{j_1} \in x_{j_2} \Rightarrow y_{j_1} \in y_{j_2})$

kus x_{j_1}, x_{j_2}, y_{j_1}, y_{j_2} on indiviidmuutujad. Mõlemal juhul on antetsedendis ainult atomaarsed valemid, mis ahendamisel ei teisene. Konsekventides on implikatsioonid, mille suhtes ahendamine distributeerub. Sellest ühest sammust piisab, et jõuda atomaarsete valemiteni, mis ei teisene. Taas kord $\Gamma_i|_M \vdash \varphi_i|_M$.

(b) Mitteloogilised aksioomid ehk omaaksioomid

Kui $\Gamma_i \vdash \varphi_i$ on omaaksioom, võisime eeldada, et antetsedent Γ on tühi (tegu asendusteooriaga). Teoreemi tingimustest saame, et $\varphi_i \doteq \mathcal{A}_j$, kus $\mathcal{A}_j \in \mathcal{A}_\tau$. Seega on vaatluse all sekvents $\vdash \mathcal{A}_j$, mille tõkend on $\vdash \mathcal{A}_j|_M$. Sekvents $\vdash \mathcal{A}_j|_M$ on tuletatav, kuna eelduse järgi on M valemihulga $\mathcal{A}_j$ epsilon-kvaasimudel teooria T suhtes.

* <u>Eeldus</u>

Kehtigu teoreemi väide tõestuse τ tipu $\Gamma_i \vdash \varphi_i$ jaoks iga sellele tõestuses eelneva sekventsi korral.

* <u>Samm</u>

Näitame, et tulemus kehtib siis ka tipu $\Gamma_i \vdash \varphi_i$ puhul.

(a) Lausearvutuslikud reeglid

Sirgjooneline. Tõkestamine distributeerub kenasti iga lausearvutuse tehte suhtes. Vahetult on näha, et struktuursete reeglitega on korras.

(b) Kvantoritega reeglid

Predikaatarvutuse reeglid tahavad täpsemat kontrolli. Lihtsam on reegliga, kus tõkestamine viib lokaalses mõttes konsekvendi nõrgestamiseni, keerulisem reegliga, mis nõrgestab antetsedenti.

(1) $(\vdash\forall)^*$ – nõrgestame väidet

Olgu $\Gamma_i \vdash \varphi_i$ tuletatud reeglist $(\vdash\forall)^*$ ehk olgu see kujul $\Gamma_i[\hat{x}] \vdash \forall x(\Psi_i[x])$. Induktsiooni eeldus on järelikult sekventsi $\Gamma_i[\hat{x}]|_M \vdash \Psi_i[x]|_M$ tuletatavus. Tõestada on tarvis sekvents $\Gamma_i[\hat{x}]|_M \vdash \forall x((M[q/x] \Rightarrow \Psi_i[x]|_M))$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_i[\hat{x}]|_M \vdash \Psi_i[x]|_M}\;\text{(ind. eeld)}}{\Gamma_i[\hat{x}]|_M, M[q/x] \vdash \Psi_i[x]|_M}\;\text{(S+)}}{\Gamma_i[\hat{x}]|_M \vdash (M[q/x] \Rightarrow \Psi_i[x]|_M)}\;(\vdash\Rightarrow)^{\ddagger}}{\Gamma_i[\hat{x}]|_M \vdash \forall x((M[q/x] \Rightarrow \Psi_i[x]|_M))}\;(\vdash\forall)^*$$

(2) $(\forall\vdash)^\dagger$ – nõrgestame eeldust

Olgu $\Gamma_i \vdash \varphi_i$ tuletatud reeglist $(\forall\vdash)^\dagger$ ehk olgu see kujul $\Gamma_i^0, \forall x(\Psi_i[y/x]) \vdash \varphi_i$, kus $y \in \mathtt{Indv}$ on indiviidmuutuja, mis võib olla ka x. (Teoorias $\mathcal{T} \cap \mathtt{Form}(\mathsf{ZFC})$ pole peale indiviidmuutujate teisi terme.) Induktsiooni eeldus on järelikult sekventsi $\Gamma_i^0|_{\mathcal{M}}, \Psi_i[y](x)|_{\mathcal{M}} \vdash \varphi_i|_{\mathcal{M}}$ tuletatavus. Tõestada on tarvis sekvents

$$\Gamma_i^0\big|_{\mathcal{M}}, \forall x((\mathcal{M}[q/x] \Rightarrow \Psi_i[y/x]|_{\mathcal{M}})) \vdash \varphi_i|_{\mathcal{M}}.$$

Muu seas läheb vaja valemite kinnisuse ning epsilon-kvaasimudeli $\mathcal{M}$ mittetühjuse eeldust.

Laiuse tõttu toome tõestuse järgmisel leheküljel.

Tulemus on tõestatud. ■

Lisa D. Deduktsiooni-teoreemiskeemi sõnastus

Teoreemiskeem A.1 (deduktsiooni-teoreemiskeem)**.** *Olgu $\mathcal{T}$ formaalne esimest järku sekventsiaalne teooria. Las olla $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ teooria $\mathcal{T}$ valemid ning Γ valemite järjend. Kui*

a. $\mathcal{T} + \mathcal{F} \Vdash \Gamma \vdash \mathcal{G}$,

b. *selle sekventsi mingis tuletuses ei rakendata valemi $\mathcal{F}$ vabadele muutujatele tärniga reegleid $(\vdash\forall)^*$ ega $(\exists\vdash)^*$ mitte kuskil,*

siis $\mathcal{T} \Vdash \Gamma, \mathcal{F} \vdash \mathcal{G}$.

Viide tõestusele. Vaata nt allikat @Prank. ■

Lisa E. Ideaali eri definitsioonid

Sõnastame *järjestusteooria*, *hulgateooria* ning *üldise topoloogia ideaali* määratlused. Nendele viitasime metadefinitsioonile @III.1 järgnenud võrdluses.

Meenutame @viide, et eel- või kvaasijärjestuseks hulgal P nimetasime refleksiivset ning transitiivset seost $\preccurlyeq$ hulgal P.

Definitsioon A.1 (järjestusteooria ideaal, [Gie+02, lk-d 1–3])**.** Olgu $(P, \preccurlyeq)$ eeljärjestatud hulk. Alamhulka $G \subseteq P$ kutsutakse *järjestusteooria ideaaliks*, kui

a. $G \neq \varnothing$;

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(var)}
\UnaryInfC{$\Gamma_i^0\big|_{M}, M[q/y], (M[q/y] \Rightarrow \Psi_i[y](x)|_{M}) \vdash M[q/y]$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(var)}
\UnaryInfC{$\Gamma_i^0\big|_{M}, M[q/y], (M[q/y] \Rightarrow \Psi_i[y](x)|_{M}) \vdash (M[q/y] \Rightarrow \Psi_i[y](x)|_{M})$}
\RightLabel{$(\vdash\not\Rightarrow)^{\ddagger}$}
\BinaryInfC{$\Gamma_i^0\big|_{M}, M[q/y], (M[q/y] \Rightarrow \Psi_i[y](x)|_{M}) \vdash \Psi_i[y](x)|_{M}$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(ind. eeld)}
\dashedLine
\UnaryInfC{$\Gamma_i^0\big|_{M}, \Psi_i[y](x)|_{M} \vdash \varphi_i|_{M}$}
\RightLabel{$(\vdash\Rightarrow)^{\ddagger}$}
\UnaryInfC{$\Gamma_i^0\big|_{M} \vdash (\Psi_i[y](x)|_{M} \Rightarrow \varphi_i|_{M})$}
\RightLabel{$(2 \times (\mathrm{S}+))$}
\UnaryInfC{$\Gamma_i^0\big|_{M}, M[q/y], (M[q/y] \Rightarrow \Psi_i[y](x)|_{M}) \vdash (\Psi_i[y](x)|_{M} \Rightarrow \varphi_i|_{M})$}
\RightLabel{$(\vdash\not\Rightarrow)^{\ddagger}$}
\BinaryInfC{$\Gamma_i^0\big|_{M}, M[q/y], (M[q/y] \Rightarrow \Psi_i[y](x)|_{M}) \vdash \varphi_i|_{M}$}
\RightLabel{$(\forall\vdash)^{\dagger}$}
\UnaryInfC{$\Gamma_i^0\big|_{M}, M[q/y], \forall x((M[q/x] \Rightarrow \Psi_i[y/x]|_{M})) \vdash \varphi_i|_{M}$}
\RightLabel{$(\mathrm{S}\sim)$}
\UnaryInfC{$\Gamma_i^0\big|_{M}, \forall x((M[q/x] \Rightarrow \Psi_i[y/x]|_{M})), M[q/y] \vdash \varphi_i|_{M}$}
\RightLabel{$(\exists\vdash)^{*}$}
\UnaryInfC{$\Gamma_i^0\big|_{M}, \forall x((M[q/x] \Rightarrow \Psi_i[y/x]|_{M})), \exists y(M[q/y]) \vdash \varphi_i|_{M}$}
\RightLabel{$(\vdash\Rightarrow)^{\ddagger}$}
\UnaryInfC{$\Gamma_i^0\big|_{M}, \forall x((M[q/x] \Rightarrow \Psi_i[y/x]|_{M})) \vdash (\exists y(M[q/y]) \Rightarrow \varphi_i|_{M})$}
\end{prooftree}
$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{$(M \neq \varnothing)$}
\dashedLine
\UnaryInfC{$\vdash \exists y(M[q/y])$}
\RightLabel{$(\mathrm{len}(\Gamma_i) \times (\mathrm{S}+))$}
\UnaryInfC{$\Gamma_i^0\big|_{M}, \forall x((M[q/x] \Rightarrow \Psi_i[y/x]|_{M})) \vdash \exists y(M[q/y])$}
\AxiomC{$\Gamma_i^0\big|_{M}, \forall x((M[q/x] \Rightarrow \Psi_i[y/x]|_{M})) \vdash (\exists y(M[q/y]) \Rightarrow \varphi_i|_{M})$}
\RightLabel{$(\vdash\not\Rightarrow)^{\ddagger}$}
\BinaryInfC{$\Gamma_i^0\big|_{M}, \forall x((M[q/x] \Rightarrow \Psi_i[y/x]|_{M})) \vdash \varphi_i|_{M}$}
\end{prooftree}
$$

b. G on väiksemate elementide suhtes kinnine. See tähendab, iga g, $g' \in P$ korral, kui $g \in G$ ja $g' \preccurlyeq g$, siis $g' \in G$;

c. G on $\preccurlyeq$-suunatud hulk. Kui g_1, $g_2 \in G$, leidub $h \in G$ nii, et $g_1 \preccurlyeq h$ ja $g_2 \preccurlyeq h$.

Definitsioon A.2 (hulgateooria ideaal, [Cie97, lk-d 14, 6])**.** Olgu S suvaline hulk ja $P \coloneqq \mathcal{P}(S)$. Alamhulka $G \subseteq P$ kutsutakse *hulgateooria ideaaliks*, kui

a. $G \neq \varnothing$;

b. G on $\subseteq$-väiksemate elementide suhtes kinnine. See tähendab, iga g, $g' \in P$ korral, kui $g \in G$ ja $g' \subseteq g$, siis $g' \in G$;

c. G on $\subseteq$-suunatud hulk, tunnistajaks sobib ühend. Kui g_1, $g_2 \in G$, siis $g_1 \cup g_2 =: h \in G$.

Definitsioon A.3 (üldise topoloogia ideaal, [Car37])**.** Olgu S suvaline hulk ja $P \coloneqq \mathcal{P}(S)$. Alamhulka $G \subseteq P$ kutsutakse *üldise topoloogia ideaaliks*, kui

a. $S \notin G$;

b. G on $\subseteq$-väiksemate elementide suhtes kinnine. See tähendab, iga g, $g' \in P$ korral, kui $g \in G$ ja $g' \subseteq g$, siis $g' \in G$;

c. G on $\subseteq$-suunatud hulk, tunnistajaks sobib ühend. Kui g_1, $g_2 \in G$, siis $g_1 \cup g_2 =: h \in G$.

(Allikas [Car37] on päriselt toodud filtri definitsioon, kuid ideaal on filtri duaalne mõiste.)

Viited ja kasutatud kirjandus

Viited

[Cai18] Andrés E. Caicedo. *Formal definition of "hereditarily"*. Mathematics Stack Exchange. 2018. URL: https://math.stackexchange.com/a/2874533 (vaadatud 05.01.2023).

[Can77] Georg F. L. P. Cantor. „Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre“. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 84 (1877), lk-d 242–258. ISSN: 0075-4102. DOI: 10.1515/crll.1878.84.242.

[Car37] Henri Paul Cartan. „Théorie des filtres“. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* 205.2 (1937), lk-d 595–598. ISSN: 0001-4036.

[Cie97] Krzysztof Ciesielski. *Set Theory for the Working Mathematician*. London Mathematical Society Student Texts 39. Suurbritannia ja Põhja-Iiri Ühendkuningriik, Cambridge: Cambridge University Press, 1997. ISBN: 0-521-59465-0.

[Coh63] Paul Joseph Cohen. „The Independence of the Continuum Hypothesis“. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 50.6 (1963), lk-d 1143–1148. ISSN: 0027-8424. DOI: 10.1073/pnas.50.6.1143.

[Coh64] Paul Joseph Cohen. „The Independence of the Continuum Hypothesis, II“. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 51.1 (1964), lk-d 105–110. ISSN: 0027-8424. DOI: 10.1073/pnas.51.1.105.

[Gie+02] G. Gierz *et al. Continuous Lattices and Domains*. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 93. Suurbritannia ja Põhja-Iiri Ühendkuningriik, Cambridge: Cambridge University Press, 2002. ISBN: 0-521-80338-1.

[Göd40] Kurt Friedrich Gödel. *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis with the Axioms of Set Theory*. Annals of Mathematics Studies 3. Ameerika Ühendriigid, New Jersey, Princeton: Princeton University Press, 1940.

[Hab22] Miha E. Habič. *What exactly is Levy hierarchy?* Mathematics Stack Exchange. 2022. URL: https://math.stackexchange.com/a/428867 (vaadatud 05.01.2023).

[Ins09] Eesti Keele Instituut. *Metateooria*. Teoses: *Eesti keele seletav sõnaraamat*. 2. väljaanne. Tallinn: Eesti Keele Sihtasutus, 2009. ISBN: 978-9985-79-269-8. URL: https://www.eki.ee/dict/ekss/index.cgi?Q=metateooria&F=M (vaadatud 05.01.2023).

[Lév74] Azriel Lévy. „Parameters in Comprehension Axiom Schemas of Set Theory“. Teoses: *Proceedings of the Tarski Symposium*. 2-1979. Proceedings of the Symposia in Pure Mathematics 25. Ameerika Ühendriigid, Rhode Island, Providence: American Mathematical Society, 1974, lk-d 309–324. ISBN: 0-8218-1425-7.

[Mon55] Richard Merritt Montague. „Well-Founded Relations; Generalizations of Principles of Induction and Recursion“. *Bulletin of the American Mathematical Society*. The June meeting in Vancouver. Logic and Foundations 61.5 (1955), lk 442. ISSN: 0273-0979.

[Pro22] Open Logic Project. *The Open Logic Text. Complete Build*. d3a1905. Open Logic Project, 2022. URL: https://builds.openlogicproject.org/open-logic-complete.pdf (vaadatud 05.01.2023).

[Wik22] Contributors to Wikipedia. *Forcing (mathematics)*. Teoses: *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 1125728201. väljaanne. Wikimedia Foundation, 2022. URL: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Forcing_(mathematics)&oldid=1125728201 (vaadatud 05.01.2023).

Kasutatud kirjandus

[HJ99] Karel Hrbáček ja Tomáš Jech. *Introduction to Set Theory*. 3. väljaanne. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics 220. Ameerika Ühendriigid, New York, New York: Marcel Dekker, Inc, 1999. ISBN: 0-8247-7915-0.

[Jec02] Tomáš Jech. *Set Theory*. 3; 4-2006. Springer Monographs in Mathematics. Saksamaa, Berliin/Heidelberg: Springer-Verlag, 2002. ISBN: 3-540-44085-2.

[Kle52] Stephen Cole Kleene. *Introduction to Metamathematics*. Bibliotheca Mathematica. A Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics 1. Hollandi Kuningriik, Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1952.

[Kul64] Ivar Kull. *Matemaatiline loogika*. Tallinn: Eesti Riiklik Kirjastus, 1964.

[Kun80] Herbert Kenneth Kunen. *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 102. Hollandi Kuningriik, Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1980. ISBN: 0-444-85401-0.

[Kun13] Herbert Kenneth Kunen. *Set Theory*. 2. väljaanne. Studies In Logic. Mathematical Logic and Foundations 34. Suurbritannia ja Põhja-Iiri Ühendkuningriik, London: College Publications, 2013. ISBN: 978-1-84890-050-9.

[Oja06] Peeter Oja. *Hulgateooria*. 4. väljaanne. Tartu: Tartu Ülikooli Kirjastus, 2006. ISBN: 9949-11-406-3.

[Pál74] Halmos Pál. *Naive Set Theory*. 2014. väljaanne. Ameerika Ühendriigid, New York, New York: Springer-Verlag, 1974. ISBN: 978-0-387-90104-6.

[PP04] Reimo Palm ja Rein Prank. *Sissejuhatus matemaatilisse loogikasse*. Tartu: Tartu Ülikooli Kirjastus, 2004. ISBN: 9985-56-867-2.

[Pra04] Rein Prank. *Matemaatiline loogika ja algoritmiteooria*. Tartu: Tartu Ülikooli Kirjastus, 2004. ISBN: 9985-56-868-0.

[Van16] Alvar Bjerkeng Van Keppel. „The Unprovability of the Continuum Hypothesis Using the Method of Forcing". Bakalaureusetöö. Rootsi Kuningriik, Uppsala: Uppsala Ülikool, 2016.

[Vso22] Vsotvep. *How to more rigorously formalise "value of (Weaver's) P-name" in set theory forcing (recursion)?* Mathematics Stack Exchange. 2022. URL: https://math.stackexchange.com/a/4410323 (vaadatud 05.01.2023).

[Wea14] Nik Weaver. *Forcing for Mathematicians*. Singapuri Vabariik: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2014. ISBN: 978-981-4566-00-1.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Rasmus Born,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose „Jõustamismeetod: kontiinumihüpoteesi sõltumatus ZFC-hulgateooriast“, mille juhendaja on Tõnu Tamme, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY-NC-ND 4.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Rasmus Born
05.01.2022