

Methode zur parametrischen globalen Modellordnungs- reduktion für eine effiziente Validierung dynamischer Systeme

Zur Erlangung des akademischen Grades Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)
Genehmigte Dissertation von Moritz Hülsebrock aus Mettingen
Tag der Einreichung: 26.07.2022, Tag der Prüfung: 19.10.2022

1. Gutachten: Prof. Dr.-Ing. Tobias Melz
2. Gutachten: Prof. Dr. rer. nat. Michael Schäfer
Darmstadt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Maschinenbau
Systemzuverlässigkeit,
Adaptronik und
Maschinenakustik SAM

Methode zur parametrischen globalen Modellordnungs-
reduktion für eine effiziente Validierung dynamischer Systeme

Genehmigte Dissertation von Moritz Hülsebrock

Tag der Einreichung: 26.07.2022

Tag der Prüfung: 19.10.2022

Darmstadt

Bitte zitieren Sie dieses Dokument als:

URN: urn:nbn:de:tuda-tuprints-228446

URL: <http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/22844>

Jahr der Veröffentlichung auf TUprints: 2023

Dieses Dokument wird bereitgestellt von tuprints,

E-Publishing-Service der TU Darmstadt

<http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de>

tuprints@ulb.tu-darmstadt.de

Die Veröffentlichung steht unter folgender Creative Commons Lizenz:

Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International

<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Systemzuverlässigkeit, Adaptronik und Maschinenakustik SAM an der Technischen Universität Darmstadt und am Fraunhofer-Institut für Betriebsfestigkeit und Systemzuverlässigkeit LBF in Darmstadt. An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben:

Ich danke Herrn Prof. Dr.-Ing. Tobias Melz für die Anregung zum Thema, für die Betreuung und die Förderung.

Prof. Dr. rer. nat. Michael Schäfer danke ich für die Übernahme der Korreferates und die konstruktive Korrektur der Arbeit.

Weiterhin möchte ich mich herzlich bei Prof. Dr.-Ing. Thilo Bein, Heiko Atzrodt und Georg Stoll für die inhaltliche Ausrichtung, die thematische Eingrenzung und die organisatorische Unterstützung bedanken.

Den Kollegen am Fraunhofer LBF (Maximilian Budnik, Marvin Droste, Hendrik Holzmann, Daria Manushyna, Hendrik Schmidt und Dr.-Ing. Christoph Tamm) gilt mein Dank für die Unterstützung, die fachlichen Gespräche und Anregungen. Weiterhin möchte ich mich für die freundliche Arbeitsatmosphäre und die gute Zusammenarbeit bedanken.

Mein Dank geht an meine Kollegen bei BMW, Maximilian Herrnberger, Jonas Seifert, Markus Käß und Dr.-Ing. Roland Lichtinger für die Anregungen und Diskussionen.

Ich danke meiner Freundin Jacqueline für die Unterstützung während der Fertigstellung der Arbeit. Schließlich danke ich meiner Familie für die Förderung und große Geduld, die sie mir in all den Jahren entgegengebracht haben. Ihnen möchte ich diese Arbeit widmen.

Zusammenfassung

Die Fortschritte in den Bereichen der numerischen Modellierung und der Rechenleistung von Computern ermöglichen es Wissenschaftlern und Ingenieuren, mit zunehmend komplexeren Modellen das reale Verhalten von technischen Systemen zu beschreiben. Trotzdem muss aufgrund von Parameter- und Modellunsicherheit die Entwicklung stets von Maßnahmen zur Modellverifizierung, Validierung und Quantifizierung der Unsicherheit begleitet werden. Seit einiger Zeit werden zunehmend stochastische Methoden zur Quantifizierung der Modell- und Parameterunsicherheit in frühen Entwurfsphasen verwendet, um die Simulationsergebnisse und Systeme zuverlässiger zu machen. Hierfür ist es notwendig, die Finite-Elemente-Modelle für verschiedene Parametersätze oder Systemkonfigurationen auszuwerten. Zur genauen Vorhersage des dynamischen Verhaltens mechanischer Systeme sind allerdings große und komplexe Modelle notwendig. Dadurch entsteht ein hoher Rechenaufwand, weshalb stochastische Methoden für den praktischen Einsatz häufig ungeeignet sind.

Im Rahmen dieser Arbeit wird eine Methode zur parametrischen Modellordnungsreduktion vorgestellt, die wesentliche Herausforderungen bestehender PMOR-Methoden überwindet. In Abhängigkeit der Höhe der Parameteränderung ermöglicht die „Parametric Global Mode Reduction“ Methode im Vergleich zu bekannten Methoden eine höhere Reduktion der Modellordnung bei gleichbleibender Genauigkeit. Die sich daraus ergebende effizientere Berechnung ermöglicht einen breiteren Einsatz stochastischer Methoden in der Auslegung, Optimierung und Überwachung mechanischer Systeme. Die neu entwickelte Methodik wird im Rahmen der Arbeit anhand experimenteller Untersuchungen umfangreich validiert. Darüber hinaus wird die PGMR-Methode in eine Entwicklungsmethodik zur Validierung dynamischer Systeme mit experimentellen Daten und zur Quantifizierung der Parameterunsicherheit integriert. Die Entwicklungsmethodik wird anschließend zum Aufbau eines Leiterplattenmodells und Quantifizierung der Parameterunsicherheit verwendet. Die Ergebnisse zeigen, dass der verwendete hierarchische Bayes-Ansatz in der Lage ist, die Varianz im dynamischen Verhalten der Leiterplatten aufgrund von Toleranzen in der Fertigung und Schwankungen im Materialverhalten abzubilden.

Abstract

Advances in the fields of numerical modeling and of the computing power enable scientists and engineers to describe the real behavior of technical systems with increasingly complex models. Nevertheless, due to parameter and model uncertainty, development must always be accompanied by measures for model verification, validation, and quantification of uncertainty. More recently, stochastic methods are being used to quantify model and parameter uncertainty in early design phases to make simulation results and systems more reliable. For this purpose, it is necessary to evaluate the FE models for different parameter sets or system configurations. However, large and complex models are necessary to accurately predict the dynamic behavior of mechanical systems. This results in a high computational effort, which often makes stochastic methods unsuitable for practical use.

In this thesis, a method for parametric model order reduction is presented that overcomes some of the challenges of existing PMOR methods. Depending on the amount of parameter change, the „Parametric Global Mode Reduction“ method enables a higher reduction of the model order while maintaining the same level of accuracy compared to other known methods. The resulting, more efficient calculation enables the wider use of stochastic methods in the design, optimization, and monitoring of mechanical systems. The newly developed methodology is extensively validated within the scope of the work through experimental investigations. Furthermore, the PGMR method is integrated into a development methodology for the validation of dynamic systems with experimental data and quantification of the parameter uncertainty. The development methodology is then used to build a PCB model and quantify the parameter uncertainty. The results show that the hierarchical Bayesian approach used can capture the variance in the dynamic behavior of the PCBs due to tolerances in manufacturing and variations in material behavior.

Abkürzungsverzeichnis

ANN	Künstliche Neuronale Netze (engl.: Artificial Neural Network)
CAD	Rechnerunterstütztes Konstruieren (engl.: Computer Aided Design)
CB	Craig-Bampton
CCM	Charakteristische Zwangsbedingungen (engl.: Characteristic Constraint Modes)
CMS	Component Mode Synthesis
ECAD	Electronic Computer Aided Design
eCB	enhanced-Craig-Bampton
EMA	Experimentelle Modalanalyse
E-Modul	Elastizitätsmodul
FEM	Finite-Elemente-Methode
FFT	Fast-Fourier-Transformation
FR	Schwer entflammbar (engl.: flame resistant)
FRF	Frequenzgang (engl.: Frequency Response Function)
LDV	Laser-Doppler Vibrometer
LE	Leistungselektronik
LSTM	Long Short-Term Memory
MAC	Modal Assurance Criterion
MADAM	Method for Accelerating Dynamic Analysis under Modifications
MCMC	Markov-Chain Monte-Carlo
MH	Metropolis-Hastings
MLP	Multi-Layer-Perceptron
MOR	Modellordnungsreduktion
MSF	Modal Scale Factor
OMA	Operationale Modalanalyse
PCB	Leiterplatte (engl.: Printed Circuit Board)
PDF	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (engl.: Probability Density Function)
PGMR	Parametric Global Mode Reduction
PMOR	Parametrische Modellordnungsreduktion
POD	Proper Orthogonal Decomposition
PolyMAX	Polyreference Least-Squares Complex Frequency Domain Method
RNN	Recurrent Neural Network
ROM	Ordnungsreduziertes Modell (engl.: Reduced Order Model)
ROM	reduziertes Modell (engl.: Reduced Order Model)

SHM Strukturüberwachung (engl.: Structural Health Monitoring)
TMCMC Transitional Markov-Chain Monte-Carlo

Symbolverzeichnis

Lateinische Buchstaben

A	m^2	Fläche
C	$N s m^{-1}$	Dämpfungsmatrix
\tilde{C}	-	Modale Dämpfungsmatrix
\hat{C}	-	Craig-Bampton reduzierte Dämpfungsmatrix
C	m	Materialtensor 4. Stufe
D	-	Messdaten
E	Pa	Elastizitätsmodul
F	N	Äußerer Lastvektor
F^{rs}	N	Residuale Flexibilitätsmatrix
G	Pa	Schubmodul
H	dB	Übertragungsfunktionsmatrix
\tilde{H}	-	Modale Übertragungsfunktionsmatrix
I	-	Einheitsmatrix
I	m^4	Flächenträgheitsmoment
J	J	Dehnungsenergie
K	$N m^{-1}$	Steifigkeitsmatrix
\tilde{K}	-	Modale Steifigkeitsmatrix
\hat{K}	-	Craig-Bampton reduzierte Steifigkeitsmatrix
K_e	$N m^{-1}$	Elementsteifigkeitsmatrix
\mathcal{L}	-	Laplace-Transformation
M	kg	Massenmatrix
\tilde{M}	-	Modale Massenmatrix
\hat{M}	-	Craig-Bampton reduzierte Massenmatrix
\hat{M}^*	-	Hilfsmatrix enhanced Craig-Bampton
M_e	kg	Elementmassenmatrix
N	-	Ansatzfunktion
N^S	-	Anzahl Substrukturen
\mathcal{N}	-	Normalverteilung
R	-	Hilfsmatrix enhanced Craig-Bampton
S	N/m^2	Cauchy-Spannungstensor
T	-	Transformationsmatrix
\tilde{T}	-	Transformationsmatrix

\mathbf{T}_a	-	Hilfsmatrix enhanced Craig-Bampton
V	m^3	Volumen
a	-	Skalierungsfaktor zum Anpassen von Eigenvektoren
\mathbf{c}	-	Annäherung der Wichtungsfunktion \mathbf{w}
$\tilde{\mathbf{c}}$	-	Modale Dämpfung
\mathbf{d}	m	Annäherung der Verschiebung \mathbf{u}
\mathbf{f}	N	Vektor der Lasten
\bar{f}	Hz	Durchschnittliche Eigenfrequenz
$\tilde{\mathbf{f}}$	-	Modaler Vektor der Lasten
\mathbf{f}_f	N	Vektor der äußeren Lasten
\mathbf{f}_V	N	Vektor der Volumenlasten
$\tilde{\mathbf{k}}$	-	Modale Steifigkeit
l	m	Länge
$\tilde{\mathbf{m}}$	-	Modale Masse
n	-	Systemordnung
\mathbf{n}	-	Normalvektor
p	-	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion
\mathbf{q}	m	modaler Verschiebungsvektor
r	-	reduzierte Systemordnung
\mathbf{s}	-	komplexer Frequenzparameter
t	s	Zeitvektor
\mathbf{t}	Pa	Spannungsvektor
\mathbf{u}	m	Verschiebungsvektor
\mathbf{w}	-	Wichtungsfunktion
x_j	-	Raumrichtungen in x-, y- und z-Richtung
y	-	experimentell gemessene Systemantwort

Griechische Buchstaben

Λ	Hz	Diagonalmatrix der Eigenwerte
Σ	-	Kovarianzmatrix
Φ	m	Modalmatrix
Ψ	-	Zwangsdeformationen
Ω	m^3	Volumen
α	-	Rayleigh-Dämpfungsbeiwert
β	-	Rayleigh-Dämpfungsbeiwert
δ	-	Varianz des Eigenmodenfehlers
ϵ	m	Verzerrungsvektor
ϵ	-	Modellfehler

ϵ_ω	-	Varianz des Eigenkreisfrequenzfehlers
θ	-	Parametervektor
$\tilde{\theta}$	-	Parametervektoränderung
κ	-	Faktor TCMC-Algorithmus
μ	-	Mittelwert
ν	-	Querkontraktionszahl
ξ	-	Modaler Dämpfungsfaktor
ρ	kg m^{-3}	Dichte
ρ_k	-	Gewichtungsfaktor
σ	-	Standardabweichung
σ	Pa	Spannungsvektor
ϕ	m	Eigenmode
$\bar{\phi}$	m	Gemittelte Eigenmode
ω	rad/s	Kreisfrequenz
∇	-	Differentialoperator

Indizes

<i>CB</i>	Craig-Bampton
<i>eCB</i>	Enhanced Craig-Bampton
<i>K</i>	Steifigkeit
<i>M</i>	Masse
<i>S</i>	<i>S</i> -te, Laufindex Substrukturen
<i>d</i>	Dominante Mode
<i>i</i>	Innere Freiheitsgrade
<i>j</i>	<i>j</i> -te, Laufindex
<i>k</i>	Steifigkeit
<i>m</i>	Master-Freiheitsgrade
<i>p</i>	Punkt auf Struktur
<i>q</i>	Punkt auf Struktur
<i>r</i>	Residual Mode
<i>t</i>	<i>j</i> -te, Laufindex Messdatenset
θ	Modellparameter
ϕ	Eigenmode
ω	Eigenkreisfrequenz
*	Konjugiert komplexe Zahl



Inhaltsverzeichnis

Vorwort	iii
Abkürzungsverzeichnis	ix
Symbolverzeichnis	xi
1. Einleitung	1
1.1. Motivation	1
1.2. Ziel und Gliederung der Arbeit	2
2. Stand der Wissenschaft	7
2.1. Modellordnungsreduktion	8
2.2. Parametrische Modellordnungsreduktion	11
2.3. Parameterkalibrierung, Modellvalidierung und Unsicherheitsquantifizierung	14
3. Methoden zur Beschreibung unsicherheitsbehafteter mechanischer Systeme	17
3.1. Mathematische Beschreibung dynamischer Systeme	17
3.1.1. Grundlagen der Finite Elemente Methode	19
3.1.2. Modale Transformation	22
3.1.3. Übertragungsverhalten	24
3.2. Grundlagen der Modellordnungsreduktion	25
3.2.1. Modales Abschneiden	26
3.2.2. Craig-Bampton Methode	26
3.2.3. Enhanced Craig-Bampton Methode	29
3.2.4. Reduktion der Koppel-Freiheitsgrade	31
3.3. Grundlagen der parametrische Modellordnungsreduktion	32
3.4. Experimentelle Untersuchung dynamischer Systeme	35
3.5. Abgleich numerischer Modelle mit modalen Parametern	36
3.5.1. Grundlagen des automatisierten Modellabgleichs	37
3.5.2. Bayes'scher Modellabgleich	38
3.5.3. Hierarchischer Bayes'scher Modellabgleich	41
3.5.4. Anwendungsbeispiel	42
4. Parametrische globale Modellordnungsreduktion	47
4.1. Herleitung der parametrischen, globalen Modellreduktion	47
4.2. Untersuchung des Parametereinflusses	52

4.3.	Vergleich zum Stand der Wissenschaft	54
4.3.1.	Anwendungsbeispiel: Einseitig gelagerte Platte	55
4.3.2.	Anwendungsbeispiel: Versteiftes Plattensystem	60
4.4.	Diskussion der Ergebnisse	67
5.	Parametrische Modellbildung zur Bewertung des dynamischen Verhaltens von Leiterplatten	69
5.1.	Modellierung von Leiterplatten	70
5.1.1.	Orthotropes Materialverhalten	71
5.1.2.	Homogenisierung von Materialeigenschaften	72
5.2.	Aufbau des numerischen Leiterplattenmodells	74
5.3.	Parametrische Modellordnungsreduktion und Verifikation des Leiterplattenmodells	76
6.	Experimentelle Untersuchung des dynamischen Verhaltens von Leiterplatten	81
6.1.	Versuchsaufbau zur Leiterplatten-Charakterisierung	81
6.2.	Experimentelle Ergebnisse der Leiterplatten	83
7.	Quantifizierung der Parameterunsicherheit an Leiterplattenmodellen	87
7.1.	Modellabgleich zwischen dem numerischen und experimentellen Modell der Leiterplatte	88
7.2.	Parameterkalibrierung der Leiterplatte mit experimentell ermittelten modalen Parametern	90
7.3.	Quantifizierung der Parameterunsicherheit	91
8.	Zusammenfassung und Ausblick	97
A.	Anhang	101
A.1.	Modellierung Leiterplatten in ANSYS®	101
A.1.1.	Ablauf Homogenisierung Materialeigenschaften in ANSYS®	101
A.1.2.	Netzkonvergenzanalyse Leiterplattenmodell	102
A.2.	Modellabgleich Leiterplatte	102
	Literaturverzeichnis	103

1. Einleitung

1.1. Motivation

Bei der Minimierung von Entwicklungsrisiken und der Erhöhung der Zuverlässigkeit spielen geeignete Finite-Elemente-Modelle (FE-Modelle) eine wichtige Rolle. Seit einiger Zeit werden zudem stochastische Methoden zur Quantifizierung der Modell- und Parameterunsicherheit in frühen Entwurfsphasen verwendet, um die Simulationsergebnisse und Systeme zuverlässiger zu machen. Hierfür ist es notwendig, die FE-Modelle für verschiedene Parametersätze oder Systemkonfigurationen auszuwerten. Zur genauen Vorhersage des dynamischen Verhaltens mechanischer Systeme sind allerdings große und komplexe Modelle notwendig. Dadurch entsteht ein hoher Rechenaufwand, weshalb stochastische Methoden für den praktischen Einsatz häufig ungeeignet sind.

Eine Möglichkeit zur Minimierung des Rechenaufwands sind Methoden der Modellordnungsreduktion (MOR). Die reduzierten Modelle (engl. Reduced Order Model ROM) ermöglichen eine effiziente Berechnung der Systemeigenschaften für einen bestimmten Frequenz- oder Zeitbereich. Die klassischen MOR-Methoden ermöglichen in der Regel keine Veränderung von Modellparametern, was für die Anwendung von stochastischen Methoden notwendig ist. Die Mehrzahl der üblichen MOR-Methoden basieren auf einer Koordinatentransformation, bei der das Ausgangssystem durch eine Projektion in ein ordnungsreduziertes System überführt wird. Da die Berechnung der Projektion ebenfalls rechenintensiv ist, führt der Einsatz von MOR-Methoden nicht zwangsläufig zu einer Steigerung der Effizienz der Berechnung. Hieraus hat sich das Forschungsgebiet der parametrischen Modellordnungsreduktion (PMOR) entwickelt. Die PMOR erlaubt es, Parameter, wie bspw. den Elastizitätsmodul oder die Dichte, im reduzierten System zu verändern.

Im Bereich der Strukturodynamik haben sich Methoden auf Basis der Component Mode Synthesis (CMS) als Standard durchgesetzt. Die CMS-Methoden ermöglichen durch eine Projektion der Systemmatrizen in einen Unterraum eine effizientere Berechnung. Aufgrund der unabhängig voneinander reduzierten Substrukturen ermöglichen sie die Anpassung der Modellparameter im reduzierten

Unterraum. Für komplexe Systeme mit einer hohen Zahl an Substrukturen kommen CMS-Methoden allerdings an ihre Grenzen, da die Höhe der mögliche Reduktion direkt von der Anzahl an Substrukturen und der Vernetzung an den Kontaktstellen zwischen Substrukturen abhängt. Darüber hinaus ist zum einem die Bestimmung der Transformationsmatrix rechenintensiv und zum anderen kann es durch eine schlechte Konditionierung der Systemmatrizen zu numerischen Problemen kommen.

1.2. Ziel und Gliederung der Arbeit

Im Rahmen dieser Arbeit wird eine Methode erarbeitet, die wesentliche Herausforderungen der PMOR auf Basis von CMS-Methoden überwindet. Im Gegensatz zu den bestehenden Lösungen erfolgt die Reduktion nicht auf Substruktur-, sondern auf der Gesamtsystemebene. Die Methode nutzt dabei den sequentiellen Zusammenbau von FE-Modellen, um die Elementmatrizen einzelner Substrukturen in separaten Matrizen abzuspeichern. Die Reduktion erfolgt mithilfe einer globalen Transformationsmatrix. Hierdurch entfällt die rechenintensive und numerisch anspruchsvolle Reduktion der einzelnen Substrukturen. In Abhängigkeit von der Höhe der Parameteränderung ermöglicht die „Parametric Global Mode Reduction“ (PGMR) Methode eine höhere Reduktion der Modellordnung bei gleichbleibender Genauigkeit im Vergleich zu den bekannten Methoden. Die sich daraus ergebende, effizientere Berechnung ermöglicht einen breiteren Einsatz stochastischer Methoden in der Auslegung, Optimierung und Überwachung mechanischer Systeme. Die neu entwickelte Methodik wird im Rahmen der Arbeit anhand experimenteller Untersuchungen umfangreich validiert.

Darüber hinaus wird die PGMR-Methode in eine Entwicklungsmethodik zur Validierung dynamischer Systeme mit experimentellen Daten und Quantifizierung der Parameterunsicherheit integriert. In Abbildung 1.1 ist ein Ablaufplan der Entwicklungsmethodik dargestellt. Der Ablaufplan ist in drei Teile unterteilt: Simulation, Identifikation und Validierung. In der Simulation erfolgt die Modellbildung, PMOR und Modellverifikation. Parallel dazu erfolgt eine experimentelle Identifikation mit Versuchsplanung, Versuchsdurchführung und Versuchsauswertung. Die Ergebnisse der Simulation und Identifikation fließen in der Validierung zusammen. Dort findet ein initialer Vergleich zwischen der Simulation und dem Experiment statt. Auf Basis dessen wird eine Verlustfunktion zur Bewertung

der Güte der Simulation definiert, die mithilfe eines Bayes'schen Modellabgleichs reduziert wird. Zum Abschluss erfolgt eine Quantifizierung der Parameterunsicherheit.

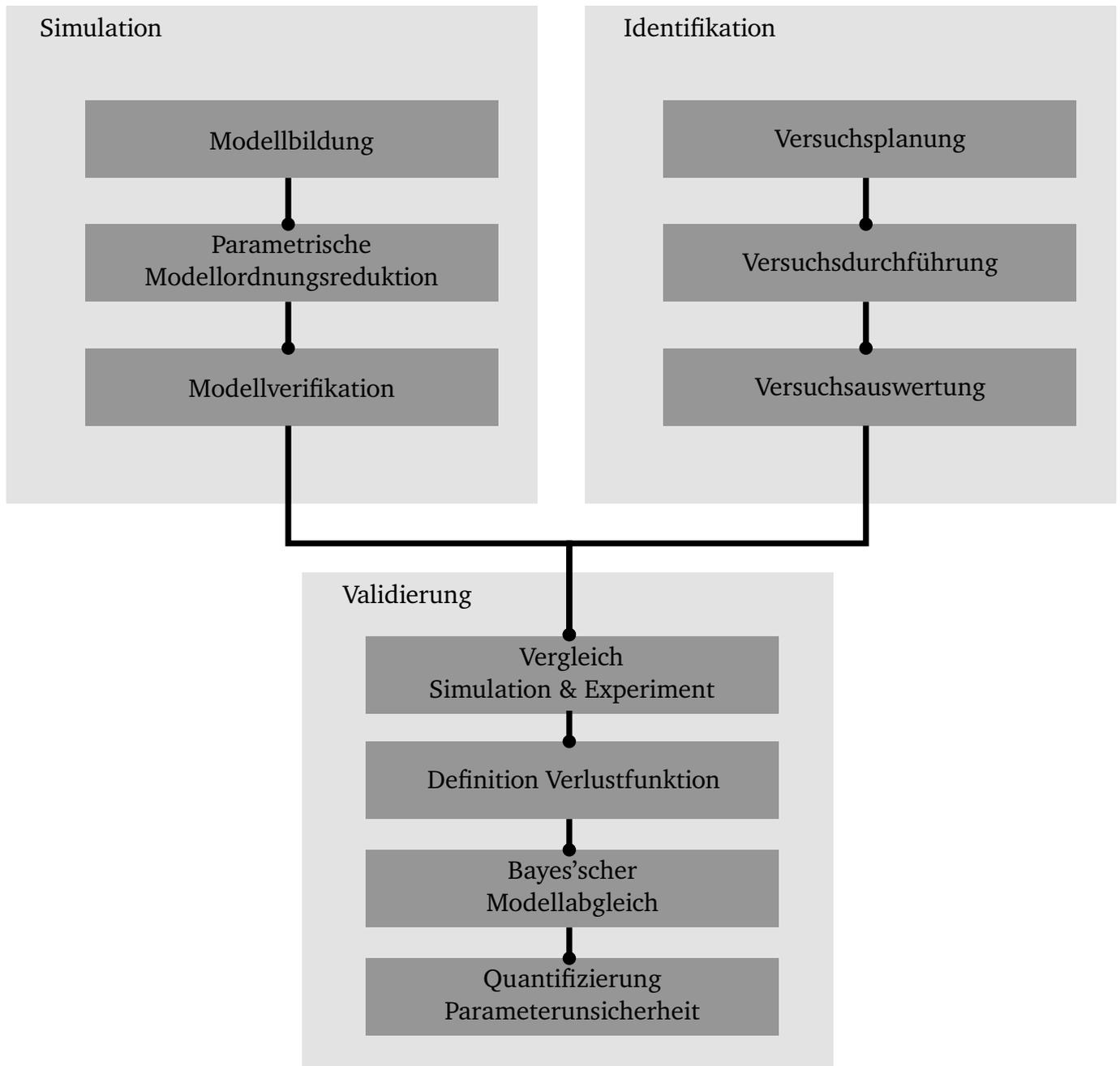


Abbildung 1.1.: Entwicklungsmethodik zur Validierung numerischer Simulationen und Quantifizierung der Parameterunsicherheit

Gliederung der Arbeit

Nach einer Einleitung wird im zweiten Kapitel der Stand der Wissenschaft auf dem Gebiet der PMOR auf Grundlage der in der Strukturdynamik verwendeten MOR-Methoden untersucht. Darüber hinaus erfolgt eine Erörterung des Standes der Forschung in den Gebieten der Parameterkalibrierung, Modellvalidierung und Unsicherheitsquantifizierung.

Aufbauend auf dem Stand der Wissenschaft werden in Kapitel 3 die zum Verständnis der Arbeit benötigten, methodischen Grundlagen vorgestellt. Die methodischen Grundlagen beinhalten die drei Hauptaspekte der Entwicklungsmethodik in Abbildung 1.1: Simulation, Identifikation und Validierung. Für die Simulation werden die Grundlagen zur theoretischen Modellbildung, die Entwicklung von numerischen Modellen und die MOR-Methoden aus dem Stand der Wissenschaft beschrieben. Zur Identifikation werden die Methoden zur experimentellen Untersuchung dynamischer Systeme und die Identifikation von strukturdynamischen Kenngrößen kurz vorgestellt. Im Anschluss erfolgt die Vorstellung der methodischen Grundlagen zur Validierung und Parameterkalibrierung numerischer Modelle mit experimentell ermittelten, modalen Parametern.

In Kapitel 4 erfolgt die Herleitung der PGMR-Methode und eine Validierung der Methode an zwei generischen Anwendungsbeispielen. Darüber hinaus erfolgt anhand der Anwendungsbeispiele ein Vergleich mit dem Stand der Wissenschaft in Bezug auf die Steigerung der Recheneffizienz und dem Einfluss von Parameteränderungen auf den Approximierungsfehler der reduzierten Modelle.

In den folgenden Kapiteln wird die vorgestellte Entwicklungsmethodik zur Validierung eines numerischen Modells einer Leiterplatte verwendet. In Kapitel 5 wird die Entwicklung und Verifizierung eines parametrisch reduzierten FE-Modells der Leiterplatte vorgestellt. Die experimentelle Identifikation von modalen Parametern der Leiterplatte wird in Kapitel 6 beschrieben. Durch die Vermessung von mehreren Leiterplatten wird gezeigt, dass aufgrund von Unsicherheit im Herstellungsprozess von Leiterplatten nominell gleiche Teile ein unterschiedliches strukturdynamisches Verhalten aufweisen. Um diese Unsicherheit im Auslegungsprozess berücksichtigen zu können, muss bei der Kalibrierung der Parameter des Modells eine Verteilung bestimmt werden, die das empirische Verhalten abbildet. In Kapitel 7 wird die Parameterkalibrierung der Leiterplatte mithilfe der experimentell ermittelten, modalen Parameter besprochen. Darüber hinaus erfolgt eine Untersuchung der Parameterunsicherheit. Hierzu wird in dieser Arbeit ein hierarchischer Bayes-Ansatz verwendet. Diese spezielle Form der Bayes'schen Parameterkalibrierung erlaubt es, im Vergleich zu vorherigen Ansätzen, neben dem

Mittelwert eines Modellparameters auch seine Standardabweichung zu identifizieren. Hierdurch können die inhärenten Parameterschwankungen besser abgebildet und somit die Aussagekraft der Simulation erhöht werden. In Kapitel 8 erfolgt eine Zusammenfassung der erzielten Ergebnisse und ein Ausblick zur möglichen Erweiterung der vorgestellten Methoden.

2. Stand der Wissenschaft

Numerische Simulationen und FE-Modelle im besonderen spielen bei der Reduktion von Entwicklungszeiten und -risiken eine wichtige Rolle. In frühen Entwicklungsphasen können fortschrittliche numerische Methoden die Festlegung eines optimalen Produktdesigns auf der Grundlage gegebener Anforderungen erleichtern [1]. In Abbildung 2.1a ist das Vorgehen für die Verwendung von FE-Modellen zur Auslegung bzw. Optimierung von Systemen dargestellt. In der Modellbildung wird ein FE-Modell aus einem CAD-Modell (engl. Computer Aided Design) abgeleitet. Das abgeleitete FE-Modell kann dann zur Optimierung der Systemeigenschaften in Abhängigkeit der Designparameter (z.B. geometrische Abmessungen von Bauteilen oder Materialverhalten) in der Analyse verwendet werden. Bei einer feinen Diskretisierung von komplexen Systemen entstehen Differentialgleichungssysteme sehr hoher Ordnung, die eine effiziente Berechnung des Systemverhaltens erschweren. Methoden zur MOR verbessern die Effizienz der Analyse. Die Mehrheit der verwendeten MOR-Verfahren basieren auf einer Projektion des ursprünglichen FE-Modells der Ordnung n in einen ordnungsreduzierten Unterraum der Ordnung r , wobei $r \ll n$ gilt. Die Anforderungen an ein hinreichend genaues ordnungsreduziertes Modell sind, dass es für einen bestimmten Zeit- oder Frequenzbereich die Dynamik zwischen Eingang und Ausgang des dynamischen Systems numerisch stabil und effizient abbilden kann, ohne dabei einen zu großen Approximierungsfehler aufzuweisen.

Das Ziel dieses Kapitels ist es den Stand der Wissenschaft auf dem Gebiet der parametrischen Modellordnungsreduktion abzubilden und kritisch zu bewerten. Die Grundlage bilden hierbei die Methoden der Modellordnungsreduktion. Darüber hinaus wird in der Literaturübersicht das Anwendungsfeld der parametrischen Modellordnungsreduktion in den Bereichen der Parameterkalibrierung und Modellvalidierung im Hinblick auf die Untersuchung von Unsicherheit besprochen. Die theoretischen Grundlagen für die im weiteren Verlauf der Arbeit verwendeten Methoden werden im Kapitel 3 erläutert.

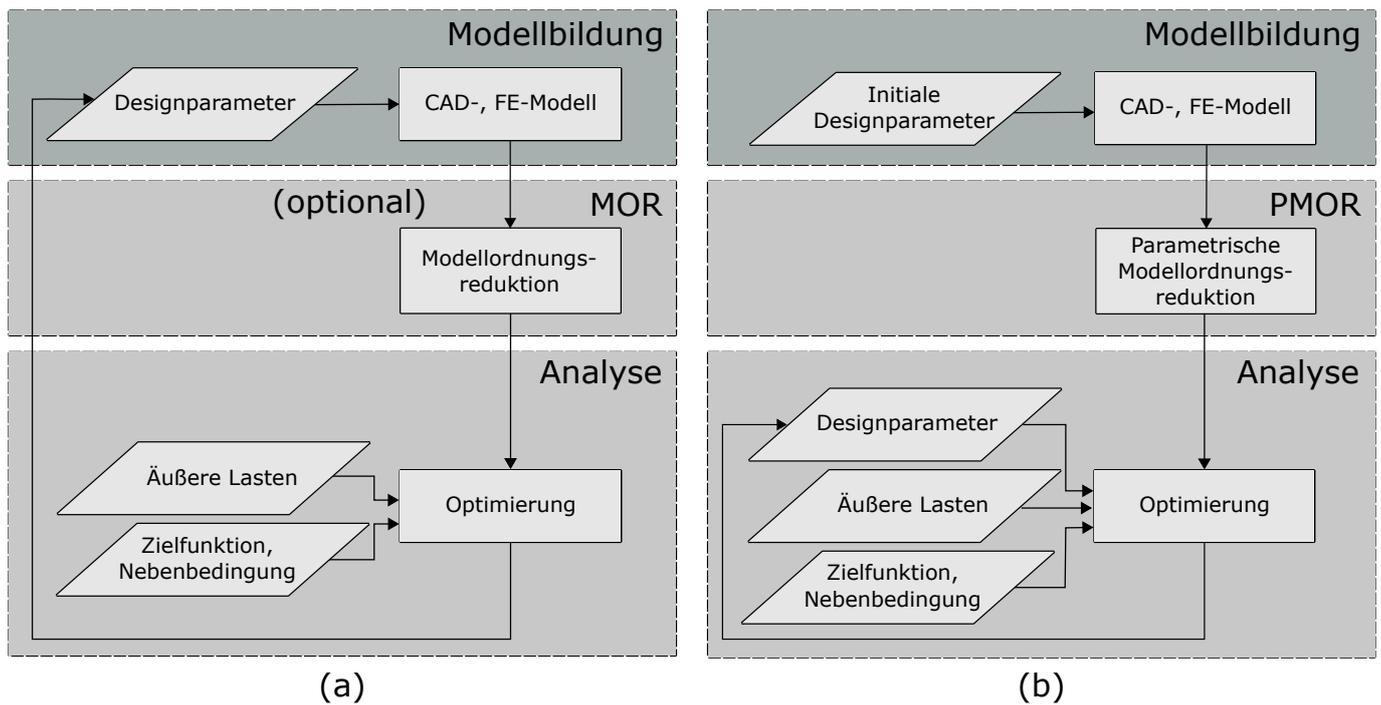


Abbildung 2.1.: Vergleich der Abläufe einer Optimierung (a) mit und (b) ohne parametrischer Modellordnungsreduktion [2]

2.1. Modellordnungsreduktion

Im Folgenden werden die MOR-Verfahren vorgestellt, die als Grundlage für die parametrische Modellordnungsreduktion in der Strukturdynamik dienen. Die Verfahren unterscheiden sich hauptsächlich in der Art und Weise, wie die Projektionsmatrizen konstruiert werden.

Die erste Reduktionsmethode wurde von GUYAN [3] bereits in den 1960er Jahren entwickelt. Die GUYAN-Reduktion basiert auf einer einfachen, statischen Kondensation. Das Vorgehen kann in zwei Schritte unterteilt werden. Im ersten Schritt wird die zu untersuchende Struktur in Substrukturen unterteilt. Im zweiten Schritt erfolgt eine Unterteilung des Freiheitsgradvektors in innere Freiheitsgrade und äußere Master-Freiheitsgrade. Die Master-Freiheitsgrade beschreiben entweder das Verhalten an den Schnittstellen zwischen den Substrukturen oder werden für die Analyse und Systemerregung benötigt. Die statische Kondensation ermöglicht eine Abbildung aller Freiheitsgrade auf die Master-Freiheitsgrade. Aufgrund ihres statischen Charakters ist zu erwarten, dass die Guyan-Reduktion nur genaue Ergebnisse für Frequenzen in der Nähe der niedrigsten Eigenfrequenzen des Systems liefert. Bei höheren Frequenzen haben die vernachlässigten Trägheitsterme einen stärkeren

Einfluss, was zu größeren Fehlern führt.

Weitere Reduktionsverfahren sind die PADÉ-Approximationen und KRYLOV-Unterraumverfahren. Beide Verfahren basieren auf den Prinzipien der Momentenanpassung oder partiellen Realisierung. Es gibt drei repräsentative Algorithmen für die PADÉ-Approximation: Asymptotische Wellenformauswertung (engl.: Asymptotic Waveform Evaluation (AWE)) [4], ARNOLDI-Algorithmus [5] und LANZOS-Algorithmus [6]. Die Methoden eignen sich zur Approximation von Übertragungsfunktion und können zur Reduktion sehr hochdimensionaler Systeme verwendet werden [7]. Der Nachteil dieser Verfahren ist, dass keine Aussage über die Erhaltung der Stabilität und der Passivität getroffen werden kann [8].

Ein sehr verbreitetes MOR-Verfahren ist das modale Abschneiden [9]. Der Hauptvorteil des modalen Abschneidens ist zum einen der direkte Bezug zum physikalischen System und zum anderen die Entkopplung der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Die Grundidee des modalen Abschneidens besteht darin, nur eine begrenzte Anzahl der kleinsten Eigenwerte und -vektoren zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens zu verwenden. Das modale Abschneiden ermöglicht eine genaue Abbildung der dynamischen Eigenschaften, vernachlässigt allerdings die statischen Randbedingungen. Die Methode wird in Abschnitt 3.2.1 weitergehend besprochen.

Die sogenannte Component Mode Synthese Methode (CMS) ist eine Weiterentwicklung der statischen Reduktion von GUYAN in Kombination mit dem modalen Abschneiden, bei der neben der statischen auch die dynamischen Eigenschaften der Strukturen betrachtet werden. Erstmals von HURTY [10] beschrieben, sind zahlreiche CMS-Methoden für verschiedene Anwendungen eingeführt worden [11, 12, 13, 14]. Bei der CMS-Reduktion werden zunächst die betrachteten Systeme in mehrere Substrukturen unterteilt. Analog zur GUYAN-Reduktion erfolgt dann eine Einteilung der Freiheitsgrade in innere Freiheitsgrade und äußere Master-Freiheitsgrade. Je nach Behandlung der Master-Freiheitsgrade lassen sich die CMS-Methoden in Ansätze einteilen, die auf feste [11], freie [12] und gemischte Master-Freiheitsgrade [13] basieren. Aufgrund ihrer Einfachheit und Zuverlässigkeit ist die von CRAIG und BAMPION (CB) [11] entwickelte CMS-Methode derzeit die am häufigsten verwendete Methode [15]. In Abschnitt 3.2.2 erfolgt eine ausführliche Herleitung der Methode.

Bei Systemen mit vielen Substrukturen oder einem feinmaschigen Netz an den Koppelstellen wird die Dimension des CB-reduzierten Modells von der Anzahl der Master-Freiheitsgrade an den

Koppelstellen dominiert. Daher können selbst diese Modelle numerisch ineffizient werden [2]. CASTANIER et al. [16] ersetzen die physikalischen Verschiebungskoordinaten an den Koppelstellen durch sogenannte charakteristische Zwangsbedingungen (engl. Characteristic Constraint Modes (CCM)), um die Dimension des reduzierten Modells weiter zu verringern. Die von CASTANIER et al. entwickelte Methode wird in Abschnitt 3.2.4 theoretisch beschrieben.

Neuere Arbeiten zur CB-Methode konzentrieren sich auf die Verbesserung der Genauigkeit durch Berücksichtigung der Auswirkungen von Residualmoden höherer Ordnung (siehe Abschnitt 3.2.3). KIM et al. [15, 17, 18] präsentieren das „enhanced Craig Bampton“ (eCB)-Verfahren. Durch die Berücksichtigung der Residualmoden wird die Genauigkeit erhöht. Hierdurch kann die Anzahl an berücksichtigten Moden im Vergleich zur klassischen CB-Reduktion deutlich reduziert werden. Die Bestimmung der Projektionsmatrix für das eCB-Verfahren ist allerdings rechen- und zeitintensiv. In [19] wird daher eine verbesserte Formulierung des eCB-Verfahrens vorgestellt, die über eine algebraische Substrukturierung und die Reduktion der Koppelstellen in Anlehnung an [16] den Berechnungsaufwand reduzieren.

Eine Variation der Modellparameter, wie z.B. der Materialeigenschaften, verändert das dynamische Verhalten der Struktur. In ihrer ursprünglichen Formulierung sind die beschriebenen MOR-Methoden nicht in der Lage diese Veränderung in Abhängigkeit der Modellparameter abzubilden. Dies hat zur Folge, dass das reduzierte Modell (ROM, engl. Reduced Order Model) nicht mehr gültig ist. Für einen neuen Parametersatz oder eine andere Systemkonfiguration müssen, wie in Abbildung 2.1a dargestellt, die Modellbildung, die MOR und die Analyse wiederholt werden. Die Bestimmung der Projektionsmatrix selbst erfordert einen beträchtlichen Rechenaufwand und kann daher das Verfahren ineffizient machen [2]. Vor diesem Hintergrund ist das Forschungsfeld der PMOR entstanden.

Das Ziel der PMOR ist es, wie in Abbildung 2.1b beschrieben, die Modellbildung und die MOR nur einmal durchzuführen und nachfolgende Analysen, wie z.B. die Quantifizierung von Unsicherheit [20, 21], die Parameterkalibrierung [22, 23] oder die Optimierung der Systemeigenschaften [1, 24, 25], im reduzierten Unterraum durchzuführen. Ein weiteres Anwendungsgebiet stellt die Überwachung von Systemen im Betrieb dar, dem sogenannten Structural Health Monitoring (SHM) [26, 27]. Im Folgenden werden die wichtigsten PMOR-Verfahren vorgestellt.

2.2. Parametrische Modellordnungsreduktion

Die PMOR ist ein Ansatz im allgemeineren Bereich der Ersatzmodelle (Surrogate-Modelle) zur Verringerung des Rechenaufwands in Anwendungen wie Design, Optimierung und Quantifizierung von Unsicherheit [28]. Im allgemeinen können Ersatzmodelle in drei Hauptkategorien unterteilt werden [29]:

- Datengetriebene Modelle
- Hierarchische Modelle
- Projektionsbasierte reduzierte Modelle

Datengetriebene Modelle

Insbesondere datengetriebene Modelle haben in den letzten Jahren viel Aufmerksamkeit erhalten. Diese Modelle basieren häufig auf Methoden der künstlichen Intelligenz, die eine Interpolation oder Regression von Simulationsdaten als Funktion von Modellparametern ermöglichen. Diese Modelle bieten Vorteile bei der Erfassung nichtlinearen Verhaltens, ermöglichen eine effiziente Berechnung und erfordern weniger Expertenwissen als Methoden auf Basis physikalischer Modelle [30]. Die Auswahl der richtigen Ansatzfunktion für die Interpolation und Regression spielt eine entscheidende Rolle für die Qualität der Approximation der datengetriebenen Modelle. Anwendung finden hier bspw. künstliche neuronale Netze (engl. Artificial Neural Network (ANN)) [31, 32, 33] und radiale Basisfunktionen [34].

Ein weit verbreiteter Ansatz zur Interpolation sind die sogenannte Kriging-Ersatzmodelle [35, 36, 37]. Die Kriging-Ersatzmodelle sind intensiv erforscht und es sind effiziente Ansätze zur Optimierung der Hyper-Parameter vorhanden [38]. DENIMAL et al. [39] verwenden ein Kriging-Ersatzmodell zur Vorhersage von komplexen Eigenwerten mechanischer Systeme, die reibungsinduzierten Schwingungen ausgesetzt sind. WANG et al. [40] verwenden ein Kriging-Ersatzmodell zum Modellabgleich. Das Kriging-Ersatzmodell approximiert hier die Differenz zwischen den gemessenen und berechneten Übertragungsfunktionen einer Honeycomb-Struktur. Durch einen adaptiven Lernansatz wird darüber hinaus die Anzahl der Modellauswertungen am FE-Modell reduziert.

Bei ANNs sind eine Vielzahl an unterschiedlichen Netzarchitekturen vorhanden, die sich für bestimmte Einsatzbereiche eignen. Zur Vorhersage von modalen Parametern von Systemen in Abhängigkeit von Modellparametern eignet sich bspw. eine „Multi-Layer-Perceptron“ (MLP) Netzarchitektur. GOLLER et al. [31] verwenden ein MLP zur Vorhersage von modalen Parametern eines Satelliten und verwenden das Ersatzmodell zur Parameterkalibrierung. Für die Vorhersage des dynamischen Verhaltens im Zeitbereich finden ANNs mit einer „Recurrent Neural Network“ (RNN) Netzarchitektur, wie dem „Long Short-Term Memory“ (LSTM) Modellansatz, Anwendung [41]. TAN et al. [42] verwendet ein LSTM zur Überwachung von schwingungsbelasteten Strukturen.

Allerdings schränkt die übermäßige Abhängigkeit von Daten auch die Anwendbarkeit und Akzeptanz der datengetriebenen Modelle ein. Die Leistung und die Verallgemeinerungsfähigkeit kann aufgrund begrenzter Informationen in den Trainingsdaten unbefriedigend sein. Darüber hinaus sind der Informationsfluss und der Entscheidungsfindungsprozess in datengetriebenen Modellen aufgrund ihrer Black-Box-Struktur in der Regel schwer nachvollziehbar [32]. Aus diesem Grund wird verstärkt an Ansätzen geforscht, die datengetriebene und physikalische Modelle miteinander kombinieren. Erste Ansätze sind hier sogenannte Physics Informed Neural Networks [43, 44] und Universal Differential Equations [45, 46].

Hierarchische Modelle

Unter hierarchischen Modellen werden in [29] physikalische Modelle beschrieben, die einen geringeren Rechenaufwand aufweisen. Die Reduktion des Rechenaufwands erfolgt beispielsweise durch die Vereinfachung der physikalischen Annahmen [47, 48] oder einer gröberen Diskretisierung des FE-Modells [49]. In der Strukturmechanik werden häufig vereinfachte Annahmen, wie z.B. Linearität oder vereinfachte Geometrien, verwendet [2, 23]. Die Verwendung von hierarchischen Modellen führt in der Regel zu einer Erhöhung des Modellfehlers.

Projektionsbasierte reduzierte Modelle

Bei den projektionsbasierten, reduzierten Modellen erfolgt, wie bei den in Abschnitt 2.1 vorgestellten Methoden, eine Projektion des hochdimensionalen Modells in einen ordnungsreduzierten Unterraum. Das Ziel ist es, das Eingangs- und Ausgangsverhalten des hochdimensionalen Modells für einen

bestimmten Frequenz- oder Zeitbereich hinreichend genau abzubilden. Im Gegensatz zu den datengetriebenen Methoden ist die Durchführung der Projektion in der Regel aufwendig und erfordert Kenntnis über die Struktur des hochdimensionalen Modells. In [28] werden mehrere Methoden zur Durchführung der Projektion besprochen. Hierbei handelt es sich teilweise um Weiterentwicklungen der in Abschnitt 2.1 behandelten Methoden.

Ein häufig verwendeter Ansatz ist die sogenannte Proper Orthogonal Decomposition (POD). Aufgrund der Anwendbarkeit auf sowohl nichtlineare, als auch zeitinvariante Systeme wird POD in verschiedenen Anwendungsbereichen eingesetzt [36]. Methoden auf Grundlage von KRYLOV-Unterräumen werden ebenfalls zur Erzeugung der reduzierten Unterräume verwendet [50]. Hierzu zählen u.a. die multivariante Padé-Approximation und die tangentielle Interpolation für lineare Systeme [51]. Yoo [7] beschreibt ein PMOR-Verfahren, das auf der KRYLOV-Unterraumiteration basiert, und verwendet es zur Optimierung des statischen und dynamischen Verhaltens einer Raumstruktur. Für lineare, zeitinvariante Systeme eignet sich darüber hinaus das Verfahren des balancierten Abschneidens. Im Gegensatz zum modalen Abschneiden handelt es sich beim balancierten Abschneiden um ein Annäherungsverfahren [52].

In der Strukturodynamik wird aktuell hauptsächlich auf Methoden zurückgegriffen, die auf dem CB-Verfahren basieren. Der Vorteil des CB-Verfahrens ist, dass eine direkte Zuordnung der Substrukturen und ihrer ordnungsreduzierten Systemmatrizen besteht. Aufgrund der unabhängigen Reduktion der Substrukturen ist eine Anpassung von Modellparametern möglich, wie z.B. des Elastizitätsmoduls (E-Modul) oder der Dichte. In [53] wird gezeigt, dass die reduzierten Substrukturmatrizen unabhängig von den Modellparametern sind. Dadurch können linear eingehende Parameter, wie z.B. E-Modul und Dichte, im reduzierten Modell verändert werden.

In PAPADRIMITIOU et al. [22] wird das CB-Verfahren in Kombination mit der von CASTANIER et al. [16] entwickelten Reduktion der Koppelfreiheitsgrade verwendet, um einen stochastischen Modellabgleich an einer Brücke durchzuführen. Da durch die Verwendung der Reduktion der Koppelfreiheitsgrade die Unabhängigkeit der Subsystemmatrizen aufgehoben wird, erweitern JENSEN et al. [53] die Reduktion um einen Interpolationsansatz zur Approximierung der Koppelfreiheitsgrade in Abhängigkeit der Modellparameter. In [54] wird das in Abschnitt 2.1 beschriebene eCB-Verfahren verwendet und das ordnungsreduzierte Modell für eine stochastische Optimierung der Systemeigenschaften genutzt.

Zur Erweiterung der Untersuchung von nichtlinearem Systemverhalten werden darüber hinaus Kombinationen von datengetriebenen und projektionsbasierten Modellen verwendet. In [55] wird ein mit dem eCB-Verfahren reduziertes Modell mit einem Kriging-Ersatzmodell kombiniert, um den Einfluss einer nichtlinearen Dämpfung bei einem stochastischen Modellabgleich abzubilden.

In [56] wird die sogenannte Method for Accelerating Dynamic Analyses under Modifications (MADAM) Methode vorgestellt. Die Methode basiert auf einer Re-Orthogonalisierung und der Annahme, dass lokale Veränderungen, wie z.B. Anbindung eines Schwingungstilgers, die Eigenmoden der Grundstruktur nur minimal beeinflussen. In [25] wird MADAM zur Optimierung der Schwingungseigenschaften eines Flugzeugflügels mit einem Schwingungsbild verwendet.

Die reduzierten parametrischen Modelle bilden die Grundlage für weitere Untersuchungen, insbesondere im Bereich der Parameterkalibrierung, der Modellvalidierung und der Unsicherheitsquantifizierung. Für die dort verwendeten Verfahren ist es notwendig, die Systemantwort in Abhängigkeit der Modellparameter für eine hohe Anzahl an Parameterkombinationen zu bestimmen. Aufgrund der komplexen, hochdimensionalen und rechenintensiven Modelle in der Strukturdynamik wären die Verfahren ohne PMOR nicht effizient einsetzbar.

2.3. Parameterkalibrierung, Modellvalidierung und Unsicherheitsquantifizierung

Die Fortschritte in den Bereichen der numerischen Modellierung und der Rechenleistung von Computern ermöglichen es Wissenschaftlern und Ingenieuren mit zunehmend komplexeren Modellen das reale Verhalten von technischen Systemen zu beschreiben. Trotzdem muss aufgrund von Parameter- und Modellunsicherheit die Entwicklung stets von Maßnahmen zur Modellverifizierung, Validierung und Quantifizierung der Unsicherheit begleitet werden [57].

Für den Parameterabgleich haben sich hauptsächlich zwei Ansätze herausgebildet, die sich unabhängig voneinander entwickelt haben. Das sind zum einen die deterministischen, sensitivitätsbasierten Methoden [58, 59] und zum anderen die stochastischen Ansätze, die in der Regel auf Bayes'schen Methoden basieren [60, 61, 62, 63]. Insbesondere die sensitivitätsbasierten Methoden sind eine ausgereifte Technologie, die bereits in der Industrie Anwendung finden [64]. Die klassischen, sensitivitätsbasierten Methoden haben den Nachteil, dass sie ein numerisches Modell auf einen Mess-

datensatz anpassen. Hierdurch werden eventuelle Messunsicherheit und Schwankungen zwischen nominell gleichen Teilen vernachlässigt. Die Notwendigkeit der Vorhersage der Zuverlässigkeit von Systemen unter Unsicherheit von Fertigungstoleranzen, Randbedingungen und Modellparametern haben dazu geführt, dass die beiden unabhängigen Forschungsfelder näher aneinandergerückt sind. Erste Ansätze zur Untersuchung der Variabilität von nominell gleichen Strukturen werden von MARES et al. [65, 63] durchgeführt. In weiterführenden Arbeiten [66, 67, 68] werden die Ansätze erweitert. Das Ziel hierbei ist es nicht, eine einzelne Messung zu reproduzieren, sondern eine Verteilung von Ausgangsgrößen, wie gemessene Eigenfrequenzen und Eigenmoden, abzubilden [69]. Hierbei ist es von besonderem Interesse, den Einfluss von sich akkumulierenden Fertigungstoleranzen oder von Verschleiß darzustellen. Das führt dazu, dass sich nominell gleiche Systeme unterschiedlich verhalten und hierdurch eine veränderliche Zuverlässigkeit entstehen kann [64].

Der derzeitige Fokus liegt in der Integration und Formalisierung der Modellverifikation und -validierung sowie der Parameterkalibrierung und der Unsicherheitsquantifizierung [20, 57]. SANKARARAMAN et al. [20] beschreiben, wie sich Unsicherheit in einem technischen System mit mehreren Subsystemen fortpflanzt. Hierzu führen sie die Modellvalidierung und Parameterkalibrierung auf Subsystem-Niveau durch und verschalten die unsicherheitsbehafteten Subsysteme über ein Bayes'sches Netz. RIEDMAIER et al. [57] entwickeln ein komplettes Rahmenwerk zur Modellverifikation und -validierung sowie Unsicherheitsquantifizierung und zeigen Anwendungsbeispiele aus vielen Bereichen der Ingenieurwissenschaften [21, 70]. Im Gegensatz zu [67, 68] kommen hierbei mehrheitlich Bayes'sche Methoden zum Einsatz.

Die ersten Arbeiten zum Bayes'schen Modellabgleich stammen von BECK et al. [60], KATAFYGIOTIS et al. [61] und VANIK et al. [62]. Durch die Verwendung des Satzes von Bayes wird die wahrscheinlichste Parameterverteilung in Abhängigkeit der Messdaten und des verwendeten Modells bestimmt. Für Problemstellungen mit vielen Parametern lässt sich die hochdimensionale Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (eng. Probability Density Function (PDF)) nicht mehr analytisch lösen. Deshalb wird auf Sampling-Algorithmen zurückgegriffen, die den Lösungsraum abtasten und sich somit der Lösung annähern. Hierbei kommen häufig Markov Chain Monte Carlo (MCMC) [71] Algorithmen zum Einsatz. Aufgrund der Stabilität und guten Konvergenz, auch für hochdimensionale Probleme, ist der von CHING et al. [72] entwickelte „Transitional Markov Chain Monte Carlo“ (TMCMC) Algorithmus weit verbreitet.

Die inhärente Eigenschaft des Satzes von Bayes, dass mit steigender Anzahl von Beobachtungen und Messdaten die Unsicherheit in der Parameterschätzung weiter reduziert wird, führt in der Praxis dazu, dass die identifizierte Parameterverteilung immer schmaler wird. In der Realität unterliegen die zu schätzenden Parameter auch einer Unsicherheit. Dies ist z. B. der Fall, wenn mehrere Messungen an nominell gleichen Teilen durchgeführt werden, die sich aufgrund von Fertigungstoleranzen oder Schwankungen in den Materialeigenschaften voneinander unterscheiden. Zur Abbildung dieser inhärenten Parameterverteilung nutzen BEHMANESH et al. [73] einen hierarchischen Bayes'schen Ansatz. Im Gegensatz zum klassischen Bayes'schen Modellabgleich [60, 62] werden nicht die Parameter, sondern eine Parameterverteilung bestimmt. Dieser Ansatz findet bisher hauptsächlich in der Überwachung von Strukturen Anwendung, um den Einfluss von Temperaturschwankungen auf die Modellparameter [74] oder Anregungsamplitude [75] zu berücksichtigen. Die theoretischen Grundlagen zum Bayes'schen Modellabgleich werden in Abschnitt 3.5.2 behandelt.

3. Methoden zur Beschreibung unsicherheitsbehafteter mechanischer Systeme

Dieses Kapitel behandelt die wichtigsten Konzepte zur mathematischen Beschreibung und Validierung unsicherheitsbehafteter mechanischer Systeme. Der Aufbau des Kapitels orientiert sich an den in [76] vorgestellten Grundlagen zur Entwicklung eines validierten, strukturdynamischen Modells. In Abbildung 3.1 sind die drei grundlegenden Kenntnisse und Technologien der Strukturdynamik abgebildet. Sie bestehen aus der **theoretischen Modellbildung**, der **numerischen Analyse** sowie den **experimentellen Analysen und Tests**. Diese lassen sich weiterhin gruppieren in:

- **Simulation** - Theoretische Modellbildung und numerische Analysen
- **Identifikation** - Theoretische Modellbildung und experimentelle Analysen und Tests
- **Validierung** - Vergleich zwischen der numerische Analyse und den experimentellen Analysen und Tests

In den ersten drei Abschnitten des Kapitels werden die Grundlagen zur Simulation mechanischer Systeme und Methoden der parametrischen Modellordnungsreduktion beschrieben. In den folgenden Abschnitten werden die zum Verständnis der Arbeit notwendigen Grundlagen zur experimentellen Identifikation von strukturdynamischen Messgrößen und der Abgleich zwischen numerischen und experimentellen Ergebnissen behandelt.

3.1. Mathematische Beschreibung dynamischer Systeme

Der erste Schritt zur Entwicklung eines validierten, strukturdynamischen Modells ist die theoretische Modellbildung für die Simulation. Dafür ist ein grundlegendes Verständnis der physikalischen

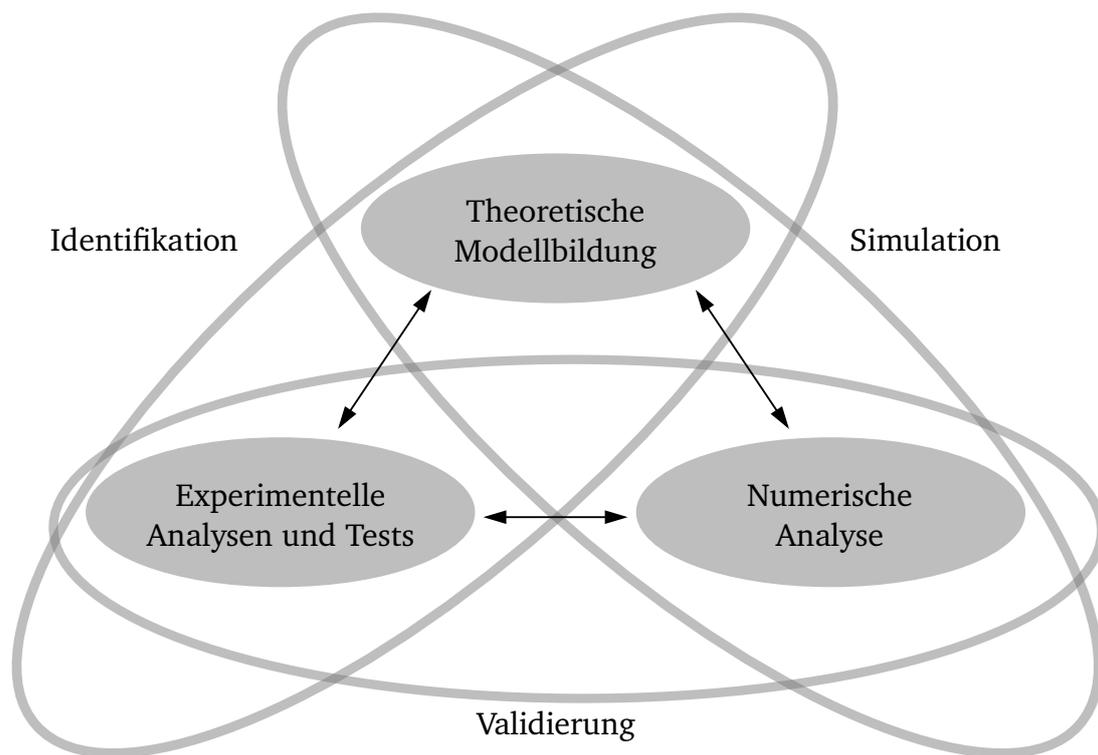


Abbildung 3.1.: Grundlegende Kenntnisse und Technologien der Strukturtechnik [76]

Eigenschaften mechanischer Systeme notwendig, um das Verhalten mathematisch zu beschreiben. Das Ziel des zweiten Schritts, der numerische Analyse, ist es, diese mathematischen Beschreibungen genau und effizient zu berechnen.

Zur Vorhersage des strukturdynamischen Verhaltens mechanischer System hat sich die Darstellung als Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Praxis durchgesetzt. Diese Darstellung hat den Vorteil, dass die Zuordnung der Systemmatrizen zu physikalischen Eigenschaften der Struktur eindeutig ist. Die erzwungenen Schwingungen eines linearen, zeitinvarianten, mechanischen Systems mit n Freiheitsgraden, werden über die inhomogene Bewegungsgleichung

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t), \quad (3.1)$$

beschrieben, wo \mathbf{M} , \mathbf{C} und \mathbf{K} die globalen Massen-, Dämpfungs-, Steifigkeitsmatrix darstellen. Der Spaltenvektor $\mathbf{F}(t)$ beschreibt den globalen Lastvektor in Abhängigkeit der Zeit. Die Spaltenvektoren \mathbf{u} , $\dot{\mathbf{u}}$ und $\ddot{\mathbf{u}}$ sind der Verschiebungs-, Geschwindigkeits- und der Beschleunigungsvektor der betrachteten Freiheitsgrade.

Die globale Massenmatrix kann grundsätzlich als symmetrisch und positiv definit angenommen werden [77]. Als vereinfachende Annahme werden nachfolgend die globalen Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen ebenfalls als symmetrisch angenommen. Darüber hinaus erfolgt die Annahme, dass die betrachteten Strukturen schwach gedämpft und die Dämpfung geschwindigkeitsproportional ist. Diese Annahmen führen zu einem System mit reellen Eigenwerten.

3.1.1. Grundlagen der Finite Elemente Methode

Zur Modellbildung in der Strukturdynamik hat sich zum heutigen Zeitpunkt die FEM als Standardwerkzeug durchgesetzt. Das Ziel der FEM ist die effiziente Bestimmung von Bewegungsgrößen, die durch das Einwirken von äußeren Kräften unterschiedlicher Art hervorgerufen werden. Das Ergebnis sind die resultierenden Deformationen oder Spannungen im Körper, die zur Auslegung und Bewertung der Systeme verwendet werden können. Der Aufbau eines FE-Modells lässt sich in folgende Schritte unterteilen [78]:

1. Aufstellen der mathematischen Beschreibung des physikalischen Systems
2. Diskretisierung in finite Elemente
3. Berechnung der Elementmatrizen
4. Zusammenbau des Gleichungssystems.

Die Herleitung orientiert sich an SANDBERG et al. [79]. Die Grundlage der FEM bildet hier die kontinuumsmechanische Bilanzgleichung

$$\tilde{\nabla}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (3.2)$$

wo \mathbf{u} der Verschiebungsvektor, \mathbf{f} die Volumenlast und $\boldsymbol{\sigma}$ der Spannungsvektor ist. Für den Spannungsvektor wird dabei anstelle der Tensor-Notation, die Schreibweise in Form von Matrix-Vektor-Gleichungen gewählt. Der Ausdruck auf der rechten Seite beschreibt die Trägheitskräfte über die

Dichte ρ . Der Differentialoperator $\tilde{\nabla}$ folgt in dem Fall zu

$$\tilde{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Weiterhin wird für die mathematische Beschreibung des physikalischen Systems die kinematische Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehung

$$\boldsymbol{\epsilon} = \tilde{\nabla} \mathbf{u}, \quad (3.4)$$

benötigt, wo $\boldsymbol{\epsilon}$ den Vektor der Verzerrungen beschreibt. Das Materialgesetz stellt eine lineare Verknüpfung zwischen dem Spannungs- und Verzerrungszustand über

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{C} \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.5)$$

mit dem Materialtensor 4. Stufe \mathcal{C} her. Der Materialtensor 4. Stufe wird über 81 Konstanten definiert. Je nach Materialmodell variiert die Anzahl an unabhängigen Parametern. Im Fall von homogenen Materialien mit isotropen Eigenschaften und linear-elastischen Werkstoffverhalten, kann eine vollständige Beschreibung über zwei der drei Materialkonstanten erfolgen. Die Materialkonstanten sind der E-Modul E , die Poissonzahl ν und der Schubmodul G .

Mit den Gleichungen (3.2)-(3.5) ist die Grundlage zur Herleitung der FE-Beschreibung gelegt. Die FEM verwendet in der Regel die schwache Formulierung zum Lösen der Differentialgleichung. Die Formulierung wird erreicht durch eine Multiplikation von Gleichung (3.2) mit einer Wichtungsfunktion $\mathbf{w} = [w_1 \ w_2 \ w_3]^T$ und der Integration über das Gebiet der Struktur Ω

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}^T \left(\tilde{\nabla}^T \boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \mathbf{f} \right) dV = 0. \quad (3.6)$$

Durch Anwendung des GREEN-GAUSS Theorems lässt sich die schwache Formulierung wie folgt beschreiben

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}^T \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dV + \int_{\Omega} (\tilde{\nabla} \mathbf{w})^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int_{\partial\Omega} \mathbf{w}^T \mathbf{t} dS - \int_{\Omega} \mathbf{w}^T \mathbf{f} dV = 0. \quad (3.7)$$

In Gleichung (3.7) wird der Spannungsvektor \mathbf{t} beschrieben über den CAUCHY Spannungstensor \mathbf{S} mit

$$\mathbf{t} = \mathbf{S} \mathbf{n}, \quad (3.8)$$

wo \mathbf{n} der Normalvektor auf der Schnittfläche ist [78]. Über die Gleichung (3.7) lässt sich das physikalische Verhalten von Strukturen mathematisch beschreiben. Die Aufgabe der FEM ist es, die mathematische Beschreibung genau und effizient zu berechnen.

Die Idee der FEM besteht darin, eine kontinuierliche physikalische Struktur durch nicht-überlappende, endliche Teilgebiete, die sogenannten finiten Elemente, zu approximieren. In Abhängigkeit der räumlichen Problemdimension werden unterschiedliche Elementtypen, wie z.B. Dreiecke, Vierecke, Tetraeder, etc., verwendet [80]. Die Approximation des Verhaltens jedes Elements erfolgt anhand von sogenannten Ansatzfunktionen. Die Ansatzfunktion muss folgende Eigenschaften ausweisen [81]:

1. Sie muss so beschaffen sein, dass an jedem Punkt der Schnittstelle zwischen benachbarten Elementen Kontinuität erreicht wird.
2. Sie muss vollständige, lineare Polynome enthalten, sodass sich in jedem Element konstante Ableitungen ergeben.

Über die Ansatzfunktionen \mathbf{N} lassen sich die Verschiebungen und Wichtungsfunktion approximieren mit

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{d} \quad \text{und} \quad \mathbf{w} = \mathbf{N} \mathbf{c}, \quad (3.9)$$

wo \mathbf{d} die Annäherung der Verschiebung und \mathbf{c} die Annäherung der Wichtungsfunktion darstellt. Für die Verzerrung gilt $\boldsymbol{\epsilon} = \tilde{\nabla} \mathbf{N} \mathbf{d}$. Durch das Einsetzen in die Gleichung (3.7) ergibt sich

$$\underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV}_{\mathbf{M}_e} \frac{\partial^2 \mathbf{d}}{\partial t^2} + \underbrace{\int_{\Omega} (\tilde{\nabla} \mathbf{N})^T \mathbf{C} \tilde{\nabla} \mathbf{N} dV}_{\mathbf{K}_e} \mathbf{d} = \underbrace{\int_{\partial\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS}_{\mathbf{f}_f} + \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{f} dV}_{\mathbf{f}_V} \quad (3.10)$$

mit der Elementmassenmatrix \mathbf{M}_e , der Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_e und dem Vektor der äußeren Last \mathbf{f}_f und der Volumenkraft \mathbf{f}_V .

Der letzte Schritt zum Aufbau eines numerischen Modells ist das Erstellen der globalen Systemmatrizen. Dieser Schritt wird in Kapitel 4 genauer beschrieben.

3.1.2. Modale Transformation

Die Auswertung der Differentialgleichung (3.1) ist für große Systeme sehr rechenintensiv und zeitaufwendig. Das Verfahren der modalen Transformation erleichtert die Auswertung, da sie die mathematische Beschreibung des Systems mit weniger Freiheitsgraden ermöglicht [82]. Die modale Transformation basiert mathematisch auf einer Hauptachsentransformation durch die orthogonalen Eigenvektoren und führt zu einer Entkopplung des Systems. Das Prinzip wird in der Abbildung 3.2 veranschaulicht. Die Herleitung orientiert sich an [77]. Das komplexe, gekoppelte Mehrmassensystem in Abbildung 3.2a (1) wird durch die modale Transformation in Abbildung 3.2a (2) in ein ungekoppeltes System mit einzelnen Freiheitsgraden umgewandelt. Die Transformation in die generalisierten oder modalen Koordinaten erfolgt über

$$\mathbf{u}(t) = \Phi \mathbf{q}(t) = \sum_{j=1}^n \Phi_j q_j(t). \quad (3.11)$$

Die Modalmatrix Φ beinhaltet die Eigenvektoren Φ_j des untersuchten mechanischen Systems. Für den Großteil technischer Fragestellungen ist es ausreichend, die Eigenfrequenzen und Eigenvektoren des ungedämpften Systems zu bestimmen. Diese Annahme kann getroffen werden, weil die Dämpfung häufig so klein ist, dass ihr Einfluss auf die Eigenfrequenzen und Eigenvektoren zu vernachlässigen ist [77].

Für den ungedämpften Fall sind die Eigenvektoren reellwertig und lassen sich durch das Lösen des generalisierten Eigenwertproblems

$$\mathbf{K} \Phi = \mathbf{M} \Phi \Lambda \quad (3.12)$$

bestimmen, wo Φ der Eigenvektormatrix oder Modalmatrix und Λ einer Diagonalmatrix mit den Eigenwerten entspricht.

Mit der Modalmatrix können die Massenmatrix \mathbf{M} , die Dämpfungsmatrix \mathbf{C} und die Steifigkeits-

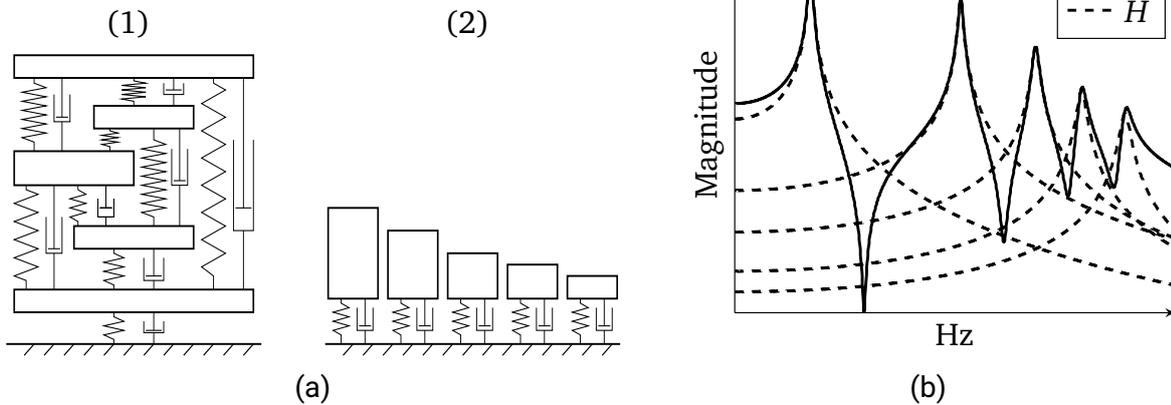


Abbildung 3.2.: (a) Modale Entkopplung an einem Fünfmassenschwinger; (b) Zusammengesetzte Übertragungsfunktion und modale Übertragungsfunktionen des Systems [83]

matrix \mathbf{K} über

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \tilde{\mathbf{M}}, \quad \Phi^T \mathbf{C} \Phi = \tilde{\mathbf{C}} \quad \text{und} \quad \Phi^T \mathbf{K} \Phi = \tilde{\mathbf{K}} \quad (3.13)$$

in den Modalraum transformiert werden. Durch die Transformation mit der Modalmatrix werden die Massenmatrix \mathbf{M} und die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} diagonalisiert. Die Dämpfungsmatrix \mathbf{C} wird ebenfalls diagonalisiert, wenn die Eigenvektoren des ungedämpften Systems auch die Eigenvektoren des gedämpften Systems sind. Dies ist der Fall, wenn die Matrix

$$\mathbf{K} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} = \mathbf{C} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \quad (3.14)$$

symmetrisch ist [77]. In diesem Fall spricht man von CAUGHEY-Dämpfung. Die Symmetriebedingung (3.14) wird beispielsweise von der RAYLEIGH-Dämpfung

$$\mathbf{C} = a \mathbf{M} + b \mathbf{K} \quad (3.15)$$

erfüllt. Die transformierte Bewegungsgleichung lautet [84]:

$$\tilde{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{q} = \tilde{\mathbf{f}}(t) \quad (3.16)$$

mit $\tilde{\mathbf{f}}(t) = \Phi^T \mathbf{F}(t)$.

3.1.3. Übertragungsverhalten

Neben der Analyse im Zeitbereich können auch Untersuchungen von dynamischen Systemen im Frequenzbereich erfolgen. Das Lösen der Bewegungsdifferentialgleichung (3.1) im Frequenzbereich erfolgt über das Aufstellen der Übertragungsfunktionsmatrix \mathbf{H} . Hierzu wird die Bewegungsdifferentialgleichung zunächst in den Frequenzbereich überführt. Ein übliches Verfahren hierzu ist die LAPLACE-Transformation $\mathcal{L} : \mathbf{F}(t) \rightarrow \mathbf{F}(s)$ mit $s \in \mathbb{C}$. Die LAPLACE-Transformation führt zu

$$[s^2 \mathbf{M} + s \mathbf{C} + \mathbf{K}] \mathbf{u}(s) = \mathbf{F}(s). \quad (3.17)$$

Durch Umstellen ergibt sich hieraus die Übertragungsfunktion als Quotient der LAPLACE-transformierten Ausgangsgröße $\mathbf{u}(s)$ und der LAPLACE-transformierten Eingangsgröße $\mathbf{F}(s)$ mit

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{u}(s)}{\mathbf{F}(s)} = [s^2 \mathbf{M} + s \mathbf{C} + \mathbf{K}]^{-1}. \quad (3.18)$$

Durch Anwendung der modalen Transformation (vgl. Abschnitt 3.1.2) lässt sich ein komplexes, gekoppeltes System in ein ungekoppeltes System mit einzelnen Freiheitsgraden umformen. Die Transformation erfolgt über:

$$\Phi^T \mathbf{H} \Phi = \Phi^T [s^2 \tilde{\mathbf{M}} + s \tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{K}}]^{-1} \Phi = \tilde{\mathbf{H}}. \quad (3.19)$$

Die modale Übertragungsfunktionsmatrix $\tilde{\mathbf{H}}$ ist eine Diagonalmatrix, bei der jeder Eintrag der Übertragungsfunktion eines Einmassenschwingers entspricht. Die Übertragungsfunktion eines Einmassenschwingers ist gegeben durch

$$\tilde{H}_{jj} = \frac{1}{s^2 \tilde{m}_j + s \tilde{c}_j + \tilde{k}_j} = \frac{1}{\tilde{m}_j} \frac{1}{(s - s_j)(s - s_j^*)} \quad (3.20)$$

wo m_j der modalen Masse, c_j der modalen Dämpfung und k_j der modalen Steifigkeit der Mode j entspricht. Die Polstellen s_j werden durch die Gleichung

$$s_j = -\xi_j \omega_j + i \omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2} \quad (3.21)$$

beschrieben, wobei ω_j und ξ_j die Eigenkreisfrequenz und der dimensionslose Dämpfungsfaktor für

die Mode j sind [85]. Die Eigenfrequenz und der dimensionslose Dämpfungsfaktor ergeben sich über:

$$\omega_j = \sqrt{\frac{\tilde{k}_j}{\tilde{m}_j}} \quad \text{und} \quad \xi_j = \frac{\tilde{c}_j}{2\sqrt{\tilde{m}_j \tilde{k}_j}}. \quad (3.22)$$

Zur Bestimmung der physikalischen Größe \mathbf{H} erfolgt eine Rücktransformation aus dem Modalraum über

$$\mathbf{H} = \Phi \tilde{\mathbf{H}} \Phi^T. \quad (3.23)$$

Die Übertragungsfunktionen H_{qp} für die physikalischen Koordinaten q und p lassen sich durch eine Überlagerung der mit den Eigenvektoren gewichteten, modalen Übertragungsfunktionen \tilde{H}_{jj} über den Zusammenhang

$$H_{qp}(s) = \sum_{j=1}^n \frac{\Phi_{qj} \Phi_{pj}}{\tilde{m}_j (s - s_j) (s - s_j^*)} \quad (3.24)$$

darstellen [77]. In Abbildung 3.2b ist beispielhaft eine Übertragungsfunktion für den Fünfmassenschwinger aus Abbildung 3.2a dargestellt. Die Übertragungsfunktion des gekoppelten Systems berechnet sich somit aus den Übertragungsfunktionen der modalen Einmassenschwinger.

Im letzten Schritt erfolgt die Transformation vom LAPLACE-Bereich in den Frequenzbereich. Durch Einsetzen von $s = i\omega$ in die Gleichung (3.17) ergibt sich

$$H_{qp}(i\omega) = \sum_{j=1}^n \frac{\Phi_{qj} \Phi_{pj}}{\tilde{m}_j (i\omega - s_j) (i\omega - s_j^*)}. \quad (3.25)$$

Die Gleichung (3.25) ist die Verbindung zwischen der Übertragungsfunktion, die experimentell gemessen werden kann, mit den modalen Parametern Eigenfrequenz, modale Dämpfung und Eigenformen. Dies bildet die Grundlage für den späteren Abgleich zwischen den numerisch und experimentell ermittelten, modalen Parametern in Abschnitt 3.5.

3.2. Grundlagen der Modellordnungsreduktion

Die Modellierung von komplexen Systemen mit der FEM führt bei einer feinen Diskretisierung zu einem Differentialgleichungssystem sehr hoher Ordnung, die eine effiziente Bestimmung des Systemverhaltens erschweren. Wie in Abbildung 2.1 gezeigt, ermöglicht der optionale Schritt der MOR

das Ausgangsmodell mit hoher Systemordnung n durch eine Approximation mit einer niedrigeren Ordnung $r \ll n$ zu ersetzen. In diesem Abschnitt werden die in dieser Arbeit verwendeten Methoden zur MOR vorgestellt.

3.2.1. Modales Abschneiden

In Abschnitt 3.1.2 wird gezeigt, dass durch die modale Transformation die komplexen, gekoppelten Differentialgleichungen entkoppelt werden. Da oft nur die Lösungen mit den niedrigsten Eigenfrequenzen von Interesse sind, um das Verhalten im gewünschten Frequenzbereich adäquat abzubilden, können die übrigen Zeilen und Spalten der modal transformierten Matrizen abgeschnitten werden. In der Praxis werden häufig Eigenwertlöser verwendet, die nur eine bestimmte Anzahl der niedrigsten Eigenwerte berechnen (z.B. LANCZOS-Verfahren). Die reduzierte, modale Basis besteht aus einem Teil der Modalmatrix $\Phi_r \in \mathbb{R}^{n \times r}$. Durch die Transformation der Systemmatrizen entsteht ein System von $\mathbb{R}^{r \times r}$ entkoppelten Differentialgleichungen

$$\tilde{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{q} = \tilde{\mathbf{f}} \quad (3.26)$$

mit

$$\mathbf{u} = \Phi_r \mathbf{q} + \epsilon \quad (3.27)$$

wo ϵ den Modellfehler beschreibt, der durch das Vernachlässigen der Moden entsteht. Die benötigte Modellgüte und der betrachtete Frequenzbereich bestimmen die Anzahl der zu berücksichtigenden Eigenvektoren beim modalen Abschneiden.

3.2.2. Craig-Bampton Methode

Das Reduktionsverfahren der CMS, die von CRAIG und BAMPION (CB-Methode) [11] entwickelt wurde, ist die derzeit weitest verbreitete Methode zur Modellordnungsreduktion (vgl. Abschnitt 2.1). Die CB-Methode kombiniert das Verfahren der statischen Kondensation nach GUYAN [3] mit dem in Abschnitt 3.2.1 beschriebenen modalen Abschneiden, um den Einfluss der Massenkräfte des dynamischen Systems zu berücksichtigen. Die Herleitung der CB-Methode basiert auf der Annahme eines ungedämpften Systems. Daher wird die Dämpfungsmatrix in Gleichung (3.1) bei der Herleitung

vernachlässigt.

Im ersten Schritt wird die globale Struktur in N^S Substrukturen unterteilt. Analog zur Reduktion nach GUYAN [3] erfolgt eine Unterteilung des Freiheitsgradvektors in Master- und innere Freiheitsgrade. Die nach Master- und inneren Freiheitsgraden umgeformte Massen- und Steifigkeitsmatrix für eine Substruktur S wird wie folgt beschrieben:

$$\mathbf{M}^S = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii} & \mathbf{M}_{im} \\ \mathbf{M}_{mi} & \mathbf{M}_{mm} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}^S = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{im} \\ \mathbf{K}_{mi} & \mathbf{K}_{mm} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

mit $\mathbf{M}^S \in \mathbb{R}^{n^S \times n^S}$ und $\mathbf{K}^S \in \mathbb{R}^{n^S \times n^S}$. Die inneren Freiheitsgrade, gekennzeichnet durch den Index i , werden nicht mit benachbarten Substrukturen geteilt. Im Gegensatz dazu sind Master-Freiheitsgrade, gekennzeichnet durch den Index m , gemeinsame Freiheitsgrade benachbarter Substrukturen oder werden für die Analyse und Systemerregung benötigt. Der Verschiebungsvektor der Substruktur S ist definiert als

$$\mathbf{u}^S = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i^S \\ \mathbf{u}_m^S \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

mit $n^S = n_i^S + n_m^S$. Die Berechnung der Transformationsmatrix der CB-Methode erfolgt in zwei Schritten. Im ersten Schritt wird der modale Anteil bestimmt. Hierzu wird das generalisierte Eigenwertproblem für jede Substruktur S über

$$\mathbf{K}_{ii}^S \Phi_{i,n^S}^S = \mathbf{M}_{ii}^S \Phi_{i,n^S}^S \Lambda_{i,n^S}^S \quad (3.30)$$

bestimmt. Hier entspricht Φ_{i,n^S}^S der Eigenvektormatrix und Λ_{i,n^S}^S einer Diagonalmatrix der Eigenwerte der Substruktur S . Analog zu Gleichung (3.27) erfolgt über Φ_{i,r^S}^S eine lineare Transformation in den modalen Raum. Die Transformation wird beschrieben über

$$\mathbf{u}_i^S \text{ dyn} = \Phi_{i,r^S}^S \tilde{\mathbf{u}}_i^S \quad (3.31)$$

mit $\Phi_{i,r^S}^S \in \mathbb{R}^{n^S \times r^S}$. Darüber hinaus gilt $r^S \ll n^S$.

Der statische Anteil der Transformationsmatrix für die Substruktur S wird bestimmt über

$$\Psi_{im}^S = -\mathbf{K}_{ii}^{S-1} \mathbf{K}_{im}^S. \quad (3.32)$$

Mit Ψ_{im}^S werden die inneren Freiheitsgrade in Abhängigkeit der Master-Freiheitsgrade über

$$\mathbf{u}_i^S = \Psi_{im}^S \mathbf{u}_m \quad (3.33)$$

beschrieben.

Die Gesamtverschiebung der inneren Freiheitsgrade ergibt sich aus der Superposition des statischen und dynamischen Anteils mit

$$\mathbf{u}_i^S = \mathbf{u}_i^S \text{ dyn} + \mathbf{u}_i^S \text{ stat} \quad (3.34)$$

Hieraus folgt die Transformationsmatrix für die CB-Methode \mathbf{T}_{CB}

$$\mathbf{T}_{CB} = \begin{bmatrix} \left[\Phi_{i,r^1}^1, \dots, \Phi_{i,r^{N^S}}^{N^S} \right] & \left[\Psi_{im}^1, \dots, \Psi_{im}^{N^S} \right] \tilde{\mathbf{T}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{mm} \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

wo $\tilde{\mathbf{T}}$ eine Transformationsmatrix ist, die die Kopplung zwischen den Master-Freiheitsgraden und den inneren Freiheitsgraden beschreibt. Die in Gleichung (3.35) verwendeten $[\cdot, \dots, \cdot]$ sind Blockdiagonalmatrizen. Die Transformationsvorschrift lautet:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_m \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{CB} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{u}_m \end{bmatrix} + \epsilon \quad (3.36)$$

wobei ϵ den Modellfehler beschreibt, der infolge der MOR entsteht.

Mit Hilfe der Transformationsmatrix \mathbf{T}_{CB} wird die umgeformte Grundgleichung (3.1) zu

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{M}}_{CB} &= \mathbf{T}_{CB}^T \mathbf{M}_{CB} \mathbf{T}_{CB} \\ \hat{\mathbf{K}}_{CB} &= \mathbf{T}_{CB}^T \mathbf{K}_{CB} \mathbf{T}_{CB} \end{aligned} \quad (3.37)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{CB} &= \begin{bmatrix} \left[\mathbf{M}_{ii}^1, \dots, \mathbf{M}_{ii}^{N^S} \right] & \left[\mathbf{M}_{im}^1, \dots, \mathbf{M}_{im}^{N^S} \right] \tilde{\mathbf{T}} \\ \tilde{\mathbf{T}}^T \left[\mathbf{M}_{im}^1, \dots, \mathbf{M}_{im}^{N^S} \right]^T & \tilde{\mathbf{T}}^T \left[\mathbf{M}_{mm}^1, \dots, \mathbf{M}_{mm}^{N^S} \right] \tilde{\mathbf{T}} \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_{CB} &= \begin{bmatrix} \left[\mathbf{K}_{ii}^1, \dots, \mathbf{K}_{ii}^{N^S} \right] & \left[\mathbf{K}_{im}^1, \dots, \mathbf{K}_{im}^{N^S} \right] \tilde{\mathbf{T}} \\ \tilde{\mathbf{T}}^T \left[\mathbf{K}_{im}^1, \dots, \mathbf{K}_{im}^{N^S} \right]^T & \tilde{\mathbf{T}}^T \left[\mathbf{K}_{mm}^1, \dots, \mathbf{K}_{mm}^{N^S} \right] \tilde{\mathbf{T}} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Die reduzierten Massen- und Steifigkeitsmatrizen werden dann beschrieben über

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{M}}_{\text{CB}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \\ \tilde{\mathbf{T}}^T \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{M}}_{im}^1 & \dots & \hat{\mathbf{M}}_{im}^{N^S} \end{bmatrix} & \tilde{\mathbf{T}} \\ \tilde{\mathbf{T}}^T \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{M}}_{mm}^1 & \dots & \hat{\mathbf{M}}_{mm}^{N^S} \end{bmatrix} & \tilde{\mathbf{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \hat{\mathbf{M}}_{im} \\ \hat{\mathbf{M}}_{im}^T & \hat{\mathbf{M}}_{mm} \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{K}}_{\text{CB}} &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\Lambda}_{i,r^1}^1 & \dots & \hat{\Lambda}_{i,r^{N^S}}^{N^S} \end{bmatrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{T}}^T \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{mm}^1 & \dots & \hat{\mathbf{K}}_{mm}^{N^S} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\Lambda}_{i,r^{\text{CB}}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{K}}_{mm} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.39)$$

mit

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{M}}_{im}^S &= \Phi_{i,r^S}^{S^T} \mathbf{M}_{ii}^S \Psi_{im}^S + \Phi_{i,r^S}^{S^T} \mathbf{M}_{im}^S, & \hat{\mathbf{K}}_{mm} &= \mathbf{K}_{mm}^S + \mathbf{K}_{im}^{S^T} \Phi_{i,r^S}^S \\ \hat{\mathbf{M}}_{mm}^S &= \mathbf{M}_{mm}^S + \left(\Psi_{im}^{S^T} \mathbf{M}_{ii}^S + \mathbf{M}_{im}^{S^T} \right) \Psi_{im}^S + \Psi_{im}^{S^T}\end{aligned}\quad (3.40)$$

Die CB-reduzierten Systemmatrizen haben die Dimension $n^{\text{CB}} \times n^{\text{CB}}$ mit $n^{\text{CB}} = n_m + \sum_{S=1}^{N^S} r^S$, wo r^S die Anzahl der Substrukturmoden und n_m die Anzahl der Master-Freiheitsgrade sind.

3.2.3. Enhanced Craig-Bampton Methode

KIM et al. [15] erweitern die CB-Methode um einen Residualanteil, der den Einfluss der vernachlässigten höheren Eigenwerte berücksichtigt. Die Methode wird „enhanced Craig Bampton“ (eCB) genannt.

Das Vorgehen ist analog zum CB-Verfahren aus Abschnitt 3.2.2. Der Unterschied liegt in der Berücksichtigung der Substrukturresidualmoden in Gleichung (3.30). Die Eigenvektormatrix der Substruktur S wird zu

$$\Phi_{i,r^S}^S = \left[\Phi_{i,r_d^S}^S, \Phi_{i,r_r^S}^S \right], \quad (3.41)$$

wo $\Phi_{i,r_d^S}^S$ die dominanten und $\Phi_{i,r_r^S}^S$ die residualen Eigenvektoren der Substruktur S beschreiben. Die Eigenwertmatrix wird analog zu

$$\Lambda_{i,r^S}^S = \begin{bmatrix} \Lambda_{i,r_d^S}^S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_{i,r_r^S}^S \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Die CB-Transformationsmatrix wird um den Residualteil erweitert

$$\mathbf{T}_{\text{CB}} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{i,r_d^1}^1 & \dots & \Phi_{i,r_d^{N^S}}^{N^S} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Phi_{i,r_r^1}^1 & \dots & \Phi_{i,r_r^{N^S}}^{N^S} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Psi_{im}^1 & \dots & \Psi_{im}^{N^S} \end{bmatrix} & \tilde{\mathbf{T}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{mm} & \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

Die Transformationsvorschrift für die Koordinaten lautet dann

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_m \end{bmatrix} = \mathbf{T}_0 \mathbf{u} + \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.44)$$

mit

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{i_d} \\ \mathbf{q}_{i_r} \\ \mathbf{u}_m \end{bmatrix}, \quad (3.45)$$

wo \mathbf{q}_{i_d} und \mathbf{q}_{i_r} die modalen Koordinaten der dominanten und residualen Eigenvektormatrizen Φ_{i,r_d}^S und Φ_{i,r_r}^S darstellen.

In der eCB-Methode [15] wird der statische Einfluss der Residualeigenvektoren auf die Transformationsmatrix \mathbf{T}_{CB} aus Gleichung (3.43) projiziert. Hierzu wird in [15] die sogenannte residuale Flexibilitätsmatrix \mathbf{F}_{ii}^{rs} (eng.: Residual Flexibility Matrix) eingeführt:

$$\mathbf{F}_{ii}^{rs} = \left[\mathbf{F}_{ii}^1, \dots, \mathbf{F}_{ii}^{N^S} \right] \quad (3.46)$$

mit

$$\mathbf{F}_{ii}^S = \mathbf{K}_{ii}^{S-1} - \Phi_{i,r_d}^S \Lambda_{i,r_d}^{S-1} \Phi_{i,r_d}^{S T}. \quad (3.47)$$

Über die Matrix \mathbf{F}_{ii}^{rs} lässt sich der Einfluss von Φ_{i,r_r}^S auf die inneren Freiheitsgrade bestimmen [86]. Die eCB-Transformationsmatrix wird beschrieben über

$$\mathbf{T}_{eCB} = \mathbf{T}_{CB} + \mathbf{T}_a \mathbf{R} \quad (3.48)$$

wo \mathbf{T}_a und \mathbf{R} in Gleichung (3.48) definiert sind als

$$\mathbf{T}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{F}_{ii}^{rs} \hat{\mathbf{M}}^* \tilde{\mathbf{T}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

und

$$\mathbf{R} = \hat{\mathbf{M}}_{CB}^{-1} \hat{\mathbf{K}}_{CB}. \quad (3.50)$$

Der verwendete Anteil der Massenmatrix $\hat{\mathbf{M}}^*$ wird beschrieben über

$$\hat{\mathbf{M}}^* = \left[\mathbf{M}_{im}^1 - \mathbf{M}_{ii}^1 \mathbf{K}_{ii}^{1T} \mathbf{K}_{im}^1, \dots, \mathbf{M}_{im}^{N_S} - \mathbf{M}_{ii}^{N_S} \mathbf{K}_{ii}^{N_S T} \mathbf{K}_{im}^{N_S} \right]. \quad (3.51)$$

Die Transformation der umgeformten Grundgleichung mit \mathbf{T}_{eCB} führt zu

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{M}}_{eCB} &= \mathbf{T}_{eCB}^T \mathbf{M}_{CB} \mathbf{T}_{eCB} = \hat{\mathbf{M}}_{CB} + \mathbf{R}^T \mathbf{T}_a^T \mathbf{M}_{CB} \mathbf{T}_{CB} + \mathbf{T}_{CB}^T \mathbf{M}_{CB} \mathbf{T}_a \mathbf{R} + \mathbf{R}^T \mathbf{T}_a^T \mathbf{M}_{CB} \mathbf{T}_a \mathbf{R} \\ \hat{\mathbf{K}}_{eCB} &= \mathbf{T}_{eCB}^T \mathbf{K}_{CB} \mathbf{T}_{eCB} = \hat{\mathbf{K}}_{CB} + \mathbf{R}^T \mathbf{T}_a^T \mathbf{K}_{CB} \mathbf{T}_{CB} + \mathbf{T}_{CB}^T \mathbf{K}_{CB} \mathbf{T}_a \mathbf{R} + \mathbf{R}^T \mathbf{T}_a^T \mathbf{K}_{CB} \mathbf{T}_a \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Die Dimension der eCB reduzierten Systemmatrizen ist analog zu CB reduzierten Systemmatrizen $n^{eCB} \times n^{eCB}$ mit $n^{eCB} = n_m + \sum_{S=1}^{N_S} r^S$, wo r^S die Anzahl der Substrukturmoden und n_m die Anzahl der Master-Freiheitsgrade sind.

3.2.4. Reduktion der Koppel-Freiheitsgrade

Für Systeme mit einer hohen Anzahl an Substrukturen oder einer feinen Diskretisierung an den Koppelstellen wird die Dimension der CB-reduzierten Systemmatrizen von der Anzahl der Master/Koppel-Freiheitsgrade n_m dominiert. Hierdurch können selbst die reduzierten Systemmatrizen zu groß für eine effiziente Berechnung der Systemeigenschaften sein [2]. CASTANIER et al. [16] präsentieren daher einen nachgelagerte Reduktion der Koppel-Freiheitsgrade. Die Transformationsvorschrift

$$\mathbf{u}_m = \mathbf{T}_{CC} \mathbf{w}_m + \epsilon \quad (3.53)$$

projiziert die physikalischen Koordinaten \mathbf{u}_m über die Transformationsmatrix \mathbf{T}_{CC} auf die ordnungsreduzierten Koordinaten \mathbf{w}_m . Zur Reduktion der Koppel-Freiheitsgrade eignet sich bspw. das modale Abschneiden aus Abschnitt 3.2.1. Die Transformationsmatrix ergibt sich durch Lösen des Eigenwertproblems

$$\hat{\mathbf{K}}_{mm} \Phi_m = \hat{\mathbf{M}}_{mm} \Phi_m \Lambda_m. \quad (3.54)$$

Die Eigenvektormatrix $\Phi_m \in \mathbb{R}^{n_m \times n_m}$ beschreibt die Zwangsbedingungen (engl.: Characteristic Constraint Modes (CCM)) an den Koppelstellen zwischen den CB-Substrukturen. Wie in Abschnitt 3.2.1 beschrieben, ist es in der Strukturodynamik oftmals ausreichend, eine geringe Anzahl $n_r \ll n_m$ an Eigenvektoren auszuwählen, um das Verhalten im gewünschten Frequenzbereich adäquat abzubilden.

Hieraus ergibt sich die Transformationsvorschrift für die Massenmatrix

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{M}}_{mm} &= \Phi_m^T \hat{\mathbf{M}}_{mm} \Phi_m^T \\
 \tilde{\mathbf{M}}_{im} &= \Phi_m^T \hat{\mathbf{M}}_{im} \\
 \tilde{\mathbf{M}}_{mi} &= \hat{\mathbf{M}}_{im} \Phi_m
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

und für die Steifigkeitsmatrix

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{K}}_{mm} &= \Phi_m^T \hat{\mathbf{K}}_{mm} \Phi_m^T \\
 \tilde{\mathbf{K}}_{im} &= \Phi_m^T \hat{\mathbf{K}}_{im} \\
 \tilde{\mathbf{K}}_{mi} &= \hat{\mathbf{K}}_{im} \Phi_m
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

Die resultierenden Systemmatrizen der Ordnung $n^{\text{CCM}} \times n^{\text{CCM}}$ mit $n^{\text{CCM}} = n_r + \sum_{S=1}^{N^S} r^S$ werden beschrieben über

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_{ii} & \tilde{\mathbf{M}}_{im} \\ \tilde{\mathbf{M}}_{mi} & \tilde{\mathbf{M}}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_i \\ \ddot{\mathbf{w}}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{ii} & \tilde{\mathbf{K}}_{im} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{mi} & \tilde{\mathbf{K}}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{w}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_m \end{bmatrix}. \tag{3.57}$$

3.3. Grundlagen der parametrische Modellordnungsreduktion

In der Auslegung, Optimierung oder Quantifizierung von Unsicherheit technischer Systeme ist ein wiederholtes Lösen der Modelle für verschiedene Parametersätze oder Systemkonfigurationen notwendig. Die wiederholte Reduktion der Systemmatrizen für bestimmte Parametersätze kann aufgrund des erheblichen Rechenaufwands zur Bestimmung der Transformationsmatrizen ineffizient werden. Wie in Abbildung 2.1 dargestellt, besteht jedoch die Möglichkeit einer parametrischen Modellordnungsreduktion. In diesem Abschnitt werden die Grundlagen der PMOR auf Basis der in Abschnitt 3.2 beschriebenen Methoden zur Modellordnungsreduktion vorgestellt.

Es wird angenommen, dass die Systemmatrizen in Gleichung (3.1) von Parametern $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{N^\theta}$ parametrisiert sind. Bei den Parametern $\boldsymbol{\theta}$ handelt es sich bspw. um Geometrie- oder Materialparameter. Die parametrische Bewegungsgleichung ist beschrieben über

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}) \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t). \tag{3.58}$$

Durch die in Abschnitt 3.2 vorgestellte Substrukturierung auf Basis der CB-Methode wird der

Parametervektor θ aufgeteilt und es gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{M}^S(\theta_M^S) &= \mathbf{M}^S \theta_M^S \\ \mathbf{K}^S(\theta_K^S) &= \mathbf{K}^S \theta_K^S.\end{aligned}\tag{3.59}$$

Für die in Abschnitt 3.2.2 vorgestellte CB-Methode lässt sich zeigen, dass sich die Unabhängigkeit von \mathbf{M}^S und \mathbf{K}^S von $\theta^S = [\theta_M^S, \theta_K^S]$ auf den reduzierten Unterraum erweitern lässt. Die in Gleichung (3.30) bestimmten Eigenwerte Λ_{i,r^S}^S und Eigenvektoren Φ_{i,r^S}^S der Substruktur S können dann dargestellt werden über [22, 54, 53]:

$$\Lambda_{i,r^S}^S(\theta^S) = \Lambda_{i,r^S}^S \frac{\theta_K^S}{\theta_M^S}, \quad \Phi_{i,r^S}^S(\theta^S) = \Phi_{i,r^S}^S \frac{1}{\sqrt{\theta_M^S}}.\tag{3.60}$$

Darüber hinaus lässt sich zeigen, dass Gleichung (3.32) ebenfalls unabhängig vom Parametervektor θ^S ist

$$\Psi_{im}^S = -\mathbf{K}_{ii}^{S-1} \mathbf{K}_{im}^S = -\mathbf{K}_{ii}^{S-1} \theta_K^{S-1} \mathbf{K}_{im}^S \theta_K^S = -\mathbf{K}_{ii}^{S-1} \mathbf{K}_{im}^S = \Psi_{im}^S.\tag{3.61}$$

Hieraus ergibt sich, dass für CB-reduzierte Systeme Modellparameter der definierten Substrukturen unabhängig voneinander verändert werden können.

Für die Erweiterungen der CB-Methode, beschrieben in Abschnitt 3.2.3, ist diese Annahme nur noch eingeschränkt möglich. Die Transformationsmatrix in Gleichung (3.49) ist abhängig von der Parametrierung der CB-reduzierten Systemmatrizen in Gleichung (3.50). Die Verwendung der Residualmoden der Substrukturen in der eCB-Methode hat jedoch nur einen geringen Einfluss auf die Genauigkeit des ordnungsreduzierten Systems. In [54] wird daher vorgeschlagen, die Transformationsmatrix in Gleichung (3.49) als invariant zu betrachten. Hierdurch kommt es zu einem Approximierungsfehler, der abhängig vom betrachteten Modell und der Sensitivität des Modells auf einen Modellparameter ist. Das Gleiche gilt für die Reduktion der Koppel-Freiheitsgrade in Abschnitt 3.2.4. Die Bestimmung der Zwangsbedingungen in Gleichung (3.54) ist abhängig von der Parametrierung der Substruktur-Systemmatrizen. Für die Reduktion der Koppel-Freiheitsgrade werden unterschiedliche Ansätze in der Literatur beschrieben. Für kleine Parameteränderungen kann der Einfluss der Parameteränderung auf die Zwangsbedingungen vernachlässigt werden. Weitere Ansätze sind die Bestimmung der Transformationsmatrix für jeden Parametersatz [53] oder die Interpolation des Einflusses auf Basis von Parametersätzen im Parameterraum [54].

Interpolation lokaler ordnungsreduzierter Modelle

In [2] wird ein Interpolationsansatz beschrieben, der neben der Erweiterung des Parameterraums auch eine Integration von Systemparametern ermöglicht, die keinen linearen Einfluss auf die Massen- und Steifigkeitsmatrix haben. Das Ausgangsmodell wird hierfür unabhängig an einigen Stützpunkten bzw. Betriebspunkten des Parameterraums reduziert. Für die Reduktion eignen sich alle in Abschnitt 3.2 vorgestellten Methoden. Durch eine gewichtete Interpolation zwischen den unabhängig voneinander reduzierten Modellen, lässt sich anschließend ein beliebiges ROM im Parameterraum darstellen. Die Anzahl der notwendigen, lokalen ROM hängt von der Größe des gewählten Parameterraums und der benötigten Approximierungsgüte ab. [2]

Für die Interpolation eignet sich in erster Näherung eine lineare Approximation zwischen zwei Punkten. Für das in Abschnitt 3.2.2 vorgestellte CB-Verfahren ergibt sich für $k = 1, \dots, n_l$ Stützstellen die Berechnungsvorschrift

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{M}}_{\text{CB}}^k &= \mathbf{T}_{\text{CB}}(\boldsymbol{\theta}_k)^T \mathbf{M}_{\text{CB}}(\boldsymbol{\theta}_k) \mathbf{T}_{\text{CB}}(\boldsymbol{\theta}_k) \\ \hat{\mathbf{K}}_{\text{CB}}^k &= \mathbf{T}_{\text{CB}}(\boldsymbol{\theta}_k)^T \mathbf{K}_{\text{CB}}(\boldsymbol{\theta}_k) \mathbf{T}_{\text{CB}}(\boldsymbol{\theta}_k)\end{aligned}\tag{3.62}$$

mit

$$\boldsymbol{\theta}_k = [\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_{n_l}],\tag{3.63}$$

wobei $\boldsymbol{\theta}_k = [\boldsymbol{\theta}_k^1, \dots, \boldsymbol{\theta}_k^{N_s}]$ gilt. Die reduzierten, lokalen Systemmatrizen lassen sich anschließend über eine gewichtete Interpolationsfunktion

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{M}}_{\text{CB}} &= \sum_{k=1}^{n_l} \rho_k(\boldsymbol{\theta}) \hat{\mathbf{M}}_{\text{CB}}^k \\ \hat{\mathbf{K}}_{\text{CB}} &= \sum_{k=1}^{n_l} \rho_k(\boldsymbol{\theta}) \hat{\mathbf{K}}_{\text{CB}}^k\end{aligned}\tag{3.64}$$

erzeugen. Für die Gewichtungsfaktoren ρ_k gilt

$$\sum_{k=1}^{n_l} \rho_k(\boldsymbol{\theta}) = 1.\tag{3.65}$$

Der Interpolationsansatz mit lokalen ROMs lässt sich weiterhin für eine Spline- oder Polynom-Interpolation höherer Ordnung für die Betrachtung komplexer Parametereinflüsse erweitern. [2]

3.4. Experimentelle Untersuchung dynamischer Systeme

Neben der Simulation (theoretische Modellbildung und numerische Analysen) ist die Identifikation (theoretische Modellbildung und experimentelle Analyse) der zweite Schritt zur validierten, strukturdynamischen Beschreibung eines Systems (vgl. Abbildung 3.1). Sowohl die Simulation, als auch die Identifikation basieren auf der theoretischen Modellbildung. Wie in Abschnitt 3.1.3 gezeigt, lässt sich das Übertragungsverhalten mechanischer Systeme auf Grundlage der modalen Parameter (Eigenfrequenz, Eigenmoden und modaler Dämpfung) darstellen. Die experimentelle Identifikation der modalen Parameter erfolgt über die experimentelle Modalanalyse (EMA).

Bei der EMA werden die Übertragungsfunktion H_{qp} experimentell bestimmt. Wie in Abschnitt 3.1.3 theoretisch erläutert, ist H_{qp} das Übertragungsverhalten von Punkt p auf der Struktur zum Punkt q . Somit kann bei der experimentellen Modalanalyse eine Übertragungsfunktion durch eine Anregung am Punkt p und das Messen der Schwingungsantwort am Punkt q ermittelt werden. Bei der experimentellen Modalanalyse erfolgt die Anregung der Systeme in der Regel über einen Modalhammer oder einen Shaker. Sowohl der Modalhammer, als auch der Shaker haben in ihrer Spitze einen Kraftsensor, der das Anregungssignal aufnimmt [87]. Die Schwingungsantwort wird bspw. mit einem Beschleunigungssensor oder einem Laservibrometer erfasst [88]. Die gemessenen Zeitsignale der Anregung und der Schwingungsantwort werden mit Hilfe der Fast-Fourier-Transformation (FFT) in den Frequenzbereich überführt [89]. Aus dem Verhältnis der in den Frequenzbereich überführten Eingangs- und Ausgangssignal, lässt sich die Übertragungsfunktion zwischen dem Punkt der Anregung p und dem Punkt der Antwort q ermitteln. Eine schematische Darstellung einer experimentellen Modalanalyse ist in Abbildung 3.3 dargestellt.

Im Gegensatz hierzu ist bei der operationalen Modalanalyse (OMA) die Anregung unbekannt. Aus diesem Grund erfolgt die Messung der Schwingungsantwort an mehreren Punkten q gleichzeitig. Aus den Schwingungsantworten lassen sich die relativen Beschleunigungsübertragungsfunktionen bestimmen. Anwendung findet die OMA in der Regel in Bereichen, in denen eine Anregung der Struktur nicht möglich ist, wie z.B. bei Gebäuden [91, 92] oder Brücken [93].

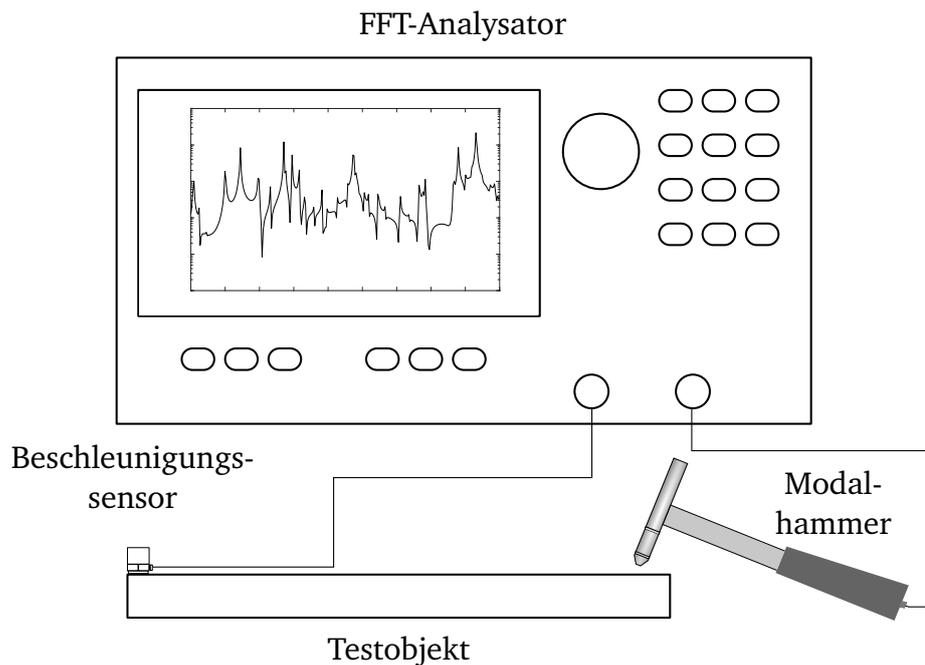


Abbildung 3.3.: Typischer Aufbau für die Messung des Frequenzgangs mit Kraftanregung. Mit dem Modalhammer wird das Testobjekt angeregt. Die Antwort wird von einem Beschleunigungssensor gemessen. Der FFT-Analysator misst die Signale und berechnet den Frequenzgang zwischen Kraft und Reaktion. [90]

Aus den gemessenen Übertragungsfunktionen können die modalen Parameter bestimmt werden. Hierzu stehen mehrere Verfahren zur Verfügung, u.a.:

- Eigensystem Realization Algorithm [94]
- Stochastic Subspace Identification Method [95]
- Polyreference Least-Squares Complex Frequency Domain Method (PolyMAX) [96] etc.

Aufgrund seiner Stabilität und Genauigkeit stellt das PolyMAX-Verfahren den Standard in der Forschung und der Industrie dar. Das Ergebnis der EMA bzw. OMA sind experimentell ermittelte, modale Parameter, die die Grundlage für die Validierung des numerischen Modells bilden.

3.5. Abgleich numerischer Modelle mit modalen Parametern

Der dritte und letzte Schritt zur Entwicklung eines validierten strukturdynamischen Modells ist die Validierung des numerischen Modells durch einen Abgleich mit den Ergebnissen der experimentellen Analyse (vgl. Abbildung 3.1).

3.5.1. Grundlagen des automatisierten Modellabgleichs

In der Praxis kommt es in der Regel zu Abweichungen zwischen den Ergebnissen der Simulation und der Messung

$$y = q(\boldsymbol{\theta}) + \epsilon \quad (3.66)$$

wobei y die experimentell gemessene Systemantwort, wie z.B. Eigenfrequenzen, Eigenmoden oder Übertragungsfunktionen, $q(\boldsymbol{\theta})$ die numerische ermittelte Systemantwort in Abhängigkeit des Parametervektors $\boldsymbol{\theta}$ und ϵ den Modellfehler darstellen.

Die Abweichungen zwischen y und $q(\boldsymbol{\theta})$ lassen sich in drei Kategorien einteilen [59]:

1. Idealisierungsfehler

- Vereinfachung der Struktur, wie z.B. eine Platte, die als Balken modelliert wird
- Fehlerhafte Modellierung von Randbedingungen
- Fehlerhafte Annahme von externen Lasten
- Fehlerhafte Annahmen zur geometrischen Form

2. Diskretisierungsfehler

- Zu grobe Vernetzung der Bauteile
- Fehler durch Reduktionsmethoden

3. Fehlerhafte Annahmen von Modellparametern, bezüglich

- Materialparameter, wie Dichte oder Elastizitätsmodul
- Schalen-/Plattendicke
- Federsteifigkeiten
- Querschnitteigenschaften, wie z. B. das Flächenträgheitsmoment

Falls das Modell Idealisierungs- oder Diskretisierungsfehler aufweist, kann durch einen Abgleich nur die Differenz zwischen der Messung und der Simulation minimiert werden. Das selbe Problem entsteht, wenn die ausgewählten Modellparameter nicht mit den tatsächlichen Quellen und dem Ort des Fehlers übereinstimmen. In beiden Fällen ist die Folge, dass das Modell zwar häufig in der Lage ist, die Messungen richtig nachzubilden die Simulationsergebnisse jedoch nur im gewählten

Frequenzbereich Gültigkeit besitzen. Darüber hinaus können die Simulationen nicht zur Vorhersage von strukturellen Änderungen oder als Substruktur in einer größeren Struktur verwendet werden [59]. Das Ziel sollte daher sein, dass alle drei möglichen Fehlerquellen minimiert werden.

Unter der Annahme, dass das Modell in der Lage ist, das physikalische Verhalten nachzubilden, also Idealisierungs- und Diskretisierungsfehler bereits minimiert sind, kann eine Parameterkalibrierung erfolgen. Wie in Abschnitt 2.3 beschrieben, kann zwischen deterministischen, sensitivitätsbasierten [63] und stochastischen [60, 61] Methoden zur Parameterkalibrierung unterschieden werden. Die deterministischen Methoden eignen sich jedoch nur eingeschränkt für die Vorhersage des Systemverhaltens aufgrund von Parameterunsicherheit. Es ist jedoch auch wichtig, diese Unsicherheit in die Vorhersage des mechanischen Verhaltens einfließen zu lassen, um ein vollständiges Verständnis des Verhaltens einer Struktur zu erhalten. Die beschriebene Problemstellung wird in Abbildung 3.4 schematisch dargestellt: In der Realität gibt es häufig eine große Anzahl an nominell gleichen Systemen, deren Verhalten sich durch Fertigungstoleranzen und Schwankungen im Materialverhalten leicht unterscheidet. Hierdurch unterliegt das Verhalten einer Streuung, die hier durch eine Normalverteilung dargestellt wird. Im deterministischen Fall wird ein Simulationsmodell zur Abbildung der Gesamtheit der Systeme verwendet. Durch einen Modellabgleich kann wahrscheinlich die anfängliche Differenz zwischen dem numerischen Modell und dem experimentell ermittelten Verhalten reduziert werden, allerdings werden die Schwankungen im Verhalten der Systeme nicht mit abgebildet. Das Ziel der stochastischen Beschreibung ist es, die Schwankungen im Verhalten über eine Verteilung von Modellparametern abzubilden. Die Verteilung der Modellparameter kann über einen stochastischen Modellabgleich identifiziert werden. Hierdurch kann das Vertrauen in die Aussage der Simulation erhöht werden, da idealerweise die Gesamtheit der betrachteten Systeme abgebildet werden kann.

Im Folgenden werden die in dieser Arbeit verwendeten, stochastischen Abgleichmethoden und ihre Eigenschaften an einem einfachen, generischen Beispiel vorgestellt.

3.5.2. Bayes'scher Modellabgleich

Der stochastische Modellabgleich beruht auf dem Satz von Bayes für bedingte Wahrscheinlichkeiten

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{D}) = \frac{p(\mathbf{D}|\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{D})}. \quad (3.67)$$

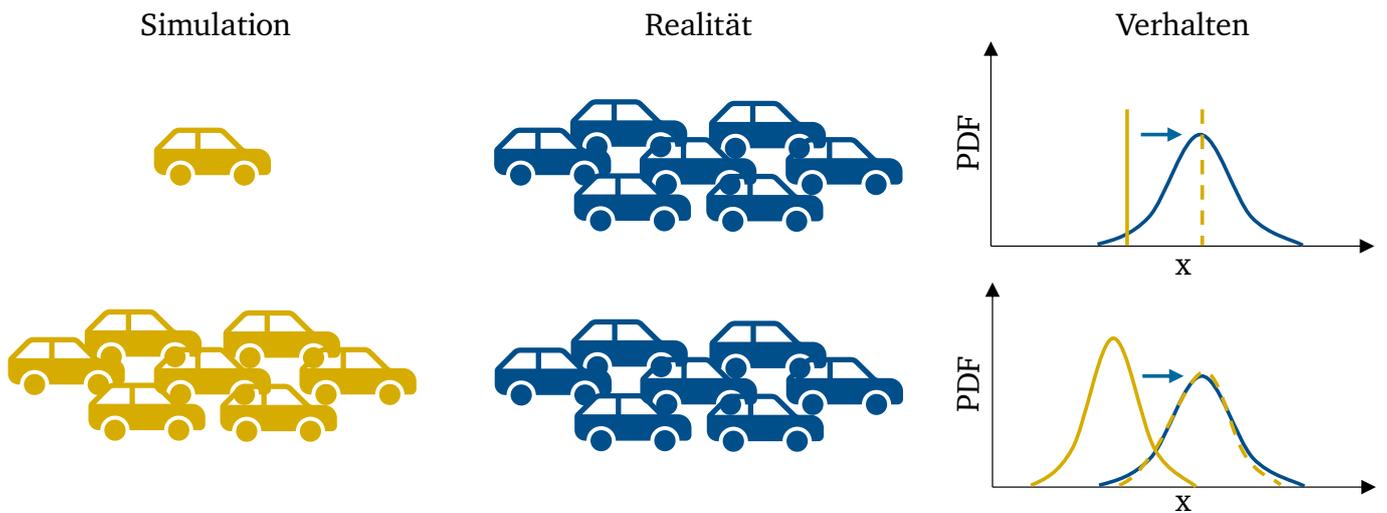


Abbildung 3.4.: Schematische Darstellung einer deterministischen Simulation (oben) und einer stochastischen Simulation (unten). Die deterministische Simulation ist nach einer Parameterkalibrierung nur in der Lage den Mittelwert abzubilden. Die stochastische Simulation ermöglicht hingegen die Vorhersage des „wahren“ Verhaltens [97].

Die aktualisierte (posterior) Verteilung $p(\theta|\mathbf{D})$ wird über die Likelihood-Funktion $p(\mathbf{D}|\theta)$, die Anfangswahrscheinlichkeit $p(\theta)$ der Parameter θ und den Normalisierungsfaktor $p(\mathbf{D})$ bestimmt [98]. Die Anfangswahrscheinlichkeit $p(\theta)$ basiert in der Regel auf Expertenwissen oder praktischer Erfahrung. Als Daten \mathbf{D} werden für den Fall eines Modellabgleichs üblicherweise ein Residuum aus Eigenfrequenz und Eigenformen angenommen [99, 100]. Es ist jedoch auch möglich, Übertragungsfunktionen zu verwenden [69]. Da bei der Anwendung des Bayes'schen Modellabgleichs nur ein Messdatensatz \mathbf{D} zur Ermittlung der wahrscheinlichsten Werte der Modellparameter verwendet wird, ist die Evidenz $p(\mathbf{D})$ in Gleichung (3.67) nur ein konstanter Faktor, der keinen Einfluss auf das Verhältnis von Posterior- zu Prior-Wahrscheinlichkeit hat. Daher wird der Satz von Bayes oft auf

$$p(\theta|\mathbf{D}) \propto p(\mathbf{D}|\theta) p(\theta) \quad (3.68)$$

reduziert [101].

Das Ziel des Bayes'schen Modellabgleichs ist die Ermittlung der Posterior-Verteilung, was auch als Bayes'sche Inferenz bezeichnet wird. Im Gegensatz zur Inferenz mit Methoden der klassischen Statistik, die nur die am besten zu den Messdaten passenden Parameterwerte ermittelt, wird bei der Bayes'schen Inferenz auch das Vorwissen über die Parameterverteilung miteinbezogen [102]. In Abbildung 3.5 ist die Funktionsweise der Bayes'schen Inferenz graphisch dargestellt. Die Posterior-

Verteilung ergibt sich als Produkt aus der Prior-Verteilung und der Likelihood-Funktion (vgl. Gleichung (3.68)). Die Posterior-Verteilung der Parameter ergibt sich somit als Mischung aus bekanntem Wissen zu den Modellparametern und den durch Messungen hinzugewonnenen Informationen.

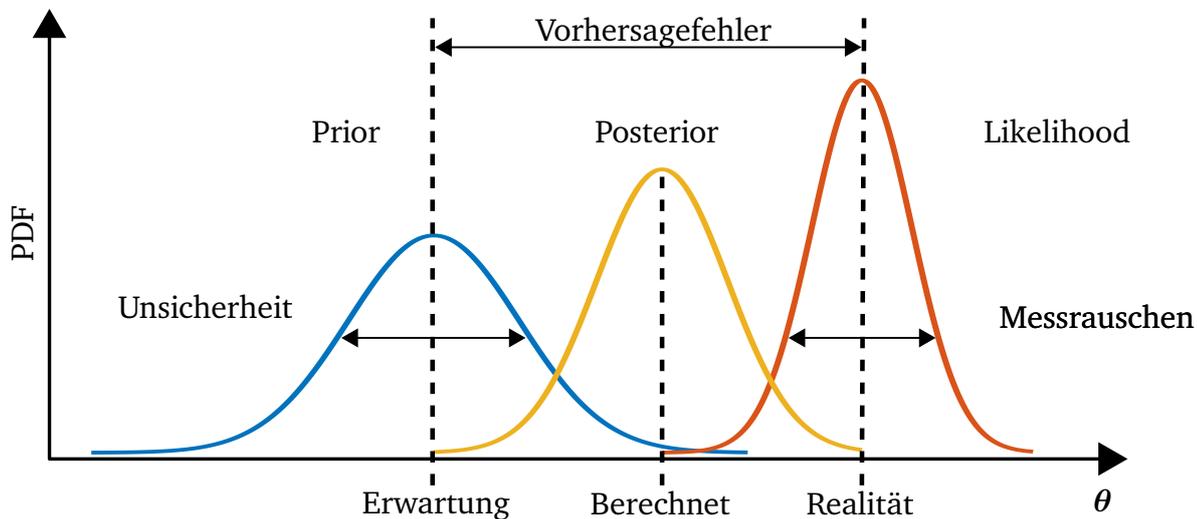


Abbildung 3.5.: Beispiel für die Bayes'sche Inferenz mit einer Prior-Verteilung, einer Posterior-Verteilung und einer Likelihood-Funktion. Der Vorhersagefehler ist die Differenz zwischen der Prior-Erwartung und der Spitze der Likelihood-Funktion (d. h. der Realität). Die Unsicherheit ist die Varianz der Prior-Verteilung. Das Messrauschen ist die Varianz der Likelihood-Funktion. [103]

Aufgrund der hohen Anzahl an Freiheitsgraden in strukturdynamischen Problemen und der sich daraus ergebenden, hohen Dimensionalität des Lösungsraumes, ist ein genaues Lösen meist nicht möglich, weshalb auf Sampling-Methoden zurückgegriffen werden muss. Hier haben sich Varianten der MCMC durchgesetzt. Mithilfe einer Abwandlung des METROPOLIS-HASTINGS (MH) Algorithmus [104, 71], können auch hochdimensionale Probleme gelöst werden. Der von CHING et al. entwickelte Algorithmus wird Transitional Markov-Chain Monte Carlo (TMCMC) genannt. Im Gegensatz zum klassischen MH-Ansatz [104] im MCMC-Verfahren werden beim TMCMC-Algorithmus die Samples nicht direkt aus der Posterior-Verteilung gezogen. Stattdessen werden zunächst Samples aus einer Folge an Zwischenverteilungen

$$f_j(\boldsymbol{\theta}) \propto p^{\kappa}(\mathbf{D}|\boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta}) \quad (3.69)$$

mit

$$j = 0, \dots, m \quad \text{und} \quad 0 = \kappa_0 < \kappa_1 < \dots < 1 \quad (3.70)$$

gezogen [72]. Mit jeder Iteration j steigt der Einfluss der Likelihood-Funktion und nähert sich somit

der Posterior-Verteilung an. Die Unterschiede zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zwischenverteilungen sind gering, wodurch nur vergleichsweise wenige Systemauswertungen benötigt werden, um die Posterior-Verteilung zu bestimmen.

3.5.3. Hierarchischer Bayes'scher Modellabgleich

Das Ziel des im vorherigen Abschnitt vorgestellten Bayes'schen Modellabgleich ist es, die wahrscheinlichsten Werte für die Parameter θ zu bestimmen. Mit einer steigenden Anzahl an Messdaten \mathbf{D} kann die Unsicherheit in der Parameterschätzung immer weiter reduziert werden. In der Realität sind jedoch auch die zu schätzenden Parameter oft mit einer Unsicherheit verbunden. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn Messungen an mehreren, nominell gleichen Strukturen vorgenommen werden, die sich jedoch durch Fertigungstoleranzen oder Schwankungen in den Materialparametern voneinander unterscheiden. Da bei Anwendung des einfachen Bayes'schen Modellabgleichs nicht die gesamte Parameterverteilung, sondern nur der Mittelwert geschätzt wird, kann diese Varianz in der Parameterverteilung nicht abgebildet werden. Um auch die inhärente Parameterunsicherheit mitzuschätzen, ist die Anwendung eines hierarchischen Ansatzes für den Bayes'schen Modellabgleich nötig [73].

Beim hierarchischen Bayes'schen Modellabgleich wird davon ausgegangen, dass die Modellparameter θ einer statistischen Verteilung folgen, bspw. einer Normalverteilung

$$\theta \sim \mathcal{N}(\mu_\theta, \Sigma_\theta) \quad (3.71)$$

mit dem Vektor der Parametermittelwerte μ_θ und der Kovarianzmatrix Σ_θ . Die Posteriori-Verteilung kann dann für den Fall, dass N^M Messdatensätze zu N^T nominell gleichen Teilen ermittelt wurden, mit

$$p(\mu_\theta, \Sigma_\theta, \theta | \mathbf{D}) \propto \prod_{t=1}^{N^T} p(\mathbf{D}_t | \theta_t) p(\theta_t | \mu_\theta, \Sigma_\theta) p(\mu_\theta, \Sigma_\theta) \quad (3.72)$$

berechnet werden [73]. \mathbf{D} bezeichnet dabei die Gesamtheit der vorliegenden Messdaten und \mathbf{D}_t den zum Teil t gehörenden Teil der Messdaten. Bei den Modellparametern werden die Bezeichnungen θ und θ_t analog verwendet. Im Vergleich zu Gleichung (3.68) ist durch den hierarchischen Ansatz eine dritte Wahrscheinlichkeitsverteilung, die sogenannte Hyper-Prior-Verteilung $p(\mu_\theta, \Sigma_\theta)$, hinzugekommen. Die Prior-Verteilung $p(\mu_\theta, \Sigma_\theta)$ ist in dem Fall nicht mehr durch Vorwissen zu den Parametern

bestimmt, sondern von der Hyper-Prior-Verteilung abhängig. Das vor den Messungen vorhandene Wissen über die Parameterverteilungen wird als Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Mittelwerte und Standardabweichungen der Parameter in der Hyper-Prior-Verteilung berücksichtigt.

In Abbildung 3.6 werden beide Ansätze einander gegenübergestellt. Die Annahme beim Bayes-Ansatz ist, dass die Gesamtheit der Messdaten \mathbf{D} zum Abgleich eines Modells M mit einem Parametersatz θ verwendet wird. Im Fall des hierarchischen Bayes-Ansatzes wird jedem Datensatz \mathbf{D}_t mit $t = 1, \dots, N^T$ ein Modell mit einem eigenen Parametersatz θ_t zugeordnet. Auf dieser Basis wird in der nächsten Hierarchieebene die Gesamtverteilung der Parameter mit μ_0 und Σ_0 bestimmt.

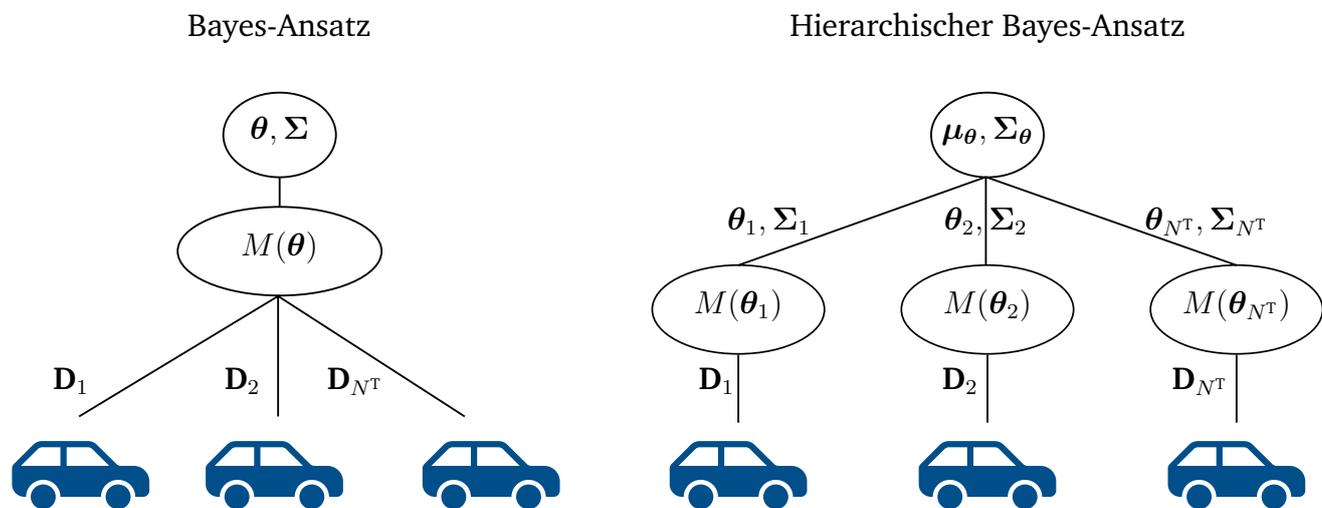


Abbildung 3.6.: Schematischer Vergleich zwischen dem klassischen Bayes Ansatz (links) und dem hierarchischen Bayes-Ansatz (rechts). Beim Bayes-Ansatz wird davon ausgegangen, dass das Verhalten der Struktur mit einem Parametersatz beschrieben werden kann. Der hierarchische Bayes-Ansatz weist jeder Struktur einen Parametersatz zu und bestimmt weiterhin die globale Verteilung der Parametersätze.

3.5.4. Anwendungsbeispiel

An einem einfachen, generischen Beispiel werden die beiden Abgleichmethoden miteinander verglichen und ihre Unterschiede hervorgehoben. Als System dient ein in der Literatur häufig verwendeter Dreimassenschwinger [64, 68, 67]. In Abbildung 3.7 ist der Dreimassenschwinger dargestellt. Die Parameter des „realen“ Systems sind $m_j = 1,0 \text{ kg} (j=1,2,3)$, $k_j = 1,0 \text{ N m}^{-1} (j=1,2,\dots,5)$ und $k_6 = 3,0 \text{ N m}^{-1}$. Die fehlerhaften Systemparameter werden als gaußverteilt mit dem Mittelwert

$\mu_{k_1} = \mu_{k_2} = \mu_{k_5} = 2,0 \text{ N m}^{-1}$ und Standardabweichung $\sigma_{k_1} = \sigma_{k_2} = \sigma_{k_5} = 0,3 \text{ N m}^{-1}$ angenommen. Die „echten“ Standardabweichungen lauten $\sigma_{k_1} = \sigma_{k_2} = \sigma_{k_5} = 0,2 \text{ N m}^{-1}$. Die Parameter k_1 , k_2 und k_5 werden als unabhängig angenommen.

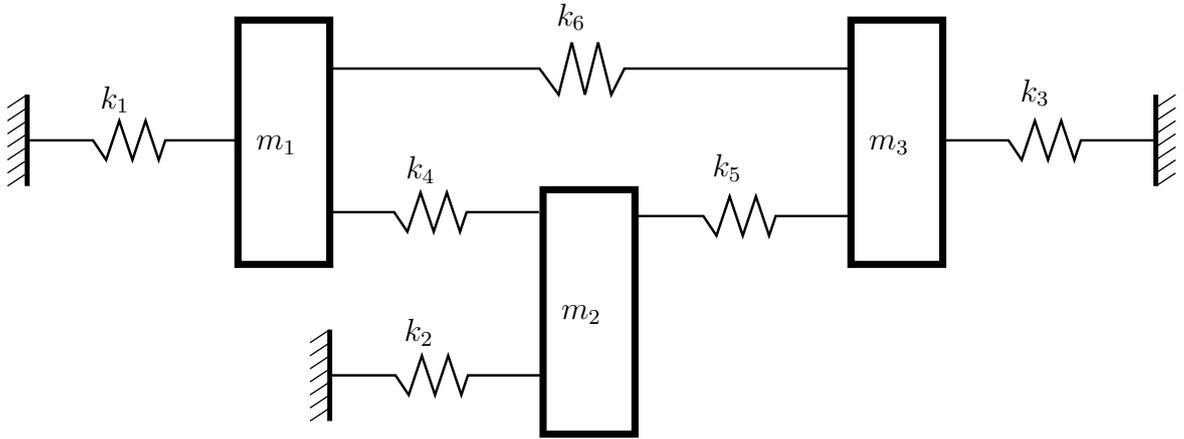


Abbildung 3.7.: Dreimassenschwinger mit drei unbekanntem Steifigkeiten [64, 68, 67]

Für den Abgleich werden insgesamt 30 Systeme untersucht und jeweils eine Messung durchgeführt. Insgesamt sind somit 30 Messdatensätze \mathbf{D} mit jeweils drei Eigenfrequenzen und Eigenmoden für den Abgleich vorhanden.

Für den Abgleich wird die von VANIK et al. [62] entwickelte Likelihood-Funktion verwendet, die eine Verbindung zwischen der Modellantwort $q(\boldsymbol{\theta})$ in Abhängigkeit des Parametervektors $\boldsymbol{\theta}$ mit der Systemantwort y für modale Parameter ermöglicht (vgl. Gleichung (3.66)). Das Wahrscheinlichkeitsmodell für den Modellfehler ϵ basiert auf dem Prinzip der maximalen Entropie [31], die eine mehrdimensionale Gauß'sche Verteilung mit Mittelwert Null und der Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$ ergibt. Die Likelihood-Funktion für den Vergleich von modalen Parametern lässt sich beschreiben über

$$p(\mathbf{D}|\boldsymbol{\theta}) = \prod_{t=1}^{N^T} \prod_{j=1}^{N^M} p(\hat{\omega}_{t,j}^2|\boldsymbol{\theta}) p(\hat{\phi}_{t,j}|\boldsymbol{\theta}) \quad (3.73)$$

wo $p(\hat{\omega}_{t,j}^2|\boldsymbol{\theta})$ der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (PDF, engl. probability density function) der quadrierten Eigenfrequenzen, $p(\hat{\phi}_{t,j}|\boldsymbol{\theta})$ der PDF der Eigenmoden und $j = 1, \dots, N^M$ und $t = 1, \dots, N^T$ die j -te Mode aus dem t -ten Datensatz entspricht.

Für die Beschreibung der Likelihood-Funktion der Eigenmoden wird Gleichung (3.66) umgeschrieben zu

$$\hat{\phi}_{t,j} = a_j \phi_j(\boldsymbol{\theta}) + \epsilon_{\phi_j}, \quad (3.74)$$

wo a_j ein Skalierungsfaktor zum Anpassen der Eigenvektoren ist. Die Likelihood-Funktion für die Eigenmoden wird dann beschrieben über

$$p(\hat{\phi}_{t,j}|\boldsymbol{\theta}) = c_1 \exp\left(\frac{1}{2\delta_j^2} \left[1 - \frac{|\phi_j^T \phi_{t,j}|^2}{(\phi_j^T \phi_j)^2}\right]\right), \quad (3.75)$$

wo δ_j^2 der Varianz des Fehlers der j -ten Eigenmode und c_1 einer Normalisierungskonstante entspricht.

Gleichung (3.66) wird ebenfalls für die Beschreibung des Fehlers der Eigenkreisfrequenz umgeformt zu

$$\hat{\omega}_{t,j}^2 = \omega_j^2(\boldsymbol{\theta}) + \epsilon_{\omega_j^2}. \quad (3.76)$$

Die Likelihood-Funktion für die Eigenkreisfrequenzen ergibt sich zu

$$p(\hat{\omega}_{t,j}^2|\boldsymbol{\theta}) = c_2 \exp\left(-\frac{1}{2} \left[\frac{1 - \hat{\omega}_{t,j}^2/\omega_j^2}{\epsilon_j}\right]^2\right), \quad (3.77)$$

wo ϵ_j^2 der Varianz des Fehlers der j -ten Eigenkreisfrequenz entspricht.

Für den hierarchischen Bayes'schen Modellabgleich wird der Parametervektor $\boldsymbol{\theta}$ aufgeteilt, sodass jeder Prüfling von einem separaten Parametervektor $\boldsymbol{\theta}_t$ abhängt. Die Messdaten \mathbf{D} werden ebenfalls nach den Prüflingen aufgeteilt \mathbf{D}_t . Die Hyper-Prior-Verteilung $p(\boldsymbol{\mu}_\theta, \boldsymbol{\Sigma}_\theta)$ wird als normalverteilt angenommen.

Die Bestimmung der Posterior-Verteilung $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{D})$ für den nicht-hierarchischen Modellabgleich und $p(\boldsymbol{\mu}_\theta, \boldsymbol{\Sigma}_\theta, \boldsymbol{\theta}|\mathbf{D})$ für den hierarchischen Modellabgleich erfolgt über den TMCMC-Algorithmus. In jeder Iteration des TMCMC-Algorithmus werden $n_s = 3.000$ Sample gezogen. Der verwendete Algorithmus ist in der PyMC3-Toolbox implementiert [105].

In Abbildung 3.8 werden die geschätzten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für den Bayes'schen Modellabgleich und den hierarchischen Modellabgleich mit der gemessenen Parameterverteilung verglichen. Beide Methoden sind in der Lage, den Mittelwert der Parameter genau vorherzusagen. Im Fall des Bayes'schen Modellabgleichs wird die „wahre“ Varianz der Parameter jedoch unterschätzt.

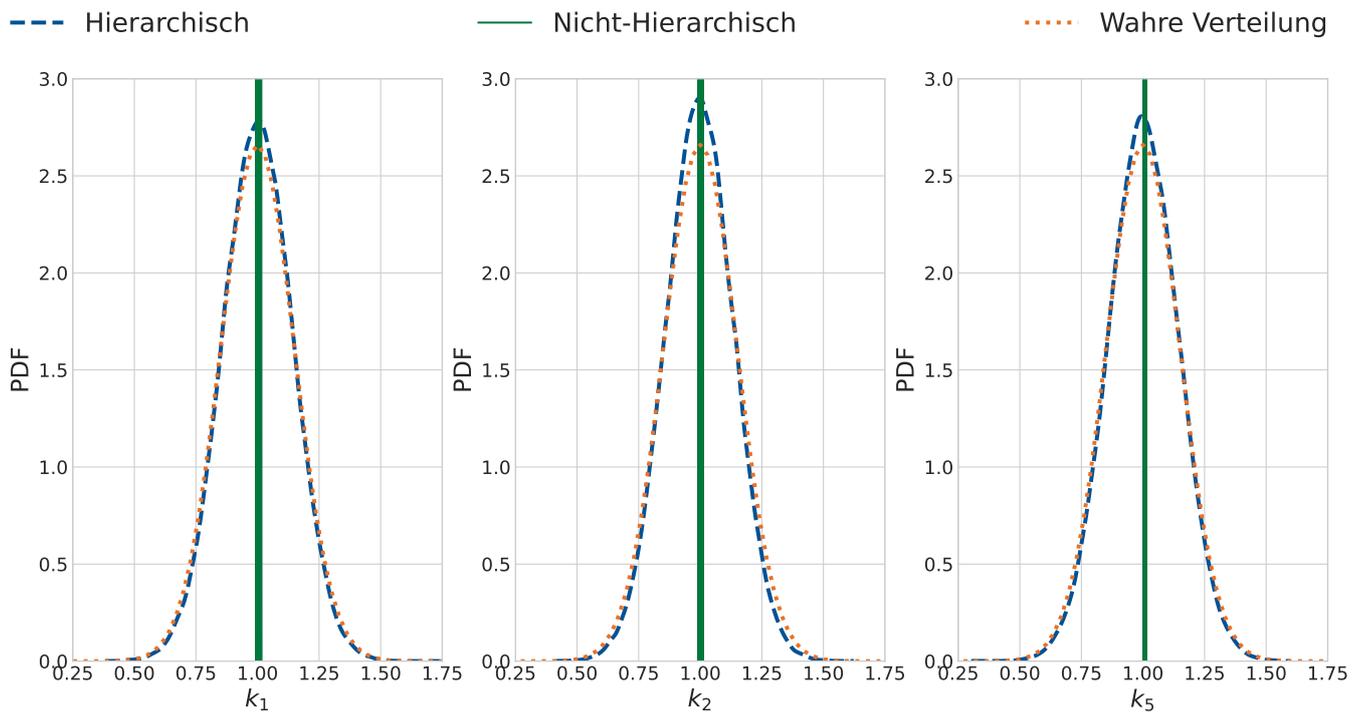


Abbildung 3.8.: Ergebnis des Bayes'schen Modellabgleichs und des hierarchischen Bayes'schen Modellabgleichs für die Modellparameter k_1 , k_2 und k_3 .

Der Bayes'sche Modellabgleich ist nicht in der Lage, die inhärente Parameterverteilung vorherzusagen. Im Vergleich hierzu wird die Parameterverteilung mit dem hierarchischen Ansatz besser vorhergesagt. Die bestimmte Verteilung der Parameter nähert sich der „wahren“ Verteilung an. Der hierarchische Modellabgleich hat somit einen Vorteil bei der Vorhersage von Systemen mit inhärenter Parameterunsicherheit. Nachteilig ist jedoch, dass der Abgleich selbst bei einem einfachen System wie diesem deutlich rechenintensiver ist als der klassische Bayes-Ansatz.

Zur Anwendung des hierarchischen Modellabgleichs ist eine starke Reduktion der Rechenzeit für eine Modellauswertung notwendig. Der Berechnungsaufwand für den hierarchischen Modellabgleich hängt zum einen von der Anzahl der Parameter p_p und zum anderen von der Anzahl an Hierarchieebenen N^H ab. In [106] wird der Zusammenhang über $\mathcal{O}(10^{N^H p_p})$ beschrieben. Unter der Annahme, dass eine Modellauswertung 1 s benötigt und für eine Auswertung des Wahrscheinlichkeitsdichteintegrals für einen Parameter 10^4 Samples gezogen werden müssen, werden bei einer zweistufigen hierarchischen Betrachtung 10^8 Samples benötigt. Hieraus folgt eine Berechnungszeit von mehr als 3 Jahren. Durch effiziente Sampling-Methoden kann die Anzahl der Auswertungen reduziert werden.

Allerdings würden ein hierarchischer Modellabgleich an einem komplexen FE-System aufgrund der hohen Rechenzeit weiterhin mehrere Jahre benötigen. Daher erfordert es Methoden, die eine Reduktion des Berechnungsaufwands bei gleichzeitiger Anpassbarkeit von Modellparametern und hoher Genauigkeit ermöglichen.

4. Parametrische globale Modellordnungsreduktion

Die in Abschnitt 3.3 vorgestellten Methoden zur PMOR ermöglichen eine effiziente Bestimmung von Systemeigenschaften in Abhängigkeit von Modellparametern. Die Basis des aktuellen Standes der Forschung bildet das CRAIG und BAMPTON Verfahren [11]. Für dieses Verfahren ist die Höhe der Modellordnungsreduktion jedoch abhängig von der Anzahl der Substrukturen und der Diskretisierung an den Koppelstellen. Darüber hinaus kann die Bestimmung des statischen Anteils in Gleichung (3.32) durch die Invertierung der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{ii}^S zu numerischen Problemen führen.

Im folgenden Abschnitt wird eine Methode zur parametrischen Modellordnungsreduktion vorgestellt, die einige der genannten Probleme bei der Anwendung von PMOR auf mechanische Systeme überwindet. Die „Parametric Global Mode Reduction“ (PGMR) Methode erweitert die Methode des modalen Abschneidens aus Abschnitt 3.2.1 von einer MOR- zu einer PMOR-Methode, indem sie das sukzessive Erzeugen von FE-Modellen in FE-Algorithmen nutzt. Die Reduktion basiert auf einer separaten, modalen Reduktion jeder Substruktur unter Verwendung der Eigenvektoren des zusammengestellten Systems. Daher kann der Zusammenbau der Substrukturen einfach durch Aufsummieren der reduzierten Matrizen durchgeführt werden. Diese Methode erspart somit die numerisch und rechnerisch schwierige Abschätzung der Kopplungsbedingungen zwischen den verschiedenen Substrukturen. Darüber hinaus ist die Größenordnung der Reduktion höher als bei vergleichbaren CB-basierenden Methoden. Dies ermöglicht eine effiziente Simulation von strukturdynamischen Systemen.

4.1. Herleitung der parametrischen, globalen Modellreduktion

In Abschnitt 3.1.1 werden die Grundlagen für die Berechnung von Elementmatrizen erläutert. Zur Herleitung der PGMR wird das Verfahren an einem EULER-BERNOULLI-Balken beispielhaft

beschrieben. Das Balkenelement ist in Abbildung 4.1 dargestellt. Das Element hat die Länge l und jeder Knoten hat zwei Freiheitsgrade $\mathbf{u} = [u_1, u'_1, u_2, u'_2]^T$, die die Verschiebung und Verdrehung darstellen.

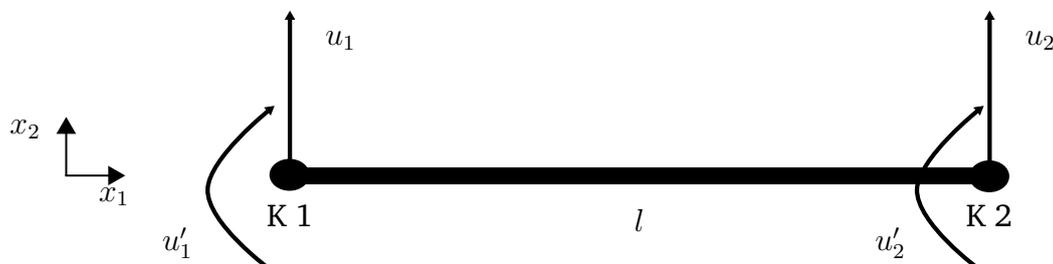


Abbildung 4.1.: EULER-BERNOULLI-Balkenelement mit zwei Knoten mit jeweils zwei Freiheitsgraden.

Das Verhalten des betrachteten Balkens wird über die lokalen Formfunktionen

$$\begin{aligned} N_1(x_1) &= 1 - \frac{3x_1^2}{l^2} + \frac{2x_1^3}{l^3}, & N_2(x_1) &= x_1 - \frac{2x_1^2}{l} + \frac{x_1^3}{l^2} \\ N_3(x_1) &= \frac{3x_1^2}{l^2} - \frac{2x_1^3}{l^3}, & N_4(x_1) &= -\frac{x_1^2}{l^2} + \frac{x_1^3}{l^3} \end{aligned} \quad (4.1)$$

angenähert. Über die Gleichung (3.10) lassen sich die Elementmatrizen der Massen- und Steifigkeitsmatrix bestimmen. Die Elementmatrizen ergeben

$$\mathbf{M}_e = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

und

$$\mathbf{K}_e = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

wo ρ die Dichte, A die Fläche, E den E-Modul und I das Flächenträgheitsmoment des Balkens beschreibt.

Im Folgenden wird der Zusammenbau der globalen Massen- und Steifigkeitsmatrix für den in

Abbildung 4.2 dargestellten Balken beschrieben. Der Balken wird der Übersichtlichkeit halber mit nur zwei Elementen diskretisiert. Das resultierende System hat somit sechs Freiheitsgrade $\mathbf{u} = [u_1, u'_1, u_2, u'_2, u_3, u'_3]^T$.

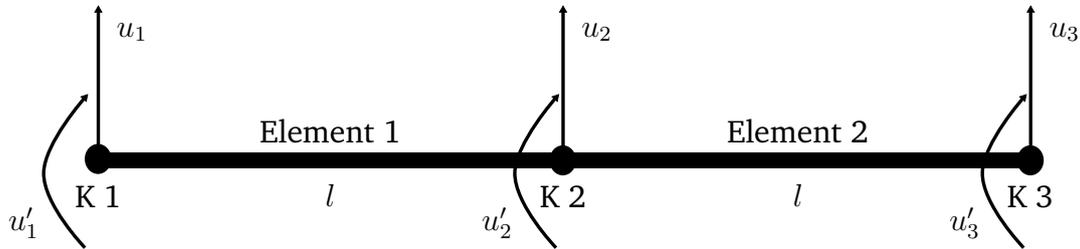


Abbildung 4.2.: EULER-BERNOULLI-Balken mit zwei Elementen und insgesamt sechs Freiheitsgraden

Der Zusammenbau wird hier für die globale Massen- und Steifigkeitsmatrix gezeigt. Die unterteilte, globale Massenmatrix wird beschrieben über

$$\mathbf{M} = \frac{\rho A l}{420} \left(\begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l & 0 & 0 \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 & 0 & 0 \\ 54 & 13l & 156 & -22l & 0 & 0 \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 156 & 22l & 54 & -13l \\ 0 & 0 & 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 0 & 0 & 54 & 13l & 156 & -22l \\ 0 & 0 & -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \right). \quad (4.4)$$

\mathbf{M}^2

Das Zusammensetzen der unterteilten, globalen Steifigkeitsmatrix erfolgt analog über

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{l^3} \left(\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l & 0 & 0 \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6l & 12 & -6l & 0 & 0 \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 6l & -12 & 6l \\ 0 & 0 & 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6l & 12 & -6l \\ 0 & 0 & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \right). \quad (4.5)$$

\mathbf{K}^2

Eine Substruktursystemmatrix kann somit definiert werden, indem die Elementmatrizen der einzelnen Elemente einer Substruktur in einer Matrix zusammengesetzt werden. Die Systemmatrizen

einer zusammengesetzten Struktur können daher als eine Summe über ihre N^S Substruktursystemmatrizen umgeschrieben werden. Die zusammengesetzte Massen- und Steifigkeitsmatrix \mathbf{M} und \mathbf{K} sind hier definiert durch

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \sum_{S=1}^{N^S} \mathbf{M}^S \\ \mathbf{K} &= \sum_{S=1}^{N^S} \mathbf{K}^S\end{aligned}\tag{4.6}$$

wo $\mathbf{M}^S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\mathbf{K}^S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Systemmatrizen der S -ten Substruktur sind.

Zur Modellordnungsreduktion wird die Methode des modalen Abschneidens (vgl. Abschnitt 3.2.1) verwendet. Aufgrund des Zusammenhangs in Gleichung (4.6) kann die Transformationsmatrix über das generalisierte Eigenwertproblem der zusammengesetzten Systemmatrizen \mathbf{M} und \mathbf{K}

$$[\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}] \mathbf{T} = \mathbf{0},\tag{4.7}$$

bestimmt werden, wo $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ mit $r \ll n$ die Transformationsmatrix in den globalen modalen Unterraum bezeichnet. Durch die Transformation in den modalen Unterraum mithilfe der Transformationsmatrix der zusammengesetzten Systemmatrizen \mathbf{T} ist es beim klassischen Ansatz (vgl. Abschnitt 3.2.1) nicht mehr möglich Parameteränderungen im reduzierten System durchzuführen.

Die Grundlage der PGMR-Methode ist, dass für lineare, zeitinvariante Systeme die Transformationsvorschrift in Gleichung (3.13) mit dem Superpositionsansatz der Substruktursystemmatrizen aus Gleichung (4.6) kombiniert werden kann. Hierzu wird die Gleichung (4.6) in die Gleichung (3.13) eingesetzt. Die neue Transformationsvorschrift ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{M}} &= \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} = \mathbf{T}^T \left(\sum_{S=1}^{N^S} \mathbf{M}^S \right) \mathbf{T} = \sum_{S=1}^{N^S} \mathbf{T}^T \mathbf{M}^S \mathbf{T} = \sum_{S=1}^{N^S} \tilde{\mathbf{M}}^S \\ \tilde{\mathbf{K}} &= \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} = \mathbf{T}^T \left(\sum_{S=1}^{N^S} \mathbf{K}^S \right) \mathbf{T} = \sum_{S=1}^{N^S} \mathbf{T}^T \mathbf{K}^S \mathbf{T} = \sum_{S=1}^{N^S} \tilde{\mathbf{K}}^S,\end{aligned}\tag{4.8}$$

wobei $\tilde{\mathbf{M}}$ und $\tilde{\mathbf{K}}$ die reduzierte zusammengesetzte Massen- bzw. Steifigkeitsmatrix und $\tilde{\mathbf{M}}^S$ und $\tilde{\mathbf{K}}^S$ die reduzierten Massen- bzw. Steifigkeitssubstrukturmatrizen sind [23, 100]. Die reduzierten zusammengesetzte Massen- bzw. Steifigkeitsmatrix lassen sich somit über die Summe der reduzierten Massen-

bzw. Steifigkeitssubstrukturmatrizen abbilden. Dies führt zu einer Modellordnungsreduktion der Substruktursystemmatrizen mit den globalen Moden des Gesamtsystems. Die Gültigkeit Gleichung (4.8) und die Grenzen der möglichen Parameteränderungen im reduzierten Raum werden in den folgenden Abschnitten besprochen.

Analog zu den in Abschnitt 3.3 beschriebenen Grundlagen der parametrischen Modellordnungsreduktion wird angenommen, dass die Systemmatrizen vom Parametervektor θ abhängig sind. Diese Annahme wird auf die Massen- und Steifigkeitsmatrizen der verschiedenen Substrukturen sowie deren ordnungsreduzierten Matrizen ausgedehnt [22]. Der Parametervektor der Form $\theta = [\theta^{1T}, \theta^{2T}, \dots, \theta^{N^S T}]^T$ enthält Parameter für jede Substruktur. Die parametrisierten, reduzierten Systemmatrizen der Substruktur werden beschrieben durch

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{M}}^S(\theta_M^S) &= \theta_M^S \tilde{\mathbf{M}}_0^S \\ \tilde{\mathbf{K}}^S(\theta_K^S) &= \theta_K^S \tilde{\mathbf{K}}_0^S\end{aligned}\tag{4.9}$$

wobei die reduzierte Massen- und Steifigkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{M}}^S$ und $\tilde{\mathbf{K}}^S$ nur von θ_M^S bzw. θ_K^S abhängen. Daher kann der Vektor der Substrukturparameter als $\theta^S = [\theta_M^S, \theta_K^S]^T$ beschrieben werden. Dieser proportionale Ansatz ist möglich, weil Parameter wie der E-Modul und die Dichte ebenfalls proportional in die FE-Formulierung eingehen (vgl. Gleichung (3.10)). Ohne Einschränkungen werden die Anfangsparameter als $\theta_0^S = [1, 1]^T$ definiert, sodass für die anfänglichen Substruktursystemmatrizen gilt

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{M}}^S(\theta_{M,0}^S) &= \tilde{\mathbf{M}}_0^S \\ \tilde{\mathbf{K}}^S(\theta_{K,0}^S) &= \tilde{\mathbf{K}}_0^S.\end{aligned}\tag{4.10}$$

Für den Fall, dass eine Substruktursystemmatrix von keinem Parameter abhängt, wird der entsprechende Parameter auf 1 gesetzt. Bei den Substrukturparametern kann es sich entweder um einen einzelnen physikalischen oder geometrischen Parameter handeln, wie den E-Modul oder die Dichte, oder um eine Kombination aus mehreren physikalischen und geometrischen Parametern.

Zur Berücksichtigung der Dämpfung mit der PGMR-Methode kann die zusammengesetzte Dämpfungsmatrix $\tilde{\mathbf{D}}$ über die modale Dämpfung $\tilde{\xi}$ mit

$$\tilde{\mathbf{D}} = 2 \text{diag}(\tilde{\xi}) \sqrt{\tilde{\mathbf{M}} \tilde{\mathbf{K}}}\tag{4.11}$$

beschrieben werden. Für ein System mit materialabhängiger Dämpfung lässt sich die modale Dämpfung $\tilde{\xi}_j$ für die j -te Eigenmode aus der elastischen Dehnungsenergie J_j^S und dem Materialdämpfungsgrad ξ^S der S -ten Substruktur über

$$\tilde{\xi}_j = \frac{\sum_{j=1}^{N^S} \xi^S J_j^S}{\sum_{j=1}^{N^S} J_j^S} \quad (4.12)$$

bestimmen [107]. Die elastische Dehnungsenergie J_j^S für die Eigenmode Φ_j und die Substruktur S lässt sich aus der Steifigkeitsmatrix der Substruktur \mathbf{K}^S und dem entsprechenden Eigenmode ϕ_j über

$$J_j^S = \frac{1}{2} \phi_j \mathbf{K}^S \phi_j = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{K}}_{jj}^S \quad (4.13)$$

berechnen. Die elastische Dehnungsenergie lässt sich somit direkt aus den Diagonaleinträgen der reduzierten Steifigkeitsmatrix der Substruktur $\tilde{\mathbf{K}}_{jj}^S$ entnehmen [108].

4.2. Untersuchung des Parametereinflusses

Mit der vorgestellten PGMR-Methode lassen sich Parameteränderungen und deren Einfluss auf das strukturdynamische Verhalten effizient untersuchen. Der Einfluss auf das strukturdynamische Verhalten der Dichte, des E-Moduls und der Dämpfung wird im Folgenden an einem generischen System vorgestellt.

Als Beispielsystem dient eine einseitig gelagerte Platte, die bereits von CRAIG und BAMPTON [11] sowie von CASTANIÈRE et al. [16] verwendet wurde. Die einseitig gelagerte Platte besteht aus zwei Substrukturen (Platte 1 und Platte 2). Die Platten bestehen aus dem gleichen Material und haben die gleiche Dicke. Die Abmessungen der Platte und die Materialeigenschaften sind in Tabelle 4.1 zusammengefasst. Das FE-Modell ist aus 4-Knoten-Plattenelementen mit Kirchhoff-Kinematik und linearen Formfunktionen von ZIENKIEWICZ [81] zusammengesetzt. Die Elementkantenlänge wird auf ca. 5 mm gesetzt, was zu einem FE-Netz mit 7.442 (121×61) Elementen und 7.626 Knoten führt. Jeder Knoten hat drei Freiheitsgrade: Translation u_z und Rotation u'_x und u'_z . Die Größe der Systemmatrizen des Modells, einschließlich der festen Randbedingungen am unteren Rand, beträgt 22.509×22.509 .

Zur Untersuchung des Einflusses von Parameteränderungen wird das Übertragungsverhalten von

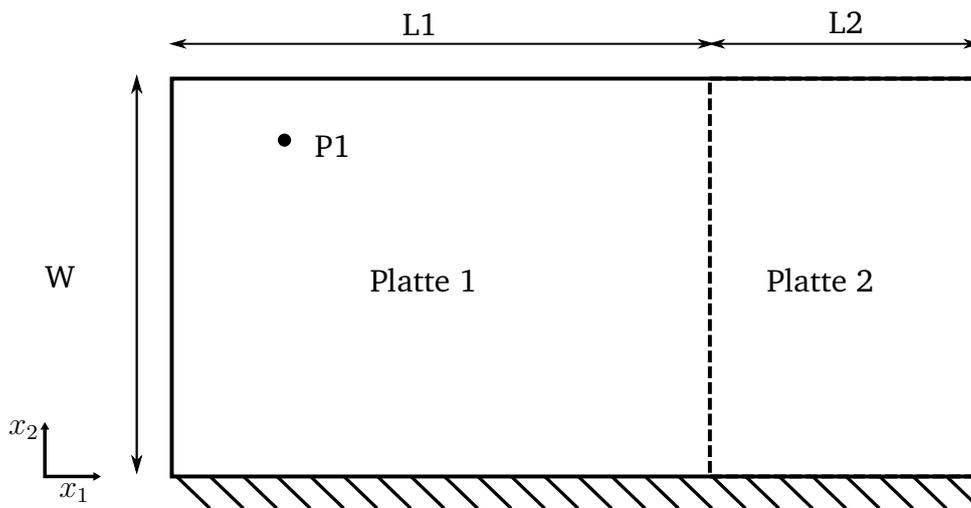


Abbildung 4.3.: Generisches Beispielsystem einer einseitig gelagerte Platte aus [11] und [16] mit dem Anregungspunkt P1.

Tabelle 4.1.: Abmessungen und Materialeigenschaften der einseitig gelagerten Platte

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Höhe	W	21,00	cm
Breite 1	$L1$	26,00	cm
Breite 2	$L2$	14,00	cm
Dicke	t	0,1	cm
E-Modul	E	210	GPa
Poissonzahl	ν	0,33	-
Dichte	ρ	7850	kg/m ³

Kraft auf Verschiebung in Normalrichtung am Punkt $P1 = (9 | 18,5)$ cm untersucht. Der Einfluss des E-Moduls, der Dichte und der Dämpfung auf das Übertragungsverhalten wird nacheinander dargestellt.

In Abbildung 4.4a ist der Einfluss der Dichte auf das strukturdynamische Verhalten abgebildet. Hier wird die Dichte in Platte 1 und Platte 2, wie in Gleichung (4.9) beschrieben, proportional um 10% erhöht. Die Erhöhung der Dichte führt zu einer Verschiebung der Eigenfrequenzen in einen niedrigeren Frequenzbereich.

In Abbildung 4.4b ist der Einfluss der Dämpfung auf das Übertragungsverhalten abgebildet. Im dargestellten Fall wird die Materialdämpfung der beiden Platten proportional um den Faktor 10

angepasst. Die angepasste Dämpfungsmatrix wird über Gleichung (4.11) bestimmt. Die Erhöhung der Dämpfung führt zu einer Reduktion der Amplitude im Übertragungsverhalten.

In Abbildung 4.4c ist der Einfluss des E-Moduls abgebildet. Es wird der E-Modul der Platte 1, wie in Gleichung (4.9) beschrieben, proportional um 10 % erhöht. Die Erhöhung des E-Moduls führt zu einer Verschiebung der Eigenfrequenzen in einen höheren Frequenzbereich.

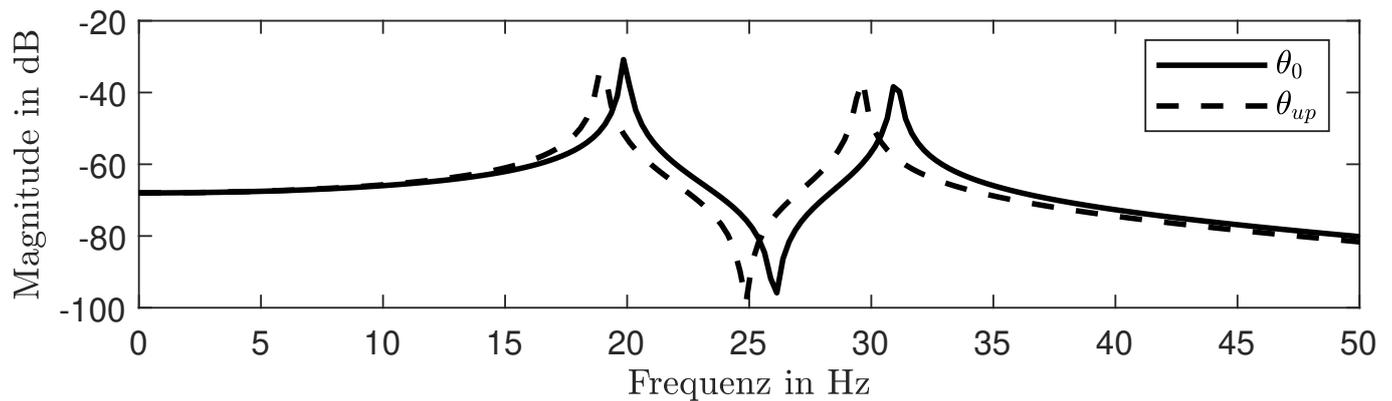
4.3. Vergleich zum Stand der Wissenschaft

Die Grundlage der parametrischen Modellordnungsreduktion ist die Annahme der Unabhängigkeit der Transformationsmatrix \mathbf{T} vom Parametervektor θ . Die Steigerung der Berechnungseffizienz ergibt sich daraus, dass die Systemmatrizen nur einmal reduziert und dann für den Rest der Analyse konstant gehalten werden. Da die PGMR-Methode im Gegensatz zur CB-Methode aus Abschnitt 3.2.2 die globale Transformationsmatrix verwendet, ist die Annahme der Unabhängigkeit nur eingeschränkt gültig. Eine Parameteränderung wird zu einem Approximierungsfehler des reduzierten Modells führen. Für ein System mit nur einem Parameter θ lässt sich die Approximation über eine Taylor-Reihe erster Ordnung am Entwicklungspunkt θ_0 beschrieben

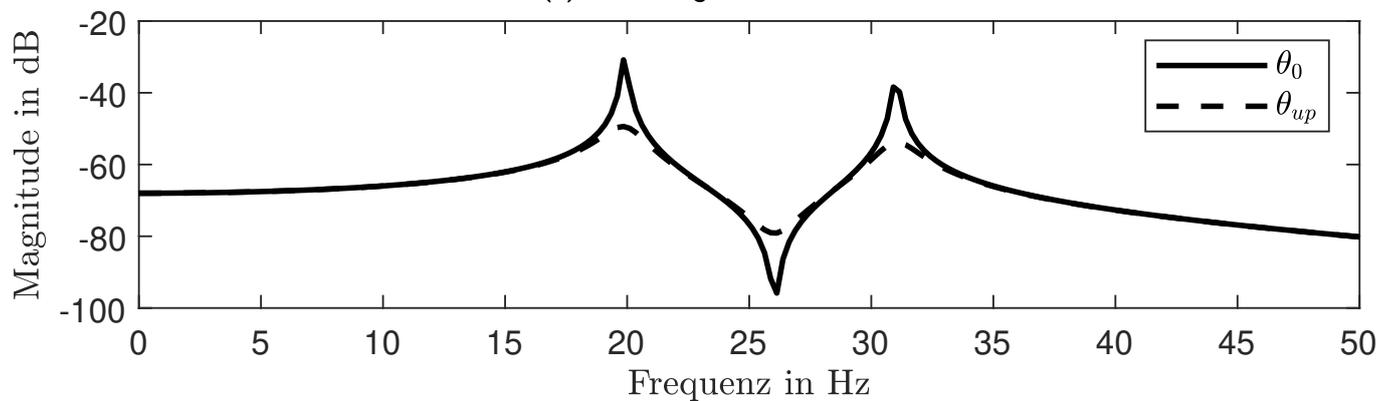
$$\mathbf{T}(\theta) \approx \mathbf{T}(\theta_0) + \frac{\partial \mathbf{T}(\theta_0)}{\partial \theta} (\theta - \theta_0). \quad (4.14)$$

Der Approximierungsfehler der PGMR-Methode hängt somit zum einem von der Sensitivität des Modellparameters und zum anderen von der Höhe der Parameteränderung ab. Die Sensitivität der Transformationsmatrix ist problemabhängig, jedoch kann davon ausgegangen werden, dass der Approximierungsfehler für kleine Parameteränderungen ($\theta \approx \theta_0$) gering ist, da dadurch der zweite Term in Gleichung (4.14) nur einen geringen Einfluss auf die ursprüngliche Transformationsmatrix hat. Diese Annahme wird bei der Reduktion durch das eCB-Verfahren (vgl. Abschnitt 3.2.3) und der Reduktion der Koppelfreiheitsgrade (vgl. Abschnitt 3.2.4) ebenfalls getroffen.

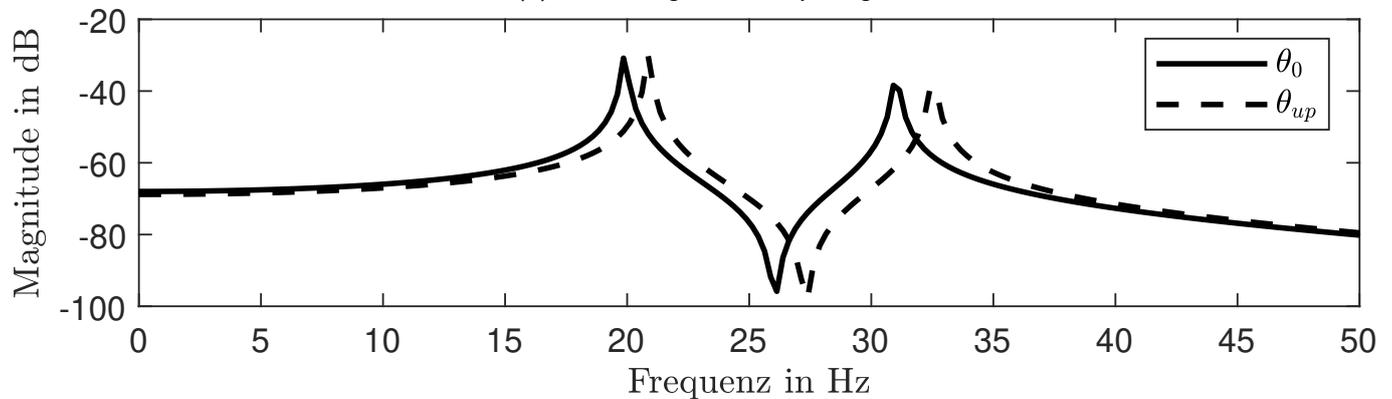
Aufgrund der Problemabhängigkeit der vorgestellten PGMR-Methode erfolgt ein Vergleich der in Abschnitt 3.2 vorgestellten Methoden mit der in diesem Kapitel eingeführten PGMR-Methode anhand von zwei Anwendungsbeispielen aus der Literatur. Das Ziel des Vergleichs ist es, zum einen den Einfluss der Parameteränderungen auf den Approximierungsfehler zu untersuchen und zum anderen die PGMR-Methode mit dem Stand der Wissenschaft zu vergleichen.



(a) Erhöhung der Dichte



(b) Erhöhung der Dämpfung



(c) Erhöhung des E-Moduls

Abbildung 4.4.: Einfluss von Parameteränderungen auf das Übertragungsverhalten von Kraft zu Verschiebung in Normalrichtung der einseitig gelagerten Platte (vgl. Abbildung 4.3) am Punkt P1

4.3.1. Anwendungsbeispiel: Einseitig gelagerte Platte

Als erstes Anwendungsbeispiel dient die einseitig gelagerte Platte aus Abbildung 4.3. Das Plattensystem wird reduziert und eine Eigenwertanalyse wird durchgeführt. Der Approximierungsfehler der

betrachteten Methoden wird über einen Vergleich der Eigenfrequenzen der reduzierten Modelle mit denen des vollen Modells bestimmt.

Für die Reduktion mit der in Abschnitt 3.2.2 beschriebenen CB-Methode wird eine Anzahl von $r_{CB}^S = 50$ Eigenmoden verwendet, um jede Substruktur zu reduzieren. Jede Substruktur hat eine Anzahl von $n_m = 126$ Master-Freiheitsgraden an den Koppelfreiheitsgraden. Nach dem Zusammenführen der reduzierten Substrukturen besteht der zusammengesetzte Freiheitsgradvektor aus den modalen Freiheitsgraden jeder Substruktur und den physikalischen Freiheitsgraden an der Koppelstelle. Die Größe der Systemmatrizen für die in Abschnitt 3.2.3 beschriebene eCB-Methode entspricht in diesem Beispiel der der CB-Methode. Bei der in Abschnitt 3.2.4 vorgestellten Reduktion der Koppelfreiheitsgrade werden die physikalischen Freiheitsgrade an der Schnittstelle jeder Substruktur vor dem Zusammenführen mit einer Anzahl von $m_{CC} = 15$ Moden weiter reduziert. Die Auswahl der Anzahl an m_{CC} Moden erfolgt iterativ und berücksichtigt den Fehler zum CB-reduzierten Modell. Zur Vergleichbarkeit werden bei der PGMR-Methode ebenfalls $m_{MS} = 50$ Moden des zusammengesetzten Systems verwendet, um jede Substruktur zu reduzieren. Der Freiheitsgrad-Vektor ist für die Substrukturen und das zusammengesetzte System identisch. Daher ist die Größe der Matrix durch die Anzahl der beibehaltenen Moden für die modale Reduktion gegeben. Die Anzahl der modalen und physikalischen Freiheitsgrade sowie die resultierende Matrixgröße des zusammengesetzten Systems für die vier verglichenen Methoden sind in Tabelle 4.2 aufgelistet. Mit der neuen PGMR-Methode kann somit eine doppelt so hohe Reduktion der Matrixgröße im Vergleich zum CB-reduzierten Modell mit anschließender Reduktion der Koppelfreiheitsgrade erzielt werden. Im Vergleich zum reinen CB-Verfahren und dem eCB-Verfahren wird eine viermal höhere Reduktion erreicht.

Tabelle 4.2.: Größe der reduzierten Systemmatrizen des einseitig gelagerten Plattensystems

PMOR-Methode	Modale und physikalische Freiheitsgrade	Matrixgröße
CB	$r_{CB}^S = 50, n_{CB} = 126$	226×226
eCB	$r_{eCB}^S = 50, n_{eCB} = 126$	226×226
CB + CCM	$r_{CB}^S = 50, m_{CC} = 15$	115×115
PGMR	$m_{MS} = 50$	50×50

Für einen Vergleich zwischen den vorgestellten Methoden wird die Zeit zur Auswertung einer Parameterkombination miteinander verglichen. Die Auswertung besteht aus der Bestimmung der

ersten 20 Eigenfrequenzen der reduzierten Systeme. Die Untersuchung erfolgt in MATLAB® (R2022a) auf einem Computer mit 16 GB RAM und einem Intel® Core™ i7-8650U Prozessor mit 1,90 GHz. Der Prozess wird für alle Methoden mit der gleichen Parameterkombination 100 mal durchgeführt. Die Bewertung erfolgt am Mittelwert der Berechnungszeiten. Die Zeiten sind in Tabelle 4.3 aufgelistet. Der Unterschied zwischen den Zeiten zur Auswertung einer Parameterkombination für die CB- und eCB-reduzierten Modelle lässt sich über die höhere Besetzung der reduzierten Systemmatrizen des eCB-reduzierten Modells erklären. Aufgrund der geringen Matrixgröße des PGMR-reduzierten Modells, benötigt die Auswertung einer Parameterkombination ca. 2,5 mal weniger Zeit als die des CB-reduzierten Modells mit zusätzlicher Reduktion der Koppelfreiheitsgrade (CB + CCM).

Tabelle 4.3.: Vergleich der Auswertungszeiten für eine Parameterkombination für die vier untersuchten PMOR-Methoden

Methode	CB	eCB	CB + CCM	PGMR
Berechnungszeit in ms	11,75	12,02	8,41	3,43

Die Bewertung und Quantifizierung des Approximierungsfehlers erfolgt über den relativen Fehler an den ersten 20 Eigenfrequenzen zwischen den Eigenfrequenzen des Vollmodells und den der vier reduzierten Modellen. Als Grenzwert wird hier ein relativer Fehler von 10^{-3} angenommen [22].

In Abbildung 4.5 ist der relative Fehler für die ersten 20 Eigenfrequenzen dargestellt. Für alle untersuchten Methoden liegt der Fehler unterhalb der Grenze von 10^{-3} . Da es sich bei der Reduktion mit PGMR für den unveränderten Fall um ein einfaches, modales Abschneiden handelt, ist der Modellfehler vernachlässigbar gering. Die Erweiterung der CB-Methode um den Residualanteil in der eCB-Methode führt zu einer deutlichen Verbesserung der Genauigkeit. Der Approximierungsfehler ist im Durchschnitt fünf Größenordnungen kleiner. Die Reduktion der Koppelfreiheitsgrade am CB-reduzierten Modell führt zu keiner signifikanten Vergrößerung des Approximierungsfehlers.

Zur Untersuchung der Genauigkeit der vier Methoden wird mit der in Gleichung (4.9) angegebenen Parametrisierung die Massen- und Steifigkeitsmatrizen unter Verwendung der Parametervektoren $\theta^1 = [1 + \tilde{\theta}, 1 - \tilde{\theta}]^T$ und $\theta^2 = [1 - \tilde{\theta}, 1 + \tilde{\theta}]^T$ verändert. Für den Vergleich wird eine Parameteränderung von $\tilde{\theta}_1 = 0,01$ und $\tilde{\theta}_2 = -0,05$ berücksichtigt. Hiermit sollen der Einfluss der Höhe der Parameteränderung und die Sensitivität der Modellparameter untersucht werden.

In Abbildung 4.6 sind die relativen Fehler für die ersten 20 Eigenfrequenzen für beide Parameteränderungen $\tilde{\theta}$ abgebildet. Gegenüber dem unveränderten Modell aus Abbildung 4.5 ist zu erkennen,

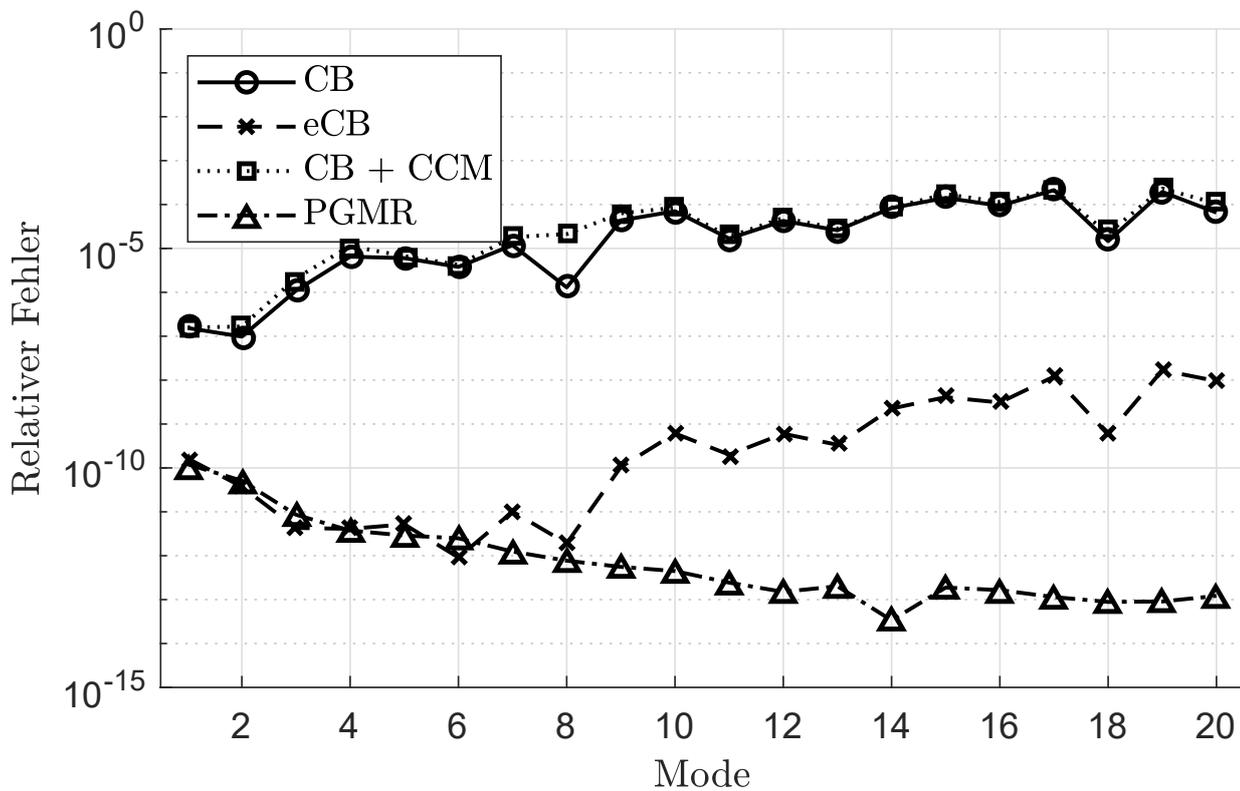
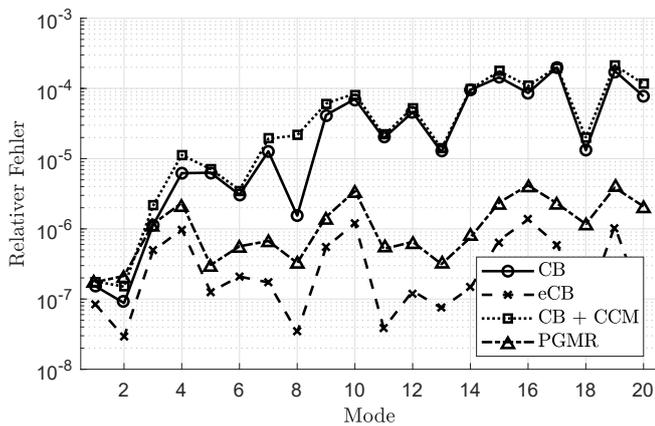


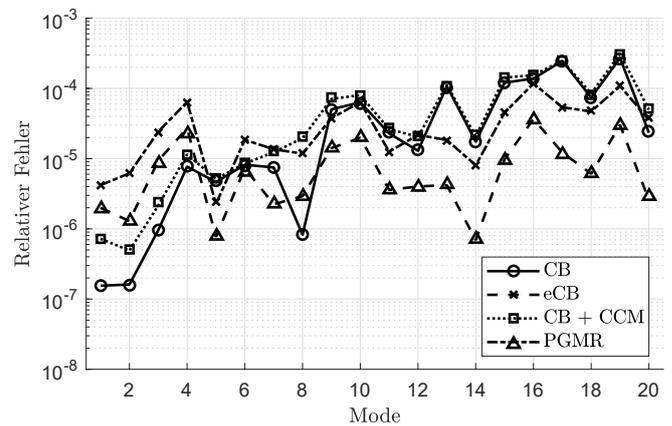
Abbildung 4.5.: Vergleich des relativen Fehlers zwischen den ersten 20 Eigenfrequenzen des unveränderten Vollmodells der einseitig gelagerten Platte mit denen der vier reduzierten Modelle

dass die Parameteränderung nur einen minimalen Einfluss auf den Modellfehler des mit der CB-Methode reduzierten Modells hat. Dies lässt sich auf die Unabhängigkeit der Substrukturmatrizen von den Parametern zurückführen (vgl. 3.3). Veränderungen des Modellfehlers stammen somit aus der CB-Methode selbst. Das mit der Erweiterung um die Reduktion der Koppelfreiheitsgrade reduzierte Modell zeigt hingegen eine leichte Verschlechterung der Approximierung gemessen am CB-reduzierten Modell. Der Approximierungsfehler des mit der eCB-Methode reduzierten Modells steigt, gemessen am unveränderten Fall in Abbildung 4.5, an. Wie in Abschnitt 3.3 beschrieben, lässt sich die Annahme der Unabhängigkeit der Substrukturmatrizen aus der CB-Methode nur eingeschränkt auf die eCB-Methode und die Reduktion der Koppelfreiheitsgrade erweitern. Der Residualanteil in der Transformationsmatrix der eCB-Methode (vgl. Gleichung (3.49)) und die Bestimmung der Zwangsbedingungen in Gleichung (3.54) führen zu einem Anstieg des Modellfehlers, wenn Parameterveränderungen betrachtet werden. Im Vergleich zu Abbildung 4.5 ist ebenfalls eine Erhöhung des Fehlers bei der PGMR-Methode zu erkennen. Wie in Gleichung (4.14) beschrieben

hat die Höhe der Parameteränderung und die Sensitivität der Transformationsmatrix einen Einfluss auf den Approximierungsfehler. Dies zeigt sich weiterhin in den Unterschieden im relativen Fehler für die beiden Parametersätze $\tilde{\theta}_1$ und $\tilde{\theta}_2$. Die Untersuchung zeigt, dass der Approximierungsfehler eindeutig von der Höhe der Parameteränderung abhängt.



(a) Modellfehler für $\tilde{\theta}_1 = 0,01$



(b) Modellfehler für $\tilde{\theta}_2 = -0,05$

Abbildung 4.6.: Relativer Fehler zwischen den ersten 20 Eigenfrequenzen des angepassten Vollmodells der einseitig eingespannten Platte mit denen der angepassten reduzierten Modelle für zwei Parameterkombinationen $\tilde{\theta}$.

Für eine Aussagen über die Sensitivität der Transformationsmatrix und der Parameterkombination am Auswertungspunkt ist die Bewertung des Approximierungsfehlers an zwei Auswertungspunkten nur begrenzt aussagekräftig. Darüber hinaus sollen die reduzierten Modelle im Bereich der Unsicherheitsquantifizierung oder des stochastischen Modellabgleichs eingesetzt werden. In beiden Anwendungen werden teilweise mehrere tausend Parameterkombinationen ausgewertet. Zur Identifikation aller Einflüsse auf den Approximierungsfehler wird eine weitere Untersuchung durchgeführt. Der Einfluss unterschiedlicher Parameterkombinationen wird über die Auswertung von insgesamt 1.000 Parameterkombinationen untersucht. Die Parameterverteilung wird als gleichverteilt angenommen. Das Erstellen der Parameterkombinationen erfolgt über einen Latin-Hypercube-Ansatz [109]. Der Latin-Hypercube-Ansatz erlaubt es, bei einer geringen Anzahl an Auswertungen eine statistische Unabhängigkeit zwischen den Parametern zu erreichen. Somit ist eine effiziente Untersuchung des Lösungsraums möglich. Der Einfluss der Höhe der Parameteränderungen wird über eine Vergrößerung des Intervalls der Gleichverteilung abgebildet. Es werden insgesamt fünf Intervalle für Parameterkombinationen mit $\tilde{\theta} = \pm 0,01$, $\tilde{\theta} = \pm 0,05$, $\tilde{\theta} = \pm 0,1$, $\tilde{\theta} = \pm 0,2$ und $\tilde{\theta} = \pm 0,3$ untersucht.

Zur besseren Darstellbarkeit und Abdeckung des „Worst Case“-Szenarios wird der maximale relative Fehler unter den ersten 20 Eigenfrequenzen verwendet. Zur Darstellung wird das 95. Perzentil des maximalen Modellfehlers verwendet und als Grenzwert wird wiederum ein Modellfehler von 10^{-3} angesetzt [22]. In Kombination mit dem Latin-Hypercube-Ansatz kann davon ausgegangen werden, dass für die meistens Parameterkombinationen (95 %) der betrachteten Parameterintervalle der Approximierungsfehler unterhalb der eingetragenen Werte liegt.

In Abbildung 4.7 ist das 95. Perzentil in Abhängigkeit der Streubreite der gleichverteilten Parameterkombinationen für die unterschiedlichen Modellreduktionsmethoden abgebildet. Die Höhe der Parameteränderung hat, wie die vorherige Untersuchung gezeigt hat, nur einen geringen Einfluss auf den Approximierungsfehler des CB-reduzierten Modells. Über das Parameterintervall von $\pm 1\%$ bis $\pm 30\%$ kommt es nur zu einer Verdopplung des Approximierungsfehlers. Bei der eCB-Methode und der PGMR-Methode lässt sich ein Zusammenhang zwischen der Höhe der Parameteränderung und dem Approximierungsfehler erkennen. Sowohl durch die Verwendung der globalen Transformationsmatrix bei der PGMR-Methode, als auch der Einfluss durch die Residualmoden bei der eCB-Methode, entsteht eine eindeutige Abhängigkeit zwischen der Höhe der Parameteränderung und dem Approximierungsfehler der reduzierten Modelle. Für das Anwendungsbeispiel der einseitig gelagerten Platte sind mit der PGMR-Methode Parameteränderungen zwischen $\pm 10\%$ und $\pm 20\%$ möglich, bevor der Approximierungsfehler größer als 10^{-3} wird und eine neue Transformationsmatrix bestimmt werden muss (vgl. Abschnitt 3.3). Für das eCB-reduzierte Modell können Parameteränderung von über $\pm 30\%$ untersucht werden. Aufgrund der geringeren Systemordnung des PGMR-reduzierten Modells ist die Auswertung der Parameterkombinationen jedoch um ein Vielfaches effizienter.

4.3.2. Anwendungsbeispiel: Versteiftes Plattensystem

Als zweites Anwendungsbeispiel wird das in [15] vorgestellte Plattenmodell mit Versteifungen verwendet. Das System ist in Abbildung 4.8 dargestellt. Es hat zwei Längs- und vier Querversteifungen mit einer Höhe H von 0,5 m. Die Geometrie- und Materialparameter sind in Tabelle 4.4 aufgelistet. Die Bodenplatte wird durch ein Netz aus 56×38 FE-Schalenelemente modelliert und die Längs- und Querversteifungen werden durch Netze aus 56×6 bzw. 38×6 FE-Schalenelementen modelliert. Als Ansatzfunktion wird für alle Schalenelemente ein REISSNER-MINDLIN Ansatz verwendet [81]. Die versteifte Platte ist in sechs Substrukturen unterteilt. Die Untersuchung erfolgt unter Annahme von

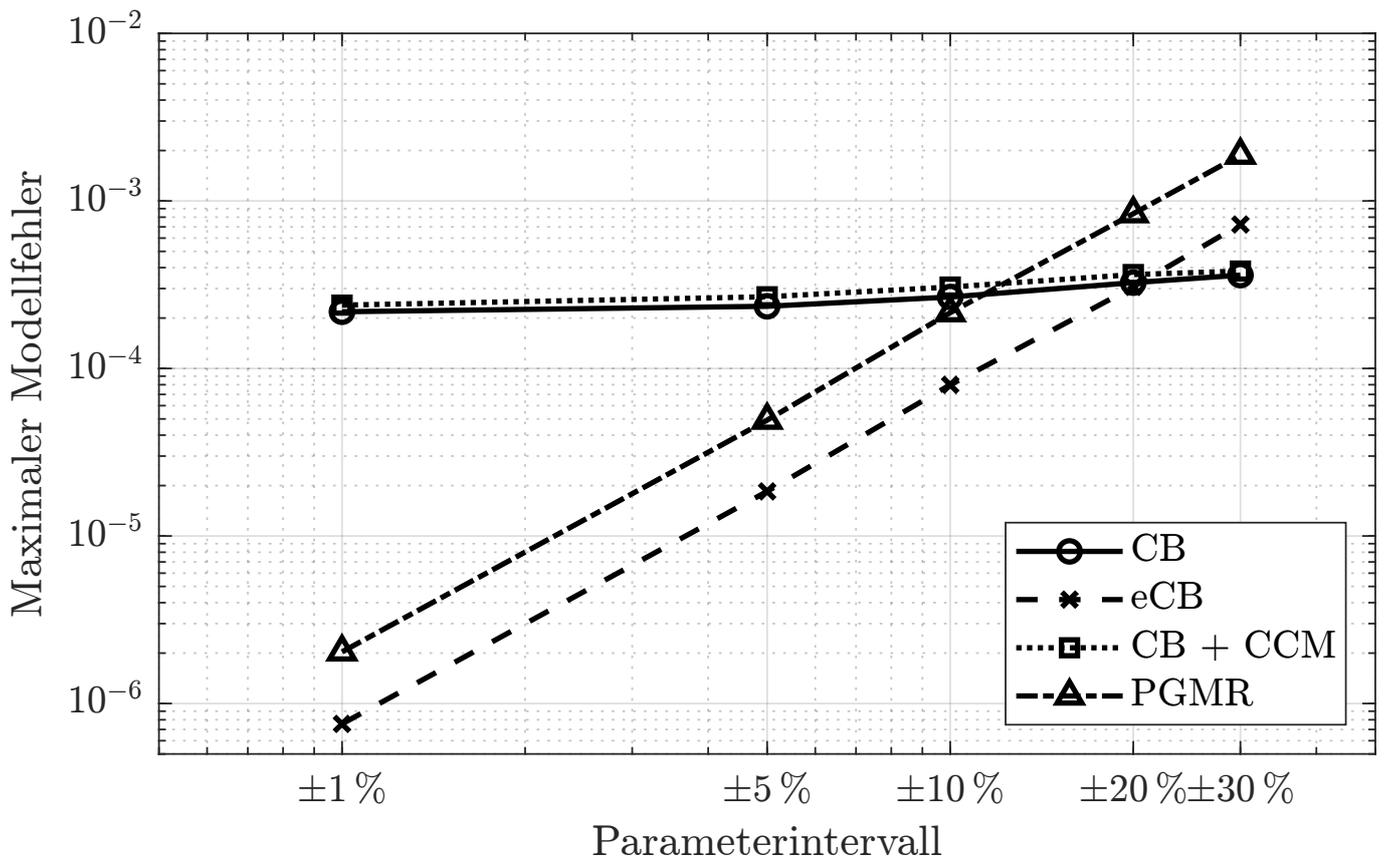


Abbildung 4.7.: Darstellung des 95. Perzentils des maximalen relativen Modellfehlers zwischen den ersten 20 Eigenfrequenzen des Vollmodells mit denen der reduzierten Modelle in Abhängigkeit der Höhe der Parameteränderung für die einseitig gelagerte Platte.

Frei-Frei-Randbedingungen.

In [15] werden für jede Substruktur eine unterschiedliche Anzahl an Substruktur-Eigenmoden betrachtet. Für die eCB-Methode reichen insgesamt $r_{eCB} = 50$ Substruktur-Eigenmoden aus, um den relativen Fehler unterhalb des gewählten Schwellwerts von 10^{-3} zu halten. Für die CB-Methode reichen $r_{CB} = 50$ hierfür nicht aus. Die Anzahl der Substruktur-Eigenmoden für die CB-Methode erfolgt iterativ und berücksichtigt den maximalen relativen Approximierungsfehler von 10^{-3} . Die Verteilung der Substruktur-Eigenmoden für die CB- und eCB-Methode sind in Tabelle 4.5 aufgelistet.

Bei der zusätzlichen Reduktion der Kopplungsfreiheitsgrade auf Basis des CB-reduzierten Modells werden die ersten 60 Eigenmoden berücksichtigt. Die Auswahl der 60 Eigenmoden für Reduktion der Kopplungsfreiheitsgrade erfolgt iterativ und berücksichtigt den maximalen relativen Approximierungsfehler von 10^{-3} . Zur Vergleichbarkeit mit der eCB-Methode werden für die PGMR-Methode die ersten 50 Eigenmoden des zusammengesetzten Systems verwendet, um jede Substruktur zu

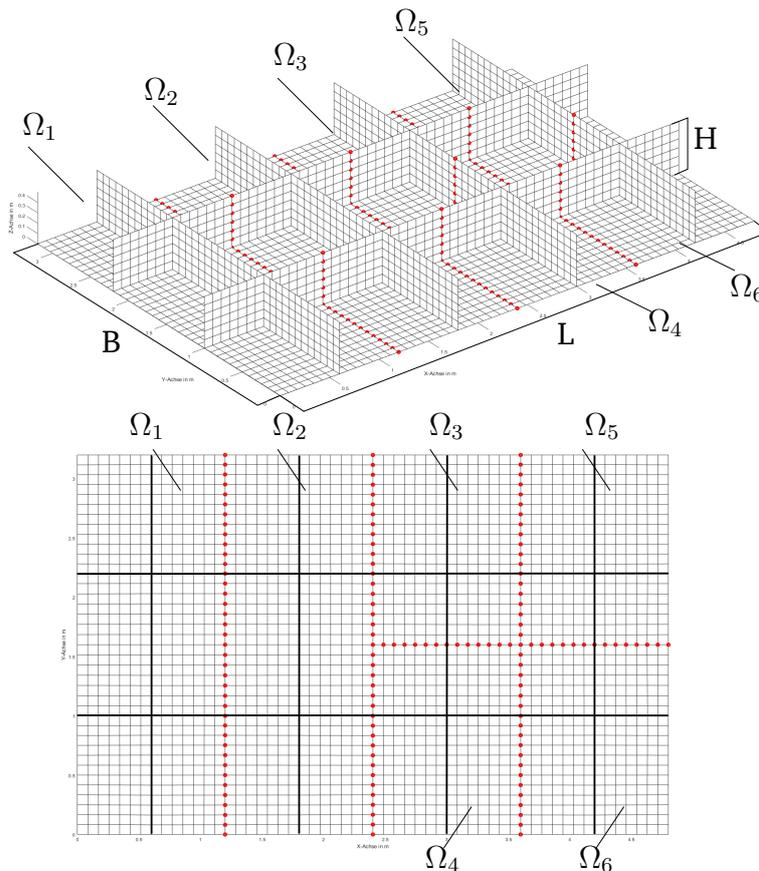


Abbildung 4.8.: Darstellung des versteiften Plattensystems aus [15]

reduzieren. Die Anzahl der modalen und physikalischen Freiheitsgrade sowie die resultierende Matrixgröße des zusammengesetzten Systems für die vier verglichenen Methoden sind in Tabelle 4.6 aufgelistet. Die Reduktion mit der PGMR-Methode führt zu einer ca. 24-mal größeren Reduktion im Vergleich zur eCB-Methode und ca. 4,6-mal größeren Reduktion im Vergleich zur CB-Methode mit zusätzlicher Reduktion der Koppelfreiheitsgrade.

In Tabelle 4.7 werden die Berechnungszeiten zur Auswertung einer Parameterkombination für die vier untersuchten Methoden verglichen. Der Prozess wird für alle Methoden mit der gleichen Parameterkombination 100-mal durchgeführt. Die Bewertung erfolgt wie im ersten Anwendungsbeispiel am Mittelwert der Berechnungszeiten. Durch die größere Reduktion der Systemmatrizen bei der PGMR-Methode ist eine Auswertung ca. 3,3-mal schneller als beim CB+CCM reduziertem System und ca. 50-mal schneller als das eCB reduzierten Systeme.

Zur Analyse, wie sich die verschiedenen Reduktionsmethoden auf den Approximierungsfehler aus-

Tabelle 4.4.: Abmessungen und Materialeigenschaften der versteiften Platte

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
Länge	L	4,8	m
Breite	B	3,2	m
Dicke	h	0,03	m
E-Modul	E	210	GPa
Poissonzahl	ν	0,3	-
Dichte	ρ	7850	kg/m ³

Tabelle 4.5.: Anzahl der Substruktureigenmoden r^S für das CB- und eCB-Verfahren in Anlehnung an die in [15] verwendeten Werte

Substruktur S	1	2	3	4	5	6	Gesamt
Moden r_{CB}^S	58	34	12	12	22	22	160
Moden r_{eCB}^S	20	8	3	3	8	8	50

wirken, werden die Eigenfrequenzen des Vollmodells mit denen der reduzierten Modelle verglichen. In Abbildung 4.9 ist der relative Fehler für die ersten 20 Eigenfrequenzen für den unveränderten Zustand abgebildet. Der Approximierungsfehler der PGMR-Methode ist für den unveränderten Zustand vernachlässigbar. Die PGMR-Reduktion im unveränderten Zustand entspricht der modalen Transformation des Vollmodells und hat somit die gleichen Eigenfrequenzen. Für die dynamischen Eigenmoden (Mode 7 bis Mode 20) ist der relative Fehler des eCB-reduzierten Modells im Durchschnitt zwei Größenordnungen kleiner als der des CB-reduzierten Modells. Für dieses Anwendungsbeispiel ist darüber hinaus ein Unterschied zwischen dem relativen Fehler des CB-reduzierten Modells und der Erweiterung durch die Reduktion der Koppelfreiheitsgrade (CB + CCM) zu erkennen. Das Verhalten an den Koppelstellen zwischen den Substrukturen lässt sich somit nicht komplett über die verwendeten $m_{CC} = 60$ Moden beschreiben. Der relative Fehler für alle betrachteten Reduktionsmethoden bleibt unter der Grenze von 10^{-3} . Die reduzierten Modelle sind somit in der Lage, das dynamische Verhalten genau abzubilden.

Die Auswirkung einer Parameteränderung auf den Approximierungsfehler hängt von der verwendeten Reduktionsmethode, der Höhe der Parameteränderung und der Sensitivität der Transformationsmatrix in Bezug auf den Parameter ab. Zum Vergleich der Genauigkeit der vier Reduktionsmethoden,

Tabelle 4.6.: Größe der reduzierten Systemmatrizen des versteiften Plattensystems

PMOR Methode	Modale und physikalische Freiheitsgrade	Matrixgröße
CB	$r_{CB} = 160, n_{CB} = 1152$	1312×1312
eCB	$r_{eCB} = 50, n_{eCB} = 1152$	1202×1202
CB + CCM	$r_{CB} = 160, m_{CC} = 60$	232×232
PGMR	$m_{MS} = 50$	50×50

Tabelle 4.7.: Vergleich der Auswertungszeiten für eine Parameterkombination für die vier untersuchten PMOR-Methoden für das versteifte Plattensystem

Methode	CB	eCB	CB + CCM	PGMR
Berechnungszeit in ms	255,65	219,36	14,61	4,38

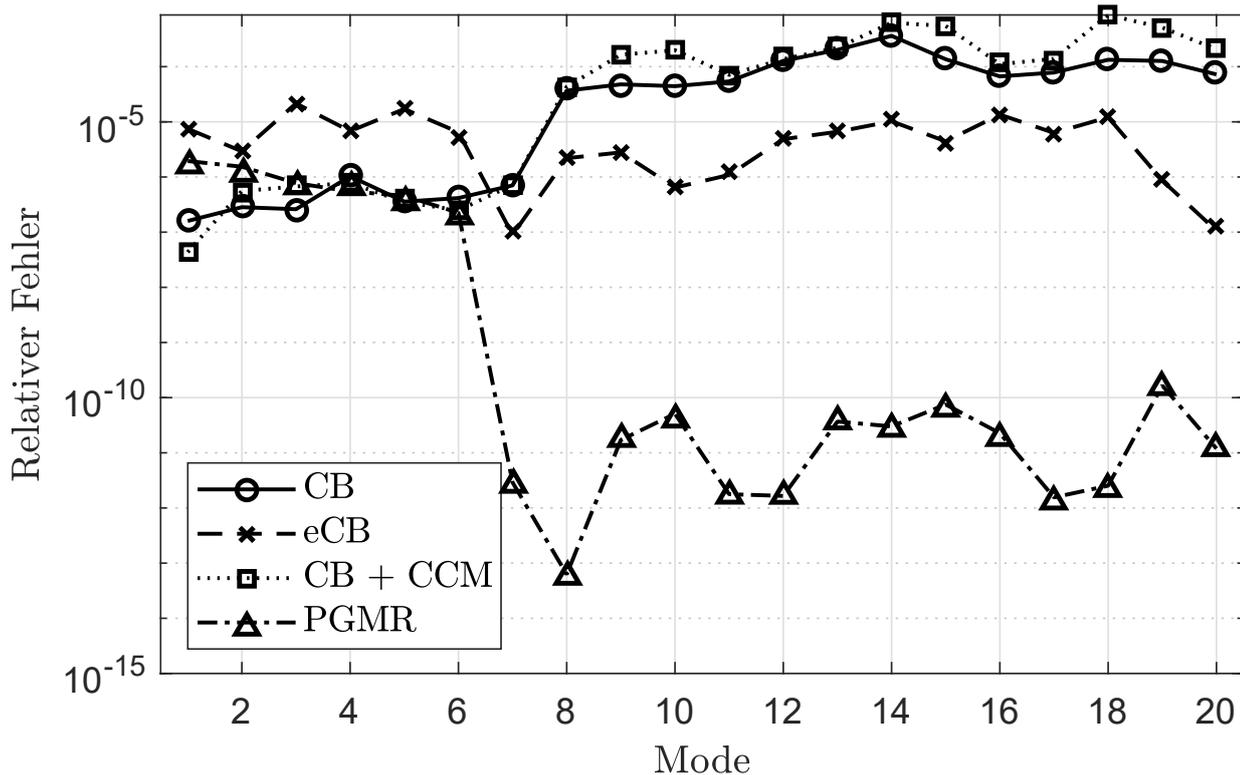


Abbildung 4.9.: Vergleich des relativen Fehlers zwischen den ersten 20 Eigenfrequenzen des unveränderten Vollmodells der versteifte Platte mit denen der vier reduzierten Modellen

werden mit der in Gleichung (4.9) angegebenen Parametrisierung die Massen- und Steifigkeitsmatrizen unter Verwendung des Parametervektors $\theta^S = [1 + \tilde{\theta}, 1 + \tilde{\theta}]^T$ verändert. Die Parameterverteilung für die einzelnen Substrukturen ist in Tabelle 4.8 gegeben.

Tabelle 4.8.: Parameteranpassung $\tilde{\theta}$ zur Untersuchung des Einflusses von Parameteränderungen auf den Approximierungsfehler der reduzierten Modelle des versteiften Plattensystems

Substruktur S	1	2	3	4	5	6
Parameteränderung $\tilde{\theta}_M^S$	+0.05	+0.05	+0.05	+0.05	+0.05	+0.05
Parameteränderung $\tilde{\theta}_K^S$	-0.05	-0.05	+0.05	-0.05	+0.05	+0.05

In Abbildung 4.10 ist der relative Fehler für den Entwicklungspunkt θ für alle untersuchten Methoden für die ersten 20 Eigenfrequenzen dargestellt. Der relative Fehler der Eigenfrequenzen wird über den Vergleich mit dem angepassten Vollmodell bestimmt. Für alle untersuchten Methoden liegt der Fehler unterhalb der gesetzten Grenze von 10^{-3} . Die Parameteränderung führt bei der PGMR-Methode zu einer Erhöhung des Modellfehlers im Vergleich zum unveränderten Modell aus Abbildung 4.9. Der resultierende Modellfehler liegt nach der Parameteränderung in der gleichen Größenordnung wie der des CB-reduzierte Systems. Die untersuchte Parameterkombination hat somit einen großen Einfluss auf das globale Verhalten der versteiften Platte. Das eCB-reduzierte Modell hat für diese Parameterkombination den niedrigsten relativen Fehler. Aufgrund der Unabhängigkeit der Substrukturmatrizen des CB-reduzierten Modells vom Parametervektor, kommt es nur zu geringen Änderungen des relativen Fehlers im Vergleich zum unveränderten Fall. Für das Modell mit den reduzierten Koppelstellen hingegen ist ein Anstieg des relativen Fehlers zu erkennen. Die Transformationsmatrix zur Reduktion der Koppelfreiheitsgrade basiert auf dem Verhalten im unveränderten Zustand, weshalb die Unabhängigkeit der Substrukturmatrizen nicht weiter gewährleistet ist.

Der Einfluss unterschiedlicher Parameterkombinationen auf den Approximierungsfehler wird analog zum ersten Anwendungsbeispiel (vgl. Abschnitt 4.3.1) für das versteifte Platten-Modell untersucht. Die Parameterverteilung wird als gleichverteilt angenommen und das Intervall schrittweise erhöht, um den Einfluss der Höhe der Parameteränderung auf den Approximierungsfehler zu untersuchen. Die Untersuchung erfolgt für Parameterintervalle von $\tilde{\theta} = \pm 0,01$, $\tilde{\theta} = \pm 0,05$, $\tilde{\theta} = \pm 0,1$, $\tilde{\theta} = \pm 0,2$ und $\tilde{\theta} = \pm 0,3$. Mit einem Latin-Hypercube-Ansatz werden insgesamt 1000 Parameterkombinationen pro Parameterintervall erzeugt. Als Grundlage wird der maximale Modellfehler an

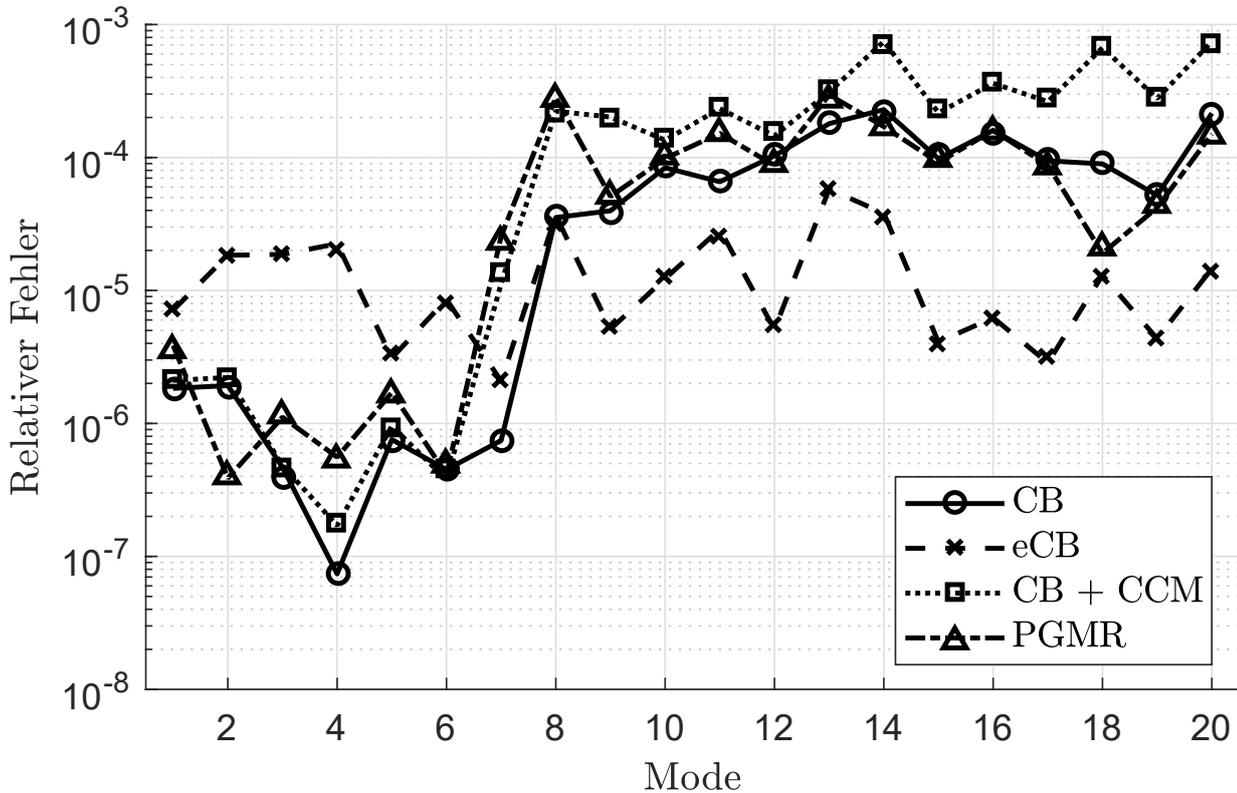


Abbildung 4.10.: Relativer Fehler zwischen den ersten 20 Eigenfrequenzen des angepassten Vollmodells des versteiften Plattensystems mit denen der angepassten reduzierten Modelle für die Parameterkombinationen aus Tabelle 4.8.

jeder Parameterkombination angenommen. Zur Darstellung wird das 95. Perzentil des maximalen Modellfehlers verwendet. Durch den Latin-Hypercube-Ansatz kann eine statistische Unabhängigkeit zwischen den Modellparametern angenommen werden. In Kombination mit dem 95. Perzentil ist somit sichergestellt, dass der maximale Fehler zwischen dem Vollmodell und den reduzierten Modellen für die meistens Parameterkombinationen unterhalb des eingetragenen Wertes liegt.

In Abbildung 4.11 ist das 95. Perzentil in Abhängigkeit der Streubreite der gleichverteilten Parameterkombinationen für die unterschiedlichen Modellreduktionsmethoden abgebildet. Der relative Fehler zwischen dem Vollmodell und dem CB-reduzierten Modell steigt durch die Unabhängigkeit der Substrukturmatrizen vom Parametervektor im Vergleich zu den anderen Methoden langsamer an (vgl. Abschnitt 3.3). Diese Unabhängigkeit lässt sich nicht auf die abgeleiteten Methoden der eCB-Methode (vgl. Abschnitt 3.2.3) und der Reduktion der Koppelfreiheitsgrade (vgl. Abschnitt 3.2.4) erweitern. Eine Erhöhung der Parameteränderung führt bei beiden Methoden zu einem

Anstieg des Approximierungsfehlers. Das gleiche Verhalten lässt sich auch bei der PGMR-Methode beobachten. Im Falle des PGMR-reduzierten Modells sind Parameteränderungen zwischen $\pm 5\%$ bis $\pm 10\%$ möglich, bevor der maximale Modellfehler den Wert von 10^{-3} überschreitet. Mit dem eCB-reduzierten Modell lassen sich Parameteränderungen zwischen $\pm 20\%$ und $\pm 30\%$ untersuchen. Die Auswertung einer Parameterkombination ist allerdings im Vergleich zum PGMR-reduzierten Modell um den Faktor 50 zeitaufwendiger (vgl. Tabelle 4.7).

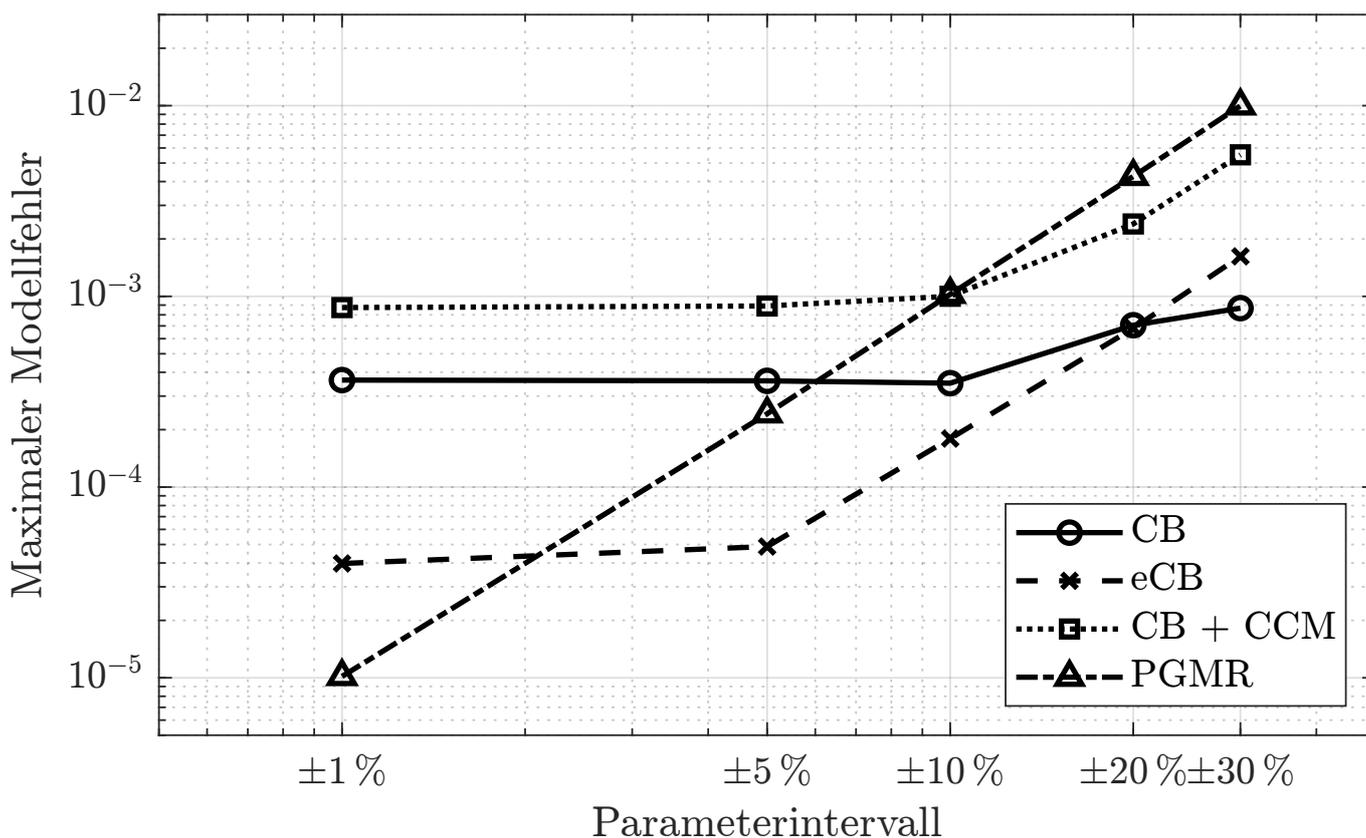


Abbildung 4.11.: Darstellung des 95. Perzentils des maximalen relativen Modellfehlers zwischen den ersten 20 Eigenfrequenzen des Vollmodells mit denen der reduzierten Modelle in Abhängigkeit der Höhe der Parameteränderung für das versteifte Plattensystem.

4.4. Diskussion der Ergebnisse

Der Vergleich mit den bekannten Methoden zeigt, dass die PGMR-Methode eine Erweiterung zum Stand der Wissenschaft darstellt. Die PGMR-Methode ermöglicht je nach Anwendungsbeispiel eine deutliche Beschleunigung der Auswertung des Systemverhaltens um das 2,5- bis 3,3-fache. Im

Vergleich zu den Methoden aus dem Stand der Wissenschaft und hier insbesondere der CB-Methode hängt die Höhe des Approximierungsfehlers des reduzierten Modells bei der PGMR-Methode stärker von der Höhe der Parameteränderung und der Sensitivität der betrachteten Parameter ab. Diese Abhängigkeit entsteht durch die Verwendung der globalen Transformationsmatrix. Die hinreichende Approximation des dynamischen Verhaltens ist somit nur für ein begrenztes Parameterintervall gültig. Für die betrachteten Anwendungsbeispiele können mit der PGMR-Methode Parameteränderungen zwischen 10 % bis 20 % untersucht werden. Für Anwendungen im Bereich der Parameterkalibrierung und der Unsicherheitsquantifizierung ist das in den meisten Fällen ausreichend. Vielmehr ermöglicht die größere Reduktion des Rechenaufwands überhaupt erst die Nutzung der stochastischen Methoden. Für eine Erweiterung des betrachtbaren Parameterraums ist es weiterhin möglich, die PGMR-Methode mit dem in Abschnitt 3.3 beschriebenen Interpolationsansatz zu kombinieren. Ein weiterer Vorteil der PGMR-Methode ist das Wegfallen der rechenintensiven Bestimmung des Verhaltens der Masterfreiheitsgrade in Gleichung (3.32). Für große Systeme mit vielen Substrukturen kann die Invertierung der Steifigkeitsmatrix zu numerischen Problemen führen, die die Genauigkeit der Reduktion einschränken [19]. Darüber hinaus korreliert die Höhe der Reduktion bei CB-basierten Methoden stark mit der Anzahl der Substrukturen und der Diskretisierung an den Koppelstellen. Mit der PGMR-Methode kann somit eine feinere Diskretisierung erfolgen und eine Erhöhung der Anzahl der Substrukturen führt nicht zu einer Vergrößerung des reduzierten Modells. Ein weiterer Vorteil ist das vereinfachte Zusammensetzen der Substrukturmatrizen. Im Fall der CB-basierten Methoden muss jede Substruktur einzeln reduziert und anschließend wieder zusammengesetzt werden. Dieser Prozess ist mühsam und fehlerbehaftet. Im Fall der PGMR-Methode erfolgt das Zusammensetzen automatisch durch das verwendete FE-Programm.

5. Parametrische Modellbildung zur Bewertung des dynamischen Verhaltens von Leiterplatten

Die Elektrifizierung des Antriebsstranges führt neue Komponenten ein, aus denen sich Herausforderungen für eine zuverlässige Systemgestaltung ergeben. Eine dieser neuen Komponenten im Antriebsstrang ist die Leistungselektronik (LE). Im Betrieb sind die Komponenten innerhalb der LE vielfältigen Beanspruchungen ausgesetzt. Abhängig von der jeweiligen Komponente gefährden unterschiedliche Beanspruchungen den sicheren Betrieb. Die Hauptbelastung für Leiterplatten in der LE kommt von vibroakustischen Anregungen vom Elektromotor und der Straße [110]. Durch die vibroakustische Anregung werden die Leiterplatten in Schwingung versetzt, was zu einem Versagen der Leiterplatte selbst, von Kontakten oder sogar zum Ablösen von Komponenten führen kann. Durch ein genaues Verständnis der Schwingungseigenschaften der Leiterplatten können kritische Bereiche auf den Leiterplatten identifiziert und bereits im Entwurfsprozess berücksichtigt werden [111]. Zur genauen Vorhersage der Schwingungseigenschaften ist ein tiefes Verständnis über die Einflüsse von Fertigungstoleranzen und Materialschwankungen notwendig. Diese Unsicherheit lässt sich über eine Parameterunsicherheit in den FE-Modellen abbilden.

Zur Quantifizierung der Parameterunsicherheit wird in diesem Kapitel ein effizientes, numerisches Modell einer Leiterplatte auf Basis der in Kapitel 4 vorgestellten Methode aufgebaut. Im Anschluss erfolgt eine experimentelle Untersuchung an mehreren baugleichen Leiterplatten, um den Einfluss von Fertigungstoleranzen und Materialschwankungen zu analysieren. Mithilfe der in Abschnitt 3.5 vorgestellten Methode des hierarchischen Bayes'schen Modellabgleichs wird eine Quantifizierung der Parameterunsicherheit durchgeführt. Das validierte Leiterplattenmodell bildet die Grundlage zur Beschleunigung von Entwicklungsprozessen und Beherrschung von Entwicklungsrisiken unter Berücksichtigung der Parameterunsicherheit.

5.1. Modellierung von Leiterplatten

Das Hauptproblem bei der Erstellung eines Modells einer Leiterplatte liegt nicht in der Erstellung des geometrischen Modells, sondern in der Festlegung der Eigenschaften insbesondere des E-Moduls, der Poissonzahl und der Dichte. Eine Leiterplatte hat eine komplexe Sandwichstruktur, bei der jede Schicht je nach Funktion aus unterschiedlichen Materialien besteht. In Abbildung 5.1 ist der Aufbau einer Leiterplatte schematisch dargestellt. Leiterplatten bestehen hauptsächlich aus Kupferschichten und isolierendem Material. Das dielektrische Material, was die Kupferschichten zusammenklebt, wird als vorimprägniert (Pre-Preg) bezeichnet. Pre-Preg ist eine dünne Schicht und besteht meist aus FR-4 (engl.: Flame Resistent). FR-4 ist ein Verbundwerkstoff, der aus gewebtem Glasfasergewebe mit einem Epoxidharzbindemittel besteht. Die Kupferschichten und das FR-4 haben den größten Einfluss auf das physikalische Verhalten der Leiterplatte, da sie neben ihren hohen mechanischen Eigenschaften im Vergleich zu anderen weichen Materialien den größten Anteil an Materialvolumen und Masse haben [112].

In den folgenden Abschnitten werden die Grundlagen und Herausforderungen bei der Modellierung von Leiterplatten besprochen. Hierzu zählen zum einem das orthotrope Materialverhalten von FR-4 und die Vereinfachung des FE-Modells über einen Homogenisierungsansatz.

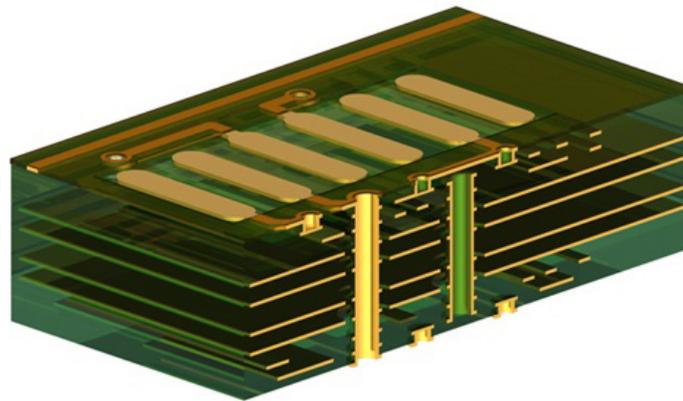


Abbildung 5.1.: Aufbau einer Leiterplatte mit Schichten aus Kuper (gold) und FR-4 (grün) [113]

5.1.1. Orthotropes Materialverhalten

FR-4 ist ein Polymer aus Glasfasern, das durch die Matrix des Laminats gewebt ist und ein bestimmtes Muster bildet. In Abbildung 5.2 sind verschiedene Webarten von FR-4 dargestellt. Basierend auf der Webart des FR-4 unterscheiden sich die elastischen Konstanten je nach Richtung innerhalb jeder Ebene.

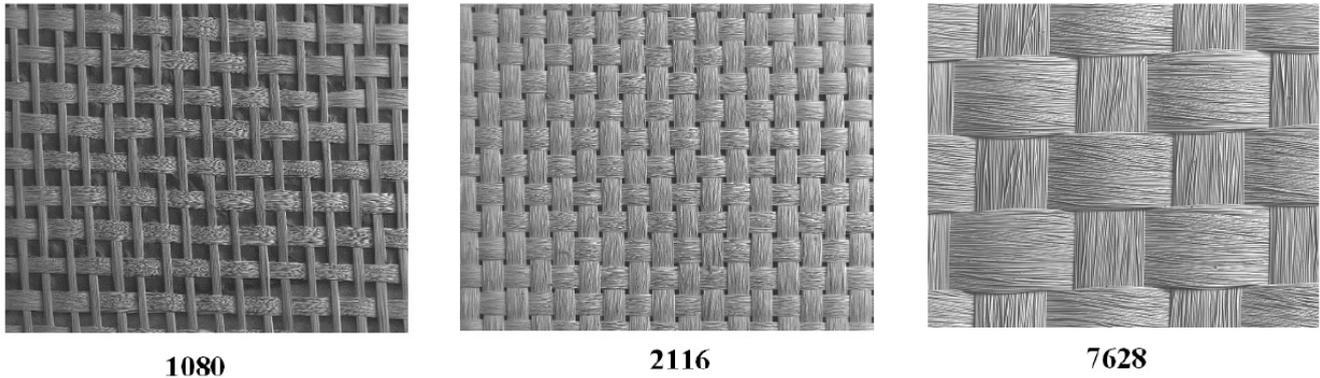


Abbildung 5.2.: Drei verschiedene Webmuster von FR-4 (1080, 2116 und 7628) [114]

Da es bei den Webmustern 1080, 2116 und 7628 einen Unterschied in der Anzahl der Kett- und Schussfasern gibt, ist auch die Steifigkeit in Kett- und Schussrichtung bei all diesen Webmustern verschieden. Die Differenzen können auch auf den Grad an Flexibilität in den beiden Richtungen zurückgeführt werden, der durch Veränderungen der Spannung der Kett- und Schussfaserbündel während des Webens entsteht [115]. FR-4 weist somit orthotropes Materialverhalten auf. Ein orthotropes Material hat drei zueinander senkrechte Achsen der mikrostrukturellen Symmetrie und wird durch neun elastische Konstanten definiert. Die neun elastischen Konstanten sind die drei E-Module E_x , E_y , E_z , die drei Poissonzahlen ν_{yz} , ν_{zx} , ν_{xy} und die drei Schubmodule G_{yz} , G_{zx} , G_{xy} . Durch Einsetzen der neun unabhängigen elastischen Konstanten in die Nachgiebigkeitsmatrix der orthotropen konstitutiven Gleichung (vgl. Gleichung (3.5)), wird die Nachgiebigkeitsmatrix im Hook'schen Gesetz beschrieben über [116]:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 = e_{xx} \\ \epsilon_2 = e_{yy} \\ \epsilon_3 = e_{zz} \\ \epsilon_4 = e_{yz} \\ \epsilon_5 = e_{zx} \\ \epsilon_6 = e_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & -\frac{\nu_{zx}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{zy}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xz}}{E_x} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{yz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{zx}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 = e_{xx} \\ \sigma_2 = e_{yy} \\ \sigma_3 = e_{zz} \\ \sigma_4 = e_{yz} \\ \sigma_5 = e_{zx} \\ \sigma_6 = e_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

mit

$$\frac{\nu_{yz}}{E_y} = \frac{\nu_{zy}}{E_z}, \quad \frac{\nu_{zx}}{E_z} = \frac{\nu_{xz}}{E_x}, \quad \frac{\nu_{xy}}{E_x} = \frac{\nu_{yx}}{E_y}. \quad (5.2)$$

Für die erste Analyse werden die mechanischen Eigenschaften von FR-4 aus der Literatur entnommen [117, 107]. Tabelle 5.1 zeigt alle neun elastischen Konstanten des FR-4 und die Dichte für die erste Analyse des mechanischen Verhaltens.

Tabelle 5.1.: Materialeigenschaften FR-4 [107]

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
E-Modul x-Richtung	E_x	24,4	GPa
E-Modul y-Richtung	E_y	23,3	GPa
E-Modul z-Richtung	E_z	15,00	GPa
Poissonzahl xy	ν_{xy}	0,11	-
Poissonzahl yz	ν_{yz}	0,09	-
Poissonzahl xz	ν_{xz}	0,14	-
Schubmodul xy	G_{xy}	6,3	GPa
Schubmodul yz	G_{yz}	8,4	GPa
Schubmodul xz	G_{xz}	6,6	GPa
Dichte	ρ	1850	kg/m ³

5.1.2. Homogenisierung von Materialeigenschaften

Das Ziel der numerischen Analyse ist die genaue und effiziente Beschreibung des mechanischen Verhaltens auf Grundlage der theoretischen Modellbildung. Eine vollständige Modellierung der

Leiterplatte als FE-Modell würde übermäßige Rechenkapazitäten und -zeit erfordern. Es gibt verschiedene Faktoren, die zu dieser Komplexität beitragen, wie z. B. komplizierte Kupfermuster, eine hohe Anzahl von Lagen und Unterschiede in den Materialeigenschaften der Lagen. Die Homogenisierung der Materialeigenschaften ist eine Methode, um die Struktur der Leiterplatte zu vereinfachen und gleichzeitig die erforderliche Genauigkeit des Modellierungsprozesses beizubehalten. In der Literatur werden verschiedene Methoden und Ansätze zur Homogenisierung beschrieben. In [118, 119] wird die Berechnung und Annäherung von äquivalenten Lamineigenschaften unter Verwendung von VOIGT- und REUSS-Schätzungen beschrieben. Die effektiven Eigenschaften von Kupferlaminaten werden mit Hilfe von FE-Analysen und den Schätzverfahren von VOIGT- und REUSS berechnet, sodass jede effektive Eigenschaft aus ihrem Graphen mit dem Kupfervolumenanteil extrahiert werden kann. Joo et al. [120] erweitern die Homogenisierungsformel um Formeffekte der Kupfermuster wie Linie, Quadrat und Gitter. Am häufigsten wird jedoch die sogenannte „Rule of Mixture“ verwendet [120, 121, 122]. Durch die Anwendung der Regel und der umgekehrten Mischungsregel können die effektiven Materialeigenschaften der Kupferschicht berechnet werden.

Die effektiven Materialeigenschaften in der Ebene E_x und E_y werden nach der Mischungsregel berechnet über

$$E_1 = E_d V_d + E_k V_k, \quad (5.3)$$

wo E_1 der E-Modul in Längsrichtung oder in der Ebene ist. E_d und E_k sind die E-Moduln in Längsrichtung des Dielektrikums bzw. des Kupfers und V_d und V_k sind die Volumenanteile des Dielektrikums bzw. des Kupfers.

Die effektiven Materialeigenschaften außerhalb der Ebene E_z werden nach der umgekehrten Mischungsregel bestimmt über

$$\frac{1}{E_2} = \frac{V_d}{E_d} + \frac{V_k}{E_k}, \quad (5.4)$$

wo E_2 der Elastizitätsmodul in Querrichtung oder außerhalb der Ebene ist.

Bei komplizierteren Mustern steigt die Komplexität der analytischen Gleichungen während die Genauigkeit des Modellierungsprozesses abnimmt [120]. Eine geeignete Diskretisierung des Modells macht das lineare Mischen jedoch für jede komplexe Leiterplatte gültig, da es die komplizierten Muster in regelmäßige Formen zerlegt, in denen die vereinfachten Gleichungen des linearen Mischens implementiert werden können, während die Genauigkeit der Modellierung erhalten bleibt.

5.2. Aufbau des numerischen Leiterplattenmodells

Die verwendete Leiterplatte ist in Abbildung 5.3 abgebildet. Die geometrischen Abmessungen sind (80 mm x 50 mm). Das Grundmaterial der Leiterplatten ist FR-4. In der Abbildung sind die Leiterbahnen und Kontaktstellen für Elektronikkomponenten rot dargestellt.

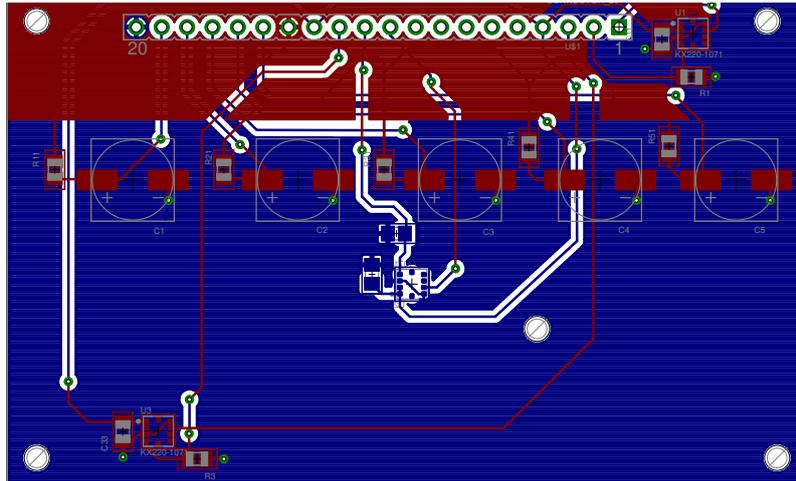


Abbildung 5.3.: ECAD-Darstellung der untersuchten Leiterplatte

Die Schwierigkeit bei der Modellierung von Leiterplatten liegt nicht in der Geometrie der Leiterplatten, sondern vielmehr in der Bestimmung der Modellparameter, wie z.B. des E-Moduls oder des Schubmoduls. Die Geometrie und die Information über den Verlauf der Leiterbahnen wird aus dem ECAD-Modell zu ANSYS[®] exportiert. Als erste Parameteranpassung wird eine lineare Homogenisierung der Materialparameter in ANSYS[®] durchgeführt (vgl. Abschnitt 5.1.2).

Das Materialverhalten des FR-4 wird als orthotrop angenommen und die Startwerte aus Tabelle 5.1 übernommen. Die Materialparameter für Kupfer sind in Tabelle 5.2 aufgelistet.

Tabelle 5.2.: Materialeigenschaften von Kupfer

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
E-Modul	E_C	110,00	GPa
Poissonzahl	ν_C	0,34	-
Dichte	ρ_C	8900	kg/m ³

Für die Berechnung der Anteile von Kupfer und Dielektrikum wird das FE-Modell der Leiterplatte wie in Abbildung 5.4 (links) dargestellt in rechteckige Segmente unterteilt. In jedem dieser Segmente

wird der Volumenanteil von Kupfer und FR-4 bestimmt. Der Anteil an Kupfer in einem Segment wird in Abbildung 5.4 (rechts) über die Farbe dargestellt. Rot symbolisiert hier einen hohen und blau einen niedrigen Anteil an Kupfer. Aus dieser Verteilung werden die äquivalenten Steifigkeiten für das Leiterplattenmodell bestimmt.

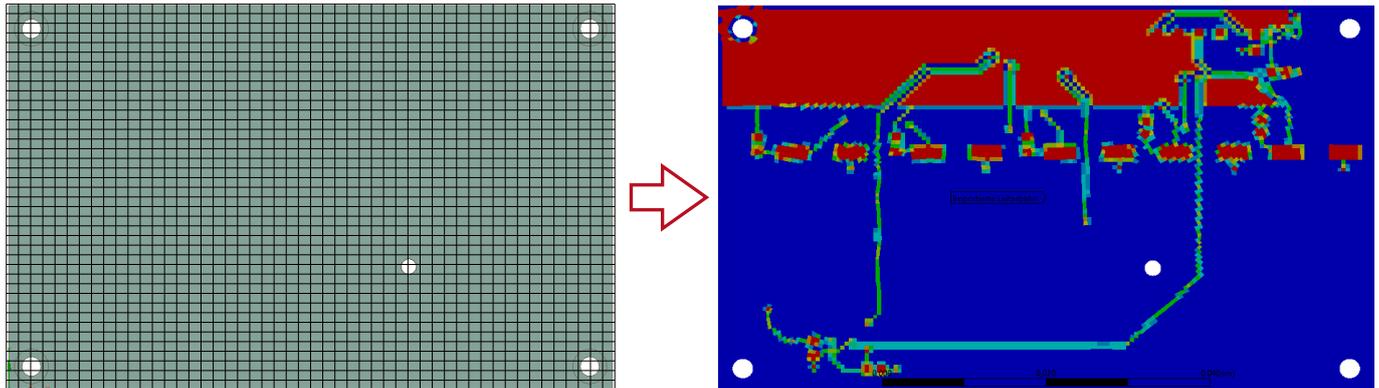


Abbildung 5.4.: (Links) Einteilen des FE-Modells der Leiterplatte in Segmente und Bestimmung des Volumenanteils von Kupfer und FR-4 auf Basis der Verteilung der Leiterbahnen aus dem ECAD-Modell. (Rechts) Abbildung der Leiterplatte in ANSYS® Workbench nach Bestimmen der Volumenanteile.

Das erzeugte FE-Modell der Leiterplatte bildet die Grundlage für alle weiteren Untersuchungen. Der detaillierte Ablauf für den Aufbau des Leiterplattenmodells ist im Anhang A.1.1 zusammengefasst.

Für den Modellabgleich und die Untersuchung der Parameterunsicherheit ist es sinnvoll, nur Modellparameter zu berücksichtigen, die besonders unsicher sind oder eine hohe Sensitivität aufweisen. Die Materialparameter der Leiterplatte sind in gleichem Maße unsicher, daher werden für den Modellabgleich die Parameter mit der höchsten Sensitivität verwendet. In [123, 112, 116] wird gezeigt, dass die Materialparameter E_x , E_y und G_{xy} von FR-4 den größten Einfluss auf die strukturdynamischen Eigenschaften von Leiterplatten haben. Aus diesem Grund werden für den Modellabgleich und die Quantifizierung der Parameterunsicherheit diese drei Modellparameter ausgewählt. Die restlichen Parameter werden für den weiteren Verlauf der Untersuchung konstant gehalten (vgl. Tabelle 5.1 und Tabelle 5.2).

5.3. Parametrische Modellordnungsreduktion und Verifikation des Leiterplattenmodells

In der Leistungselektronik kommt es zu vibroakustischen Anregungen vom Elektromotor und der Straße [110, 124]. Diese Anregung kann bis in einen Frequenzbereich von 8000 Hz Einfluss auf die Leiterplatte nehmen. Um diesen Einfluss zu berücksichtigen, ist eine feine Diskretisierung des FE-Modells notwendig. Die Elementkantenlänge des verwendeten FE-Modells beträgt 0,75 mm. Die Auswahl der Elementkantenlänge erfolgt anhand einer Konvergenzstudie der betrachteten Eigenfrequenzen. Die Untersuchung ist in Anhang A.1 zu finden. Durch die Verwendung sogenannter „Solid-Shell“ Elemente [107] entstehen Systemmatrizen in der Größenordnung von ca. 600.000 Freiheitsgraden. Die Durchführung eines stochastischen Modellabgleichs und die Quantifizierung der Parameterunsicherheit ist bei dieser Matrixgröße sehr rechen- und zeitaufwändig. Zur Steigerung der Effizienz der Untersuchung wird hier die PGMR-Methoden zur parametrischen Modellordnungsreduktion (vgl. Kapitel 4) verwendet. Die Herausforderung bei der Reduktion des Leiterplattenmodells liegt zum einen an der Annahme der orthotropen Materialeigenschaften von FR-4 und zum anderen daran, dass infolge der Homogenisierung der Materialeigenschaften eine Substrukturierung der Leiterplatte auf Basis der Komponenten nur eingeschränkt möglich ist. Eine Substrukturierung mit den Reduktionsmethoden auf Basis des CB-Verfahrens sind daher nicht zielführend. Darüber hinaus erfordert die Bestimmung der Transformationsmatrix für die CB- und eCB-Methode (vgl. Gleichung (3.35) und (3.49)) die Berechnung der Inverse \mathbf{K}_i^{S-1} , was für Systeme mit mehr als 10^5 Freiheitsgraden zu numerischen Problemen führen kann [19]. Daher wird zur Reduktion der Systemmatrizen des FE-Modells der Leiterplatte nur die in Kapitel 4 vorgestellte PGMR-Methode betrachtet. Der verwendete Ansatz basiert auf der Isolierung der Anteile in der Steifigkeitsmatrix, die proportional zu den gewählten Modellparametern E_x , E_y und G_{xy} sind. In erster Näherung wird ein linearer Zusammenhang angenommen. Die Leiterplatte wird für vier Parameterkombinationen gelöst und durch Einsetzen in ein lineares Gleichungssystem können die Anteile der Steifigkeitsmatrix, die proportional zu E_x , E_y und G_{xy} sind, bestimmt werden. Die restlichen Anteile werden in der Matrix \mathbf{K}_{res} zusammengefasst.

Die Transformationsvorschrift basiert auf Gleichung (4.8) und ist gegeben über

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{M}} &= \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} = \mathbf{T}^T \left(\sum_{S=1}^4 \mathbf{M}^S \right) \mathbf{T} = \sum_{S=1}^4 \mathbf{T}^T \mathbf{M}^S \mathbf{T} = \sum_{S=1}^4 \tilde{\mathbf{M}}^S \\ \tilde{\mathbf{K}} &= \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} = \mathbf{T}^T \left(\sum_{S=1}^4 \mathbf{K}^S \right) \mathbf{T} = \sum_{S=1}^4 \mathbf{T}^T \mathbf{K}^S \mathbf{T} = \sum_{S=1}^4 \tilde{\mathbf{K}}^S\end{aligned}\quad (5.5)$$

Der Parametervektor hat die Form $\boldsymbol{\theta} = [\theta_{\text{res}}, \theta_{E_x}, \theta_{E_y}, \theta_{G_{xy}}]$ und der Startpunkt ist gegeben über $\boldsymbol{\theta}^0 = [\theta_{\text{res}}^0, \theta_{E_x}^0, \theta_{E_y}^0, \theta_{G_{xy}}^0] = [1, 1, 1, 1]$.

Durch den verwendeten Reduktionsansatz und die Homogenisierung werden nur eine geringe Anzahl an Moden benötigt, um das dynamische Verhalten der Leiterplatte zu beschreiben. Zur Untersuchung des Übertragungsverhaltens hat sich in der Praxis etabliert, dass Moden zwischen dem 1,5-fachen und 2-fachen der maximal betrachteten Frequenz berücksichtigt werden [107]. Die maximal betrachtete Frequenz in diesem Anwendungsbeispiel liegt bei 8 kHz. Über das LANCZOS-Verfahren werden daher Eigenfrequenzen im Frequenzbereich bis 16 kHz gesucht. Für die verwendete Leiterplatte werden in diesem Frequenzbereich insgesamt 32 Moden bestimmt. Die reduzierten Systemmatrizen $\tilde{\mathbf{M}}$ und $\tilde{\mathbf{K}}$ haben somit eine Dimension von $\mathbb{R}^{r \times r}$ mit $r = 32$.

Zur Verifikation der Reduktion wird ein Abgleich des Vollmodells mit dem reduzierten FE-Modell durchgeführt. Hierzu werden die ersten 20 Eigenfrequenzen des unveränderten Vollmodells der Leiterplatte mit denen des reduzierten Modells verglichen. Zur Darstellung wird der relative Fehler zwischen den Eigenfrequenzen verwendet. Bei der PGMR-Methode handelt es sich im unveränderten Zustand um eine einfache modale Transformation. Aus diesem Grund ist der relative Fehler vernachlässigbar gering. Die Auswertung der Analyse ist in Abbildung 5.5 dargestellt.

Darüber hinaus wird überprüft, wie stark sich Parameteränderungen auf den Approximierungsfehler des reduzierten Modells auswirken und somit die Grenzen der Parametervariation bestimmt. Für die Untersuchung werden die Parameter E_x , E_y und G_{xy} als gleichverteilt angenommen. Zur Untersuchung des Einflusses der Höhe der Parameteränderung wird das Intervall der Parameterverteilung schrittweise erhöht. In diesem Falle werden die Parameterintervalle von $\tilde{\theta} = \pm 0,01$, $\tilde{\theta} = \pm 0,05$, $\tilde{\theta} = \pm 0,1$, $\tilde{\theta} = \pm 0,2$ und $\tilde{\theta} = \pm 0,3$ untersucht. Aus jeder Verteilung werden 200 Parameterkombinationen über einen Latin-Hypercube-Ansatz gezogen, um eine statistische Unabhängigkeit zwischen den Parametern zu erreichen. Der Abgleich erfolgt anhand des relativen Fehlers der ersten

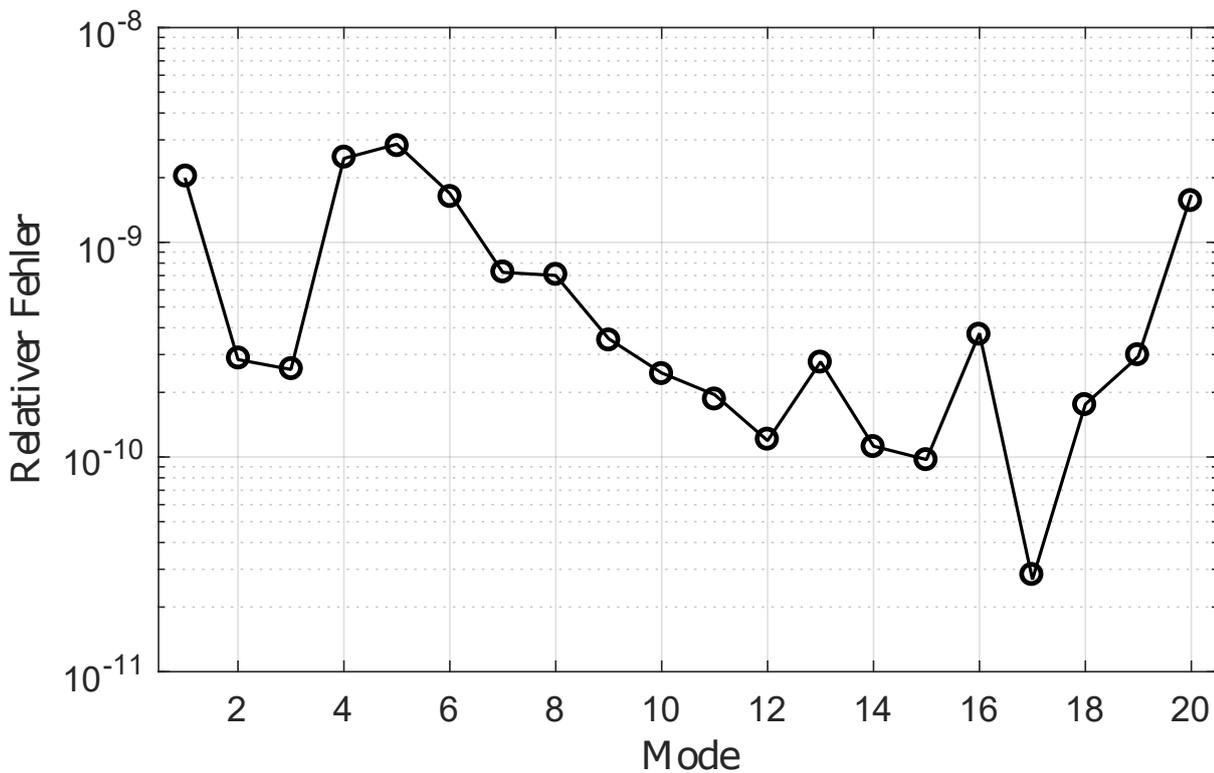


Abbildung 5.5.: Vergleich des relativen Fehlers zwischen den ersten 20 Eigenfrequenzen des unveränderten Vollmodells mit dem reduzierten Modell der Leiterplatte

20 Eigenfrequenzen. Für jede Parameterkombination wird der maximale relative Fehler zwischen den Eigenfrequenzen des Vollmodells und des reduzierten Modells betrachtet. Zur Darstellung wird analog zu den Anwendungsbeispielen aus Kapitel 4 das 95. Perzentil des maximalen Modellfehlers verwendet. In Kombination mit dem Latin-Hypercube-Ansatz kann somit davon ausgegangen werden, dass für die meistens Parameterkombinationen der betrachteten Parameterintervalle der Approximierungsfehler unterhalb dieses Wertes liegt. In Abbildung 5.6 ist das 95. Perzentil des maximalen Modellfehlers in Abhängigkeit der Streubreite der gleichverteilten Parameterkombinationen dargestellt. Der Approximierungsfehler des reduzierten Modells steigt mit der Erhöhung der Parameteränderung an. Dieser Zusammenhang lässt sich auf die lineare Approximation der Materialeigenschaften und die Verwendung der globalen Transformation zurückführen. Die Analyse zeigt, dass für eine Parameteränderungen bis $\pm 20\%$ der maximale Fehler unter dem Wert von 10^{-3} bleibt. Das Modell ist somit für die Durchführung eines Modellabgleichs und einer Quantifizierung der Parameterunsicherheit in diesem Parameterbereich geeignet. Für den Fall, dass bei der Durch-

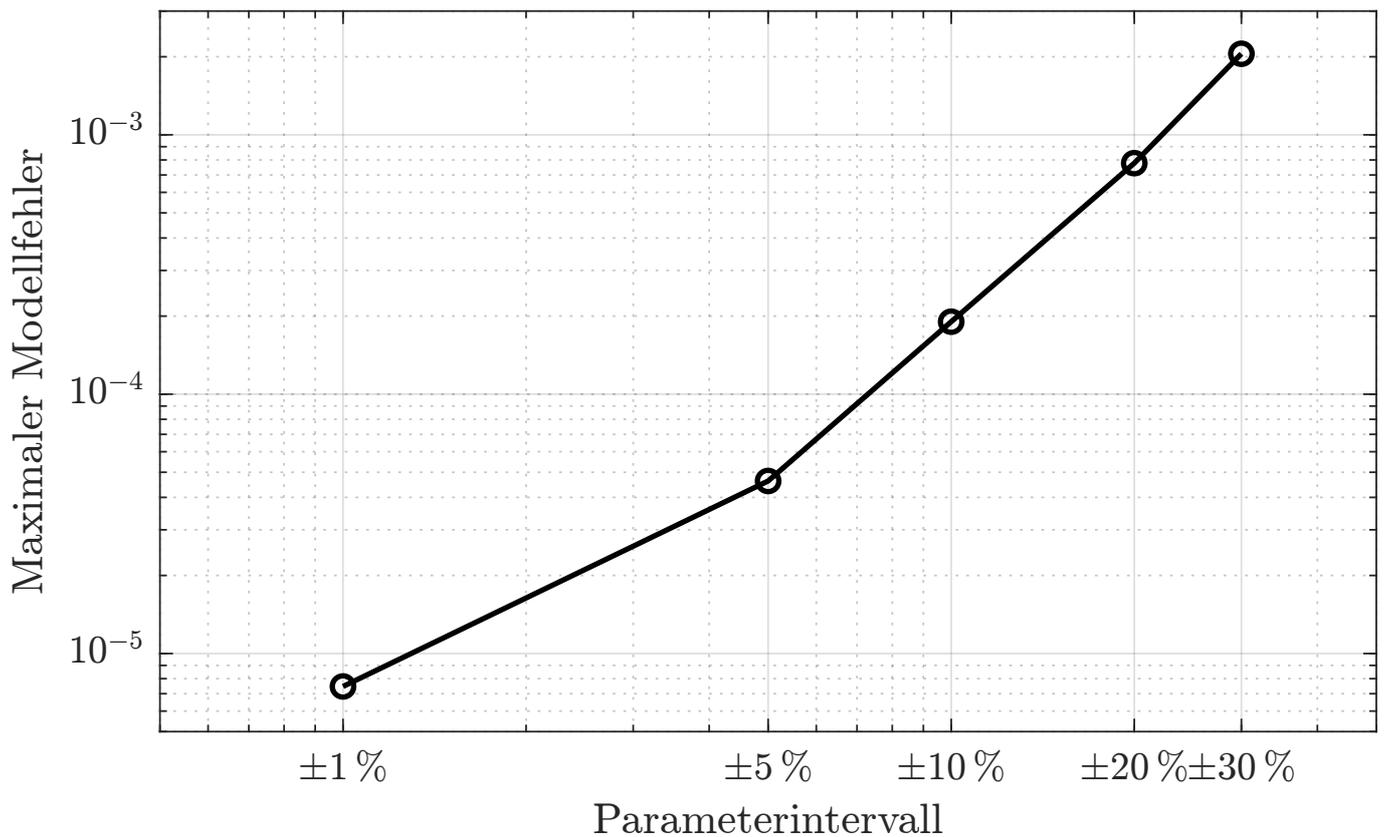


Abbildung 5.6.: 95. Perzentils des maximalen relativen Modellfehlers zwischen den ersten 20 Eigenfrequenzen des Vollmodells der Leiterplatte mit denen des parametrisch reduzierten Modells in Abhängigkeit der Höhe der Parameteränderung.

führung des Modellabgleichs größere Parameteränderungen notwendig werden, kann ein weiterer Stützpunkt für die Reduktion hinzugefügt werden (vgl. Abschnitt 3.3).

6. Experimentelle Untersuchung des dynamischen Verhaltens von Leiterplatten

Nach der Simulation ist die Identifikation der nächste Schritt in der Entwicklung eines validierten Simulationsmodells (vgl. Abbildung 3.1). Zur experimentellen Identifikation der in Kapitel 5 vorgestellten Leiterplatte werden die modalen Parameter (Eigenmoden und Eigenfrequenzen) über eine experimentelle Modalanalyse bestimmt. Zur Analyse des Einflusses von Fertigungstoleranzen und Materialschwankungen auf das strukturdynamische Verhalten der Leiterplatten werden insgesamt sieben Proben der Leiterplatte hergestellt und untersucht.

6.1. Versuchsaufbau zur Leiterplatten-Charakterisierung

Die experimentelle Untersuchung des vibroakustischen Verhaltens von Leiterplatten ist aufgrund ihres geringen Gewichts (ca. 13 g) eine Herausforderung. In der Literatur werden unterschiedliche Ansätze verfolgt. In [122] ist die Leiterplatte mit Federn frei-frei gelagert und wird mit einem Piezoaktuator und einem Shaker angeregt. Ein weiterer Ansatz ist die fest-fest Lagerung, wie in [125] beschrieben, bei der die Leiterplatte mit Schrauben auf einer Stahlplatte an einem Shaker befestigt wird. Allerdings weisen beide Ansätze Nachteile auf. Im ersten Fall kann sich der Masseneinfluss des Shakers und des Piezoactuators auf das Systemverhalten auswirken und muss in späteren Simulationen berücksichtigt werden. Im zweiten Fall ist der Einfluss der Anbindungen nur schwierig von dem Verhalten der Leiterplatte selbst zu isolieren. Darüber hinaus ist es das Ziel, die Leiterplatten in einem Frequenzbereich von 50 Hz bis 8000 Hz zu untersuchen, was eine Anregung über einen Shaker schwierig macht. Daher wird in dieser Arbeit ein weiterer Ansatz verwendet. Der Einfluss der Anregungsquelle auf das Schwingungsverhalten wird durch eine Anregung mit einem Lautsprecher minimiert. Als weiterer Schritt erfolgt die Messung kontaktlos über zwei Laser-Doppler-Vibrometer (LDV), um einen Masseneinfluss durch einen Beschleunigungssensor zu verhindern [126].

Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 6.1 schematisch dargestellt. Für die Anregung wird ein Lautsprecher (Visaton AL 200) verwendet. Als Anregungssignal dient ein Chirp-Signal von 50 Hz bis 8000 Hz. Die Messungen der Schwingungsantwort der Leiterplatte erfolgen kontaktlos über ein Einpunkt-Vibrometer (Polytec PVD 100) und ein Scanning-Vibrometer (Polytec PSV-400). Die Prüflinge werden unterhalb des Lautsprechers auf Schaumstoff platziert. Die Messung erfolgt über einen Messspiegel. In Abbildung 6.1 nicht enthalten sind das analoge Filter (Kemo Benchmaster 21M) und der Verstärker (LMS Q-AMP) für den Lautsprecher.

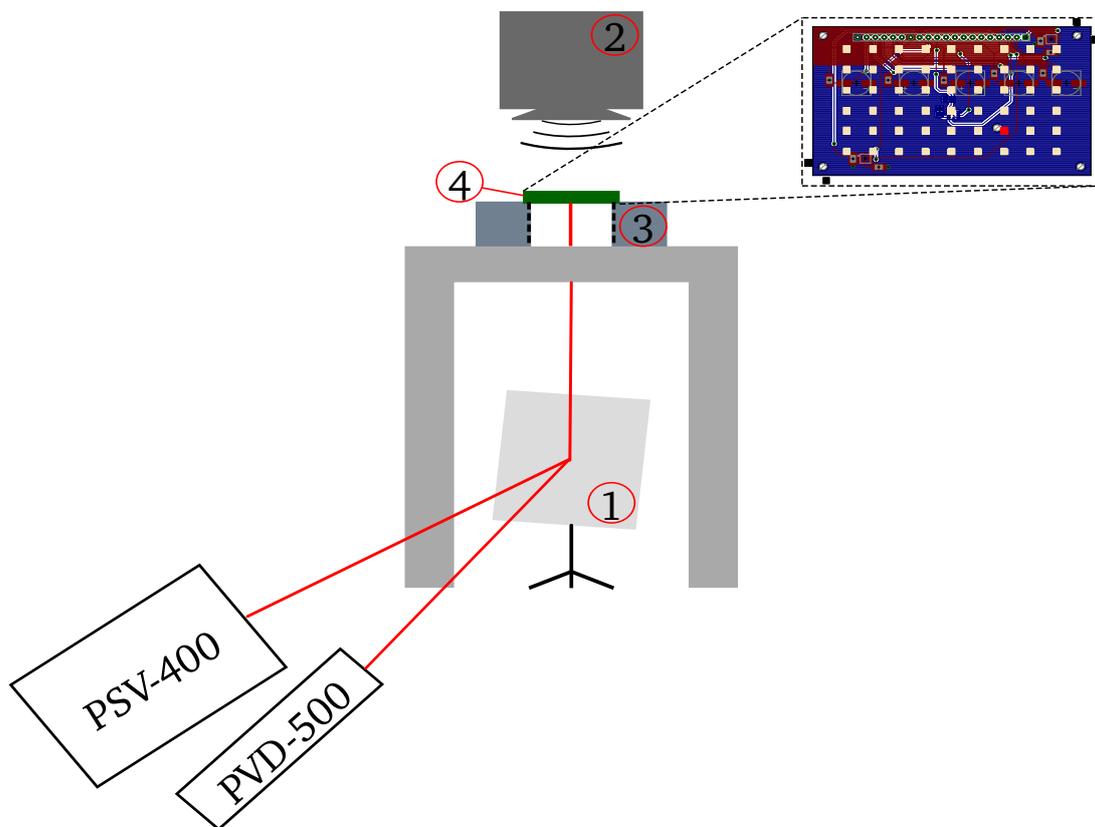


Abbildung 6.1.: Schematische Darstellung des Prüfstandes mit 1) Messspiegel, 2) Lautsprecher Visaton AL 200, 3) Schaumstoff, 4) Leiterplatten Prüfling [23]

Zur statistischen Absicherung der Versuche wird jeder Prüfling fünfmal vermessen. Die insgesamt 35 Messungen werden randomisiert durchgeführt, um zufällige Einflüsse auf die Messergebnisse zu berücksichtigen. Zur Gewährleistung der Vergleichbarkeit sind Nadeln in den Schaumstoff gesteckt, um die gleichmäßige Positionierung der Leiterplatten zu ermöglichen. Bei der Positionierung der Leiterplatten wird darauf geachtet, dass die Nadeln die Leiterplatten nicht berühren, um das Schwingungsverhalten nicht zu beeinflussen. In Abbildung 6.1 sind die insgesamt 54 Messpunkte,

der Referenzpunkt sowie die zur Positionierung verwendeten Nadeln abgebildet. Der Referenzpunkt ist in der Abbildung in hellrot dargestellt. Es erfolgt eine Mittelung über fünf Messungen an jedem Messpunkt. Die Frequenzschrittweite beträgt 0,15 Hz.

6.2. Experimentelle Ergebnisse der Leiterplatten

Aufgrund der Anregung mit einem Lautsprecher ist eine Übertragungsfunktion zwischen der Kraftanregung durch den Lautsprecher und der Systemantwort nicht direkt messbar. Aus diesem Grund werden modale Parameter über eine operationale Modalanalyse (vgl. Abschnitt 3.4) mit dem Kreuzleistungsspektrum der von den LDVs gemessenen Geschwindigkeitssignalen verwendet.

Die Auswertung der Kreuzleistungsspektren erfolgt über den operationalen PolyMAX-Algorithmus [127]. Für die Auswertung der Messungen und die Bewertung der Streuung unter den Leiterplattenprüflingen müssen die modalen Parameter miteinander verglichen werden. Der Abgleich zwischen zwei Messungen erfolgt in der Regel über das sogenannte „Modal Assurance Criterion“ (MAC). Das MAC wird bestimmt über

$$\text{MAC}(\phi_r, \phi_s) = \frac{|\phi_r^T \phi_s|^2}{(\phi_r^T \phi_r) (\phi_s^T \phi_s)} \quad (6.1)$$

wo ϕ_r und ϕ_s zwei identifizierte Eigenvektoren sind. Das MAC nimmt einen Wert zwischen 0 und 1 an, wobei 0 keine Übereinstimmung und 1 eine perfekte Übereinstimmung zwischen den Eigenformen darstellt. Werte größer als 0,9 zeigen eine konsistente Übereinstimmung an, während kleinere Werte eine geringe Ähnlichkeit der beiden Formen hinweisen [128]. In der Praxis wird häufig ein Wert größer als 0,8 als Indikator einer Übereinstimmung verwendet [94].

Das MAC erlaubt jedoch nur den Vergleich zwischen zwei Eigenformen und kann deshalb nicht für einen Vergleich von mehreren Messungen verwendet werden. Um das MAC trotzdem zur Zuordnung der Eigenmoden verwenden zu können, werden zunächst die gemittelten Eigenmoden aus allen Messungen bestimmt. Die identifizierten Eigenmoden der Einzelmessungen werden dann zu den gemittelten Eigenmoden referenziert.

Die Bestimmung der gemittelten Eigenmoden $\bar{\phi}_j$ ist ein iterativer Prozess und wird im Folgenden kurz zusammengefasst. Die Eigenformen sind in der Regel auf die modale Masse oder die maximale Komponente gleich 1 skaliert. Daher muss für jede Eigenmode ϕ_j eine Referenzmodenform $\phi_{j,\text{ref}}$ definiert werden. Die Basis bildet hierbei der sogenannte Modal Scale Factor (MSF) in Gleichung

(6.3). Der MSF skaliert eine Eigenmode ϕ_j für einen direkten Vergleich mit einer anderen ähnlichen Eigenmode ϕ_l , wobei ϕ_l als Referenz angenommen wird. Der MSF kann somit zwischen der Eigenmode j der Probe t ϕ_{j_t} und der Referenzmode $\phi_{j_{\text{ref}}}$ für alle entsprechenden Proben $t = 1, \dots, N^T$ berechnet werden. Anschließend lässt sich die gemittelte Eigenmode $\bar{\phi}_j$ wie folgt herleiten

$$\bar{\phi}_j = \frac{1}{N^T} \sum_{t=1}^{N^T} \text{MSF}_{j_{\text{ref}},t} \phi_{r_t} \quad (6.2)$$

mit

$$\text{MSF}_{tl} = (\phi_t^T \phi_t)^{-1} \phi_l^T \phi_t. \quad (6.3)$$

Dieser Vorgang wird so lange wiederholt, bis sich die gemittelte Eigenmode nicht mehr ändert [129]. Im Anschluss erfolgt ein Abgleich zwischen den gemittelten Eigenmoden und den einzelnen Eigenmoden jeder Messung. Dies erfolgt über ein modifiziertes MAC. Das modifizierte MAC berücksichtigt neben den Eigenvektoren ebenfalls die Eigenfrequenzen, um eine automatisierte Zuordnung zu erleichtern. Das modifizierte MAC lässt sich über

$$\text{MAC}_{rs}^{\text{mod}} = (1 - \gamma) \text{MAC}_{rs} - \gamma \frac{|\omega_s - \omega_r|}{\omega_s} \quad (6.4)$$

beschreiben [130], wobei ω_s und ω_r den Eigenkreisfrequenzen der jeweiligen Eigenmoden entsprechen. Der Faktor γ gewichtet den Einfluss der Eigenkreisfrequenzen zum MAC und wird hier als $\gamma = 0,2$ festgelegt, um den Einfluss der Eigenfrequenzen gering zu halten. Insgesamt können neun Eigenmoden identifiziert werden. Eine Zuordnung erfolgt bei einem Wert von $\text{MAC} > 0,80$. Für geringere Werte wird keine Übereinstimmung zwischen den Moden angenommen.

In Abbildung 6.2 sind die identifizierten, gemittelten Eigenmoden der Leiterplatten abgebildet. Neben der Eigenform sind ebenfalls die mittlere Eigenfrequenz und die Anzahl, wie häufig die jeweilige Eigenform in den Messdaten enthalten ist, dargestellt. Die unterschiedliche Anzahl an identifizierten Moden pro Messung lässt sich dadurch erklären, dass durch Messunsicherheit nicht immer alle Moden durch den Lautsprecher angeregt werden können. Die gemittelten Eigenfrequenzen sind zusätzlich in Tabelle 6.1 aufgelistet.

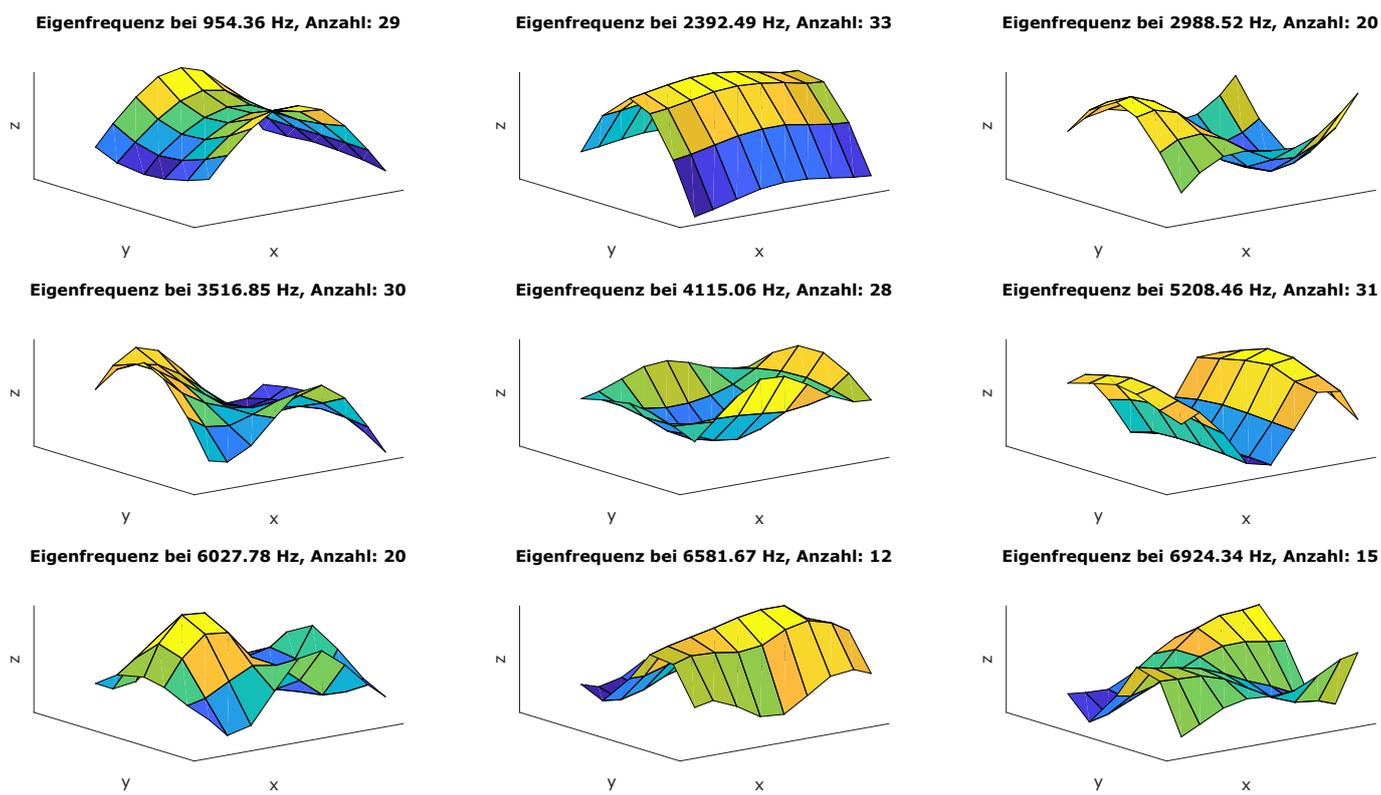


Abbildung 6.2.: Gemittelte experimentell bestimmte Eigenmoden der Leiterplatte mit der mittleren Eigenfrequenz und der Anzahl, wie häufig die Eigenmode in dem Messdatenset enthalten ist.

Tabelle 6.1.: Mittlere identifizierte Eigenfrequenzen \bar{f} der Leiterplatte

Mode	\bar{f} in Hz	Mode	\bar{f} in Hz
1	954,36	6	5208,46
2	2392,49	7	6027,78
3	2988,52	8	6581,67
4	3516,85	9	6924,34
5	4115,06		

Anhand der Eigenfrequenzen lässt sich untersuchen, ob zwischen den Prüflingen ein Unterschied aufgrund von Fertigungstoleranzen und Materialschwankungen auftritt. In Abbildung 6.3 ist die Verteilung der identifizierten Eigenfrequenzen für die einzelnen Prüflinge der Leiterplatte abgebildet. Die Eigenwerte sind auf den Mittelwert normiert, um die Varianz unterhalb der Prüflinge abbilden zu können. Die geringe Varianz zwischen den einzelnen Messungen eines Prüflings lässt auf eine gute Wiederholbarkeit und geringes Messrauschen schließen. Auffällig sind hier vor allem der Prüfling 4

und Prüfling 6. Prüfling 4 liegt im Durchschnitt 3% über dem Mittelwert und Prüfling 6 liegt im Durchschnitt 2% unter dem Mittelwert. Die maximale Varianz zwischen zwei Messungen liegt bei ca. 8%.

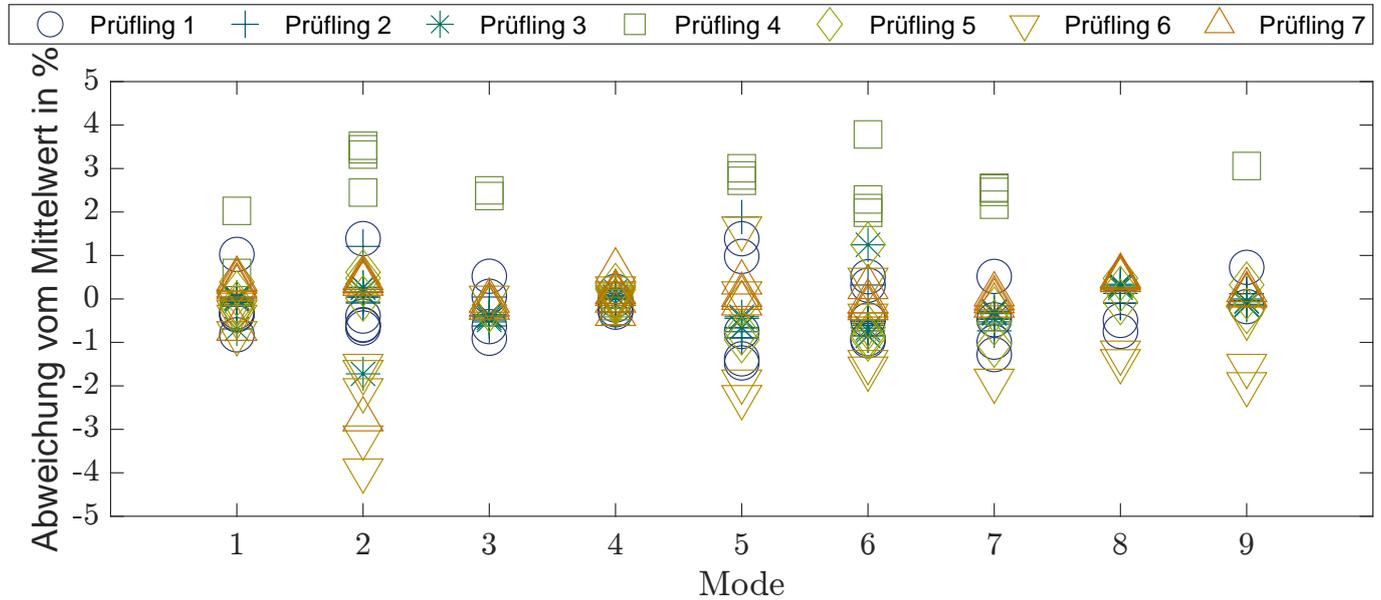


Abbildung 6.3.: Verteilung der experimentell ermittelten Eigenfrequenzen der Leiterplatten in Abhängigkeit der Prüflinge. Die Darstellung ist normiert auf die mittleren Eigenfrequenzen aus Tabelle 6.1.

Aus den Ergebnissen der experimentellen Untersuchung von sieben nominell gleichen Leiterplatten lässt sich schließen, dass es Schwankungen von bis zu 8% im strukturdynamischen Verhalten gibt. Die Ergebnisse motivieren somit eine Untersuchung der Parameterunsicherheit an Leiterplatten mithilfe des numerischen Modells aus Kapitel 5.

7. Quantifizierung der Parameterunsicherheit an Leiterplattenmodellen

Der letzte Schritt zur Erstellung eines validierten, numerischen Modells ist der Abgleich zwischen den numerischen und experimentellen Ergebnissen (vgl. Abbildung 1.1). Aufgrund von Modell- oder Parameterunsicherheit kann es zu Unterschieden zwischen den numerischen und experimentell ermittelten modalen Parametern kommen. Unter der Annahme, dass das numerische Modell das physikalische Verhalten der Leiterplatte abbilden kann, lassen sich diese Differenzen mithilfe eines Modellabgleichs bzw. einer Parameterkalibrierung minimieren. Aufgrund von Fertigungstoleranzen und Schwankungen im Materialverhalten kann es vorkommen, dass sich nominell gleiche Teile in ihrem strukturdynamischen Verhalten unterscheiden. Zur Quantifizierung dieser inhärenten Parameterverteilung eignen sich die in Abschnitt 3.5 vorgestellten Methoden des Bayes'schen Modellabgleichs.

Bei der experimentellen Untersuchung von nominell gleichen Leiterplatten in Kapitel 6 konnte eine Varianz zwischen den Prüflingen der Leiterplatte nachgewiesen werden. Daher wird im Folgenden ein hierarchischer Bayes'scher Modellabgleich durchgeführt. Beim hierarchischen Bayes'schen Modellabgleich wird angenommen, dass jeder Prüfling einen eigenen Parametersatz besitzt. Ziel ist es, die Verteilung der Parametersätze zu bestimmen. Zum Vergleich erfolgt ebenfalls ein Abgleich mit dem klassischen Bayes'schen Modellabgleich, um die Vorteile der hierarchischen Betrachtung hervorzuheben. Als Grundlage dient das in Kapitel 5 erzeugte parametrisch, reduzierte FE-Modell der Leiterplatte.

7.1. Modellabgleich zwischen dem numerischen und experimentellen Modell der Leiterplatte

Bei der Parameterkalibrierung mit experimentell ermittelten, modalen Parametern werden zunächst die numerischen und experimentellen Ergebnisse verglichen. Hierzu wird das numerische Modell mit den Auswertungspunkten der experimentellen Untersuchung verbunden. In der Regel ist das numerische Netz deutlich feiner als das Netz der Auswertungspunkte im Experiment. Daher ist es notwendig, zunächst die numerischen Knoten auszuwählen, die geometrisch am nächsten an den gemessenen Auswertungspunkten liegen. In Abbildung 7.1 ist die Überlagerung des FE-Modells mit den gemessenen Knoten zusehen. Insgesamt werden 54 Knoten des FE-Modells ausgewählt, sodass für die numerisch ermittelten Eigenmoden gilt $\phi^{\text{num}} \in \mathbb{R}^{54 \times r}$.

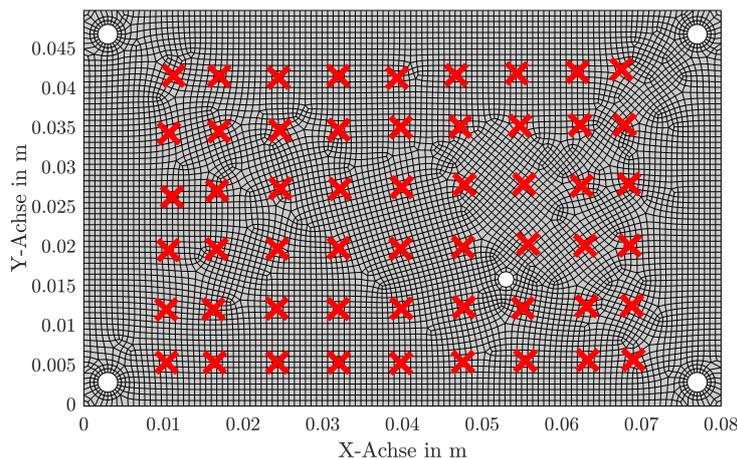


Abbildung 7.1.: FE-Modell der Leiterplatte mit den 54 Messpunkten der experimentellen Modalanalyse

Für den Abgleich ist es weiterhin wichtig, welche der experimentell ermittelten Eigenmoden im Lösungsraum des numerischen Modells enthalten sind. Hierfür wird das in Gleichung (6.1) beschriebene MAC verwendet. Für MAC-Werte größer als 0,8 wird eine Übereinstimmung angenommen. Für die Bestimmung des MACs werden die in Abschnitt 6.2 bestimmten, gemittelten Eigenmoden verwendet. In Abbildung 7.2 ist die MAC-Matrix graphisch dargestellt. Für die Moden 1 bis 3 und 5 bis 7 des Experiments liegt der MAC-Wert über 0,9. Für die Eigenmoden im hohen Frequenzbereich ab 6500 Hz (Eigenmoden des Experiments 8 und 9) liegt der MAC-Wert bei ca. 0,55. Die experimentellen und numerischen Eigenmoden sind somit noch schwach korreliert, werden jedoch

nicht für den Modellabgleich verwendet. Die Mode 4 des Experiments ist nicht in der Simulation enthalten. Aufgrund der hohen Korrelation der restlichen Moden lässt sich diese Mode auf eine Messunsicherheit oder eine Mode des Prüfstandes zurückführen und hat für die weitere Betrachtung keine Relevanz.

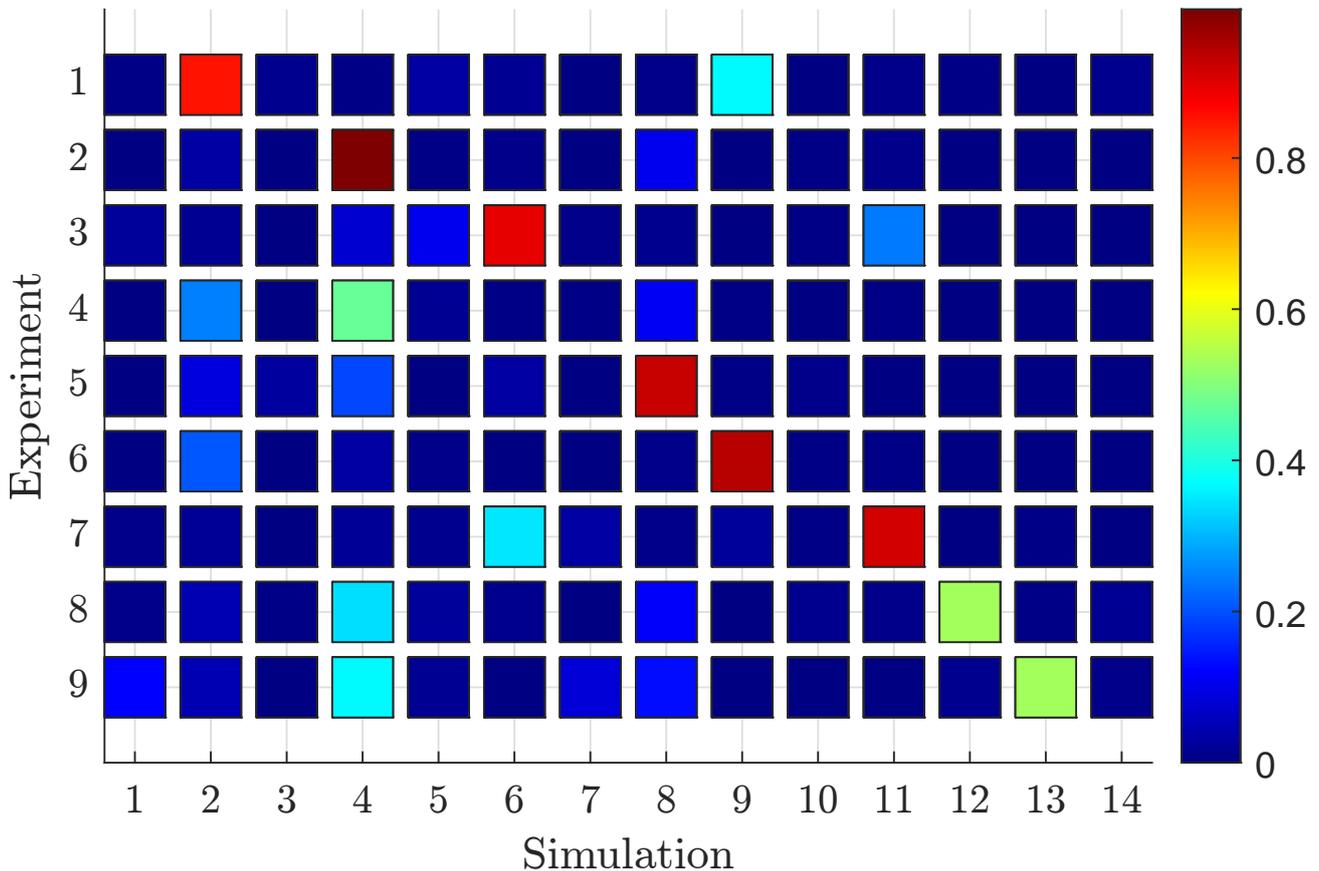


Abbildung 7.2.: MAC-Abgleich zwischen den experimentell ermittelten Eigenmoden aus 6.2 mit den numerisch bestimmten Eigenmoden der Leiterplatte nach der Homogenisierung.

Das MAC bildet die Grundlage zum Abgleich zwischen den numerisch und experimentell ermittelten Eigenfrequenzen. In Tabelle 7.2 sind die mittleren numerisch und experimentell ermittelten Eigenfrequenzen über die Moden zusammengefasst. Hierbei werden nur Eigenfrequenzen miteinander verglichen, deren Eigenmoden einen MAC-Wert größer als 0,8 haben. Der durchschnittliche Fehler zwischen den Eigenfrequenzen beträgt 3,1 %. Der initiale Abgleich zwischen den numerischen und experimentellen Ergebnissen zeigt, dass das numerische Modell der Leiterplatte in der Lage ist, das strukturdynamische Verhalten abzubilden. Die Untersuchung bildet den Ausgangspunkt für die Parameterkalibrierung im folgenden Abschnitt.

7.2. Parameterkalibrierung der Leiterplatte mit experimentell ermittelten modalen Parametern

Für die Parameterkalibrierung werden die in Abschnitt 3.5 vorgestellten Methoden des Bayes'schen Modellabgleichs verwendet. Zum Vergleich wird sowohl ein Abgleich mit dem klassischen Bayes'schen Ansatz, als auch mit dem hierarchischen Bayes'schen Ansatz durchgeführt. Der Vergleich dient dazu, die Vorteile einer hierarchischen Betrachtung bei Strukturen mit einer inhärenten Parameterverteilung hervorzuheben. Zur Vergleichbarkeit der Ergebnisse erfolgt die Implementierung für beide Ansätze in der PyMC3-Toolbox [105].

Der eigentliche Abgleich zwischen den numerischen und experimentellen modalen Parametern erfolgt über eine Verlustfunktion in der Likelihood-Funktion im Satz von Bayes (vgl. Gleichung (3.68)). Der Aufbau der Verlustfunktion für den nicht-hierarchischen Bayes'schen Modellabgleich wird in den Gleichungen (3.73)-(3.77) beschrieben. Der Parametervektor für den Modellabgleich ist $\theta = [\theta_{\text{res}}, \theta_{E_x}, \theta_{E_y}, \theta_{G_{xy}}]$, wobei lediglich θ_{E_x} , θ_{E_y} und $\theta_{G_{xy}}$ angepasst werden und θ_{res} konstant gehalten wird. Die Anfangswahrscheinlichkeitsverteilung der Parameter $p(\theta)$ wird als normalverteilt mit Mittelwert $\mu = 1$ und Standardabweichung $\sigma = 0,2$ angenommen. Für den hierarchischen Modellabgleich wird der Parametervektor θ aufgeteilt, sodass jeder Prüfling von einem separaten Parametervektor θ_t abhängt. Die Messdaten \mathbf{D} werden ebenfalls nach den Prüflingen \mathbf{D}_t aufgeteilt. Die Hyper-Prior-Verteilung $p(\mu_\theta, \Sigma_\theta)$ wird als normalverteilt angenommen mit dem Mittelwert $\mu_\theta = 1$ und der Standardabweichung $\Sigma_\theta = 0,2$. Die Bestimmung der Posterior-Verteilung $p(\theta|\mathbf{D})$ für den nicht-hierarchischen Bayes'schen Modellabgleich und $p(\mu_\theta, \Sigma_\theta, \theta|\mathbf{D})$ für den hierarchischen Bayes'schen Modellabgleich erfolgt über den TMCMC-Algorithmus. In jeder Iteration j des TMCMC-Algorithmus werden $n_s = 3.000$ Samples gezogen. Damit sichergestellt ist, dass für jede Parameterkombination die richtigen experimentellen und numerischen Eigenfrequenzen miteinander verglichen werden, wird in jeder Iteration ein MAC-Abgleich durchgeführt. Für einen MAC-Wert größer als 0,8 wird eine Übereinstimmung angenommen. Sind für eine Parameterkombination nicht alle identifizierten Moden enthalten, wird der Likelihood-Funktion ein hoher Wert zugewiesen. Hierdurch wird verhindert, dass sich die Parameterverteilung in diese Richtung entwickelt.

Die Parameteränderung für die drei Abgleichparameter θ_{E_x} , θ_{E_y} und $\theta_{G_{xy}}$ für den hierarchischen Modellabgleich sind in der Tabelle 7.1 zusammengefasst. Die Parameteränderung für den nicht-

hierarchischen Modellabgleich sind im Anhang A.1 zu finden. Die Höhe der mittleren Parameteränderung spiegelt die bereits gute Abbildung des strukturdynamischen Verhaltens des ursprünglichen FE-Modells wider, da das FE-Modell in seiner ursprünglichen Parametrierung das gemessene Verhalten hinreichend genau abbildet. Die größte Änderung erfolgt bei $\theta_{G_{xy}}$ um $-4,04\%$. Durch die geringe Parameteränderung ist darüber hinaus sichergestellt, dass der Approximierungsfehler des reduzierten Modells gering ist (vgl. Abbildung 5.6).

Tabelle 7.1.: Materialeigenschaften FR-4 nach Modellabgleich - Werte des hierarchischen Modellabgleichs

Parameter	Symbol	Wert	Einheit	Änderung
E-Modul x	E_x	24,3	GPa	$-0,45\%$
E-Modul y	E_y	23,5	GPa	$+0,91\%$
Schubmodul xy	G_{xy}	5,98	GPa	$-4,04\%$

In Tabelle 7.2 ist der Vergleich zwischen dem Mittelwert der gemessenen und berechneten Eigenfrequenzen nach dem Modellabgleich zusammengefasst. Der Modellabgleich mit beiden Ansätzen führt zu einer weiteren Steigerung der Genauigkeit in der Abbildung des mittleren Verhaltens der Leiterplatten. Die Unterschiede zwischen den beiden Ansätzen sind minimal. Der durchschnittliche absolute Fehler zwischen den Eigenfrequenzen beträgt $0,49\%$ für den nicht-hierarchischen und $0,51\%$ für den hierarchischen Modellabgleich. Die abgeglichenen Leiterplattenmodelle sind somit in der Lage, das mittlere strukturdynamische Verhalten der Leiterplatte abzubilden.

7.3. Quantifizierung der Parameterunsicherheit

Neben der Vorhersage des mittleren Verhaltens der Leiterplatten ist die Quantifizierung der Parameterunsicherheit Ziel des stochastischen Modellabgleichs. Ein weiterer Aspekt ist die Qualität der Abbildung des gemessenen Verhaltens auf Basis der identifizierten Parameterverteilung.

In Abbildung 7.3 sind die identifizierten Parameterverteilungen der Parameter E_x , E_y und G_{xy} für den nicht-hierarchischen und hierarchischen Modellabgleich dargestellt. Wie bereits im vorherigen Abschnitt besprochen, identifizieren beide Ansätze in etwa die gleichen Mittelwerte für die Parameter. Im Vergleich zum hierarchischen Ansatz ist die Varianz der Parameterverteilung für

Tabelle 7.2.: Vergleich Mittelwert gemessene und simulierte Eigenfrequenzen nach Homogenisierung und nach Durchführung des nicht-hierarchischen (NH) und des hierarchischen (H) Bayes'schen Modellabgleichs

Mode	Experiment		Simulation Start		Simulation Final (NH)		Simulation Final (H)	
	\bar{f} in Hz	\bar{f} in Hz	Fehler in %	\bar{f} in Hz	Fehler in %	\bar{f} in Hz	Fehler in %	
1	954,36	980,22	2,59	957,81	0,36	957,58	0,34	
2	2392,49	2471,22	3,29	2398,85	0,27	2398,84	0,27	
3	2988,52	3055,17	2,3	2957,87	-1,03	2957,41	-1,04	
4	3516,85	-	-	-	-	-	-	
5	4115,06	4307,22	4,67	4148,41	0,81	4149,35	0,83	
6	5208,46	5315,70	2,04	5195,25	-0,25	5193,99	-0,28	
7	6027,78	6233,00	3,57	6013,24	-0,24	6009,61	-0,30	
8	6581,67	-	-	-	-	-	-	
9	6924,34	-	-	-	-	-	-	

den nicht-hierarchischen Ansatz deutlich kleiner. Wie in Abschnitt 3.5 beschrieben, kann es beim nicht-hierarchischen Bayes'schen Modellabgleich zu einer Unterschätzung der inhärenten Parameterverteilung kommen, wenn Messdaten von mehreren nominell gleichen Prüflingen betrachtet werden. Daher ist es notwendig zu untersuchen, ob sich die größere Varianz in der identifizierten Parameterverteilung des hierarchischen Bayes'schen Modellabgleichs aus einer wahren Varianz in der Parameterverteilung ergibt oder der Algorithmus nicht konvergiert ist.

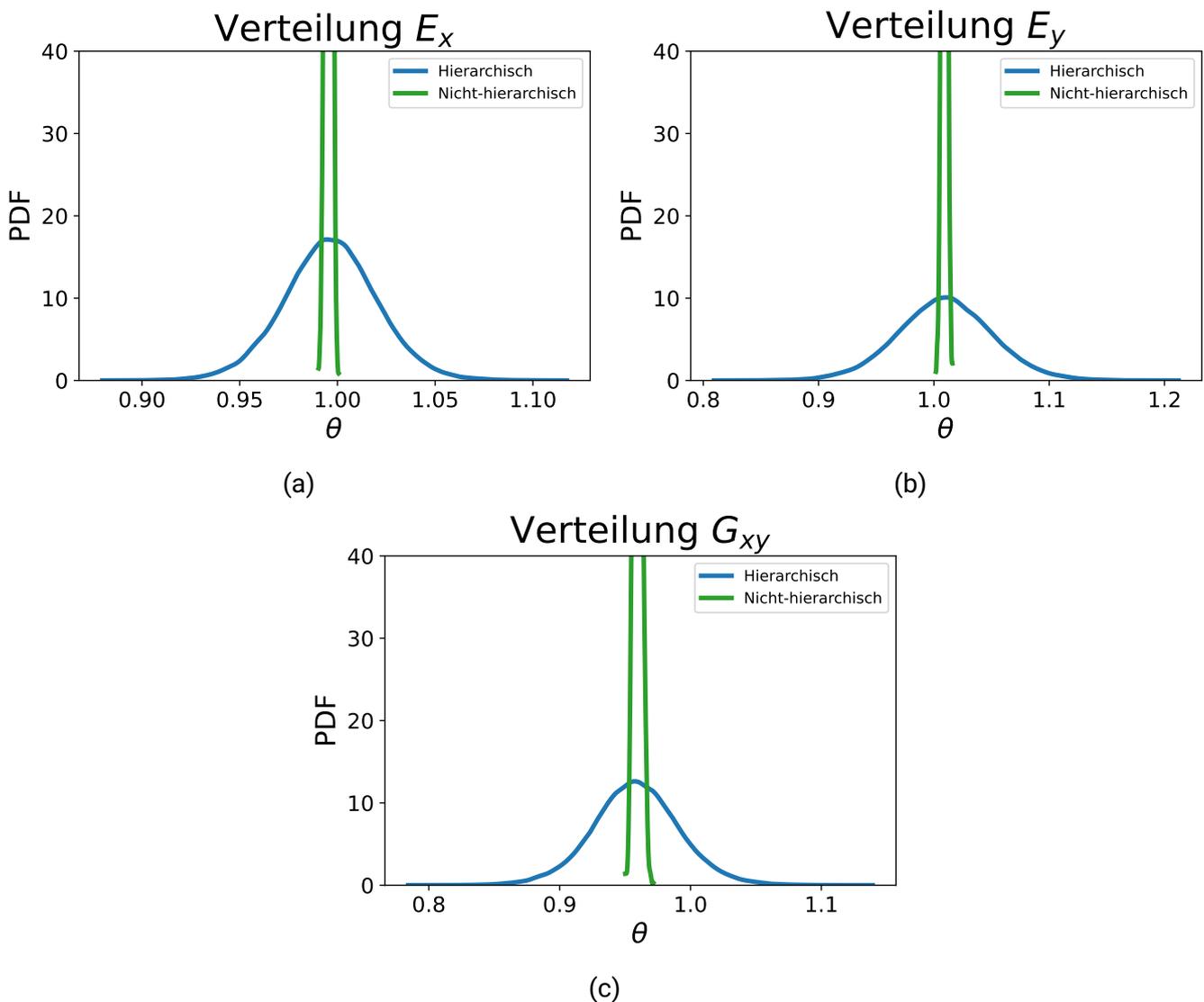


Abbildung 7.3.: Identifizierte Parameterverteilung der Parameter E_x , E_y und G_{xy} für den nicht-hierarchischen und hierarchischen Modellabgleich

In Abbildung 7.4 sind die Parameterverteilungen für die sieben Prüflinge dargestellt. Aus der Verteilung zwischen den einzelnen Prüflingen lässt sich erkennen, dass es sich bei der identifizierten Parameterverteilung des hierarchischen Modellabgleichs um eine wahre Parameterverteilung handelt. Beim Vergleich zwischen den Modellparametern fällt auf, dass die Verteilung für E_x im Vergleich zu den anderen Modellparametern deutlich schmaler ist. Dies lässt auf eine geringe Parameterunsicherheit schließen. Im Gegensatz hierzu ist die Varianz der Parameterverteilung für den Parameter G_{xy} deutlich höher, was in der Höhe der PDFs mit ca. 100 für E_x bzw. ca. 50 für G_{xy} widerspiegelt wird. Auffällig ist die Verteilung für den Prüfling 4, da sie eine deutlich höhere Steifigkeit für E_x und E_y vorhersagt. Diese Beobachtung deckt sich mit den experimentellen Ergebnissen, da der Prüfling 4 im Durchschnitt höhere Eigenfrequenzen aufweist. Im Gegensatz hierzu ist die Parameterverteilung des Prüflings 6 für den Parameter E_y um ca. 5 % nach links verschoben. Dies deckt sich ebenfalls mit dem experimentell ermittelten Verhalten, wo der Prüfling 6 im Durchschnitt niedrigere Eigenfrequenzen aufweist.

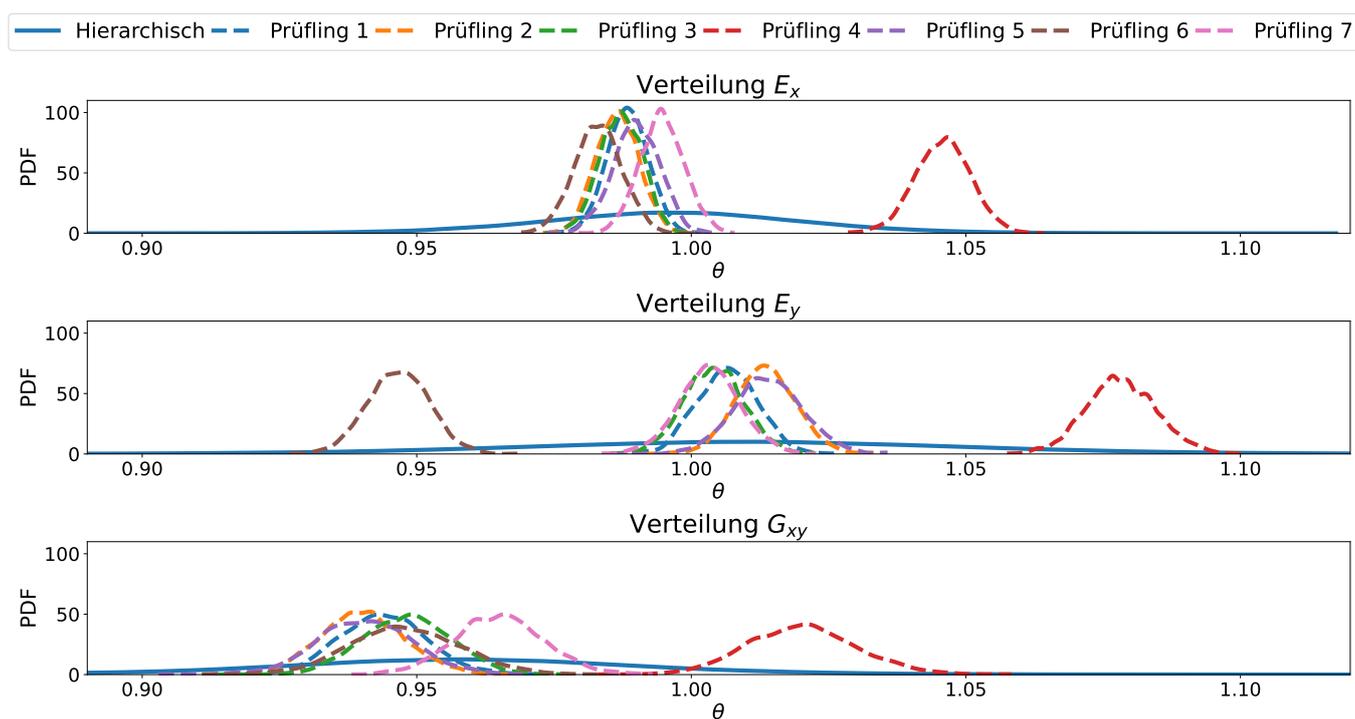


Abbildung 7.4.: Bestimmte Verteilung der Modellparameter E_x , E_y und G_{xy} für jeden Prüfling und die globale (hierarchische) Verteilung.

Aus den identifizierten Parameterverteilungen des nicht-hierarchischen und hierarchischen Modellabgleichs lässt sich die Verteilung der Eigenfrequenzen bestimmen. Hierüber lässt sich zum einen

die Wahrscheinlichkeit bestimmen, mit der eine Eigenfrequenz in dem Frequenzbereich auftritt, und zum anderen kann ein Abgleich mit den gemessenen Eigenfrequenzen der unterschiedlichen Prüflinge erfolgen. Der Abgleich zeigt, ob mit der identifizierten Parameterverteilung das gemessene Verhalten mehrerer Prüflinge abgebildet werden kann. In der Abbildung 7.5 sind die gemessenen Eigenfrequenzen als graue Striche und eine daraus ermittelte Verteilungsfunktion sowie die Verteilung der Eigenfrequenzen aus der Simulation mit der Parameterverteilung des nicht-hierarchischen und hierarchischen Modellabgleichs zu sehen. Aufgrund der vergleichsweise geringen Anzahl an Messungen von maximal 35 Messwerten pro Eigenfrequenz kann die ermittelte Verteilungsfunktion in orange nur als erster Anhaltspunkt für die Güte des Abgleichs dienen. Ein quantitativer Abgleich zwischen den Verteilungsfunktionen, bspw. mit dem KOLMOGOROV-SMIRNOV-Test [131], ist daher nicht zielführend. Qualitativ ist jedoch zu erkennen, dass die identifizierte Parameterverteilung des nicht-hierarchischen Modellabgleichs die Streuung der gemessenen Leiterplatten deutlich unterschätzt. Im Gegensatz hierzu lässt sich mit der Parameterverteilung des hierarchischen Modellabgleichs die Streuung des gemessenen Verhaltens besser abbilden. Betrachtet man die Einzelmessungen, ist zu erkennen, dass die Messungen in der Verteilungsfunktion der hierarchischen Simulation enthalten sind.

Durch die Verwendung des hierarchischen Modellabgleichs und der Betrachtung der Parameterunsicherheit ist es somit möglich, das Verhalten von mehreren Leiterplatten vorherzusagen. Insgesamt wird hierdurch das Vertrauen in das Simulationsergebnis erhöht. Das identifizierte Modell lässt sich nun für weitere Untersuchungen, wie zum Beispiel die Variation von Kontaktstellen für Elektronikkomponenten, die Untersuchung von Verbindungstechniken zur Montage der Leiterplatten in der Leistungselektronik oder für Zuverlässigkeitsuntersuchungen nutzen.

Die verbleibende Diskrepanz zwischen den Messwerten und der stochastischen Simulation lässt sich auf Modellfehler und Messfehler zurückführen. Durch weitere Messungen wird sich der Einfluss von Messunsicherheit verringern und die Verteilungsfunktion konvergieren. Die Berücksichtigung eines Modellfehlers bzw. die Kalibrierung eines Diskrepanzmodells stellt ein weiteres Forschungsfeld dar. Die Grundlagen hierfür werden in KENNEDY und O'HAGAN beschrieben [132].

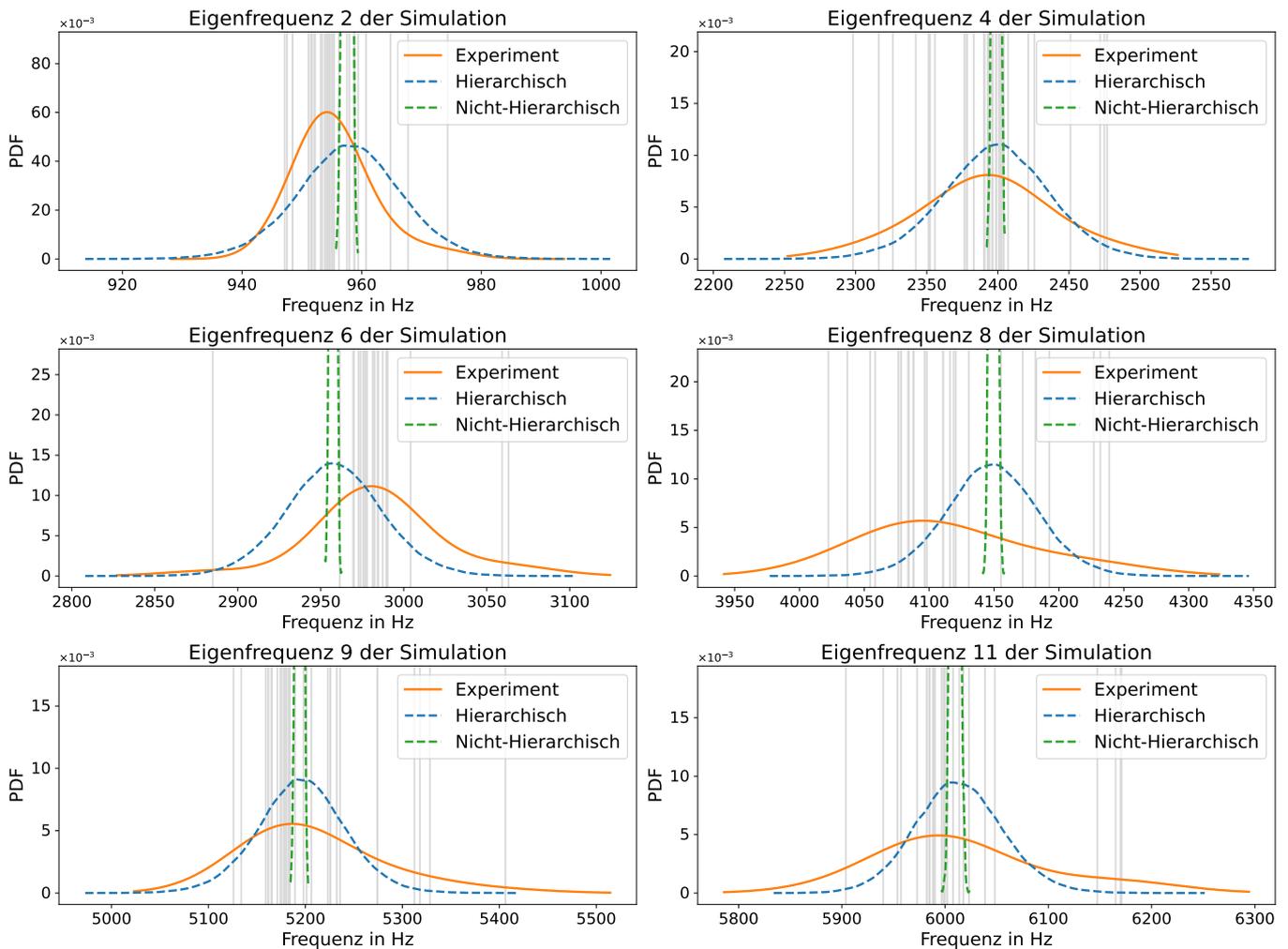


Abbildung 7.5.: Vergleich zwischen der gemessenen Verteilung der Eigenfrequenzen der Leiterplatte (orange) mit der aus der nicht-hierarchischen (grün) und hierarchischen Parameterverteilung (blau) bestimmten Verteilung der Eigenfrequenzen des numerischen Leiterplattenmodells. In grau dargestellt sind die gemessenen Eigenfrequenzen, aus denen sich die Verteilung (orange) bestimmt (vgl. Abbildung 6.3).

8. Zusammenfassung und Ausblick

Die Zielsetzung der vorliegenden Arbeit bestand darin, eine Strategie zur Validierung von numerischen Modellen mit experimentellen Daten zu entwickeln, die darüber hinaus eine Quantifizierung der Parameterunsicherheit ermöglicht. Hierzu wurde eine Entwicklungsmethodik vorgestellt, die numerische Simulation, experimentelle Identifikation und Validierung miteinander verbindet. Die Betrachtung der Parameterunsicherheit erfordert, dass das numerische Modell für eine Vielzahl von Parameterkombinationen untersucht wird. Für komplexe FE-System kann eine solche Untersuchung aufgrund des hohen Rechenaufwands mehrere Jahre benötigen. Daher bedarf es Methoden, die eine Reduktion des Berechnungsaufwands bei gleichzeitiger Anpassbarkeit von Modellparametern und hoher Genauigkeit ermöglichen. Die Entwicklung einer Methode zur parametrischen Modellordnungsreduktion und die Einbindung in die Entwicklungsmethodik zur Validierung von numerischen Modellen und Quantifizierung der Parameterunsicherheit stand daher im Zentrum der Arbeit.

Im Bereich der Strukturmechanik haben sich in Wirtschaft und Wissenschaft Methoden auf Basis der CMS als Standardansatz zur parametrischen Modellordnungsreduktion durchgesetzt. Für komplexe Systeme mit einer hohen Zahl an Substrukturen kommen CMS Methoden allerdings an ihre Grenzen, da die mögliche Reduktion direkt von der Anzahl an Substrukturen und der Vernetzung an den Kontaktstellen zwischen Substrukturen abhängt. Darüber hinaus ist die Bestimmung der Transformationsmatrix rechenintensiv und es kann durch eine schlechte Konditionierung der Systemmatrizen zu numerischen Problemen kommen. Die in dieser Arbeit entwickelte Methode basiert im Gegensatz zu den bestehenden Lösungen nicht auf einer Reduktion auf der Substruktur-, sondern auf der Gesamtsystemebene. Die Methode nutzt dabei den sequentiellen Zusammenbau von FE-Modellen, um die Elementmatrizen einzelner Substrukturen in separaten Matrizen abzuspeichern. Die Reduktion erfolgt mithilfe einer globalen Transformationsmatrix. Hierdurch entfällt die rechenintensive und numerisch anspruchsvolle Reduktion der einzelnen Substrukturen.

Anhand von generischen Anwendungsfällen aus dem Bereich der Schwingungstechnik wurde die Leistungsfähigkeit der entwickelten PGMR-Methode mit den Methoden zur parametrischen

Modellordnungsreduktion aus dem Stand der Forschung verglichen. Hierbei erfolgte sowohl ein Vergleich der benötigten Rechenzeit zur Auswertung einer Parameterkombination als auch eine Bewertung des Approximierungsfehlers, der durch die Reduktion entsteht. In Abhängigkeit der Höhe der Parameteränderung und des Anwendungsbeispiels ermöglicht die PGMR-Methode eine Reduktion der Berechnungszeit zwischen 2,5- bis 3,3-fachem im Vergleich zu den bekannten Methoden. Im Vergleich zu den Methoden aus dem Stand der Wissenschaft hängt die Höhe des Approximierungsfehlers des reduzierten Modells bei der PGMR-Methode stärker von der Höhe der Parameteränderung und der Sensitivität der betrachteten Parameter ab. Diese Abhängigkeit entsteht durch die Verwendung der globalen Transformationsmatrix. Die hinreichende Approximation des dynamischen Verhaltens ist somit nur für ein begrenztes Parameterintervall gültig. Für die betrachteten Anwendungsbeispiele konnte mit der PGMR-Methode Parameteränderungen zwischen 10 % bis 20 % untersucht werden. Für Anwendungen im Bereich der Parameterkalibrierung und der Unsicherheitsquantifizierung ist das in den meisten Fällen ausreichend. Vielmehr ermöglicht die größere Reduktion des Rechenaufwands erst die Nutzung der stochastischen Methoden in der Auslegung, Optimierung und Überwachung mechanischer Systeme.

Die Entwicklungsmethodik wurde weiterhin für den Aufbau eines validierten FE-Modells einer Leiterplatte und der Betrachtung der Parameterunsicherheit verwendet. Anhand einer experimentellen Untersuchung an sieben nominell gleichen Leiterplatten wurde aufgezeigt, dass es aufgrund von Fertigungstoleranzen und Materialschwankungen zu Unterschieden im strukturdynamischen Verhalten der Leiterplatten kommt. Die identifizierten Schwankungen im Verhalten der Leiterplatten motivierte die Untersuchung der Parameterunsicherheit anhand eines numerischen Modells. Die Quantifizierung der Parameterunsicherheit erfolgte an einem mit der PGMR-Methode reduzierten Leiterplattenmodell. Die Quantifizierung der Parameterunsicherheit wurde mit dem klassischen und einem hierarchischen Bayes-Ansatz durchgeführt. Diese spezielle Form der Bayes'schen Parameterkalibrierung erlaubt es, im Vergleich zum klassischen Ansatz, neben dem Mittelwert eines Modellparameters auch seine Standardabweichung zu identifizieren. Hierdurch können die inhärenten Parameterschwankungen besser abgebildet und somit die Aussagekraft der Simulation erhöht werden. Der Abgleich erfolgte anhand der experimentell ermittelten Eigenfrequenzen und Eigenmoden. Die Ergebnisse der Untersuchung zeigen, dass der klassische, nicht-hierarchische Ansatz nicht in der Lage ist, die Parameterverteilung aufgrund von Schwankungen im Materialverhalten

oder aufgrund von Fertigungstoleranzen abzubilden. Mit der bestimmten Parameterverteilung des hierarchischen Modellabgleichs ließ sich die gemessene Verteilung der Eigenfrequenzen der sieben nominell gleichen Leiterplatten abbilden.

Für zukünftige Arbeiten bieten sich Anknüpfungspunkte im Bereich der Modellbildung, Optimierung und Überwachung mechanischer Systeme. Hierzu zählen die Anwendung der vorgestellten Methode auf komplexe Systemen mit einer höheren Anzahl an Substrukturen und eine Abbildung von nichtlinearen Effekten. Die Betrachtung der Parameterunsicherheit in der Entwicklungsmethodik kann um eine Quantifizierung der Modellunsicherheit erweitert werden. Darüber hinaus bietet sich eine Untersuchung der Möglichkeit der Kopplung mehrerer unsicherheitsbehafteter Systeme über ein Bayes'sches Netz an. Hierdurch können die Einflüsse von Unsicherheit auf das Verhalten gekoppelter Systeme erweitert werden. Die Zielsetzung der Vorhersage bzw. Bewertung der Zuverlässigkeit unter Berücksichtigung von Unsicherheit ermöglicht weiterhin eine Anbindung an die probabilistische Fehlermöglichkeits- und -einflussanalyse (probFEMA). Die Kombination beider Ansätze kann neue Richtlinien zur zuverlässigen Auslegung technischer Systeme ermöglichen.

Hinsichtlich der Vorhersage des Approximierungsfehlers sind in dieser Arbeit Fragestellungen offengeblieben. Das vorhergesagte Verhalten in Abhängigkeit der bestimmten Parameterverteilung ist nicht notwendigerweise physikalisch korrekt und muss im Nachhinein für jeden Anwendungsfall einzeln geprüft werden. Für die Vorhersage des Approximierungsfehlers in Abhängigkeit des Anwendungsfalls und der Höhe der Parameteränderung besteht ein weiterer Entwicklungs- und Forschungsbedarf.

A. Anhang

A.1. Modellierung Leiterplatten in ANSYS®

A.1.1. Ablauf Homogenisierung Materialeigenschaften in ANSYS®

1. Importieren des Electrical Computer-Aided Design (ECAD) der Leiterplatte (vgl. Abbildung 5.3), um die Kupferbahnen mit dem Modell zu verbinden.
2. Import der Leiterplattengeometrie als Volumenelemente ohne zusätzliche Details wie Leiterbahnen und Kontaktstellen.
3. Einfügen der Materialeigenschaften für die dielektrischen und metallischen Schichten, die anschließend zur Berechnung der äquivalenten Materialeigenschaften verwendet werden.
4. Berechnung der Anteile von Kupfer und Dielektrikum in jeder Zelle.
5. Berechnung der äquivalenten Materialeigenschaften indem sie die Mischungsregel gemäß den Gleichungen (5.3)-(5.4) verwendet. Die Technik der gemittelten Modellierung berechnet die Materialeigenschaften auf der Grundlage der zuvor berechneten Anteile von Metall und Dielektrikum.
6. Rückübertragung der gemittelten Materialeigenschaften auf das mechanische Netz der PCB-Geometrie.

A.1.2. Netzkonvergenzanalyse Leiterplattenmodell

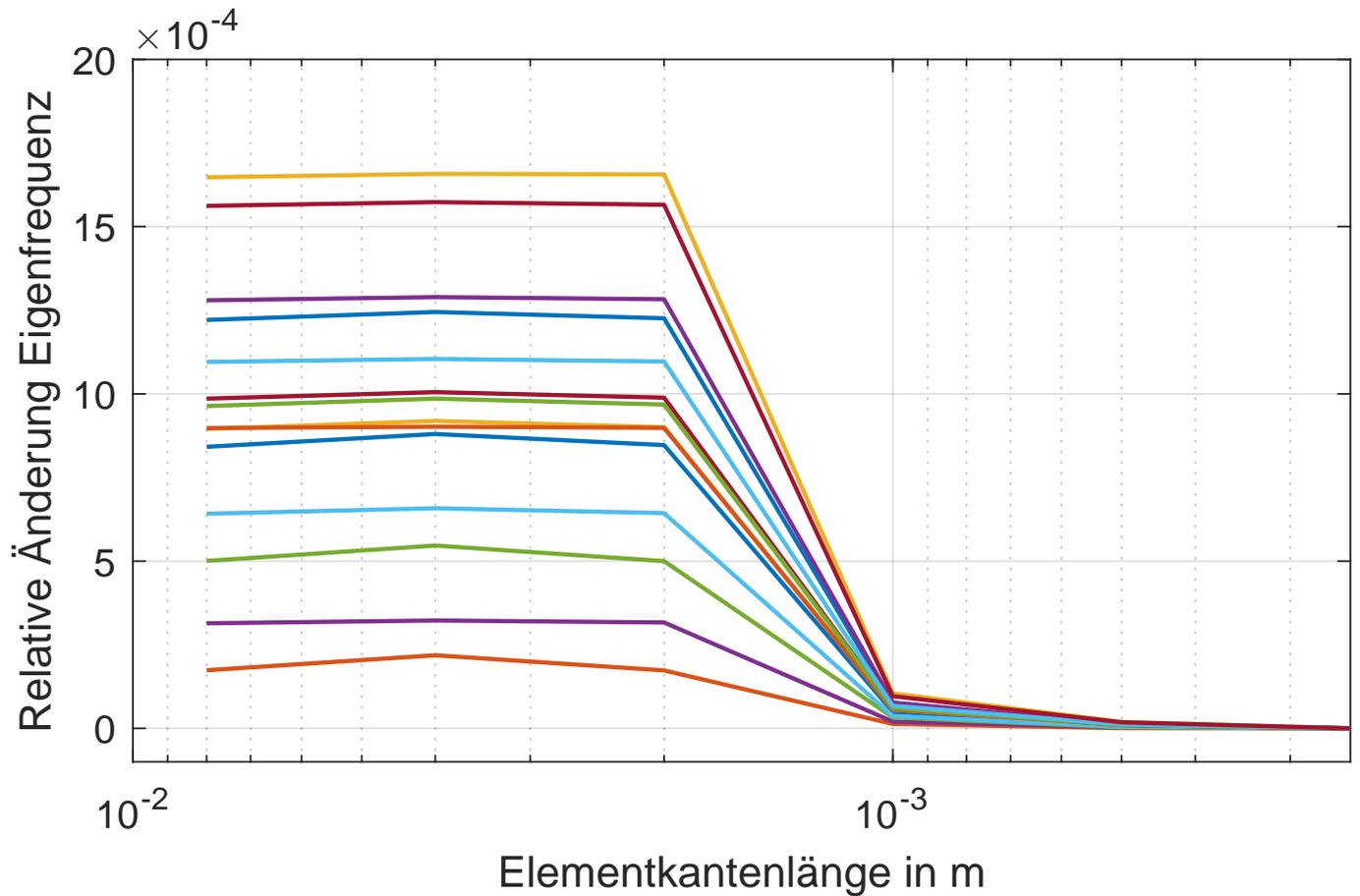


Abbildung A.1.: Konvergenzanalyse der Eigenfrequenzen des Leiterplattenmodells in Abhängigkeit der Elementkantenlänge

A.2. Modellabgleich Leiterplatte

Tabelle A.1.: Materialeigenschaften FR-4 nach Modellabgleich - Werte des nicht-hierarchischen Modellabgleichs

Parameter	Symbol	Wert	Einheit	Änderung
E-Modul x	E_x	24,3	GPa	-0,45 %
E-Modul y	E_y	23,5	GPa	+0,91 %
Schubmodul xy	G_{xy}	5,98	GPa	-4,04 %

Literaturverzeichnis

- [1] **Tamm, C. und Perfetto, S.** Design and Optimization of Mechatronic Systems Using a Holistic and Parametric Simulation Approach. In: *IFAC-PapersOnLine* 52.15 (2019), S. 271–276. ISSN: 24058963. DOI: 10.1016/j.ifacol.2019.11.686.
- [2] **Tamm, C.** Ein Beitrag zur parametrischen Modellbildung strukturdynamischer Systeme entlang der Produktlebensphasen. Diss. Technische Universität Darmstadt, 2021. DOI: 10.26083/TUPRINTS-00017757.
- [3] **Guyan, R. J.** Reduction of stiffness and mass matrices. In: *AIAA Journal* 3.2 (1965), S. 380. ISSN: 0001-1452. DOI: 10.2514/3.2874.
- [4] **Pillage, L. T. und Rohrer, R. A.** Asymptotic waveform evaluation for timing analysis. In: *IEEE transactions on computer-aided design of integrated circuits and systems* 9.4 (1990), S. 352–366.
- [5] **Arnoldi, W. E.** The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem. In: *Quarterly of applied mathematics* 9.1 (1951), S. 17–29.
- [6] **Lanczos, C.** An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators. In: *Journal of Research of the National Bureau of Standards* (1950).
- [7] **Yoo, E. J.** Parametric model order reduction for structural analysis and control. Dissertation. München: Technische Universität München, 2010. URL: <https://mediatum.ub.tum.de/997277>.
- [8] **Salimbahrami, B. und Lohmann, B.** Order reduction of large scale second-order systems using Krylov subspace methods. In: *Linear Algebra and its Applications* 415.2 (2006), S. 385–405. ISSN: 0024-3795. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.laa.2004.12.013>.
- [9] **Breitbach, E.** Modal Synthesis Modal Correction — Modal Coupling. In: *Identification of Vibrating Structures*. Hrsg. von **Natke, H. G.** Vienna: Springer Vienna, 1982, S. 321–348. ISBN: 978-3-211-81651-6.
- [10] **Hurty, W. C.** Dynamic analysis of structural systems using component modes. In: *AIAA Journal* 3.4 (1965), S. 678–685. ISSN: 0001-1452. DOI: 10.2514/3.2947.
- [11] **Craig, R. R. und Bampton, M. C. C.** Coupling of substructures for dynamic analyses. In: *AIAA Journal* 6.7 (1968), S. 1313–1319. ISSN: 0001-1452. DOI: 10.2514/3.4741.
- [12] **Craig, R. R. und Chang, C. J.** A review of substructure coupling methods for dynamic analysis. In: 1976.

-
- [13] **Rixen, D. J.** A dual Craig–Bampton method for dynamic substructuring. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 168.1-2 (2004), S. 383–391. ISSN: 03770427. DOI: 10.1016/j.cam.2003.12.014.
- [14] **Kim, J.-G., Lee, K.-H. und Lee, P.-S.** Estimating relative eigenvalue errors in the Craig–Bampton method. In: *Computers & Structures* 139 (2014), S. 54–64. ISSN: 00457949. DOI: 10.1016/j.compstruc.2014.04.008.
- [15] **Kim, J.-G. und Lee, P.-S.** An enhanced Craig–Bampton method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 103.2 (2015), S. 79–93. ISSN: 00295981. DOI: 10.1002/nme.4880.
- [16] **Castanier, M. P., Tan, Y.-C. und Pierre, C.** Characteristic Constraint Modes for Component Mode Synthesis. In: *AIAA Journal* 39.6 (2001), S. 1182–1187. ISSN: 0001-1452. DOI: 10.2514/2.1433.
- [17] **Kim, J.-H., Kim, J. und Lee, P.-S.** Improving the accuracy of the dual Craig–Bampton method. In: *Computers & Structures* 191 (2017), S. 22–32. ISSN: 00457949. DOI: 10.1016/j.compstruc.2017.05.010.
- [18] **Kim, J., Boo, S.-H. und Lee, P.-S.** Considering the Higher-Order Effect of Residual Modes in the Craig–Bampton Method. In: *AIAA Journal* 56.1 (2018), S. 403–412. ISSN: 0001-1452. DOI: 10.2514/1.J055666.
- [19] **Boo, S.-H., Kim, J.-H. und Lee, P.-S.** Towards improving the enhanced Craig–Bampton method. In: *Computers & Structures* 196 (2018), S. 63–75. ISSN: 00457949. DOI: 10.1016/j.compstruc.2017.10.017.
- [20] **Sankararaman, S. und Mahadevan, S.** Integration of model verification, validation, and calibration for uncertainty quantification in engineering systems. In: *Reliability Engineering & System Safety* 138 (2015), S. 194–209. ISSN: 09518320. DOI: 10.1016/j.res.2015.01.023.
- [21] **Rashidi Mehrabadi, N., Wen, B., Burgos, R., Boroyevich, D. und Roy, C.** Verification, Validation and Uncertainty Quantification (VV & UQ) Framework Applicable to Power Electronics Systems. In: *SAE Technical Paper Series*. SAE Technical Paper Series. SAE International 400 Commonwealth Drive, Warrendale, PA, United States, 2014. DOI: 10.4271/2014-01-2176.
- [22] **Papadimitriou, C. und Papadioti, D.-C.** Component mode synthesis techniques for finite element model updating. In: *Computers & Structures* 126 (2013), S. 15–28. ISSN: 00457949. DOI: 10.1016/j.compstruc.2012.10.018.
- [23] **Hülsebrock, M., Herrnberger, M., Atzrodt, H. und Lichtinger, R.** Stochastic identification of parametric reduced order models of printed circuit boards. In: *Proceedings of ISMA 2020 - International Conference on Noise and Vibration Engineering and USD 2020 - International Conference on Uncertainty in Structural Dynamics*. 2020, S. 1961–1971.
- [24] **Choi, Y., Oxberry, G., White, D. und Kirchdoerfer, T.** Accelerating design optimization using reduced order models. 2019. DOI: 10.48550/ARXIV.1909.11320. URL: <https://arxiv.org/abs/1909.11320>.

-
- [25] **Herrada, F. J., García-Martínez, J., Fraile, A., Hermanns, L. und Montáns, F. J.** A method for performing efficient parametric dynamic analyses in large finite element models undergoing structural modifications. In: *Engineering Structures* 131 (2017), S. 625–638. ISSN: 01410296. DOI: 10.1016/j.engstruct.2016.10.026.
- [26] **Taddei, T., Penn, J., Yano, M. und Patera, A. T.** Simulation-based classification; A model-order-reduction approach for structural health monitoring. In: *Archives of Computational Methods in Engineering* 25.1 (2018), S. 23–45.
- [27] **Rosafalco, L., Torzoni, M., Manzoni, A., Mariani, S. und Corigliano, A.** Online structural health monitoring by model order reduction and deep learning algorithms. In: *Computers & Structures* 255 (2021), S. 106604.
- [28] **Benner, P., Gugercin, S. und Willcox, K.** A Survey of Projection-Based Model Reduction Methods for Parametric Dynamical Systems. In: *SIAM Review* 57.4 (2015), S. 483–531. ISSN: 0036-1445. DOI: 10.1137/130932715.
- [29] **Eldred, M. und Dunlavy, D.** Formulations for surrogate-based optimization with data fit, multifidelity, and reduced-order models. In: *11th AIAA/ISSMO multidisciplinary analysis and optimization conference*. 2006, S. 7117.
- [30] **Daniel, T., Casenave, F., Akkari, N. und Rycelynck, D.** Model order reduction assisted by deep neural networks (ROM-net). In: *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences* 7.1 (2020). DOI: 10.1186/s40323-020-00153-6.
- [31] **Goller, B., Broggi, M., Calvi, A. und Schuëller, G. I.** A stochastic model updating technique for complex aerospace structures. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 47.7 (2011), S. 739–752. ISSN: 0168874X. DOI: 10.1016/j.finel.2011.02.005.
- [32] **Gunning, D., Stefik, M., Choi, J., Miller, T., Stumpf, S. u. a.** XAI-Explainable artificial intelligence. In: *Science robotics* 4.37 (2019). DOI: 10.1126/scirobotics.aay7120.
- [33] **Lee, K. und Carlberg, K. T.** Model reduction of dynamical systems on nonlinear manifolds using deep convolutional autoencoders. In: *Journal of Computational Physics* 404 (2020), S. 108973. ISSN: 0021-9991. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.108973>.
- [34] **Zhou, Y. und Ding, F.** Modeling Nonlinear Processes Using the Radial Basis Function-Based State-Dependent Autoregressive Models. In: *IEEE Signal Processing Letters* 27 (2020), S. 1600–1604. DOI: 10.1109/LSP.2020.3021925.
- [35] **Jensen, H., Jerez, D. und Valdebenito, M.** An adaptive scheme for reliability-based global design optimization: A Markov chain Monte Carlo approach. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 143 (2020), S. 106836.
- [36] **Bhattacharyya, B.** Uncertainty quantification of dynamical systems by a POD–Kriging surrogate model. In: *Journal of Computational Science* 60 (2022), S. 101602. ISSN: 1877-7503. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jocs.2022.101602>.
- [37] **Han, Z.-H. und Görtz, S.** Hierarchical Kriging Model for Variable-Fidelity Surrogate Modeling. In: *AIAA Journal* 50.9 (2012), S. 1885–1896. DOI: 10.2514/1.J051354.
- [38] **Toal, D., Bressloff, N. und Keane, A.** Kriging Hyperparameter Tuning Strategies. In: *AIAA Journal - AIAA J* 46 (Mai 2008), S. 1240–1252. DOI: 10.2514/1.34822.

-
- [39] **Denimal, E., Nechak, L., Sinou, J.-J. und Nacivet, S.** Kriging Surrogate Models for Predicting the Complex Eigenvalues of Mechanical Systems Subjected to Friction-Induced Vibration. In: *Shock and Vibration* 2016 (2016), S. 1–22. ISSN: 1070-9622. DOI: 10.1155/2016/3586230.
- [40] **Wang, J., Wang, C. und Zhao, J.** Frequency response function-based model updating using Kriging model. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 87 (2017), S. 218–228.
- [41] **Yeo, K. und Melnyk, I.** Deep learning algorithm for data-driven simulation of noisy dynamical system. In: *Journal of Computational Physics* 376 (2019), S. 1212–1231. ISSN: 0021-9991. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.10.024>.
- [42] **Tan, Y., Hu, C., Zhang, K., Zheng, K., Davis, E. A. u. a.** LSTM-Based Anomaly Detection for Non-Linear Dynamical System. In: *IEEE Access* 8 (2020), S. 103301–103308. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.2999065.
- [43] **Yucesan, Y. A., Viana, F. A., Manin, L. und Mahfoud, J.** Adjusting a torsional vibration damper model with physics-informed neural networks. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 154 (2021), S. 107552.
- [44] **Zhang, R., Liu, Y. und Sun, H.** Physics-informed multi-LSTM networks for metamodeling of nonlinear structures. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 369 (2020), S. 113226. ISSN: 0045-7825. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113226>.
- [45] **Rackauckas, C., Ma, Y., Martensen, J., Warner, C., Zubov, K. u. a.** Universal differential equations for scientific machine learning. In: *arXiv preprint arXiv:2001.04385* (2020).
- [46] **Condor Lopez, J. G., Leupolz, M. und Herold, S.** Reconstruction of governing equation for nonlinear dynamical systems based on Universal Differential Equation. 2020.
- [47] **March, A. und Willcox, K.** Provably convergent multifidelity optimization algorithm not requiring high-fidelity derivatives. In: *AIAA journal* 50.5 (2012), S. 1079–1089.
- [48] **Alexandrov, N. M., Lewis, R. M., Gumbert, C. R., Green, L. L. und Newman, P. A.** Approximation and model management in aerodynamic optimization with variable-fidelity models. In: *Journal of Aircraft* 38.6 (2001), S. 1093–1101.
- [49] **Arridge, S., Kaipio, J., Kolehmainen, V., Schweiger, M., Somersalo, E. u. a.** Approximation errors and model reduction with an application in optical diffusion tomography. In: *Inverse problems* 22.1 (2006), S. 175.
- [50] **Panagiotopoulos, D., Deckers, E. und Desmet, W.** Krylov subspaces recycling based model order reduction for acoustic BEM systems and an error estimator. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 359 (2020), S. 112755. ISSN: 0045-7825. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.112755>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782519306462>.
- [51] **Baur, U., Beattie, C., Benner, P. und Gugercin, S.** Interpolatory projection methods for parameterized model reduction. In: *SIAM Journal on Scientific Computing* 33.5 (2011), S. 2489–2518.
- [52] **Antoulas, A.** Approximation of large-scale dynamical systems: An overview. In: *IFAC Proceedings Volumes* 37.11 (2004), S. 19–28.

-
- [53] **Jensen, H. A., Araya, V. A., Muñoz, A. D. und Valdebenito, M. A.** A physical domain-based substructuring as a framework for dynamic modeling and reanalysis of systems. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 326 (2017), S. 656–678. ISSN: 00457825. DOI: 10.1016/j.cma.2017.08.044.
- [54] **Jensen, H. A., Muñoz, A., Papadimitriou, C. und Vergara, C.** An enhanced substructure coupling technique for dynamic re-analyses: Application to simulation-based problems. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 307 (2016), S. 215–234. ISSN: 00457825. DOI: 10.1016/j.cma.2016.04.011.
- [55] **Jensen, H. A., Esse, C., Araya, V. und Papadimitriou, C.** Implementation of an adaptive meta-model for Bayesian finite element model updating in time domain. In: *Reliability Engineering & System Safety* 160 (2017), S. 174–190. ISSN: 09518320. DOI: 10.1016/j.res.2016.12.005.
- [56] **García-Martínez, J., Herrada, F. J., Hermanns, L., Fraile, A. und Montáns, F. J.** Accelerating parametric studies in computational dynamics: Selective modal re-orthogonalization versus model order reduction methods. In: *Advances in Engineering Software* 108 (2017), S. 24–36. ISSN: 09659978. DOI: 10.1016/j.advengsoft.2017.02.006.
- [57] **Riedmaier, S., Danquah, B., Schick, B. und Diermeyer, F.** Unified Framework and Survey for Model Verification, Validation and Uncertainty Quantification. In: *Archives of Computational Methods in Engineering* 28.4 (2021), S. 2655–2688. ISSN: 1134-3060. DOI: 10.1007/s11831-020-09473-7.
- [58] **Friswell, M. I. und Mottershead, J. E.** Finite element model updating in structural dynamics. Repr. Bd. 38. Solid mechanics and its applications. Dordrecht: Kluwer, 1996. ISBN: 0-7923-3431-0.
- [59] **Mottershead, J. E., Link, M. und Friswell, M. I.** The sensitivity method in finite element model updating: A tutorial. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 25.7 (2011), S. 2275–2296. ISSN: 08883270. DOI: 10.1016/j.ymsp.2010.10.012.
- [60] **Beck, J. L. und Katafygiotis, L. S.** Updating Models and Their Uncertainties. I: Bayesian Statistical Framework. In: *Journal of Engineering Mechanics* 124.4 (1998), S. 455–461. ISSN: 0733-9399. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1998)124:4(455).
- [61] **Katafygiotis, L. S. und Beck, J. L.** Updating Models and Their Uncertainties. II: Model Identifiability. In: *Journal of Engineering Mechanics* 124.4 (1998), S. 463–467. ISSN: 0733-9399. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1998)124:4(463).
- [62] **Vanik, M. W., Beck, J. L. und Au, S. K.** Bayesian Probabilistic Approach to Structural Health Monitoring. In: *Journal of Engineering Mechanics* 126.7 (2000), S. 738–745. ISSN: 0733-9399. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2000)126:7(738).
- [63] **Mottershead, J. E., Mares, C., James, S. und Friswell, M. I.** Stochastic model updating: Part 2—application to a set of physical structures. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 20.8 (2006), S. 2171–2185. ISSN: 08883270. DOI: 10.1016/j.ymsp.2005.06.007.

-
- [64] **Mottershead, J. E., Link, M., Silva, T. A. N., Govers, Y. und Khodaparast, H. H.** The Sensitivity Method in Stochastic Model Updating. In: *Vibration Engineering and Technology of Machinery*. Hrsg. von **Sinha, J. K.** Bd. 23. Mechanisms and Machine Science. Cham: Springer International Publishing, 2015, S. 65–77. ISBN: 978-3-319-09917-0. DOI: 10.1007/978-3-319-09918-7\{\textunderscore\}5.
- [65] **Mares, C., Mottershead, J. E. und Friswell, M. I.** Stochastic model updating: Part 1—theory and simulated example. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 20.7 (2006), S. 1674–1695. ISSN: 08883270. DOI: 10.1016/j.ymsp.2005.06.006.
- [66] **Hua, X. G., Ni, Y. Q., Chen, Z. Q. und Ko, J. M.** An improved perturbation method for stochastic finite element model updating. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 73.13 (2008), S. 1845–1864. ISSN: 00295981. DOI: 10.1002/nme.2151.
- [67] **Khodaparast, H. H., Mottershead, J. E. und Friswell, M. I.** Perturbation methods for the estimation of parameter variability in stochastic model updating. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 22.8 (2008), S. 1751–1773. ISSN: 08883270. DOI: 10.1016/j.ymsp.2008.03.001.
- [68] **Govers, Y. und Link, M.** Stochastic model updating—Covariance matrix adjustment from uncertain experimental modal data. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 24.3 (2010), S. 696–706. ISSN: 08883270. DOI: 10.1016/j.ymsp.2009.10.006.
- [69] **Patelli, E., Govers, Y., Broggi, M., Gomes, H. M., Link, M. u. a.** Sensitivity or Bayesian model updating: A comparison of techniques using the DLR AIRMOD test data. In: *Archive of Applied Mechanics* 87.5 (2017), S. 905–925. ISSN: 0939-1533. DOI: 10.1007/s00419-017-1233-1.
- [70] **Mehrabadi, N. R., Burgos, R., Roy, C. und Boroyevich, D.** Power Electronics Modeling and Design: Using Parametric and Model-Form Uncertainty Quantification to Assess Predictive Accuracy of Power Converter Models. In: *IEEE Power Electronics Magazine* 4.4 (2017), S. 44–52. DOI: 10.1109/MPEL.2017.2760250.
- [71] **Hastings, W. K.** Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. In: *Biometrika* 57.1 (1970), S. 97–109. ISSN: 0006-3444. DOI: 10.1093/biomet/57.1.97.
- [72] **Ching, J. und Chen, Y.-C.** Transitional Markov Chain Monte Carlo Method for Bayesian Model Updating, Model Class Selection, and Model Averaging. In: *Journal of Engineering Mechanics* 133.7 (2007), S. 816–832. ISSN: 0733-9399. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2007)133:7(816).
- [73] **Behmanesh, I., Moaveni, B., Lombaert, G. und Papadimitriou, C.** Hierarchical Bayesian model updating for structural identification. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 64-65 (2015), S. 360–376. ISSN: 08883270. DOI: 10.1016/j.ymsp.2015.03.026.
- [74] **Behmanesh, I. und Moaveni, B.** Accounting for environmental variability, modeling errors, and parameter estimation uncertainties in structural identification. In: *Journal of Sound and Vibration* 374 (2016), S. 92–110.

-
- [75] **Song, M., Moaveni, B., Papadimitriou, C. und Stavridis, A.** Accounting for amplitude of excitation in model updating through a hierarchical Bayesian approach: Application to a two-story reinforced concrete building. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 123 (2019), S. 68–83.
- [76] **Ewins, D. J.** Exciting vibrations: The role of testing in an era of supercomputers and uncertainties. In: *Meccanica* 51.12 (2016), S. 3241–3258. ISSN: 0025-6455. DOI: 10.1007/s11012-016-0576-y.
- [77] **Markert, R.** Strukturdynamik: Skript zur Vorlesung. Darmstadt: Technische Universität Darmstadt, 2011. ISBN: 978-3-9814163-1-2.
- [78] **Wagner, M.** Lineare und nichtlineare FEM : Eine Einführung mit Anwendungen in der Umformsimulation mit LS-DYNA®. 3rd ed. 2022. Wiesbaden, 2022. ISBN: 9783658365226. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-658-36522-6>.
- [79] **Sandberg, G., Wernberg, P.-A. und Davidsson, P.** Fundamentals of fluid-structure interaction. In: *Computational aspects of structural acoustics and vibration*. Springer, 2008, S. 23–101.
- [80] **Schäfer, M.** Numerik im Maschinenbau. Springer-Lehrbuch. Berlin: Springer, 1999. ISBN: 978-3-540-65391-2.
- [81] **Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. und Zhu, J. Z.** The finite element method: Its basis and fundamentals. 7th ed. Burlington: Elsevier Science, 2013. ISBN: 978-1-85617-633-0.
- [82] **Herold, S.** Simulation des dynamischen und akustischen Verhaltens aktiver Systeme im Zeitbereich. Dissertation. Darmstadt: Technische Universität Darmstadt, 2003.
- [83] **Hülsebrock, M.** Modellbasierte Auslegung einer aktiven Schwingungsminderung für einen Quadrocopter. Masterthesis. Technische Universität Darmstadt, 2018.
- [84] **Silva, J. M. M. und Maia, N. M. M.** Modal Analysis and Testing. Dordrecht: Springer Netherlands, 1999. ISBN: 978-0-7923-5894-7. DOI: 10.1007/978-94-011-4503-9.
- [85] **Brandt, A., Berardengo, M., Manzoni, S. und Cigada, A.** Scaling of mode shapes from operational modal analysis using harmonic forces. In: *Journal of Sound and Vibration* 407 (2017), S. 128–143. ISSN: 0022460X. DOI: 10.1016/j.jsv.2017.06.033.
- [86] **Bathe, K.-J.** Finite element procedures. Klaus-Jürgen Bathe, 2006.
- [87] **Kollmann, F. G., Schösser, T. F. und Angert, R.** Praktische Maschinenakustik. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2006. ISBN: 978-3-540-20094-9.
- [88] **Brecher, C., Bäumlner, S. und Guralnik, A.** Experimental modal analysis using a tracking interferometer. In: *CIRP Annals* 63.1 (2014), S. 345–348. ISSN: 00078506. DOI: 10.1016/j.cirp.2014.03.131.
- [89] **Heckbert, P.** Fourier transforms and the fast Fourier transform (FFT) algorithm. In: *Computer Graphics* 2 (1995), S. 15–463.
- [90] **Brandt, A.** Noise and vibration analysis: Signal analysis and experimental procedures. Chichester: Wiley a John Wiley and Sons Ltd, 2011. ISBN: 978-0-470-74644-8. DOI: 10.1002/9780470978160. URL: <http://site.ebrary.com/lib/academiccompleteitles/home.action>.

-
- [91] **Capanna, I., Cirella, R., Aloisio, A., Alaggio, R., Di Fabio, F. u. a.** Operational modal analysis, model update and fragility curves estimation, through truncated incremental dynamic analysis, of a masonry belfry. In: *Buildings* 11.3 (2021), S. 120.
- [92] **Sarlo, R., Tarazaga, P. A. und Kasarda, M. E.** High resolution operational modal analysis on a five-story smart building under wind and human induced excitation. In: *Engineering Structures* 176 (2018), S. 279–292.
- [93] **Brownjohn, J. M. W., Au, S.-K., Zhu, Y., Sun, Z., Li, B. u. a.** Bayesian operational modal analysis of Jiangyin Yangtze River bridge. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 110 (2018), S. 210–230.
- [94] **Ewins, D. J.** Modal testing: Theory, practice and application. Baldock: Research Studies Press, 2000. ISBN: 978-0-86380-218-8.
- [95] **Peeters, B. und De Roeck, G.** Reference-based stochastic subspace identification for output-only modal analysis. In: *Mechanical systems and signal processing* 13.6 (1999), S. 855–878.
- [96] **Peeters, B., van der Auwerar, H., Guillaume, P. und Leuridan, J.** The PolyMAX frequency-domain method: A new standard for modal parameter estimation? In: *Shock and Vibration Modellreduktion* 11 (2004), S. 395–409.
- [97] **Hülsebrock, M., Schmidt, H., Stoll, G. und Atzrodt, H.** Hierarchical Bayesian Networks for predicting the structural behavior of coupled systems. In: *SAE Technical Paper* (2022). DOI: 10.4271/2022-01-0942.
- [98] **Marwala, T.** Finite-element-model Updating Using Computational Intelligence Techniques. London: Springer London, 2010. ISBN: 978-1-84996-322-0. DOI: 10.1007/978-1-84996-323-7.
- [99] **Goller, B., Pradlwarter, H. J. und Schuëller, G. I.** An interpolation scheme for the approximation of dynamical systems. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200.1-4 (2011), S. 414–423. ISSN: 00457825. DOI: 10.1016/j.cma.2010.09.005.
- [100] **Hülsebrock, M., Herrnberger, M., Atzrodt, H. und Lichtinger, R.** Damage detection of joining technologies for printed controller boards in automobiles. In: *EURODYN 2020*. Hrsg. von **Papadrakakis, M., Fragiadakis, M. und Papadimitriou, C.** Greece: Institute of Structural Analysis and Antiseismic Research School of Civil Engineering National Technical University of Athens (NTUA), 2020. ISBN: 978-618850721-0.
- [101] **Cheung, S. H.** Stochastic Analysis, Model and Reliability Updating of Complex Systems with Applications to Structural Dynamics. Diss. California Institute of Technology, 2009. DOI: 10.7907/K5T7-4B72.
- [102] **Tschirk, W.** Statistik: Klassisch oder Bayes. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2014. ISBN: 978-3-642-54384-5. DOI: 10.1007/978-3-642-54385-2.
- [103] **Yanagisawa, H., Kawamata, O. und Ueda, K.** Modeling emotions associated with novelty at variable uncertainty levels: A Bayesian approach. In: *Frontiers in Computational Neuroscience* 13 (2019), S. 2.

-
- [104] **Metropolis, N., Rosenbluth, A. W., Rosenbluth, M. N., Teller, A. H. und Teller, E.** Equation of State Calculations by Fast Computing Machines. In: *The Journal of Chemical Physics* 21.6 (1953), S. 1087–1092. ISSN: 0021-9606. DOI: 10.1063/1.1699114.
- [105] **Salvatier, J., Wiecki, T. V. und Fonnesbeck, C.** Probabilistic programming in Python using PyMC3. In: *PeerJ Computer Science* 2 (2016), e55.
- [106] **Wu, S., Angelikopoulos, P., Papadimitriou, C., Moser, R. und Koumoutsakos, P.** A hierarchical Bayesian framework for force field selection in molecular dynamics simulations. In: *Philosophical transactions. Series A, Mathematical, physical, and engineering sciences* 374.2060 (2016). DOI: 10.1098/rsta.2015.0032.
- [107] **Mechanical, A. A. R.** Release 2021 R2, Help System, Mechanical APDL, Theory References. 2021.
- [108] **Droste, M., Hülsebrock, M., Stoll, G. und Atzrodt, H.** Parametric Model Order Reduction for Vibroacoustic Metamaterials based on Modal Superposition. In: *SAE Technical Paper* (2022). DOI: 10.4271/2022-01-0943.
- [109] **Helton, J. C. und Davis, F. J.** Latin hypercube sampling and the propagation of uncertainty in analyses of complex systems. In: *Reliability Engineering & System Safety* 81.1 (2003), S. 23–69.
- [110] **Karppinen, J. S., Li, J. und Paulasto-Krockel, M.** The Effects of Concurrent Power and Vibration Loads on the Reliability of Board-Level Interconnections in Power Electronic Assemblies. In: *IEEE Transactions on Device and Materials Reliability* 13.1 (2013), S. 167–176. ISSN: 1530-4388. DOI: 10.1109/TDMR.2012.2226462.
- [111] **Aglietti, G. S.** A lighter enclosure for electronics for space applications. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering* 216.3 (2002), S. 131–142. ISSN: 0954-4100. DOI: 10.1243/095441002760553676.
- [112] **Psota, B., Otahal, A. und Szendiuch, I.** Mechanical testing of PCB using computer simulations. In: *Proceedings of the 2014 37th International Spring Seminar on Electronics Technology (ISSE)*. Hrsg. von **Franz, M.** Piscataway, NJ: IEEE, 2014, S. 290–293. ISBN: 978-1-4799-4455-2. DOI: 10.1109/ISSE.2014.6887610.
- [113] **Elektronik, T.** *Micro Vias*. URL: <http://tuchscherer.de/tuchscherer-englisch-version/blind-vias-micro-vias.php>, besucht am 11.3.2022.
- [114] **McMorrow, S. und Heard, C.** The impact of PCB laminate weave on the electrical performance of differential signaling at multi-gigabit data rates. In: *Proc. DesignCon*. 6-TA3. 2005.
- [115] **Sottos, N. R., Ockers, J. M. und Swindeman, M.** Thermoelastic Properties of Plain Weave Composites for Multilayer Circuit Board Applications. In: *Journal of Electronic Packaging* 121.1 (1999), S. 37–43. ISSN: 1043-7398. DOI: 10.1115/1.2792659. URL: <https://doi.org/10.1115/1.2792659>.
- [116] **Bhavsar, N. R., Shinde, H. P. und Bhat, M.** Determination of mechanical properties of PCB. In: *International Journal on Mechanical Engineering and Robotics* 2.4 (2014), S. 23–27.

-
- [117] **Haugan, E. T. und Dalsjø, P.** Characterization of the material properties of two FR4 printed circuit board laminates. In: *FFI-raport 2013/01956* (2014).
- [118] **Grenstedt, J. L. und Hutapea, P.** Influence of electric artwork on thermomechanical properties and warpage of printed circuit boards. In: *Journal of Applied Physics* 94.1 (2003), S. 686–696.
- [119] **Hutapea, P., Grenstedt, J. L., Modi, M., Mello, M. und Frutschy, K.** Prediction of Microelectronic Substrate Warpage Using Homogenized Thermomechanical Finite Element Models. In: *International Electronic Packaging Technical Conference and Exhibition*. Bd. 42002. 2005, S. 1141–1145.
- [120] **Joo, S.-J., Park, B., Kim, D.-H., Kwak, D.-O., Park, J. u. a.** Bi-directional homogenization equivalent modeling for the prediction of thermo-mechanical properties of a multi-layered printed circuit board (PCB). In: *Journal of Micromechanics and Microengineering* 26.4 (2016), S. 045006.
- [121] **Chung, S., Heo, G., Kwak, J., Oh, S., Lee, Y. u. a.** Development of PCB design guide and PCB deformation simulation tool for slim PCB quality and reliability. In: *2013 IEEE 63rd Electronic Components and Technology Conference*. IEEE. 2013, S. 2157–2162.
- [122] **Zukowski, E., Kimpel, T., Kraetschmer, D. und Roessle, A.** Efficient modeling of printed circuit boards structures for dynamic simulations. In: *2015 16th International Conference on Thermal, Mechanical and Multi-Physics Simulation and Experiments in Microelectronics and Microsystems (EuroSimE)*. Piscataway, NJ: IEEE, 2015, S. 1–5.
- [123] **Zhang, B., Liu, P.-k., Ding, H. und Cao, W.** Modeling of board-level package by Finite Element Analysis and laser interferometer measurements. In: *Microelectronics Reliability* 50.7 (2010), S. 1021–1027. ISSN: 00262714. DOI: 10.1016/j.microrel.2010.03.009.
- [124] **Herrnberger, M. und Hülsebrock, M.** Akustische Anregungsquellen in hochintegrierten Leistungselektroniken mobiler Antriebe. In: *DAGA 2019*. Rostock, Germany, 2019, S. 192–195.
- [125] **Krasnovеikin, V., Smolin, I. Y., Druzhinin, N., Kolubaev, E. und Derusova, D. A.** Modal testing circuit board assembly of an electronic apparatus by laser vibrometry. In: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. Bd. 156. 1. IOP Publishing. 2016, S. 012005.
- [126] **Hülsebrock, M., Herrnberger, M., Atzrodt, H., Adams, C. und Lichtinger, R.** Identifikation des vibroakustischen Verhaltens von Leiterplatten. In: *DAGA 2020*. Hannover, Germany, 2020, S. 438–441.
- [127] **Peeters, B. und van der Auweraer, H.** PolyMax: A revolution in operational modal analysis. In: *Proceedings of the 1st International Operational Modal Analysis Conference*. Aalborg, Denmark, 2005, S. 573–584.
- [128] **Miroslav, P., Michal, B. und Tomáš, H.** Modal assurance criterion. In: *Procedia Engineering* 48 (2012), S. 543–548.
- [129] **Govers, Y.** Parameter identification of structural dynamic models by inverse statistical analysis. Diss. Universität Kassel, 2012.

-
- [130] **Petersen, Ø. und Øiseth, O.** Sensitivity-based finite element model updating of a pontoon bridge. In: *Engineering Structures* 150 (2017), S. 573–584.
- [131] **Massey Jr, F. J.** The Kolmogorov-Smirnov test for goodness of fit. In: *Journal of the American statistical Association* 46.253 (1951), S. 68–78.
- [132] **Kennedy, M. C. und O’Hagan, A.** Bayesian calibration of computer models. In: *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)* 63.3 (2001), S. 425–464.

