



Optimisation des interféromètres fibrés pour la stabilisation d'oscillateurs laser

Thèse

Vincent Michaud-Belleau

Doctorat en génie électrique
Philosophiæ doctor (Ph. D.)

Québec, Canada

Optimisation des interféromètres fibrés pour la stabilisation d'oscillateurs laser

Thèse

Vincent Michaud-Belleau

Sous la direction de:

Jérôme Genest, directeur de recherche

Résumé

La grande cohérence temporelle du signal émis par un oscillateur laser, en comparaison aux autres sources lumineuses, constitue une des propriétés les plus remarquables du laser. Aujourd'hui, un grand nombre d'applications allant de la spectroscopie à la télédétection reposent sur un laser stabilisé, c'est-à-dire d'un laser monofréquence dont la cohérence temporelle est améliorée par asservissement à une référence externe. Le développement des horloges atomiques optiques et des détecteurs d'ondes gravitationnelles, deux efforts de recherche de portée mondiale qui repoussent continuellement les limites technologiques, est par ailleurs étroitement lié aux progrès dans le domaine de la stabilisation laser.

À ce jour, les signaux laser les plus cohérents ont été produits par asservissement à des cavités en espace libre de type Fabry-Perot hautement découplées d'un environnement de laboratoire contrôlé. Dans les cinquante dernières années, ces cavités ont été le sujet d'un intense effort de recherche par les principaux laboratoires de métrologie nationaux ; leur performance est présentement limitée par des fluctuations thermodynamiques de la taille des miroirs délimitant la cavité, une limite qui semble pour l'instant difficile à surmonter. Il y a un intérêt à étudier d'autres types de références externes, non seulement pour établir s'il est possible de vaincre la limite de stabilité actuelle en poussant le progrès dans une direction alternative, mais aussi parce que la complexité des meilleures cavités en espace libre les rend peu attrayantes dans toutes les applications pour lesquelles une stabilité laser record n'est pas requise.

Les travaux de recherche présentés dans cette thèse sont unis sous le thème de l'optimisation des interféromètres à fibre optique. Ces interféromètres, tout comme les cavités Fabry-Perot qui ont fait l'objet d'une recherche beaucoup plus poussée, peuvent agir à titre de référence externe pour la stabilisation laser ; ils affichent une performance typiquement déterminée soit par le bruit de photodétection, soit par les fluctuations de longueur et d'indice de la fibre constituant le bras de délai dans une configuration Michelson ou Mach-Zehnder. Fondamentalement, la stabilité ultime d'un laser verrouillé à un tel interféromètre est limitée par les fluctuations d'origine thermodynamique du parcours optique dans la fibre, une limite qui est plus élevée que la limite analogue dans une cavité en espace libre dans la mesure où une fibre de silice conventionnelle est considérée. En comparaison, ces interféromètres fibrés sont toutefois plus simples à construire et à opérer.

Les trois premiers articles présentés dans cette thèse s'intéressent au cas d'un interféromètre fibré limité par le bruit de photodétection. Cette condition est normalement atteinte lorsqu'une relativement courte fibre optique est utilisée. On y montre qu'une limite de stabilité fondamentale associée au bruit de grenaille peut être calculée. Surtout, on établit pour la première fois que cette limite peut être asymptotiquement atteinte peu importe la méthode de détection et le point d'opération utilisés, pour autant que deux conditions soient respectées : que tous les signaux interférométriques disponibles soient indépendamment enregistrés et combinés de façon optimale et que le caractère cyclostationnaire du bruit de grenaille soit soigneusement considéré pour la construction de la forme d'onde de démodulation (si le signal laser est modulé). On présente aussi une nouvelle méthode, similaire à la détection auto-hétérodyne, permettant de minimiser l'impact des bruits de photodétection d'origine technique et faciliter l'opération à la limite du bruit de grenaille.

Les deux derniers articles de cette thèse s'intéressent plutôt au cas d'un interféromètre dont la performance est limitée par le bruit de longueur optique fondamental de la fibre, ce qui est pertinent pour une fibre de longueur intermédiaire. On y montre que des fibres à coeur creux récemment développées, les fibres antirésonantes, exhibent des propriétés les rendant utilisables aux fins de la stabilisation laser et potentiellement compétitives vis-à-vis des fibres conventionnelles et peut-être même des cavités en espace libre. En particulier, on démontre que ces fibres à coeur creux, lorsque évacuées, affichent un coefficient de rétrodiffusion Rayleigh qui est de quatre ordres de grandeur inférieur à celui d'une fibre conventionnelle ; leur bruit thermoconductif est aussi plus faible par 5 dB à 20 kHz et peut vraisemblablement être diminué davantage. De futurs travaux pourront confirmer si le bruit fondamental de ces fibres est aussi faible qu'envisagé pour les basses fréquences, ce qui permettrait de considérer leur utilisation pour faire véritable compétition aux cavités ultra-stables.

Abstract

The great temporal coherence of the signal emitted by a laser oscillator, compared to other light sources, constitutes one of the most remarkable properties of the laser. Today, a large number of applications ranging from spectroscopy to remote sensing rely on a stabilized laser, that is, a single-frequency laser whose temporal coherence is improved by locking it to an external reference. The development of optical atomic clocks and gravitational wave detectors, two world-class research efforts that are constantly pushing technological boundaries, is also closely related to advances in laser stabilization.

To this day, the most coherent laser signals have been produced by locking lasers to free-space Fabry-Perot cavities highly decoupled from a controlled laboratory environment. In the last fifty years, such cavities have been the subject of an intense research effort by the main national metrology laboratories; their performance is currently limited by thermodynamic fluctuations in the dimensions of the mirrors delimiting the cavity, a limit which currently appears difficult to overcome. There is an interest in studying other types of external references, not only to establish whether it is possible to beat the current stability limit by pushing progress in an alternative direction, but also because the complexity of the best free-space cavities makes them unattractive in all applications for which record stability is not required.

The research work presented in this thesis is united under the theme of the optimization of fiber interferometers. Such interferometers, just like the Fabry-Perot cavities which have been the subject of much more extensive research, can act as an external reference for laser stabilization; they display a performance typically determined either by the photodetection noise or by the length and index fluctuations of the optical fiber constituting the delay arm in a Michelson or Mach-Zehnder configuration. Fundamentally, the ultimate stability of a laser locked to such an interferometer is limited by thermodynamic fluctuations of the optical path through the fiber, a limit which is higher than the analogous limit in a free-space cavity when a conventional silica fiber is considered. In comparison, however, these fiber interferometers are simpler to build and operate.

The three first articles presented in this thesis focus on the case of a fiber interferometer limited by photodetection noise. This condition is normally reached when a relatively short optical fiber is used. It is shown that a fundamental stability limit associated with shot

noise can be calculated. Most importantly, it is established for the first time that this limit can be asymptotically attained regardless of the detection method and the operating point that are used, provided that two conditions are met: that all available interferometric signals are independently recorded and combined in an optimal manner and that the cyclostationary nature of shot noise is carefully considered when constructing the demodulation waveform (if the laser signal is modulated). We also introduce a new method, similar to self-heterodyne detection, which allows the minimization of technical photodetection noise and facilitates shot-noise-limited operation.

The last two articles of this thesis rather concern the case of an interferometer whose performance is limited by the fiber's fundamental optical path noise, which is relevant when the delay fiber is of intermediate length. It is shown that recently developed antiresonant hollow-core fibers exhibit properties that make them suitable for the purposes of laser stabilization and potentially competitive with conventional silica fibers and perhaps even free-space cavities. In particular, it is demonstrated that these hollow-core fibers, when evacuated, display a Rayleigh backscattering coefficient which is four orders of magnitude lower than that of a conventional fiber; their thermoconductive noise is also lower by 5 dB at 20 kHz and can likely be reduced further. Future work will confirm whether the fundamental noise of these fibers at low frequencies is as low as currently anticipated, which would allow their consideration to truly compete with ultra-stable free-space cavities.

Table des matières

Résumé	ii
Abstract	iv
Table des matières	vi
Liste des tableaux	ix
Liste des figures	x
Liste des sigles et acronymes	xiii
Liste des symboles mathématiques	xv
Remerciements	xxi
Avant-propos	xxii
Organisation de la thèse	xxii
Articles et contributions personnelles	xxiii
Introduction	1
0.1 Fondements théoriques	6
0.2 État de l’art et voies d’amélioration	57
0.3 Bibliographie	70
1 Optimal detection scheme for shot-noise-limited phase estimation in passive classical-light interferometry	99
1.1 Résumé	99
1.2 Abstract	100
1.3 Introduction	100
1.4 Theory	101
1.5 Experimental demonstration	112
1.6 Conclusion	117
1.7 Bibliographie	119
2 External serrodyne modulation for the suppression of low-frequency noise in quadrature interferometry	123
2.1 Résumé	123
2.2 Abstract	124

2.3	Introduction	124
2.4	Theory	125
2.5	Experimental demonstration	129
2.6	Conclusion	131
2.7	Bibliographie	132
3	Reaching the true shot-noise limited phase sensitivity in self-heterodyne interferometry	134
3.1	Résumé	134
3.2	Abstract	135
3.3	Introduction	135
3.4	Self-heterodyne interferometer with a single photodetector	136
3.5	Self-heterodyne interferometer with two photodetectors	148
3.6	Simulation	152
3.7	Conclusion	153
3.8	Bibliographie	156
4	Backscattering in antiresonant hollow-core fibers : over 40 dB lower than in standard optical fibers	159
4.1	Résumé	159
4.2	Abstract	160
4.3	Introduction	160
4.4	Experimental demonstration	162
4.5	Discussion	164
4.6	Conclusion	165
4.7	Bibliographie	167
5	Fundamental thermal noise in antiresonant hollow-core fibers	171
5.1	Résumé	171
5.2	Abstract	172
5.3	Introduction	173
5.4	Theory	175
5.5	Experiment	181
5.6	Discussion	194
5.7	Conclusion	197
5.8	Bibliographie	198
	Conclusion	206
A	Backscattering in antiresonant hollow-core fibers : over 40 dB lower than in standard optical fibers - Supplement	209
A.1	Résumé	209
A.2	Abstract	210
A.3	Instrument	210
A.4	NANF sample	210
A.5	Correction and calibration	211
A.6	Sensitivity	214
A.7	Bibliographie	217

B	Description statistique du signal de l'oscillateur laser	218
B.1	Cas général	218
B.2	Exemple 1 : marche aléatoire de phase	220
B.3	Exemple 2 : bruit de fréquence blanc à bande limitée	221
B.4	Exemple 3 : bruit de fréquence blanc réduit par asservissement	224
B.5	Exemple 4 : marche aléatoire de phase différenciée	225
B.6	Phase stationnaire et expansion de Middleton	227
B.7	Variance Allan	229
B.8	Bibliographie	231
C	Réponse d'un discriminateur interrogé par méthode Pound-Drever-Hall	234

Liste des tableaux

0.3	DSP de bruit de fréquence aux basses fréquences d'un laser asservi au discriminateur pour opération à la limite du bruit de grenaille : comparaison de méthodes de discrimination pour la ligne à délai et pour le résonateur.	43
0.4	Valeurs des paramètres utilisés dans le modèle de bruit thermomécanique pour une fibre de silice standard.	49
1.1	Summary of the estimation methods in a two-output interferometer.	107
1.2	Summary of the estimation methods in a four-output interferometer.	110
3.1	Summary of the estimation methods considered in this paper.	151
5.1	SMF parameters used in the thermoconductive noise model.	178
5.2	HCF parameters used in the thermoconductive noise model.	180
A.1	Summary of the important measurement parameters.	212

Liste des figures

0.1	Familles de références externes utilisées pour la stabilisation laser.	2
0.2	Schéma d'une cavité Fabry-Perot en espace libre.	4
0.3	Schéma-bloc d'un montage de rétroaction électronique ou d'asservissement laser typique.	10
0.4	Simulation : exemple de fonctions de transfert réalistes pour un asservissement laser à un interféromètre Mach-Zehnder fibré.	12
0.5	Schéma d'un montage permettant la discrimination de fréquence par battement hétérodyne avec un laser de référence.	13
0.6	DSP de bruit de fréquence à 1 kHz d'un laser asservi à un laser de référence parfaitement monochromatique - illustration de la limite associée au bruit de photodétection.	15
0.7	Schéma d'un interféromètre à ligne à délai de type Mach-Zehnder fibré.	19
0.8	Réponse en champ de l'interféromètre à ligne à délai idéal.	21
0.9	Schéma d'un résonateur de type cavité fibrée en anneau.	21
0.10	Réponse en champ du résonateur.	22
0.11	Illustration de l'approximation associée à la considération d'une résonance unique pour un résonateur.	24
0.12	Impact des pertes internes sur le comportement de discrimination du résonateur.	25
0.13	Réponse de discrimination d'un résonateur de finesse $\mathcal{F} = 20$	26
0.14	Simulation : comparaison de la performance d'asservissement possible pour la ligne à délai et pour le résonateur.	28
0.15	Réponse de discrimination d'une raie atomique ou moléculaire élargie de façon homogène.	32
0.16	Simulation de l'effet de la démodulation sur le bruit de photodétection	34
0.17	Comparaison du signal d'erreur obtenu pour une ligne à délai et un résonateur interrogés par modulation PDH.	35
0.18	Comparaison du gain DC de discrimination possible pour une ligne à délai et pour un résonateur interrogés par modulation PDH.	37
0.19	Schéma des autres méthodes de discrimination considérées pour la ligne à délai.	39
0.20	Comparaison de la fonction de transfert de discrimination et de la fonction de transfert du bruit intrinsèque du discriminateur.	45
0.21	Bruit thermodynamique fondamental d'une fibre optique de silice.	50
0.22	Schéma d'une bobine simple servant à supporter une fibre optique.	53
0.23	DSP de bruit de fréquence à 1 kHz d'un laser asservi à une ligne à délai fibrée de longueur variable.	55
0.24	Simulation : impact de la dispersion et de la rétrodiffusion Rayleigh sur la réponse d'un interféromètre Mach-Zehnder opéré à flanc de frange.	57

0.25	Performance théorique fondamentale d'un laser stabilisé à une ligne à délai fibrée pour trois longueurs de fibre.	59
0.26	Bruit thermoconductif théorique d'une fibre de silice nue pour deux températures d'opération et deux aires modales.	63
0.27	Illustration simplifiée de méthodes de confinement de la lumière dans une fibre optique.	66
0.28	Illustration simplifiée du principe de confinement par antirésonance.	67
0.29	Section de la fibre de type NANF.	69
1.1	Layout of the two types of interferometers considered in this paper.	103
1.2	Examples of estimator performance in a two-output interferometer.	108
1.3	Examples of estimator performance in a four-output interferometer.	111
1.4	Examples of signal processing steps in the experimental demonstration.	115
1.5	Measurement to model comparison in a two-output interferometer.	117
1.6	Measurement to model comparison in a four-output interferometer.	118
2.1	Layout of the lossless quadrature interferometer considered for analysis.	125
2.2	Examples of relevant signals and spectra in serrodyne interferometry.	126
2.3	Examples of signal processing steps in the experimental demonstration.	130
2.4	Experimental phase estimates and sensitivity prediction.	131
3.1	Layout of the single-detector self-heterodyne interferometer.	137
3.2	Estimator performance in two-harmonic demodulation (single photodetector)	142
3.3	Estimator performance versus demodulation waveform (single photodetector)	145
3.4	Estimator performance versus number of harmonics (single photodetector)	147
3.5	Layout of the two-detector self-heterodyne interferometer.	148
3.6	Estimator performance versus demodulation waveform (two photodetectors)	152
3.7	Simulation of a representative case (single photodetector).	154
3.8	Simulation of a representative case (two photodetectors).	155
4.1	Layout of the coherent OFDR.	163
4.2	Comparison of the reflectance density measured in NANF and in SMF.	164
4.3	Reflectance density measured in NANF for different OFDR settings.	166
5.1	Examples of the spectral shape function and its asymptotic behavior.	177
5.2	Comparison of fundamental normalized phase PSD in SMF and HCF.	182
5.3	Layout of the experimental setup and HCF's cross section.	183
5.4	Modeled contributions to the total phase noise PSD at 20 kHz.	186
5.5	Examples of signal processing steps in the experimental demonstration.	187
5.6	Illustration of the effect of laser noise suppression.	189
5.7	Measured phase PSD, SMF vs SMF.	190
5.8	Measured phase PSD, HCF vs HCF (before evacuation).	190
5.9	Measured phase PSD, SMF vs HCF (before evacuation).	191
5.10	Measured phase PSD, SMF vs HCF (after evacuation).	193
5.11	Measured phase PSD, HCF vs HCF (before and after evacuation).	193
5.12	Numerical prediction of the filling and venting time.	194
5.13	Measured phase PSD, normalized. Summary of the main experimental results.	195
5.14	Comparison with previous demonstrations.	196
5.15	Modeled performance for a core filled by selected noble gases.	197

A.1	Partial layout of the OFDR showing the interconnections and power levels. . .	211
A.2	Loss characterization of the NANF sample.	212
A.3	Example of the intermediate steps required for the resampling operation.	213
A.4	Laser frequency noise and reflectance densities for different chirp rates.	216
B.1	Simulation : forme de raie associée à un bruit de fréquence blanc à bande limitée.	223
B.2	Simulation : forme de raie associée à un bruit de fréquence blanc réduit par asservissement.	226
B.3	Simulation : forme de raie associée à un bruit de fréquence blanc différencié. . .	227
B.4	Simulation : forme de raie associée à un processus de phase stationnaire et à bande limitée pour trois variances.	229
C.1	Fonction de transfert du discriminateur interrogé par méthode PDH : comparaison de la ligne à délai et du résonateur pour différentes fréquences de modulation.	237

Liste des sigles et acronymes

AC	<i>Alternating current</i> ou courant alternatif
ADC	<i>Analog to digital converter</i> ou convertisseur analogique-numérique
AHD	<i>All-harmonic demodulation</i>
AM	<i>Amplitude modulation</i> ou modulation d'amplitude
AOM	<i>Acousto-optic modulator</i> ou modulateur acousto-optique
APC	<i>Angled physical contact</i>
BPD	<i>Balanced photodetector</i> ou photodétecteur balancé
BSC	<i>Backscattering coefficient</i> ou coefficient de rétrodiffusion
CF	<i>Compensation fiber</i> ou fibre de compensation
COF	<i>Crossover filter</i> ou filtre séparateur
CRB	<i>Cramér-Rao bound</i> ou borne de Cramér-Rao
CW	<i>Continuous-wave</i> ou à onde continue
DC	<i>Direct current</i> ou courant continu
DF	<i>Delay fiber</i> ou fibre à délai
DSP	Densité spectrale de puissance (voir <i>PSD</i>)
EDFA	<i>Erbium-doped fiber amplifier</i> ou amplificateur à fibre dopée à l'erbium
EO	<i>Electro-optic modulator</i> ou modulateur électro-optique
FM	<i>Frequency modulation</i> ou modulation de fréquence
FMCW	<i>Frequency-modulated continuous-wave</i> ou à onde continue modulée en fréquence
FOG	<i>Fiber-optic gyroscope</i> ou gyroscope à fibre optique
FUT	<i>Fiber under test</i> ou fibre sous test
GIF	<i>Graded-index fiber</i> ou fibre à gradient d'indice
HCF	<i>Hollow-core fiber</i> ou fibre à coeur creux
HP	<i>High-pass</i> ou passe-haut
IQ	<i>In phase and quadrature</i> ou en phase et en quadrature
LADAR	<i>Laser detection and ranging</i> ou télédétection et télémétrie par laser
LIGO	<i>Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory</i>
LP	<i>Low-pass</i> ou passe-bas
MHD	<i>Main-harmonic demodulation</i> ou démodulation de l'harmonique fondamentale
MN	<i>Measurement noise</i> ou bruit de mesure

MVU	<i>Minimum variance unbiased</i> ou sans biais à variance minimale
NANF	<i>Nested antiresonant nodeless fiber</i> ou fibre à coeur creux antirésonante, imbriquée et sans noeud
NEP	<i>Noise-equivalent power</i> ou puissance équivalente de bruit
OCT	<i>Optical coherence tomography</i> ou tomographie en cohérence optique
OFDR	<i>Optical frequency domain reflectometer</i> ou réflectomètre optique dans le domaine fréquentiel
PBGF	<i>Photonic bandgap fiber</i> ou fibre à bande interdite photonique
PC	<i>Polarization controller</i> ou contrôleur de polarisation
PD	<i>Photodiode</i> ou photodiode
PDH	Pound-Drever-Hall
PII²	Proportionnel, intégral, double intégral
PM	<i>Phase modulation</i> ou modulation de phase
PM	<i>Polarization-maintaining</i> ou à maintien de polarisation
PSD	<i>Power spectral density</i> ou densité spectrale de puissance
PT	<i>Pigtail</i> ou segment de fibre à un seul connecteur
RIN	<i>Relative intensity noise</i> ou bruit d'intensité relative
SCF	<i>Surface capillary wave</i> ou onde capillaire de surface
SMF	<i>Single-mode fiber</i> ou fibre monomode
SNL	<i>Shot noise limit</i> ou limite de bruit de grenaille
SNR	<i>Signal-to-noise ratio</i> ou rapport signal sur bruit
STP	<i>Standard temperature and pressure</i> ou conditions normales de température et de pression
TEC	<i>Thermal expansion coefficient</i> ou coefficient d'expansion thermique
TOC	<i>Thermo-optic coefficient</i> ou coefficient thermo-optique
ULE	<i>Ultra low expansion</i> ou à ultra-faible expansion (thermique)

Liste des symboles mathématiques

Il est à noter que la liste ci-bas est applicable pour le chapitre d'introduction, pour le chapitre de conclusion ainsi que pour les annexes B et C du présent document. Les articles constituant les autres chapitres et l'annexe A emploient leurs propres définitions mathématiques.

α_ϕ	[rad ² /s]	Constante de diffusion de phase (marche aléatoire)
α_L	[1/K]	Coefficient d'expansion thermique (linéaire)
$\beta(f)$	[Hz]	Ligne de séparation β
γ_ν	[Hz/s]	Taux de glissement en fréquence
γ	[-]	Fraction de puissance transmise (par tour)
Γ	[-]	Profondeur normalisée de la raie, en champ
$\Gamma(q)$	[-]	Fonction Gamma
$\Gamma(q, r)$	[-]	Fonction Gamma incomplète
δ	[rad]	Déphasage introduit par le parcours dans la membrane
$\delta(t)$	[1/s]	Impulsion (fonction Dirac)
Δ	[Hz]	Désaccord par rapport à un point de symétrie hermitienne
$\Delta\nu$	[Hz]	Largeur de raie (pleine largeur à mi-hauteur ou <i>FWHM</i>)
$\Delta\nu_0$	[Hz]	Largeur de raie pour un bruit de fréquence blanc
$\Delta\nu_\beta$	[Hz]	Largeur de raie calculée par ligne de séparation β
ΔN	[1/m ³]	Différence de population
$\epsilon(t)$	[-]	Bruit d'amplitude relative
$\epsilon_f(t)$	[-]	Bruit d'amplitude relative à la sortie du discriminateur
θ_i	[-]	Angle d'incidence dans le milieu incident
θ_m	[-]	Angle d'incidence dans la membrane
$\theta(t)$	[rad]	Signal de phase photodétectée
Θ	[K]	Température
λ	[m]	Longueur d'onde dans le vide
$\Lambda(f)$	[1/Hz]	Forme de raie due au bruit de phase
$\nu(t)$	[Hz]	Bruit de fréquence
ν_0	[Hz]	Fréquence porteuse ou moyenne (optique)
ν_P	[-]	Coefficient de Poisson
ν_r	[Hz]	Fréquence d'une symétrie hermitienne (raie, frange, etc.)

ξ_{Θ}	[1/K]	Sensibilité thermique
ρ	[kg/m ³]	Densité
$\rho(\delta)$	[-]	Coefficient de réflexion de la membrane (étalon ou Fabry-Perot)
$\sigma^2(\tau)$	[rad ²]	Variance de l'incrément de phase $\Phi(\tau)$
$\sigma_y^2(\tau)$	[-]	Variance Allan
τ	[s]	Variable de délai ou retard ou temps d'intégration
τ_v	[s]	Temps de vie de l'état excité
$\phi(t)$	[rad]	Bruit de phase
$\phi_f(t)$	[rad]	Bruit de phase à la sortie du discriminateur
ϕ_0	[rad]	Biais de phase (phase à $t = 0$)
ϕ_d	[rad]	Phase de démodulation
ϕ_m	[rad]	Phase de modulation
$\Phi(\tau)$	[rad]	Différence de phase (incrément)
φ	[-]	Angle de perte mécanique
χ	[m]	Variable de séparation spatiale
$\chi(f)$	[-]	Susceptibilité électrique
$\psi(t)$	[rad]	Bruit de phase (version alternative)
Ψ	[Hz ² /Hz]	$S_{\nu'}^1(f)$ minimale pour ligne à délai limitée par bruit de grenaille
$a(t)$	[m/s ²]	Fluctuations de l'accélération
A_0	[arb.]	Amplitude générale d'une sinusoïde
A_{β}	[Hz ²]	Aire de la DSP supérieure à la ligne de séparation β
A_d	[V/W]	Amplitude de démodulation
A_f	[m ²]	Aire de section de la fibre
A_k	[-]	Aire sous la courbe du k -ième terme du piédestal $P(f)$
A_L	[-]	Facteur de réduction de la DSP par asservissement
A_m	[m ²]	Aire modale effective
A_p	[m ²]	Aire de la surface photosensible
$b(t)$	[1/s]	Signal de rétrodiffusion Rayleigh suite à une impulsion
c	[m/s]	Vitesse de la lumière dans le vide
C	[-]	Signal d'erreur normalisé (PDH)
c_v	[J/(m ³ K)]	Capacité thermique volumique
d	[-]	Opérateur de dérivation
$dn/d\Theta$	[1/K]	Coefficient thermo-optique
e_m	[m]	Épaisseur physique de la membrane
$E(t)$	[V/m]	Champ électrique
$E_{in}(t)$	[V/m]	Champ électrique incident
$E_{out}(t)$	[V/m]	Champ électrique à la sortie
$E_{ref}(t)$	[V/m]	Champ électrique réfléchi ou de référence, selon le contexte

E_0	[V/m]	Amplitude moyenne du champ électrique
E_Y	[Pa]	Module de Young
f	[Hz]	Fréquence
f_c	[Hz]	Fréquence de coupure
f_L	[Hz]	Fréquence de gain de boucle unitaire
f_m	[Hz]	Fréquence de modulation
\mathcal{F}	[-]	Finesse
g	[m/s ²]	Accélération gravitationnelle
G	[arb.]	Gain
h	[J/Hz]	Constante de Planck
h_q	[arb. ² /Hz]	Niveau de la DSP unilatérale du signal $q(t)$
H_b	[m]	Hauteur de la bobine
$h_{qr}(t)$	[arb.]	Réponse impulsionnelle du système $q(t) \rightarrow r(t)$
$H_{qr}(f)$	[arb.]	Fonction de transfert du système $q(t) \rightarrow r(t)$
i	[-]	Indice (entier)
I	[W/m ²]	Intensité du faisceau laser
I_{sat}	[W/m ²]	Intensité de saturation du milieu atomique ou moléculaire
j	[-]	Unité imaginaire
J_z	[-]	Fonction de Bessel de première espèce d'ordre z
k	[-]	Indice (entier)
k_B	[J/K]	Constante de Boltzmann
k_Θ	[W/(m.K)]	Conductivité thermique
K	[-]	Fraction de puissance recouplée (par tour)
K_d	[1/Hz]	Gain dérivateur du régulateur
K_{eo}	[-]	Gain élasto-optique
K_i	[Hz]	Gain intégral du régulateur
K_{ii}	[Hz ²]	Gain double-intégral du régulateur
K_p	[-]	Gain proportionnel du régulateur
K_V	[V]	Gain PDH
L	[m]	Longueur
L_c	[m]	Longueur de cohérence du signal laser
$L_{c,p}$	[m]	Longueur de cohérence des perturbations de longueur optique
$L(f)$	[1/Hz]	Forme de raie totale
m_i	[rad]	Indice de modulation
m_θ	[rad]	Bruit de phase du discriminateur pour un tour
n	[-]	Indice de réfraction
n_i	[-]	Indice de réfraction du milieu d'incidence (air, gaz, vide)
n_m	[-]	Indice de réfraction de la membrane
$n(t)$	[W]	Bruit de photodétection (puissance optique)

n_{sp}	[-]	Facteur d'émission spontanée
N_k	[1/m ³]	Densité de population du niveau k
$P(f)$	[1/Hz]	Piédestal de la raie
P_0	[W]	Puissance moyenne (optique)
$P_{bal}(t)$	[W]	Puissance après balancement (optique)
$P_{in}(t)$	[W]	Puissance incidente (optique)
$P_{int}(t)$	[W]	Puissance interne (optique)
$P_{out}(t)$	[W]	Puissance de sortie (optique)
$P_{ref}(t)$	[W]	Puissance du signal de référence (optique)
$q(t)$	[arb.]	Signal quelconque
r	[-]	Coefficient de réflexion de Fresnel
$r(t)$	[arb.]	Autre signal quelconque
\mathcal{R}	[A/W]	Responsivité
R	[-]	Réflectance
R_c	[m]	Rayon du coeur
$R_q(\tau)$	[arb. ²]	Fonction d'autocorrélation du signal quelconque $q(t)$
s	[arb.]	Variable muette d'intégration
$S_q^{(1)}(f)$	[arb. ² /Hz]	DSP unilatérale du signal quelconque $q(t)$
$S_q^{(2)}(f)$	[arb. ² /Hz]	DSP bilatérale du signal quelconque $q(t)$
t	[s]	Temps
T ou T_0	[s]	Retard introduit par un discriminateur ou retard d'un écho
$T(t)$	[s]	Fluctuations de T , à moyenne nulle
T_c	[s]	Temps de cohérence
$T_{c,0}$	[s]	Temps de cohérence pour un bruit de fréquence blanc
T_{obs}	[s]	Temps d'observation
$u(t)$	[-]	Fonction échelon (Heaviside)
V_ϕ	[rad ²]	Variance du processus de phase stationnaire
$V_{out}(t)$	[V]	Tension de sortie (PDH, après démodulation)
w	[m]	Rayon du mode gaussien (e^{-2})
x	[m]	Distance ou position
$y(t)$	[-]	Bruit de fréquence normalisée par la fréquence porteuse
Z	[V/A]	Impédance caractéristique du milieu de propagation

À ma famille.

But I could be wrong.

Carl Sagan

Remerciements

Il va sans dire que je ne suis pas le seul à avoir déployé efforts et sacrifices pour arriver à ce point, c'est-à-dire la conclusion d'un long chapitre dans ma vie personnelle et professionnelle.

En tout premier lieu, j'aimerais exprimer toute ma gratitude envers mon directeur de recherche, Jérôme Genest, qui m'accompagne et me soutient d'une façon ou d'une autre depuis plus de dix ans. Jérôme, nous sommes bien loin des lapins qui courent dans des billes ; merci pour ta générosité, ta rigueur, ta curiosité (« C'est amusant ça... ») ainsi que toutes les opportunités que tu m'as offertes au cours des années, sans compter.

Je tiens également à remercier Jean-Daniel Deschênes et Radan Slavík d'avoir agi comme mentors au début et à la fin de mon cheminement, respectivement. Merci pour votre enthousiasme envers mes idées et pour vos questions parfois confrontantes, mais aussi pour m'avoir montré un idéal à atteindre en recherche appliquée. Les articles présentés dans cette thèse n'auraient pas été écrits sans vos idées, votre appui et vos encouragements.

Merci à toute l'équipe du Centre d'optique, photonique et laser, en particulier Diane Déziel et Simon Levasseur, pour l'aide de première qualité qui m'a toujours été offerte. Merci aussi à tous mes collègues du groupe de recherche, Nicolas (mon complice de longue date), Hugo, Alex, Philippe, Khaoula, Mark, Ariane, Steeve, Connor et Carlos. Vous côtoyer au quotidien a enrichi mon expérience sur tous les plans.

Je dois évidemment souligner le soutien et la bienveillance indéfectibles de mes parents, Brigitte Michaud, Denis Belleau, Inno Sagbo et Caroline Roy. Merci de m'avoir tout donné pour réussir, avant et pendant mes études. Merci à mes beaux-parents Christine et Benoît pour tout le soutien offert pour m'aider à rédiger. Enfin, merci aux trois filles de ma vie, Gabrielle, Béatrice et Agathe. Je sais que vous avez enduré beaucoup (trop) pour me permettre de compléter cette thèse ; sachez que votre amour donne un sens plus profond à toute cette expérience.

Finalement, je remercie le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada ainsi que le Fonds de recherche du Québec - Nature et technologies pour leur soutien financier au cours de mes études supérieures.

Avant-propos

Cette thèse porte sur différentes approches permettant d'améliorer la stabilité en fréquence d'un laser à onde continue asservi à un interféromètre fibré, aussi appelé ligne à délai fibrée. Celles-ci peuvent être regroupées en deux catégories distinctes. D'un côté, on présente trois approches permettant de minimiser l'impact du bruit de photodétection et de se rapprocher de la limite fondamentale pour la sensibilité en phase, limite qui est déterminée par le bruit de grenaille (*shot noise*). Bien que l'objectif de la recherche soit l'amélioration des interféromètres *fibrés* qui sont mieux placés pour concurrencer les cavités Fabry-Perot en espace libre aux fins de la stabilisation laser, ces approches sont générales et donc directement applicables à des interféromètres en espace libre. D'un autre côté, on démontre qu'un type particulier de fibre à coeur creux antirésonante affiche des propriétés intéressantes, plus spécifiquement un faible coefficient de rétrodiffusion et une puissance de bruit thermoconductif qui peut être inférieure à celle d'une fibre conventionnelle dans certaines conditions. Ces deux propriétés promettent l'amélioration de la performance intrinsèque de l'interféromètre fibré qui agit à titre de référence pour le laser dans le contexte de son asservissement, comme expliqué dans ce document. Les travaux de recherche présentés au sein de cette thèse ont été réalisés au Centre d'optique, photonique et laser de l'Université Laval, sous la direction du professeur Jérôme Genest.

Organisation de la thèse

Cette thèse par articles comporte une introduction, cinq chapitres et une conclusion. L'introduction et la conclusion ont pour but de faire ressortir la cohérence de la démarche de recherche exposée dans chacun des chapitres. Spécifiquement, l'introduction présente les motivations pour l'optimisation des interféromètres fibrés aux fins de la stabilisation laser, des exemples d'applications, une revue exhaustive des concepts théoriques qui sous-tendent tous les travaux, les meilleurs résultats publiés à ce jour ainsi que des idées d'améliorations possibles. Le contenu de l'introduction est essentiel à la bonne compréhension et la mise en contexte du reste de la thèse. Quant à elle, la conclusion résume les principaux résultats et offre certaines perspectives.

Chacun des chapitres 1 à 5 correspond à un article qui a été publié, en cours d'études, dans

une revue scientifique avec comité de lecture. Les articles sont présentés en anglais et en deux groupes thématiques. Le premier groupe contient les chapitres 1, 2 et 3 qui traitent de la minimisation du bruit de photodétection et qui sont présentés en ordre chronologique de publication. Les chapitres 4 et 5 constituent le second groupe thématique et portent sur la caractérisation de la fibre à coeur creux antirésonante. Dans tous les cas, aucune modification majeure n'a été apportée entre la version publiée et la version intégrée à la thèse. Des modifications mineures telles que l'augmentation de la taille des figures, la disposition de certaines équations sur une seule ligne ainsi que la réorganisation des tableaux en format paysage sur une pleine page ont été apportées pour tirer avantage du format simple colonne et faciliter la lecture. Il est à noter que la numérotation des figures, équations, tableaux et références est identique à celle dans les articles publiés ou soumis, et chaque chapitre comporte sa propre bibliographie. Par ailleurs, les symboles mathématiques peuvent avoir des significations différentes entre deux chapitres donnés. Enfin, on note que l'article présenté au chapitre 4 a été publié avec un document supplémentaire détaillant la démarche expérimentale ; ce document a été répliqué à l'annexe A de cette thèse.

Articles et contributions personnelles

Chapitre 1 - Optimal detection scheme for shot-noise-limited phase estimation in passive classical-light interferometry.

Date de publication : 17 août 2018.

Revue scientifique avec comité de lecture : *Physical Review Applied*, vol. 10, no 2, p. 024025.

Auteurs : Vincent Michaud-Belleau, Jérôme Genest et Jean-Daniel Deschênes.

Cet article présente des méthodes d'estimation de la phase d'un interféromètre homodyne qui tirent avantage de la proportionnalité entre la puissance du bruit de grenaille et la puissance optique incidente au détecteur, qui dépend elle-même de la phase moyenne (point d'opération) dans le cas des sorties d'un interféromètre. Mon apport à cette publication se résume de la façon suivante :

- Développement des modèles mathématiques.
- Conception et réalisation de l'essentiel de la démonstration expérimentale.
- Traitement de signal et analyse des résultats.
- Rédaction de l'article, incluant revue de littérature et préparation des figures.

Jean-Daniel Deschênes a proposé l'idée initiale par une question lors de mon examen doctoral. Il a aussi fait la conception du circuit d'amplification transimpédance des photodiodes. Jérôme Genest a supervisé le travail. Tous les auteurs ont révisé le manuscrit.

Chapitre 2 - External serrodyne modulation for the suppression of low-frequency noise in quadrature interferometry.

Date de publication : 28 janvier 2020.

Revue scientifique avec comité de lecture : *Optics Letters*, vol. 45, no 3, p. 670-673.

Auteurs : Vincent Michaud-Belleau, Mark Charlet, Alex Tourigny-Plante, Jean-Daniel Deschênes et Jérôme Genest.

Cet article présente une méthode permettant le décalage en fréquence du signal à la sortie d'un interféromètre passif, c'est-à-dire un interféromètre qui ne contient pas de modulateur dans un de ses bras. La méthode repose sur la modulation serrodyne du signal optique à l'entrée de l'interféromètre. Mon apport à cette publication se résume de la façon suivante :

- Développement des modèles mathématiques.
- Conception et réalisation de l'essentiel de la démonstration expérimentale.
- Traitement de signal et analyse des résultats.
- Rédaction de l'article, incluant revue de littérature et préparation des figures.

Mark Charlet a participé à la conception et l'assemblage de l'interféromètre lors d'un stage d'été. Alex Tourigny-Plante a implémenté le générateur de formes d'onde arbitraires sur la plateforme Red Pitaya. Jean-Daniel Deschênes a proposé l'idée initiale lors d'une discussion informelle. Jérôme Genest a supervisé le travail. Tous les auteurs ont révisé le manuscrit.

Chapitre 3 - Reaching the true shot-noise limited phase sensitivity in self-heterodyne interferometry.

Date de publication : 7 janvier 2022.

Revue scientifique avec comité de lecture : *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 58, no 1, p. 670-673.

Auteurs : Vincent Michaud-Belleau, Jean-Daniel Deschênes et Jérôme Genest.

Cet article constitue une suite du travail présenté au Chapitre 1, étendant le traitement au cas commun d'un interféromètre avec décalage en fréquence. Le caractère cyclostationnaire du bruit de grenaille est considéré de façon à permettre l'atteinte de la véritable limite de bruit de grenaille pour la sensibilité en phase, c'est-à-dire celle qui peut être atteinte avec un interféromètre homodyne (sans modulation), par l'utilisation de formes d'onde de démodulation non conventionnelles. Mon apport à cette publication se résume de la façon suivante :

- Proposition de l'idée initiale.
- Développement des modèles mathématiques.
- Rédaction de l'article, incluant revue de littérature et préparation des figures.

Cet article ne présente pas de démonstration expérimentale. Jean-Daniel Deschênes et Jérôme Genest ont supervisé le travail. Tous les auteurs ont révisé le manuscrit.

Chapitre 4 - Backscattering in antiresonant hollow-core fibers: over 40 dB lower than in standard optical fibers.

Date de publication : 10 février 2021.

Revue scientifique avec comité de lecture : *Optica*, vol. 8, no 2, p. 216-219.

Auteurs : Vincent Michaud-Belleau, Eric Numkam Fokoua, Thomas D. Bradley, John R. Hayes, Yong Chen, Francesco Poletti, David J. Richardson, Jérôme Genest et Radan Slavík.

Cet article présente la première mesure du plancher fondamental de rétrodiffusion dans des fibres à coeur creux antirésonantes. On y montre que ces fibres sont significativement plus performantes de ce point de vue que des fibres conventionnelles faites de verre. Mon apport à cette publication se résume de la façon suivante :

- Proposition de l'idée initiale.
- Organisation de la collaboration avec l'équipe de l'Université de Southampton.
- Conception et réalisation de l'essentiel de la démonstration expérimentale.
- Traitement de signal et analyse des résultats.
- Rédaction de l'article, incluant revue de littérature et préparation des figures.

Eric Numkam Fokoua a développé la majeure partie du modèle théorique présenté en détail dans une autre publication qui n'est pas incluse dans cette thèse (<https://doi.org/10.1063/5.0057999>), sauf en ce qui concerne le signal de rétrodiffusion du gaz (dans le contexte d'une mesure cohérente) que j'ai moi-même modélisé. Thomas D. Bradley, John R. Hayes, Yong Chen, David J. Richardson et Francesco Poletti ont permis la fabrication des échantillons de fibre à coeur creux. Radan Slavík a réalisé les interconnexions à de la fibre conventionnelle, a fait les mesures de caractérisation conventionnelle présentées en annexe et a participé au développement du modèle théorique. Jérôme Genest et Radan Slavík ont supervisé le travail. Tous les auteurs ont révisé le manuscrit.

Chapitre 5 - Fundamental thermal noise in antiresonant hollow-core fibers.

Date de publication : 1 août 2022.

Revue scientifique avec comité de lecture : *Physical Review A*, Vol. 106, no 2, p.023501, 1-15.

Auteurs : Vincent Michaud-Belleau, Eric Numkam Fokoua, Peter Horak, Natalie V. Wheeler, Shuichiro Rikimi, Thomas D. Bradley, David J. Richardson, Francesco Poletti, Jérôme Genest et Radan Slavík.

Cet article présente la première mesure du bruit thermique fondamental dans des fibres à coeur creux antirésonantes. On y introduit un modèle modifié de bruit thermoconductif s'accordant bien avec les mesures expérimentales et permettant de prédire dans quelles conditions de telles fibres peuvent apparaître fondamentalement plus stables que des fibres conventionnelles faites de verre. Mon apport à cette publication se résume de la façon suivante :

- Proposition de l'idée initiale.
- Organisation de la collaboration avec l'équipe de l'Université de Southampton.
- Développement de l'essentiel du modèle théorique.
- Conception et réalisation de l'essentiel de la démonstration expérimentale.
- Traitement de signal et analyse des résultats.
- Rédaction de l'article, incluant revue de littérature et préparation des figures.

Eric Numkam Fokoua et Peter Horak ont aidé au développement du modèle théorique. Natalie V. Wheeler et Shuichiro Rikimi ont aidé à faire l'évacuation des échantillons de fibre à coeur creux. Thomas D. Bradley, David J. Richardson et Francesco Poletti ont permis la fabrication des échantillons de fibre à coeur creux. Radan Slavík a réalisé les interconnexions à de la fibre conventionnelle et a organisé l'évacuation des échantillons. Jérôme Genest et Radan Slavík ont supervisé le travail. Tous les auteurs ont révisé le manuscrit.

Introduction

Dans les quelques années suivant la démonstration du premier laser en 1960 [1], il est vite devenu apparent que ce nouvel oscillateur pouvait être stabilisé à un degré le rendant tout à fait compétitif vis-à-vis des oscillateurs micro-ondes ou radio-fréquences déjà existants [2–4]. Cette propriété laissait déjà entrevoir de nombreuses applications pour la technologie alors naissante du laser, par exemple en métrologie et communications. Les idées fondamentales à la base de la *stabilisation laser*, un domaine de recherche encore très effervescent à ce jour, ont d’ailleurs été clairement énoncées par A. D. White en 1965 pour le cas d’un laser à gaz [5] : le signal laser peut être stabilisé, simplement et efficacement, par rétroaction négative basée sur une référence externe ; la référence externe peut être un autre laser, une transition optique atomique ou moléculaire ou une référence géométrique comme un interféromètre à deux ports ou un résonateur (figure 0.1) ; par conception adéquate du système de rétroaction, la stabilité du laser asservi peut être entièrement déterminée par la stabilité de la référence externe ; l’optimisation de la performance du système asservi est dans ce cas faite par sélection ou conception de la référence externe et peut être facilitée par la combinaison de plusieurs références optimisées pour différents temps d’intégration. En fait, ces idées sont entièrement généralisables et ont plus tard été appliquées pour la stabilisation de lasers à colorants organiques, à vapeur métallique, à l’état solide, à semi-conducteurs et à fibre [4, 6–9]. Les récentes démonstrations de stabilité laser record reposent par ailleurs sur les mêmes fondements [10, 11].

Aujourd’hui, les métriques associées à la stabilité (largeur de raie, longueur de cohérence, etc.) sont presque systématiquement données par les fabricants de systèmes laser et les lasers stables ou stabilisés sont essentiels dans un large éventail d’applications. En vibrométrie et vélocimétrie laser [12, 13], par exemple, la stabilité du laser qui éclaire la scène fixe partiellement la résolution spatiale qui peut être atteinte par l’instrument. En spectroscopie, les lasers stables servent à étalonner l’axe spectral de spectromètres à transformée de Fourier [14, 15] et de spectromètres à deux peignes de fréquence [16, 17]. Ils servent aussi à l’illumination directe d’échantillons dans le vaste domaine de la spectroscopie laser [18, 19] ; selon la méthode de détection utilisée, la stabilité du laser peut limiter la résolution spectrale ou la sensibilité de la mesure [20]. Par ailleurs, dans tous les systèmes de télédétection et télémétrie actifs basés sur un laser à onde continue modulée en fréquence (*FMCW : frequency-modulated continuous-wave* [21]), la stabilité dynamique du laser fixe la portée et la plage dynamique de l’instrument.

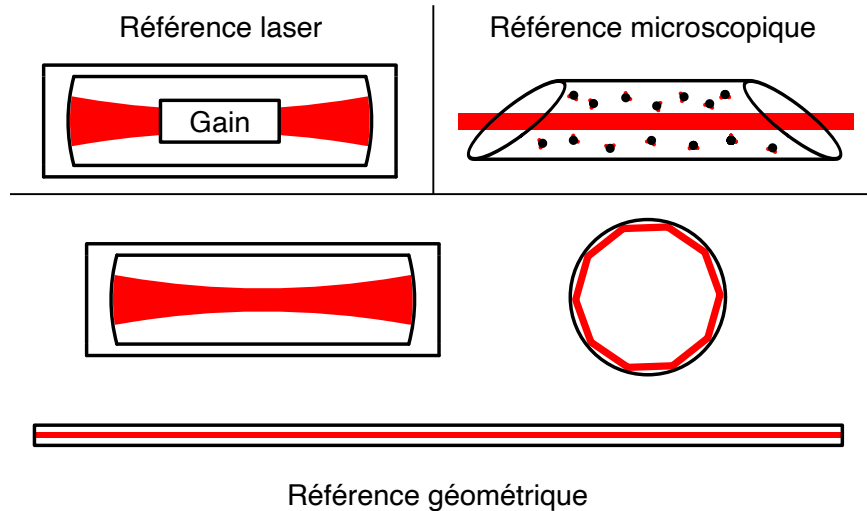


FIGURE 0.1 – Familles de références externes utilisées pour la stabilisation laser : oscillateur laser indépendant ; référence microscopique comme une raie d’absorption atomique ou moléculaire ; référence géométrique comme une cavité en espace libre, une longue fibre optique ou un microrésonateur.

Ceci est pertinent pour le réflectomètre optique dans le domaine fréquentiel (*OFDR : optical frequency domain reflectometer*) utilisé pour la caractérisation de composantes fibrées [22, 23] et la détection distribuée via fibre optique [24, 25]. De façon similaire, la stabilité dynamique du laser est importante pour le système de tomographie par cohérence optique (*OCT : optical coherence tomography*) utilisé pour l’imagerie tridimensionnelle de tissus biologiques [26, 27] ainsi que pour le LADAR (*laser detection and ranging*) cohérent utilisé pour le positionnement et profilage à distance de cibles dures [28, 29] et l’anémométrie basée sur le transport d’aérosols dans une masse d’air mobile [30, 31]. Enfin, des lasers stables sont aussi requis pour la combinaison cohérente de faisceaux [32, 33], pour le refroidissement laser [34, 35] et pour les communications optiques cohérentes [36, 37], parmi bien d’autres applications.

Le degré de stabilité laser requis peut varier considérablement selon l’application considérée. Par exemple, la longueur de cohérence nécessaire peut être de dizaines de kilomètres pour un réflectomètre utilisé pour la caractérisation de réseaux de télécommunications fibrés et de quelques millimètres pour un système de tomographie pour l’étude d’échantillons biologiques, une différence de sept ordres de grandeur dans deux instruments qui sont pourtant basés sur le même principe général. Dans plusieurs applications telles que l’OCT, la sélection d’un laser affichant une stabilité intrinsèque adéquate est souvent suffisante et il n’y a pas d’intérêt particulier à implémenter des schémas de stabilisation active. Dans d’autres cas, un effort de stabilisation modeste peut être nécessaire, souvent pour allouer l’utilisation d’un laser intrinsèquement moins stable mais plus simple et moins dispendieux, ou un effort plus sérieux peut être requis pour atteindre les meilleures performances possibles ou permettre l’opération en champ d’un instrument de laboratoire. À l’heure actuelle, l’application la plus exigeante du

point de vue de la stabilité laser est l’horloge atomique optique [38]. Ses requis extrêmes sont sans aucun doute responsables de la majeure partie du progrès enregistré dans le domaine de la stabilisation laser au courant des dernières décennies¹. Dans une horloge optique, un laser stable est utilisé pour interroger la transition d’horloge de façon intermittente et périodique afin de s’y verrouiller. Pour que la stabilité (ou plus formellement l’instabilité) du signal d’horloge soit principalement déterminée par les propriétés des atomes sondés et non pas par les propriétés du laser (effet Dick [40]), il faut que le laser affiche une largeur de raie comparable ou inférieure à la largeur naturelle de la transition [41, 42]. Comme les transitions d’horloge présentement considérées exhibent une largeur naturelle entre le mHz et le Hz, l’objectif ultime de la communauté est de construire un système laser affichant une largeur de raie comparable à 1 mHz [38, 43]. Ceci équivaut à une longueur de cohérence comparable à la distance entre le Soleil et la Terre, à l’extrême limite (ou peut-être même un ordre de grandeur au-delà) de ce qui est technologiquement possible aujourd’hui. La précision inégalée des horloges atomiques optiques pour la mesure du temps ou de la fréquence, supportée par le développement d’oscillateurs laser de plus en plus stables, pourrait servir ou sert déjà pour la géodésie [44, 45], l’étude des problèmes à plusieurs corps [46, 47], la recherche de la matière sombre [48, 49], l’étude de la variation des constantes fondamentales [50, 51], les tests de la relativité générale [52, 53] ainsi que la détection d’ondes gravitationnelles [54]. Éventuellement, ces horloges serviront vraisemblablement au maintien officiel du temps, remplaçant les horloges atomiques micro-ondes au césium présentement utilisées [55, 56].

À ce jour, la meilleure stabilité laser a été démontrée avec un laser à fibre dopée à l’erbium à 1542 nm asservi à une cavité Fabry-Perot en espace libre hautement isolée de l’environnement et maintenue à une température cryogénique [10]; le système laser décrit dans cette publication de 2017 exhibe une largeur de raie inférieure à 10 mHz (la valeur exacte dépend de la définition utilisée), un accomplissement d’importance en sciences laser. En fait, depuis une première démonstration de verrouillage au flanc d’une résonance d’une cavité d’Invar en 1973 [57], la recherche au sujet de la stabilisation laser s’est largement concentrée sur ce type de référence dont les performances dépendent de la stabilité géométrique du parcours optique (de la distance optique entre les deux miroirs, essentiellement). Le schéma général n’a d’ailleurs pas évolué depuis : une cavité d’une longueur de l’ordre de 20 cm, disons entre 5 et 100 cm, avec espace central évacué et deux miroirs hautement réfléchissants contactés à un espaceur stable de façon à former une cavité résonante non-confocale (figure 0.2). Pour cette méthode de stabilisation, les premiers efforts d’amélioration ont été dédiés à la gestion du bruit d’amplitude laser et l’utilisation de méthodes de modulation permettant de minimiser l’impact du bruit de photodétection et de verrouiller le laser au centre d’une résonance [58]. Ensuite, la recherche s’est concentrée sur le défi d’isolation environnementale de la cavité, entre autres via sélection de matériaux à faible coefficient d’expansion thermique pour l’espaceur : d’abord des verres de

1. Un autre événement important étant le développement des instruments pour la détection d’ondes gravitationnelles [39].

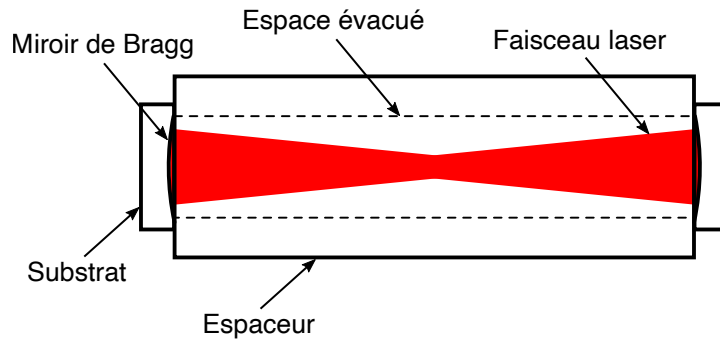


FIGURE 0.2 – Schéma d’une cavité Fabry-Perot en espace libre utilisée comme référence externe pour la stabilisation laser.

type Zerodur [59] et *Ultra Low Expansion* (ULE) [60–62] à température pièce, puis des matériaux cristallins comme le silicium [63] et le saphir [64, 65] à des températures cryogéniques. À la fin des années 1990, ces efforts ont culminé en la démonstration de lasers stabilisés ayant des largeurs de raie inférieures à 1 Hz [61, 62]. La présence d’un plancher d’instabilité associé aux fluctuations d’origine thermodynamique de la longueur optique, le bruit thermique, a aussi été prédite dans les mêmes années [61, 64, 65] puis formalisée par les équipes travaillant à la détection d’ondes gravitationnelles [66, 67]. Les efforts de recherche de la décennie 2000 ont été centrés sur la réduction de la sensibilité en accélération et vibration des cavités ainsi que la mise en lumière des planchers fondamentaux de stabilité [68–73]. Les stratégies pour minimiser l’impact du bruit thermique ont ensuite été identifiées et mises en pratique : augmentation de la taille du mode transverse fondamental [74], augmentation de la longueur de la cavité et utilisation de miroirs à faibles pertes mécaniques [42, 75] ainsi qu’opération à des températures cryogéniques [76]. Les meilleures démonstrations récentes, incluant celle mentionnée au début de ce paragraphe, éliminent virtuellement tous les bruits d’origine technique et font état d’une stabilité limitée par le bruit thermodynamique fondamental des miroirs dans des cavités faites de silicium monocristallin (à 124 K [10] et 4 K [11]). Une diminution de ce bruit est envisageable par modification de la structure des miroirs hautement réfléchissants [77], mais constitue un défi technologique considérable qui n’a pas encore été résolu.

Même s’il est généralement reconnu que l’usage d’une référence de type cavité Fabry-Perot en espace libre hautement optimisée constitue l’approche offrant la meilleure stabilité laser pour les temps d’intégration inférieurs à la seconde, et ce, autant en principe qu’en pratique, ces systèmes sont complexes et les autres types de références externes (figure 0.1) peuvent offrir des avantages alternatifs dans certains contextes spécifiques. Dans la mesure où un oscillateur laser plus stable que le laser d’intérêt est disponible, par exemple, le verrouillage des deux lasers constitue une façon simple et efficace d’améliorer la stabilité. Également, si une raie d’absorption atomique ou moléculaire tombe dans la plage d’accord du laser à stabiliser, celle-

ci peut être utilisée en tant que référence microscopique [78, 79]. Comme expliqué plus loin, cette méthode est associée à certaines limites en terme de rapport signal sur bruit, mais offre généralement la meilleure performance pour les longs temps d'intégration puisque la fréquence de transition est d'abord déterminée par des constantes physiques fondamentales et est typiquement peu influencée par les fluctuations des conditions externes. Enfin, les autres références géométriques comme les microrésonateurs [80, 81] et les interféromètres fibrés [82, 83] n'ont pas bénéficié des mêmes efforts de recherche et d'optimisation que les cavités Fabry-Perot dans les dernières décennies, mais elles offrent des avantages qui leur sont similaires : de nombreux points de verrouillage régulièrement espacés dans le spectre, ce qui facilite leur usage pour la stabilisation d'un oscillateur opérant à une fréquence optique quelconque, et un comportement qui demeure linéaire pour de fortes puissances optiques, ce qui permet la minimisation de l'impact du bruit de photodétection. Par ailleurs, elles ont le potentiel d'être plus robustes que les cavités en espace libre puisqu'elles ne demandent pas forcément d'alignement optique et peuvent être empaquetées dans un format très compact, ce qui est intéressant pour des applications en dehors du laboratoire. Enfin, elles peuvent aussi être beaucoup moins dispendieuses et complexes à construire et opérer.

Cette thèse s'intéresse spécifiquement à la question de l'optimisation des interféromètres fibrés dans le contexte de la stabilisation laser. De tels interféromètres sont avantageux dans la mesure où ils harnachent les propriétés de guidage et les faibles pertes de propagation de la fibre optique afin de retarder le signal laser à un degré autrement difficile à atteindre. En 1989, une première démonstration de stabilisation laser sur un tel interféromètre a été publiée, décrivant une bonne partie des concepts essentiels incluant l'impact potentiel de fluctuations d'origine thermodynamique [84]. D'autres démonstrations ont suivi une dizaine d'années plus tard, illustrant l'avantage d'utiliser un modulateur acousto-optique dans un bras de l'interféromètre [85] et de stabiliser l'amplitude du signal laser [86, 87]. La limite d'instabilité associée au bruit thermodynamique fondamental s'est aussi formalisée par reconnaissance des résultats obtenus dans le domaine des capteurs fibrés [88]. Mais c'est une publication en 2009 qui a mis en lumière la possibilité d'utiliser un interféromètre fibré afin d'atteindre une stabilité *comparable* à celle des lasers stabilisés sur les cavités Fabry-Perot de l'époque [82]. En utilisant une fibre beaucoup plus longue que dans les démonstrations précédentes et en utilisant une méthode auto-hétérodyne pour minimiser certains bruits de photodétection aux basses fréquences, une excellente stabilité (faible instabilité) a pu être atteinte, approchant la limite thermodynamique fondamentale de la fibre. Quelques démonstrations ont suivi depuis, tentant d'optimiser un aspect ou un autre de la méthode (stabilisation aux très basses fréquences, stabilisation d'un laser opérant dans le visible, etc.) sans vraiment révolutionner le domaine [89–94]. À l'heure actuelle, les efforts d'optimisation des interféromètres fibrés sont pilotés par un groupe chinois qui a fait d'énormes progrès sur la question de l'isolation environnementale de la référence fibrée [83, 95, 96]. Leurs résultats illustrent toutefois que la fibre de silice est fondamentalement trop bruyante pour que la stabilisation sur interféromètre fibré

fasse véritablement compétition à la stabilisation sur cavité (supposant que la meilleure cavité possible est utilisée), mais ceci n’implique évidemment pas qu’il n’y aucune valeur à utiliser un interféromètre fibré pour les applications moins exigeantes que l’horloge atomique optique. Au-delà du simple intérêt à explorer des façons d’améliorer les interféromètres basés sur des fibres de silice conventionnelles de n’importe quelle longueur, cette thèse est aussi motivée par les récents développements dans le domaine des fibres optiques à coeur creux [97]. Ces fibres exhibent maintenant des pertes de propagation qui sont comparables aux fibres conventionnelles et ont le grand avantage de permettre à la lumière de se propager en majeure partie dans l’air ou dans le vide. Ainsi, l’utilisation d’une fibre à coeur creux dans un interféromètre peut peut-être permettre d’atteindre de meilleures performances en stabilisation laser.

La suite de cette introduction est séparée en deux grandes sections. Dans la première, on présente les fondements théoriques de la stabilisation laser incluant la formalisation du concept de stabilité et une description des approches possibles pour l’améliorer, une comparaison détaillée de différents types de références et méthodes de discrimination basées sur la rétroaction électronique ainsi que la définition des formes de bruit qui limitent les performances possibles. Cette section culmine en un modèle détaillé des bruits observables dans un système de stabilisation laser sur fibre optique. On note qu’une approche semi-classique est implicitement utilisée pour décrire les phénomènes quantiques, en particulier le bruit de grenaille qui constitue ici le bruit de photodétection le plus fondamental. Dans la seconde section, on compare les meilleures performances atteintes à ce jour pour des lasers stabilisés sur différents types de références externes et on propose des voies d’amélioration pour un interféromètre fait de fibre de silice conventionnelle. Finalement, on présente sommairement les fibres à coeur creux, mettant un accent particulier sur la fibre antirésonante utilisée dans les articles présentés aux chapitres 4 et 5.

0.1 Fondements théoriques

0.1.1 Signal de l’oscillateur laser

À tout point de l’espace, le signal généré par un oscillateur laser monofréquence (*single-frequency*, c’est-à-dire qui émet dans un seul mode longitudinal de la cavité), tout comme celui d’un oscillateur général [7, 98], est bien représenté par l’équation suivante [99] :

$$E(t) = E_0 [1 + \epsilon(t)] \cos [2\pi\nu_0 t + \phi_0 + \phi(t)], \quad (1)$$

où E_0 est l’amplitude moyenne du champ électrique, $\epsilon(t)$ est le bruit d’amplitude relative à moyenne nulle, ν_0 est la fréquence porteuse ou moyenne normalement comprise dans la plage 10^{13} à 10^{15} Hz pour un laser, ϕ_0 est un biais de phase quelconque et $\phi(t)$ est le bruit de phase à dérivée moyenne nulle. Une description alternative implique plutôt le bruit de fréquence défini comme $\nu(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt}$, dont la valeur moyenne est nulle. Les processus aléatoires $\epsilon(t)$

et $\phi(t)$ sont évidemment à l'origine de l'écart entre le comportement de l'oscillateur laser réel et celui de l'oscillateur harmonique idéal qui est parfaitement monochromatique, et une description basée sur les densités spectrales de puissance (DSP) de ces bruits ($S_\epsilon^{(1)}(f)$ et $S_\phi^{(1)}(f)$) ou $S_\nu^{(1)}(f) = f^2 S_\phi^{(1)}(f)$, où l'exposant (1) fait référence à une DSP unilatérale, c'est-à-dire définie pour $f \geq 0$ où f est la fréquence) est normalement suffisante pour qualifier un laser monofréquence donné. Néanmoins, plusieurs autres quantités mathématiques sont utilisées pour décrire l'impact des bruits : fonction d'autocorrélation $R_E(\tau)$ du champ $E(t)$, temps de cohérence T_c et longueur de cohérence L_c (tous deux associés à la cohérence *temporelle* du champ), DSP $S_E^{(1)}(f)$ du champ $E(t)$ associée à la forme de raie, largeur de raie $\Delta\nu$ et variance Allan $\sigma_y^2(\tau)$ où τ est le temps d'intégration. Ces quantités complémentaires sont définies et interprétées plus en détail à l'annexe B ; ici, il suffit de dire que la réduction des bruits de l'oscillateur, mais en particulier la réduction de son bruit de phase, tend à amincir la raie, élargir la fonction d'autocorrélation, augmenter le temps de cohérence ainsi que la longueur de cohérence et diminuer la variance Allan. Dans le contexte de cette thèse, stabiliser un laser implique donc une amélioration du degré de cohérence temporelle du signal qu'il émet, et les termes «stable» et «cohérent» sont ici utilisés de façon interchangeable. Par ailleurs, comme l'effet du bruit d'amplitude $\epsilon(t)$ est généralement faible et que sa réduction implique des contraintes considérablement différentes de celles associées à la réduction de bruit de phase, il n'est que rarement considéré dans la suite de cette discussion sauf en tant que bruit indésirable dans le contexte de la réduction du bruit de fréquence (ce qui ne signifie pas qu'il n'y a pas de défi ou d'intérêt à travailler à sa minimisation [100–104]).

La forme exacte de la DSP du bruit de phase ou fréquence peut varier considérablement d'un laser à un autre et selon les conditions d'opération. À un niveau fondamental, le degré de cohérence est déterminé par les propriétés intrinsèques du milieu amplificateur, qui produit et amplifie l'émission spontanée se manifestant en un bruit de phase blanc après addition au champ interne, et de la cavité résonante, qui agit comme un accumulateur ou intégrateur pour ce bruit. La limite de Schawlow-Townes prédit d'ailleurs que le bruit de phase du signal laser est bien décrit par un processus de marche aléatoire, c'est-à-dire un bruit blanc intégré. Le bruit de fréquence blanc associé à cette marche aléatoire de phase est [105] :

$$S_\nu^{(1)}(f) = \frac{n_{sp} h \nu_0 (G - 1)}{4\pi^2 G P_{int} T^2} = \frac{n_{sp} h \nu_0 (\frac{1}{\gamma K} - 1)(1 - K)}{4\pi^2 P_{out} T^2}, \quad (2)$$

où h est la constante de Planck, G est le gain en puissance de l'amplificateur, P_{int} est la puissance intracavité, et P_{out} est la puissance de sortie. Pour un simple parcours complet de la cavité, γ est défini comme la fraction de puissance transmise ($1 - \gamma$ représente la fraction perdue), K comme la fraction de puissance recouplée et T comme le temps de propagation. Enfin, n_{sp} est le facteur d'émission spontanée, sans dimension, qui est au minimum unitaire pour une inversion complète de population. Les lasers à grande puissance *interne* et à longue cavité tendent donc à produire un signal plus cohérent (bruit de fréquence fondamental plus faible) que les lasers à faible puissance interne et à cavité courte. Ce bruit blanc de fréquence

associé à l'émission spontanée est d'ailleurs rarement observé dans les cavités laser de taille macroscopique, sauf peut-être aux très hautes fréquences, car il est généralement trop faible pour être dominant vis-à-vis d'autres bruits. Par exemple, les vibrations ou les fluctuations de température dans l'environnement de la cavité laser font varier sa taille, ce qui se traduit ultimement en un bruit de fréquence sur le signal laser qui est très souvent dominant aux basses fréquences [106]. Pour certains lasers, le mécanisme de pompage peut aussi être une source importante de bruit masquant la limite de Schawlow-Townes [107–109]. Finalement, et comme discuté plus en détail à la section 0.1.9, un bruit fondamental et d'origine thermodynamique perturbe la longueur optique de toute cavité laser opérant à une température non-nulle, ce qui fait fluctuer la fréquence du signal émis [66, 110].

0.1.2 Méthodes de réduction du bruit de fréquence

Lorsque le niveau de bruit de fréquence d'un laser est trop élevé pour une application donnée, quatre options générales sont disponibles pour rectifier le tir [6, 111] :

1. Développer ou utiliser un oscillateur intrinsèquement plus stable ;
2. Réduire le bruit du champ laser à l'aide d'un filtre optique ;
3. Stabiliser l'oscillateur disponible par rétroaction optique² ;
4. Stabiliser l'oscillateur disponible par rétroaction électronique.

Pour des raisons pratiques, la première option n'est pas toujours applicable. De plus, la stabilisation intrinsèque d'un oscillateur entre souvent en conflit avec les contraintes de conception propres au laser. Par exemple, une longue cavité est préférable pour minimiser l'effet de l'émission spontanée (Eq. (2)), mais les modes résonants de la cavité sont alors plus rapprochés en fréquence et il est plus difficile d'obtenir une émission monofréquence robuste. De façon similaire, la maximisation de la puissance intracavité est limitée par le seuil de dommage ou de saturation des réflecteurs et du milieu de gain et par le requis de fournir une certaine puissance utile par couplage externe [113]. Aussi, la production d'un signal à une fréquence porteuse donnée force souvent un mécanisme spécifique de pompage et un milieu de gain particulier, et ces choix ne sont idéaux dans l'optique de minimiser les bruits ou la sensibilité du laser envers ces bruits [4]. Finalement, de nombreux lasers monofréquences sont conçus pour être accordables en fréquence, ce qui implique souvent une taille de cavité ajustable ; il devient alors plus difficile, typiquement, de bien isoler la cavité de son environnement [4].

La seconde option fait normalement appel à une cavité externe, accordée avec le laser à stabiliser, afin d'atténuer les ailes de la raie laser qui sont causées par le bruit de phase à large fréquence de modulation. Bien que rarement utilisée [114, 115], cette technique est la seule permettant de réduire le bruit du laser aux hautes fréquences sans développer un nouveau laser. Toutefois, l'impact d'un tel filtrage sur le temps ou la longueur de cohérence du laser

2. En étirant les définitions, on peut considérer le verrouillage par injection [112] comme une forme de rétroaction optique.

est marginal au mieux (voir annexe B), et la recherche sur la stabilisation laser est clairement centrée sur les basses fréquences où les défis technologiques sont les plus importants.

La rétroaction optique (option 3) fait plutôt appel au signal produit par une référence externe éclairée par le laser, par exemple un interféromètre à deux ports [116], un résonateur Fabry-Perot [117] ou un microrésonateur [118], pour perturber le champ interne de la cavité laser. Dans certaines conditions [119, 120], cette perturbation se traduit en une rétroaction négative qui permet d’atteindre un niveau de bruit de fréquence plus faible que celui du laser «solitaire» (i.e. opéré sans la référence externe) aux basses fréquences. Par cette méthode, on peut faire la conception de la référence externe de façon séparée de celle de la cavité laser, en contournant l’effet des bruits associés au milieu amplificateur. Le principal avantage de cette technique est la très large bande d’asservissement qui peut être atteinte, une conséquence de la rétroaction directe sur le champ interne du laser ainsi que de l’absence de retards non fondamentaux dans la boucle. En contrepartie, il est difficile de bien contrôler le phénomène de rétroaction optique pour atteindre une performance prescrite tout en évitant les instabilités [121], même si certaines solutions existent [122]. Pour ces raisons, la rétroaction optique a surtout été utilisée pour réduire le bruit de fréquence de lasers ayant des largeurs de raie d’au moins 100 MHz et qui sont autrement très difficiles à amincir, par exemple les lasers à semi-conducteurs [6].

Clairement, à ce jour les meilleures performances de stabilisation laser ont été atteintes par rétroaction électronique [42], la méthode qui offre le plus de flexibilité dans la conception du système et le plus grand contrôle sur le comportement du laser asservi. De manière simplifiée, celle-ci implique de mesurer le bruit de fréquence, réguler le signal d’erreur de façon électronique puis d’utiliser un actionneur de fréquence pour compenser les fluctuations du signal laser à la source. Un des principaux défauts de cette approche est la relativement faible bande sur laquelle le bruit peut être réduit, une conséquence des délais électroniques et des limites de performance des actionneurs disponibles [115]. Néanmoins, cette approche est la seule considérée dans la suite de cette discussion.

0.1.3 Modèle de la rétroaction électronique

Un schéma-bloc général de rétroaction électronique est illustré à la figure 0.3. Le bruit de fréquence d’entrée, c’est-à-dire le bruit de fréquence natif du laser, est mesuré à l’aide d’un discriminateur de fréquence servant à faire la transduction en une autre quantité physique $\mu(t)$ (tension, phase, puissance, etc.). Cette transduction est représentée par la fonction de transfert $H_{\nu\mu}(f)$. Sans perte de généralité, le discriminateur de fréquence peut être une référence externe quelconque : un autre laser, une référence microscopique (raie d’absorption atomique ou moléculaire) ou une référence géométrique (cavité Fabry-Perot, interféromètre à deux ports, microrésonateur, etc.). Dans tous les cas, le processus de discrimination est associé à un certain bruit de mesure $m_\mu(t)$ qu’on modélise comme étant additionné au signal $\mu(t)$ résultant de la discrimination. Le signal composite est ensuite traité par un régulateur qui, pour

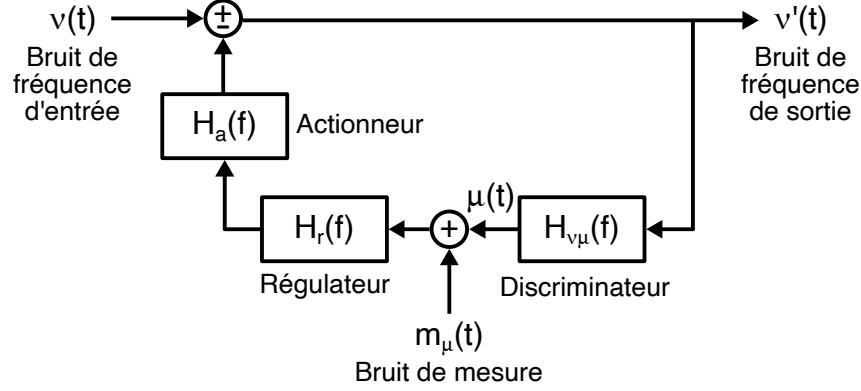


FIGURE 0.3 – Schéma-bloc d'un montage de rétroaction électronique ou d'asservissement laser typique tel que perçu par les fluctuations. Toutes les variables sont définies par rapport à un point d'opération et sont donc à moyenne nulle.

des applications en stabilisation laser, peut être considéré de la forme PII² (proportionnel, intégrateur, double intégrateur) [123] avec une fonction de transfert donnée par :

$$H_r(f) = \frac{K_{ii}}{(j2\pi f)^2} + \frac{K_i}{j2\pi f} + K_p. \quad (3)$$

Le signal régulé est ensuite envoyé à un actionneur pouvant modifier la fréquence instantanée du signal laser. Un tel actionneur peut agir directement sur la taille optique de la cavité laser via une modification de sa température (avec un module thermoélectrique ou un élément résistif), en déplaçant un de ses miroirs (avec un moteur piézoélectrique ou un galvanomètre), ou par une augmentation locale de l'indice de réfraction vu par le champ interne (avec un modulateur électro-optique, par la rotation d'une lame d'onde ou en changeant les paramètres d'opération de la pompe). Alternativement, l'actionneur peut modifier la fréquence du signal en dehors de la cavité laser, par exemple via un modulateur acousto-optique. Un actionneur composite est aussi possible et offre généralement la meilleure performance globale [124–126]. Dans tous les cas, la fonction de transfert du mécanisme actionneur s'exprime ici comme $H_a(f)$. Tenant compte de tous les éléments de la boucle et supposant une opération stable et l'indépendance des processus $\nu(t)$ et $m_\mu(t)$, la DSP du bruit de fréquence à la sortie du système s'exprime comme :

$$S_{\nu'}^{(1)}(f) = S_\nu^{(1)}(f) \left| \frac{1}{1 + H_{\nu\mu}(f)H_r(f)H_a(f)} \right|^2 + S_{m_\mu}^{(1)}(f) \left| \frac{H_r(f)H_a(f)}{1 + H_{\nu\mu}(f)H_r(f)H_a(f)} \right|^2. \quad (4)$$

Par l'ajustement adéquat des paramètres K_{ii} , K_i et K_p , le gain de boucle $|H_{\nu\mu}(f)H_r(f)H_a(f)|$ peut être très élevé dans la plage de fréquence où la condition $\angle[H_r(f)H_a(f)] > -\pi$ est respectée, ce qui implique la maximisation des bandes de réponse du discriminateur et de l'actionneur ainsi que la minimisation de tous les délais. Dans cette plage spectrale, le fort gain de boucle permet de faire l'approximation $1 + H_{\nu\mu}(f)H_r(f)H_a(f) \approx H_{\nu\mu}(f)H_r(f)H_a(f)$.

Ainsi, la DSP du bruit de fréquence de sortie devient approximativement :

$$S_{\nu'}^{(1)}(f) \approx \frac{S_{\nu}^{(1)}(f)}{|H_{\nu\mu}(f)H_r(f)H_a(f)|^2} + \frac{S_{m\mu}^{(1)}(f)}{|H_{\nu\mu}(f)|^2}, \quad f \ll f_L, \quad (5)$$

où f_L est la fréquence de gain de boucle unitaire. Le cas idéal et désiré est celui où le premier terme est négligeable et le second terme domine, ce qui requiert une minimisation du bruit de fréquence natif du laser (ce qui n'est pas toujours possible ou pratique, mais qui peut parfois être fait par préstabilisation du laser sur une référence de performance intermédiaire [70, 89]) et/ou une maximisation du gain de boucle. Avec cette seconde condition respectée, la DSP de bruit de fréquence de sortie est donnée par le rapport entre la DSP du bruit de mesure et le module au carré de la fonction de transfert de discrimination, un rapport qu'on veut évidemment minimiser pour atteindre les meilleures performances. La figure 0.4 illustre un exemple réaliste d'asservissement laser sur un interféromètre fibré pour lequel le bruit de mesure est dominé par les fluctuations thermodynamiques de la longueur optique de la fibre. En résumé, la stabilisation laser par rétroaction électronique implique deux objectifs généraux :

1. La maximisation des bandes de réponse du discriminateur et de l'actionneur, la minimisation des délais et l'ajustement des paramètres du régulateur afin de produire le plus grand gain de boucle possible dans les limites de la stabilité ;
2. La maximisation du rapport entre le gain de discrimination et le bruit de mesure associé à la discrimination.

Par rapport au second point, chaque type de référence utilisée aux fins de la stabilisation laser et chaque mécanisme de discrimination de fréquence est associé à un certain rapport $S_{m\mu}^{(1)}(f)/|H_{\nu\mu}(f)|^2$ fondamental. Dans la suite de cette discussion, on décrit des méthodes communes de mesure du bruit de fréquence laser afin de mettre en lumière les limites de performance attendues dans le cas particulier où on peut considérer que le discriminateur est parfait. Les bruits de discrimination sont pour l'instant attribués au processus de photodétection même. Le but ultime du traitement est d'arriver à une comparaison la plus juste et équitable possible de la performance qui peut être atteinte pour un laser verrouillé à une cavité Fabry-Perot en espace libre versus un laser verrouillé à un interféromètre fibré.

0.1.4 Battement hétérodyne avec un laser de référence

La stabilisation sur une référence laser implique normalement la superposition du champ du laser à stabiliser ainsi que celui du laser de référence sur un photodétecteur pouvant mesurer la puissance optique instantanée. Cette superposition peut être accomplie à l'aide d'un séparateur de faisceau ou d'un coupleur directionnel tel qu'illustré à la figure 0.5. Le laser de référence est souvent un laser stable monofréquence, mais peut aussi être une des raies d'un laser impulsionnel [127].

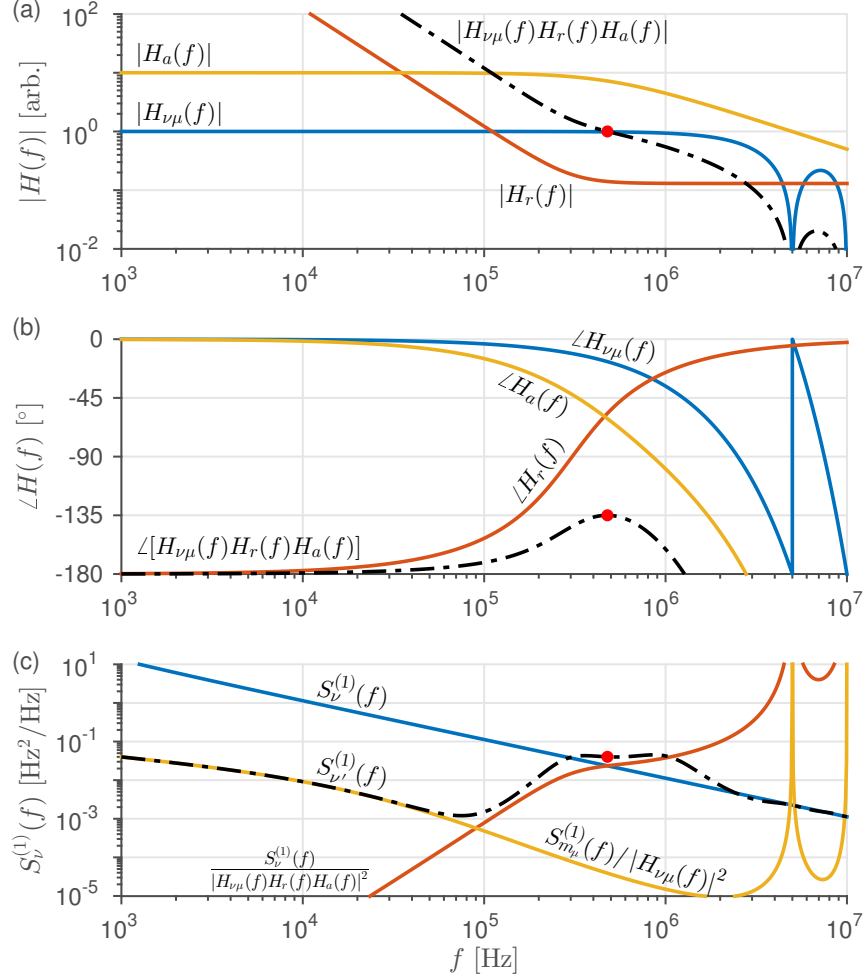


FIGURE 0.4 – Simulation : exemple de fonctions de transfert réalistes pour un asservissement laser à un interféromètre Mach-Zehnder fibré avec un bras de délai constitué de 40 mètres de fibre conventionnelle ($\nu_0 = 195$ THz). (a) Modules des fonctions de transfert constituant la boucle : discriminateur (bleu), régulateur (orange), actionneur (jaune) et total (tirets noirs). La fréquence de gain de boucle unitaire est marquée en rouge. (b) Idem pour la phase. L'actionneur agit comme facteur limitant dans ce cas et n'est pas à phase minimale en raison d'un délai. Une marge de phase de 45° est conservée pour l'asservissement. (c) Bruit de fréquence initial (bleu) et final (tirets noirs). Les approximations de l'équation (5) sont tracées en orange et jaune. En particulier, le trait jaune est représentatif du bruit fondamental d'une fibre SMF. La fréquence de gain de boucle unitaire est encore indiquée en rouge et marque grossièrement la fin de la bande d'asservissement.

Pour un coupleur 50-50 idéal ($K = 0.5$ à la figure 0.5) et un signal de référence de la forme :

$$E_{ref}(t) = E_{0,ref} [1 + \epsilon_{ref}(t)] \cos [2\pi\nu_{0,ref}t + \phi_{0,ref} + \phi_{ref}(t)], \quad (6)$$

la puissance mesurée³ par un photodétecteur ayant une bande suffisante est approximative-

3. En multipliant ce signal de puissance par la responsivité \mathcal{R} du photodétecteur, on obtient le photocourant

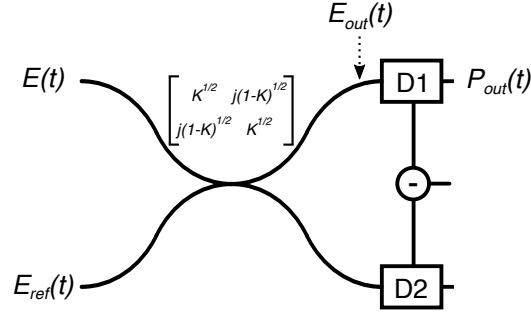


FIGURE 0.5 – Schéma d'un montage permettant la discrimination de fréquence par battement hétérodyne avec un laser de référence. L'action du coupleur directionnel est représentée par une transformation matricielle. D₁ et D₂ sont des photodétecteurs permettant de mesurer la puissance optique instantanée.

ment (pour un ajustement parfait des polarisations et un faible bruit d'amplitude relative) :

$$\begin{aligned}
 P_{out}(t) \approx & n(t) + \frac{P_0}{2} [1 + 2\epsilon(t)] + \frac{P_{0,ref}}{2} [1 + 2\epsilon_{ref}(t)] \\
 & + \sqrt{P_0 P_{0,ref}} [1 + \epsilon(t) + \epsilon_{ref}(t)] \cos [2\pi(\nu_0 - \nu_{0,ref})t + \Delta\phi_0 + \phi(t) - \phi_{ref}(t)],
 \end{aligned} \tag{7}$$

où $n(t)$ est le bruit de puissance à moyenne nulle introduit par le processus de photodétection, $P_0 \equiv E_0^2 A_p / (2Z)$ est la puissance moyenne du champ incident, avec A_p comme l'aire de la surface photosensible du détecteur et Z comme l'impédance caractéristique du milieu de propagation, et $\Delta\phi_0 \equiv \phi_0 - \phi_{0,ref} - \pi/2$. La phase totale du signal, ou la différence de bruits de phase $\phi(t) - \phi_{ref}(t)$, peut être extraite par différentes méthodes telles que la transformée d'Hilbert, la démodulation IQ ou complexe, la démodulation cohérente avec boucle à verrouillage de phase ou la linéarisation (dans le cas d'une porteuse nulle avec phase bien ajustée) [128, 129]. Dans tous les cas, on peut donc identifier que le signal après discrimination est égal au bruit de phase, $\mu(t) = \phi(t) = 2\pi \int_0^t \nu(s) ds$, ou peut-être au bruit de phase multiplié par une constante. Au plus simple, la fonction de transfert de discrimination est donc $H_{\nu\mu}(f) = H_{\nu\phi}(f) = (jf)^{-1}$. Le bruit de discrimination, quant à lui, inclut deux principales contributions : le bruit de phase du laser de référence, qui est directement soustrait de celui du laser à stabiliser et considéré comme statistiquement indépendant de celui-ci, et le bruit additif qui est converti en bruit de phase. Ce bruit additif inclut le bruit de photodétection $n(t)$ ainsi que les bruits d'amplitude des deux lasers couplant à travers les termes de détection directe. Quand la fréquence porteuse est non-nulle et que le bruit additif en puissance est stationnaire et blanc avec une DSP unilatérale de niveau h_n , on peut montrer que la conversion en bruit

qui est souvent la variable d'intérêt pour la modélisation ; ici, on travaillera habituellement avec la puissance optique, ce qui ne change pas les conclusions.

de phase implique un nouveau bruit blanc de la forme suivante (Eq. (3.13)) :

$$S_{m_\phi}^{(1)}(f) \approx \frac{2h_n}{A_0^2} = \frac{2h_n}{P_0 P_{0,ref}}, \quad f \lesssim (\nu_0 - \nu_{0,ref}), \quad (8)$$

où A_0 est l'amplitude du terme oscillant qui vaut ici $\sqrt{P_0 P_{0,ref}}$. La DSP blanche de l'équation (8) est deux fois plus faible dans le cas d'une porteuse nulle et avec une phase bien ajustée, sans restriction sur la plage spectrale de validité ; toutefois, cette situation survient rarement pour un battement entre deux lasers indépendants et on peut ignorer ses particularités ici.

Pour identifier la limite la plus fondamentale de la stabilisation sur un laser de référence, supposons que le bruit de puissance $n(t)$ est dominé par le bruit de grenaille dont la DSP unilatérale est :

$$S_n^{(1)}(f) = \frac{2h\nu_0 (P_0 + P_{0,ref})}{\eta} = \frac{h\nu_0 (P_0 + P_{0,ref})}{\eta}, \quad (9)$$

où η est l'efficacité quantique du photodétecteur⁴. On note que ce bruit est blanc mais cyclostationnaire plutôt que stationnaire puisque le flux de photons incidents sur le photodétecteur oscille de façon sinusoïdale à la fréquence $(\nu_0 - \nu_{0,ref})$ et autour d'une certaine valeur déterminée par la moyenne de puissance des deux lasers. La balance de la puissance incidente est aiguillée vers la seconde sortie du coupleur (D_2 à la figure 0.5). On ne peut donc pas directement utiliser l'équation (8). Toutefois, une analyse plus poussée montre que, dans ce cas particulier, l'équation (8) prédit la bonne DSP de bruit de phase (une différence serait manifeste uniquement pour une erreur dans la phase de démodulation) :

$$S_{m_\phi}^{(1)}(f) = \frac{2h\nu_0 (P_0 + P_{0,ref})}{\eta P_0 P_{0,ref}}, \quad f \lesssim (\nu_0 - \nu_{0,ref}). \quad (10)$$

Il est possible de diminuer le bruit de phase associé au bruit de grenaille par un facteur allant jusqu'à 3 dB en utilisant une forme d'onde de démodulation différente d'une sinusoïde. Le bénéfice est surtout apparent lorsque les puissances des deux lasers sont similaires et que les autres bruits de photodétection sont très faibles (figure 0.6). Cette idée est à la base de l'article présenté au chapitre 3.

De façon similaire, si on suppose que les deux bruits d'amplitude relative sont blancs, à tout le moins sur une large plage de fréquences autour de la porteuse du battement, on peut écrire $h_n = P_0^2 S_\epsilon(f)$ et $h_n = P_{0,ref}^2 S_{\epsilon_{ref}}(f)$. Conséquentment, le bruit total de discrimination, incluant le bruit de phase du laser de référence, peut être représenté comme :

$$S_{m_\phi}^{(1)}(f) = S_{\phi_{ref}}^{(1)}(f) + \frac{2h\nu_0 (P_0 + P_{0,ref})}{\eta P_0 P_{0,ref}} + \frac{2P_0}{P_{0,ref}} S_\epsilon^{(1)}(f) + \frac{2P_{0,ref}}{P_0} S_{\epsilon_{ref}}^{(1)}(f), \quad (11)$$

pour $f \lesssim (\nu_0 - \nu_{0,ref})$. En pratique, la contribution des deux bruits d'amplitude relative peut être annulée ou fortement réduite par détection balancée, c'est-à-dire par la soustraction des

4. On suppose ici que $\nu_0 \approx \nu_{0,ref}$ du point de vue du bruit de grenaille. En pratique, il s'agit d'une approximation bonne à meilleur que 100 ppm. On doit aussi noter que, pour un battement avec un laser impulsif, l'expression de la puissance du signal de référence doit être ajustée à l'équation (9) [130].

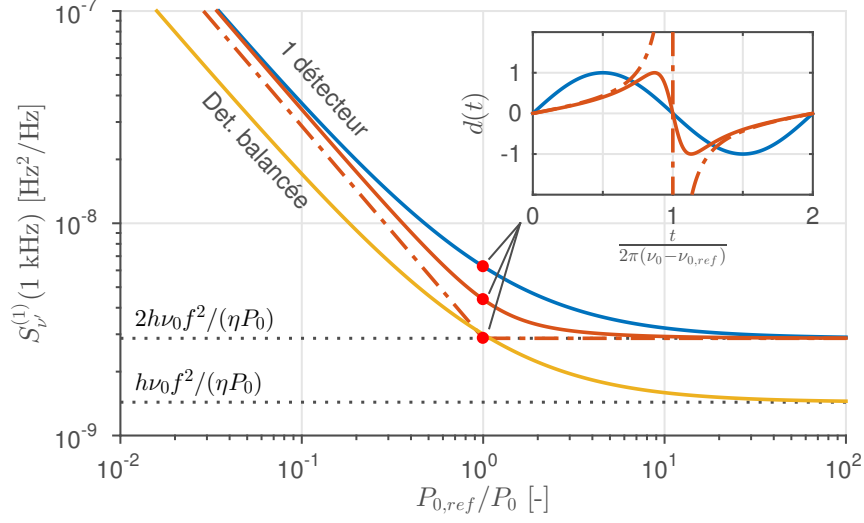


FIGURE 0.6 – DSP de bruit de fréquence à 1 kHz d’un laser asservi à un laser de référence parfaitement monochromatique - illustration de la limite associée au bruit de photodétection. On suppose $P_0 = 100 \mu\text{W}$, $\eta = 0.9$, $\nu_0 = 195 \text{ THz}$, $\Theta = 293 \text{ K}$ et un photodétecteur avant un gain transimpédance de $5 \text{ k}\Omega$ (à une température de 293 K). Aux basses valeurs de $P_{0,ref}/P_0$, le bruit de grenaille du laser de référence domine ; aux hautes valeurs, c’est le bruit de grenaille du laser asservi qui domine. Dans la zone intermédiaire, un ajustement de la forme d’onde de démodulation $d(t)$ permet de diminuer le niveau de bruit dans le cas où un seul photodétecteur est utilisé, le bruit de grenaille total étant dans ce cas fortement cyclostationnaire. Cette forme d’onde (en encart) doit être choisie selon le niveau des autres bruits de photodétection, ici le bruit thermique du photodétecteur. La courbe en bleu illustre le niveau de bruit total lorsque la forme d’onde de démodulation standard (sinusoïde) est choisie ; la courbe orange illustre le cas où la forme d’onde est optimisée en tenant compte du niveau de bruit thermique ; la courbe tiretée en orange illustre le cas limite où le bruit thermique serait nul (amélioration de $\approx 3 \text{ dB}$). Dans le cas où la détection balancée est utilisée (courbe jaune), la sinusoïde constitue la forme d’onde de démodulation optimale.

signaux de puissance mesurés par deux photodétecteurs indépendants. Ceci force l’utilisation d’un coupleur 50-50, mais permet de supprimer les termes de détection directe et de doubler l’amplitude du terme de battement. Avec cette modification, la fonction de transfert de discrimination est inchangée si une méthode d’extraction de phase est employée, le facteur h_n du bruit de grenaille est doublé, le bruit de grenaille devient effectivement stationnaire et A_0^2 est quadruplé ; le bruit de discrimination devient donc :

$$S_{m_\phi}^{(1)}(f) = S_{\phi_{ref}}^{(1)}(f) + \frac{h\nu_0(P_0 + P_{0,ref})}{\eta P_0 P_{0,ref}}, \quad f \lesssim (\nu_0 - \nu_{0,ref}), \quad (12)$$

Pour une boucle d’asservissement bien conçue et un actionneur qui ne constitue pas un facteur limitant, le bruit de fréquence aux basses fréquences du laser stabilisé prend la forme finale :

$$S_{\nu'}^{(1)}(f) \approx \frac{S_{m_\phi}^{(1)}(f)}{|H_{\nu\phi}(f)|^2} = S_{\nu_{ref}}^{(1)}(f) + \frac{h\nu_0(P_0 + P_{0,ref})f^2}{\eta P_0 P_{0,ref}}, \quad f \ll f_L. \quad (13)$$

Sans surprise, la cohérence du laser de référence est transférée au laser asservi dans la limite où le bruit de grenaille est faible, une condition qui est facilitée aux basses fréquences en raison de la présence du terme dérivateur (f^2 au numérateur, une conséquence de mesurer le bruit de phase plutôt que le bruit de fréquence - alternativement, ceci peut être vu comme un intégrateur «gratuit» pour l’asservissement). En pratique, le niveau de bruit de fréquence associé au bruit de grenaille apparaît souvent négligeable, sauf peut-être à la limite supérieure de la bande d’asservissement (figure 0.6). Il est donc relativement facile d’atteindre une performance finale limitée par le bruit de fréquence du laser de référence, tel que désiré. Néanmoins, la contrainte fondamentale de cette approche de stabilisation est qu’une amélioration est possible uniquement dans la mesure où un laser de référence plus stable que le laser à stabiliser est disponible, ce qui, dans la plupart des scénarios, ne fait que transférer le défi de conception au laser de référence en tant que tel.

0.1.5 Opération à flanc de frange d’un discriminateur

Les références microscopiques et géométriques admettent plusieurs approches de discrimination, la plus simple du point de vue matériel et conceptuel étant assurément l’opération à «flanc de frange» qui pourrait aussi être appelée «détection directe». Cette méthode implique essentiellement de stationner le signal laser à une fréquence où la réponse du système de référence exhibe une forte pente vis-à-vis de la fréquence optique ν_0 , ce qui est le cas, par exemple, de part et d’autre d’une frange d’interférence, d’une résonance ou d’une raie d’absorption [15, 57, 131–133]. Ainsi, les fluctuations de fréquence sont converties en fluctuations de puissance après interaction du signal laser avec la référence, avec un gain de conversion DC qui est simplement proportionnel à la pente de la réponse en puissance du système. Ces fluctuations de puissance sont faciles à mesurer à l’aide d’un photodétecteur ayant une bande de réponse suffisamment large pour capturer la dynamique du bruit de fréquence filtré par le discriminateur. La dérivation de la fonction de transfert associée à cette méthode de détection est considérablement simplifiée par l’hypothèse de petites fluctuations de phase et d’amplitude relative (analyse à petit signal). Clairement, dans le contexte de l’optimisation de la stabilisation laser, cette hypothèse est généralement justifiée même s’il existe des exceptions. La théorie associée a été développée et raffinée il y a longtemps [98, 134, 135] et ici on ne présente que ses principaux résultats afin d’exposer la performance ultime d’un discriminateur opéré à flanc de frange. On rappelle qu’à ce point il est considéré que le discriminateur même, c’est-à-dire la référence, n’introduit pas de bruit.

Traitement général

Supposant un signal d’entrée de la même forme que l’équation (1) et un système optique dont la fonction de transfert pour le champ (champ électrique vers champ électrique) est $H_E(f)$, le

champ à la sortie du système s'exprime comme [136] :

$$E_{out}(t) \approx E_0 |H_E(\nu_0)| [1 + \epsilon_f(t, \nu_0)] \cos [2\pi\nu_0 t + \phi_0 + \phi_f(t, \nu_0) + \angle H_E(\nu_0)], \quad (14)$$

où $\epsilon_f(t, \nu_0)$ et $\phi_f(t, \nu_0)$ sont les bruits d'amplitude relative et de phase après filtrage par le discriminateur, respectivement. Chacun de ces bruits implique un terme direct (amplitude vers amplitude, phase vers phase) et un terme de conversion (amplitude vers phase, phase vers amplitude), et l'action du discriminateur sur les bruits du laser peut être traduite en une transformation matricielle :

$$\epsilon_f(t, \nu_0) = \epsilon(t) * h_{E,d}(t, \nu_0) + \phi(t) * h_{E,c}(t, \nu_0), \quad (15a)$$

$$\phi_f(t, \nu_0) = -\epsilon(t) * h_{E,c}(t, \nu_0) + \phi(t) * h_{E,d}(t, \nu_0), \quad (15b)$$

où l'astérisque est l'opérateur de convolution. Toujours dans le contexte de l'analyse à petit signal, on peut montrer que les réponses impulsionnelles et fonctions de transfert associées sont entièrement déterminées par la réponse en champ du discriminateur, $H_E(f)$, et la fréquence porteuse du signal laser, ν_0 :

$$h_{E,d}(t, \nu_0) = \frac{h_E(t) \cos [2\pi\nu_0 t + \angle H_E(\nu_0)]}{|H_E(\nu_0)|} \leftrightarrow H_{E,d}(f, \nu_0) = \frac{1}{2} \left[\frac{H_E(\nu_0 + f)}{H_E(\nu_0)} + \frac{H_E^*(\nu_0 - f)}{H_E^*(\nu_0)} \right], \quad (16a)$$

$$h_{E,c}(t, \nu_0) = \frac{h_E(t) \sin [2\pi\nu_0 t + \angle H_E(\nu_0)]}{|H_E(\nu_0)|} \leftrightarrow H_{E,c}(f, \nu_0) = \frac{j}{2} \left[\frac{H_E(\nu_0 + f)}{H_E(\nu_0)} - \frac{H_E^*(\nu_0 - f)}{H_E^*(\nu_0)} \right], \quad (16b)$$

où l'astérisque en exposant dénote le conjugué du nombre complexe. On constate que la fonction de transfert du filtre direct, $H_{E,d}(f, \nu_0)$, est associée à la symétrie de la réponse en champ du discriminateur autour de ν_0 alors que la fonction de transfert du filtre de conversion, $H_{E,c}(f, \nu_0)$, est associée à son antisymétrie autour du même point.

Lorsque le champ filtré par le discriminateur est mesuré par un photodétecteur, seules les fluctuations d'amplitude sont détectées, la porteuse optique étant trop élevée pour que le terme de phase survive à la photodétection. La puissance mesurée par un photodétecteur ayant une bande supérieure à la bande de $\epsilon_f(t)$ est donc, pour un petit $\epsilon_f(t)$:

$$P_{out}(t) \approx n(t) + P_0 |H_E(\nu_0)|^2 [1 + 2\epsilon_f(t, \nu_0)], \quad (17)$$

où, comme pour le cas du battement hétérodyne avec un laser de référence, $n(t)$ est le bruit de puissance introduit par le processus de photodétection et P_0 est la puissance moyenne du signal d'entrée. La fonction de transfert pour le signal d'intérêt, c'est-à-dire le bruit de fréquence du laser, est donnée par la combinaison des équations (16b) et (17) en tenant compte du terme jf assurant la conversion phase vers fréquence :

$$\begin{aligned} H_{\nu\mu}(f) = H_{\nu P}(f) &= \frac{P_0}{f} |H_E(\nu_0)|^2 \left[\frac{H_E(\nu_0 + f)}{H_E(\nu_0)} - \frac{H_E^*(\nu_0 - f)}{H_E^*(\nu_0)} \right], \\ &= \frac{P_0}{f} [H_E(\nu_0 + f)H_E^*(\nu_0) - H_E^*(\nu_0 - f)H_E(\nu_0)]. \end{aligned} \quad (18)$$

Aux basses fréquences, on peut faire un développement en série et montrer que cette expression tend vers la dérivée du module au carré de la fonction de transfert en champ multipliée par la puissance incidente :

$$H_{\nu P}(f) \xrightarrow{f \rightarrow 0} \frac{d|H_E(\nu_0)|^2}{d\nu_0} P_0, \quad (19)$$

ce qui s'accorde bien avec la description simplifiée du comportement d'un système opéré à flanc de frange [137]. L'avantage de la forme complète de l'équation (18) est, évidemment, la capacité de décrire le module et la phase pour toutes les fréquences, ce qui est nécessaire pour prédire les performances d'un laser asservi sur le discriminateur. On remarque par ailleurs que la fonction de transfert de discrimination $H_{\nu P}(f)$ est nulle si $H_E(\nu_0 + f) = H_E^*(\nu_0 - f)$ pour tout f , ce qui se produit normalement au creux d'une frange (ou à son sommet), d'une résonance ou d'une raie d'absorption. La réponse nulle à ces points de symétrie hermitienne est une conséquence de l'analyse à petit signal qui ne capture pas la conversion non-linéaire dominante se produisant à ces points particuliers.

Supposant encore que le bruit de grenaille domine dans le terme $n(t)$, la DSP du bruit de puissance de l'équation (17) est :

$$S_n^{(1)}(f) = \frac{2h\nu_0}{\eta} P_0 |H_E(\nu_0)|^2. \quad (20)$$

Dans ce cas, le bruit de grenaille est stationnaire. Comme la variable mesurée ici est la puissance photodétectée, cette DSP de bruit de grenaille apparaît directement dans le bruit de mesure total qui inclut aussi la contribution du bruit d'amplitude relative du laser filtré par le discriminateur :

$$S_{m_P}^{(1)}(f) = \frac{2h\nu_0 P_0 |H_E(\nu_0)|^2}{\eta} + P_0^2 |H_E(\nu_0)|^4 \left| \frac{H_E(\nu_0 + f)}{H_E(\nu_0)} + \frac{H_E^*(\nu_0 - f)}{H_E^*(\nu_0)} \right|^2 S_\epsilon^{(1)}(f). \quad (21)$$

Il est souvent impossible d'ignorer l'impact du bruit d'amplitude relative qui n'est pas minimisé au point où le gain de discrimination est maximisé sauf si le signal photodétecté est davantage manipulé, par exemple par détection balancée lorsqu'elle est possible. Toutefois, des solutions existent pour atteindre un régime où le bruit de grenaille domine, par exemple la préstabilisation de l'amplitude du signal laser [102, 124] ou la mesure conjointe du bruit d'amplitude en détection directe pour correction hors-ligne [57, 138]. Pour la suite du traitement et sauf avis contraire, on présume que le bruit d'amplitude relative est négligeable et que les performances de discrimination sont limitées par le bruit de photodétection $n(t)$.

Ligne à délai opérée à flanc de frange

Considérons par exemple un interféromètre de type Mach-Zehnder fibré qui introduit un délai négligeable dans un bras et un délai T dans le second bras en considérant un balancement parfait du couplage, un ajustement parfait de la polarisation ainsi que des pertes négligeables (figure 0.7, $K_1 = K_2 = 0.5$, $\gamma = 1$). Pour suivre la convention maintenant établie et sans doute

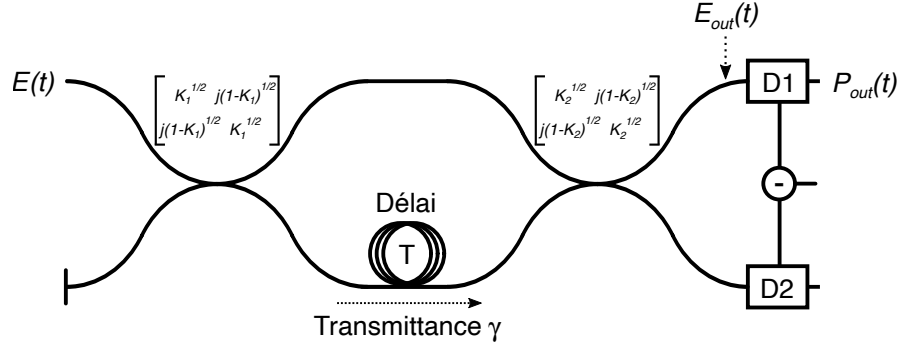


FIGURE 0.7 – Schéma d'un interféromètre à ligne à délai de type Mach-Zehnder fibré. Le bras de référence est présumé être de longueur optique négligeable. Le comportement de l'interféromètre est déterminé par les fractions de couplage K_1 et K_2 , la transmittance du bras de délai γ et le délai T . D_1 et D_2 sont des photodétecteurs permettant de mesurer la puissance optique instantanée.

issue d'un schéma similaire utilisé dans le domaine des radio-fréquences, on peut nommer cette configuration «interféromètre à ligne à délai» ou simplement «ligne à délai» [82, 139]. L'interféromètre de Mach-Zehnder est utilisé ici comme prototype d'interféromètre à deux ports, mais l'interféromètre de Michelson affiche un comportement de discrimination tout à fait comparable, qu'il soit fibré ou en espace libre ; le fait de considérer la propagation du signal dans une fibre optique permet d'ignorer les effets de divergence et de se concentrer sur la réponse fondamentale du système qui est associée au délai différentiel T .

La réponse impulsionnelle pour le champ et la fonction de transfert associée sont, pour la sortie supérieure de l'interféromètre (D_1 associée à $E_{out}(t)$ à la figure 0.7) :

$$h_E(t) = \frac{\delta(t) - \delta(t - T)}{2}, \quad (22a)$$

$$H_E(f) = \frac{1 - e^{-j2\pi fT}}{2} = j \sin(\pi fT) e^{-j\pi fT}. \quad (22b)$$

Cette fonction de transfert est périodique en $f = 1/T$ (figure 0.8). L'insertion de la dernière expression dans l'équation (18) donne une fonction de transfert de discrimination :

$$H_{\nu P}(f) = P_0(\pi T) \sin(2\pi\nu_0 T) \text{sinc}(fT) e^{-j\pi fT}. \quad (23)$$

L'ajustement relatif de ν_0 et de T de façon à ce que $\sin(2\pi\nu_0 T) = \pm 1$ permet de maximiser le gain DC de discrimination, ce qui correspond aux points où la puissance de sortie est égale à la moitié de la puissance d'entrée ($|H_E(\nu_0)|^2 = 1/2$), c'est-à-dire le flanc de la frange d'interférence. Mais même à d'autres points d'opération, la dynamique de discrimination demeure déterminée par le terme $\text{sinc}(fT) e^{-j\pi fT}$ qui est la transformée d'une boîte s'étendant de $t = 0$ à $t = T$. Pour tous les points d'opération à l'exception du creux ou du sommet d'une frange, l'interféromètre à ligne à délai agit donc comme un filtre à moyenne mobile pour le bruit de

fréquence, la moyenne se faisant d'un moment T dans le passé jusqu'à l'instant présent ($t = 0$). Par conception classique du régulateur, la bande d'asservissement possible est de l'ordre de $1/T$, une conséquence du délai de groupe $T/2$ de la moyenne mobile et de la phase linéaire associée, soit $\angle H_{\nu P}(f) = -\pi fT$ pour les fréquences inférieures au premier zéro de la fonction de transfert de discrimination à $f = 1/T$.

Aux fins de synthèse, on peut définir la fonction de transfert optimale comme étant celle obtenue exactement à flanc de frange, c'est-à-dire :

$$H_{\nu P, opt}(f) = P_0(\pi T) \operatorname{sinc}(fT) e^{-j\pi fT}. \quad (24)$$

À ce point particulier, le DSP de bruit de grenaille est :

$$S_n^{(1)}(f) = \frac{2h\nu_0 P_0}{\eta} \frac{P_0}{2} = \frac{h\nu_0 P_0}{\eta}. \quad (25)$$

Le bruit de fréquence d'un laser asservi à flanc de frange, pour un bruit de mesure dominé par le bruit de grenaille, est donc :

$$S_{\nu'}^{(1)}(f) \approx \frac{S_n^{(1)}(f)}{|H_{\nu P, opt}(f)|^2} \approx \frac{h\nu_0}{\pi^2 \eta P_0 T^2} \equiv 2\Psi, \quad f \ll f_L, \quad (26)$$

où on a utilisé $H_{\nu P, opt}(f) \approx P_0(\pi T)$ pour les basses fréquences, la fréquence de gain unitaire f_L étant normalement comparable à $1/T$. Il est à noter que le point d'opération qui maximise le gain de discrimination n'est pas celui qui minimise le bruit de fréquence d'un laser asservi à la ligne à délai dans le cas où le bruit de grenaille est dominant, comme discuté dans les articles présentés aux chapitres 1 et 3⁵. En fait, il est possible de diminuer le niveau de bruit de fréquence pour l'approcher de Ψ , la limite fondamentale pour un interféromètre à deux ports éclairé par un état classique de lumière laser, en déplaçant le point d'opération vers le creux de la frange. Toutefois, le point d'opération optimal est considéré dans cette introduction comme étant celui qui maximise le gain de discrimination, sans égard pour le bruit de grenaille. Ceci constitue la meilleure approche d'optimisation lorsque le bruit de photodétection est indépendant de la puissance de sortie, par exemple le bruit thermique du photodétecteur.

Résonateur opéré à flanc de frange

L'autre discriminateur qui est d'intérêt particulier dans le contexte de cette thèse est le résonateur (cavité résonante), car c'est celui qui est principalement employé pour la stabilisation laser. Un exemple d'un tel résonateur est la cavité en anneau fibrée, illustrée à la figure 0.9, dont le comportement est déterminé par la fraction de puissance transmise pour chaque tour de l'anneau, γ , la fraction de puissance recouplée à chaque tour, K et le délai introduit par

5. Dans le chapitre 3 en particulier, la limite est exprimée comme $\Lambda \equiv h\nu_0/(\eta P_0)$, une DSP bilatérale de bruit de phase. En convertissant en une DSP unilatérale et en divisant par $(2\pi T)^2$ pour la conversion de $\phi(t) - \phi(t - T)$ en $\nu(t)$ aux basses fréquences, on trouve $S_{\nu'}^1(f) = h\nu_0/(2\pi^2 \eta P_0 T^2)$, défini ici comme Ψ .

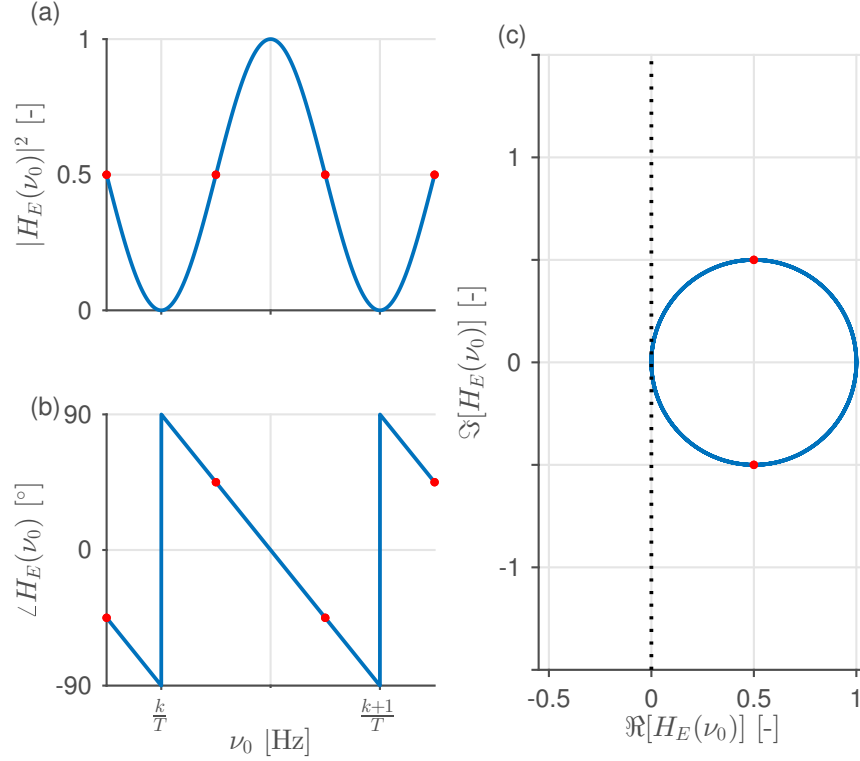


FIGURE 0.8 – Réponse en champ de l’interféromètre à ligne à délai idéal, c’est-à-dire avec couplage équilibré et pertes négligeables. (a) Module au carré de la fonction de transfert (réponse en puissance). (b) Phase de la fonction de transfert. (c) Représentation complexe. Le système est à phase minimale. Dans tous les cas, les marqueurs rouges indiquent les points d’opération où la pente de discrimination est maximisée.

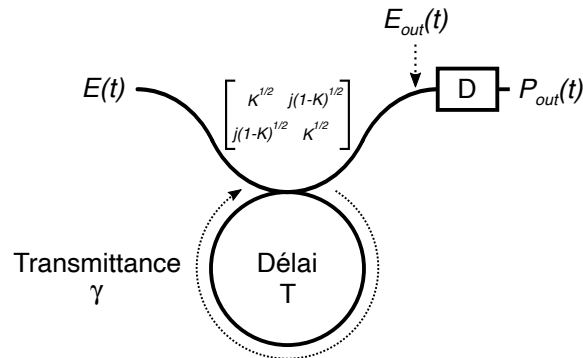


FIGURE 0.9 – Schéma d’un résonateur de type cavité fibrée en anneau. Le comportement du résonateur est déterminé par la fraction de puissance recouplée K ainsi que la transmittance γ et le délai T de la boucle. D est un photodétecteur permettant de mesurer la puissance optique instantanée.

l’anneau T . La puissance qui n’est pas transmise par un tel résonateur est dissipée dans la boucle, ce qui constitue un comportement distinct d’une cavité Fabry-Perot pour laquelle la

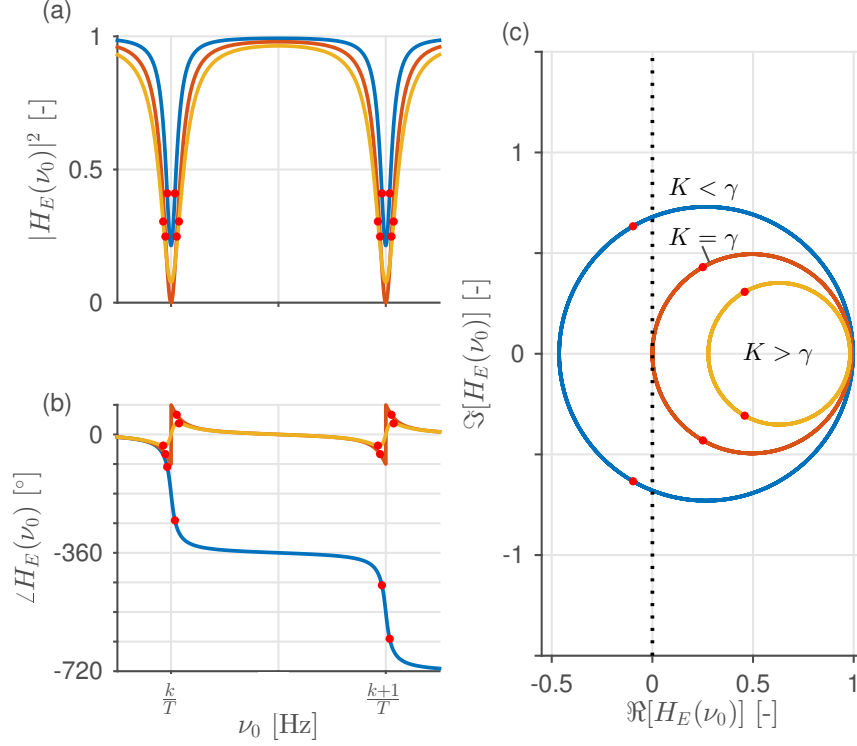


FIGURE 0.10 – Réponse en champ du résonateur (cavité en anneau) pour $K = 0.75$ et $\gamma = \{0.9, 0.75, 0.6\}$. (a) Module au carré de la fonction de transfert (réponse en puissance). (b) Phase de la fonction de transfert. (c) Représentation complexe illustrant le régime sur-couplé ($K < \gamma$), sous-couplé ($K > \gamma$) et de couplage critique ($K = \gamma$). Le système est à phase minimale uniquement pour $K \geq \gamma$. Dans tous les cas, les marqueurs rouges indiquent les points d'opération où la pente de discrimination est maximisée.

puissance d'entrée est séparée entre une fraction transmise, une fraction réfléchie et une fraction dissipée. Toutefois, les propriétés importantes d'une cavité Fabry-Perot utilisée en mode réfléchif sont comparables à celle de la cavité en anneau et on utilisera la cavité en anneau fibrée comme prototype de discriminateur résonant pour la suite de la discussion.

Pour ce système, la réponse impulsionnelle pour le champ et la fonction de transfert associée sont :

$$h_E(t) = \sqrt{K}\delta(t) - \frac{1-K}{\sqrt{K}} \sum_{i=1}^{\infty} (\gamma K)^{i/2} \delta(t - iT), \quad (27a)$$

$$H_E(f) = \frac{\sqrt{K} - \sqrt{\gamma}e^{-j2\pi fT}}{1 - \sqrt{\gamma K}e^{-j2\pi fT}}. \quad (27b)$$

La fonction de transfert pour le champ est aussi périodique en $f = 1/T$, et cette période spectrale est normalement appelée «espace spectral libre» pour un tel résonateur (figure 0.10).

L'expression analytique de la fonction de transfert de discrimination $H_{\nu P}(f)$ peut être obtenue à partir de l'équation précédente, mais son expression mathématique est complexe et ne permet

pas de faire une bonne synthèse du comportement du système [140]. Alternativement, on peut ignorer la périodicité en $1/T$ de la fonction de transfert et considérer une seule résonance [141]; ceci équivaut à lisser la réponse impulsionnelle discrétisée. Une bonne approximation pour une résonance unique est :

$$h_E(t) \approx \delta(t) - \frac{1-K}{T\sqrt{K}} e^{2\pi(j\nu_r - f_c)t} u(t), \quad (28a)$$

$$H_E(f) \approx 1 - \frac{\frac{1-K}{2\pi f_c T \sqrt{K}}}{1 + j(f - \nu_r)/f_c} \equiv 1 - \frac{\Gamma}{1 + j(f - \nu_r)/f_c}, \quad f \ll 1/T, \quad (28b)$$

où $u(t)$ est une fonction échelon (Heaviside), $\nu_r \equiv k/T$, où k est un entier, est la fréquence d'une des raies d'absorption du résonateur et Γ est la profondeur normalisée de la raie (en champ; Γ est supérieure à 1 en régime sur-couplé, $K < \gamma$). La figure 0.11 compare la véritable fonction de transfert avec son approximation pour deux valeurs de ν_r . La décroissance géométrique en $(\sqrt{\gamma K})^i$ pour chaque incrément de temps T (Eq. (27)) a été remplacée par une exponentielle $e^{-2\pi f_c t}$. Ainsi, la fréquence de coupure f_c s'exprime comme :

$$f_c = \frac{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma K}}\right)}{2\pi T} \approx \frac{1 - \gamma K}{4\pi T}. \quad (29)$$

Cette fréquence de coupure correspond à la mi-largeur à mi-hauteur de la fonction lorentzienne qui est associée à la décroissance exponentielle de la réponse impulsionnelle. Avec cette définition en main, on peut réécrire la profondeur de la raie comme :

$$\Gamma = \frac{1-K}{\sqrt{K} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma K}}\right)} \approx \frac{2(1-K)}{\sqrt{K}(1-\gamma K)}. \quad (30)$$

Par ailleurs, la finesse du résonateur, un paramètre défini comme le rapport entre la période spectrale (espace spectral libre) et la pleine largeur à mi-hauteur, est approximativement :

$$\mathcal{F} = \frac{(1/T)}{2f_c} = \frac{\pi}{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma K}}\right)} \approx \frac{2\pi}{1-\gamma K}. \quad (31)$$

Toutes les approximations précédentes sont valides pour $(1-\gamma K) \ll 1$. Finalement, en définissant le désaccord de fréquence $\Delta = \nu_0 - \nu_r$ et en supposant que la fréquence laser et le délai de l'anneau sont ajustés pour respecter la condition $\Delta \ll 1/T$, on peut insérer l'équation (28b) dans l'équation (18) afin d'obtenir une approximation de la fonction de transfert de discrimination :

$$H_{\nu P}(f) \approx \left(\frac{2P_0\Gamma\Delta}{f_c^2}\right) \frac{(2-\Gamma+jf/f_c)}{[1+(\Delta/f_c)^2][1+j2f/f_c+(\Delta^2-f^2)/f_c^2]}, \quad \{f, \Delta\} \ll 1/T. \quad (32)$$

On peut identifier que le désaccord maximisant le gain de discrimination aux basses fréquences est $\Delta_{opt} = f_c/\sqrt{3}$ par évaluation à $f = 0$ et dérivation de cette fonction de transfert (ou alternativement en dérivant deux fois $|H_E(\nu_0)|^2$; il s'agit d'une propriété de la fonction

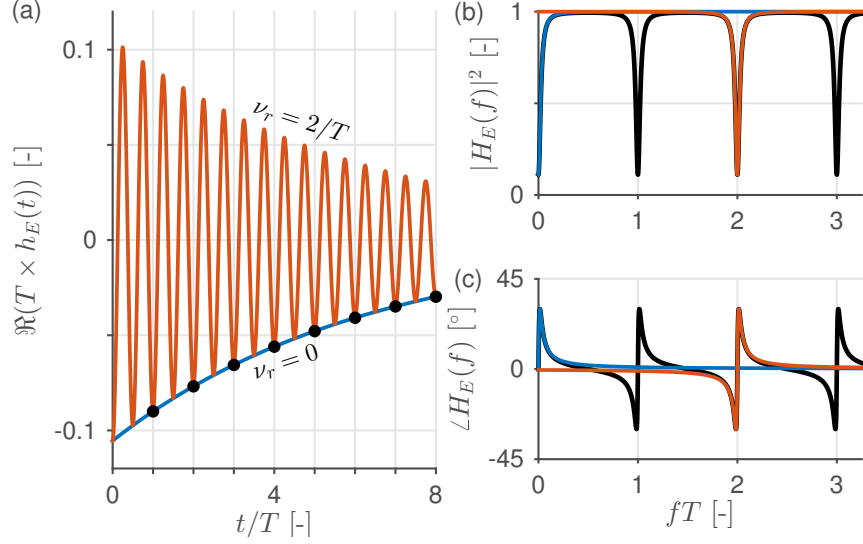


FIGURE 0.11 – Illustration de l’approximation associée à la considération d’une résonance unique pour un résonateur avec $\gamma = 0.81$ et $K = 0.9$. (a) Réponse impulsionnelle. Les marqueurs noirs indiquent l’aire des impulsions constituant la véritable réponse impulsionnelle discrétisée (la première impulsion à $t = 0$, dont l’aire est \sqrt{K} , est en dehors de la plage affichée) alors que les courbes bleue et orange constituent l’approximation pour une raie à $\nu_r = 0$ et $\nu_r = 2/T$, respectivement. (b) Module au carré des fonctions de transfert. (c) Phase des fonctions de transfert.

lorentzienne). En insérant cette condition dans l’équation précédente, on obtient l’équivalent de l’équation (24) pour le résonateur :

$$H_{\nu P, opt}(f) \approx \left(\frac{\sqrt{3}P_0\Gamma}{2f_c} \right) \frac{1 - \Gamma + (1 + jf/f_c)}{\frac{1}{3} + (1 + jf/f_c)^2}. \quad (33)$$

Une optimisation supplémentaire peut être faite : si le paramètre γ est déterminé d’avance (par les pertes de la fibre constituant l’anneau, ou par les pertes des miroirs d’une cavité Fabry-Perot équivalente opérée en mode réfléchif, par exemple) et que le paramètre de couplage peut être ajusté librement, le gain de discrimination à $f = 0$ qui est proportionnel à $\Gamma(2 - \Gamma)/f_c$ est maximisé pour $K = \sqrt{\gamma}$. Ceci correspond au régime sous-couplé qui donne un comportement à phase minimale. Dans ce cas la profondeur de la raie devient :

$$\Gamma_{\sqrt{\gamma}} = \frac{1 - \gamma^{1/2}}{\gamma^{1/4} \ln(\gamma^{-3/4})} \xrightarrow{\gamma \rightarrow 1} \frac{8}{3(3 + \gamma)} \xrightarrow{\gamma \rightarrow 1} \frac{2}{3}. \quad (34)$$

La fraction de puissance transmise au creux de la raie ($\Delta = 0$) est donc $(1 - \Gamma_{\sqrt{\gamma}})^2 = |H_E(\nu_r)|^2 = 1/9$ pour de faibles pertes et un couplage optimisé. Du point de vue de la fonction de transfert de discrimination, ce choix de couplage mène à une dernière simplification :

$$H_{\nu P, opt, \sqrt{\gamma}}(f) \xrightarrow{\gamma \rightarrow 1} \left(\frac{2P_0T\mathcal{F}}{\sqrt{3}} \right) \frac{\frac{1}{3} + (1 + jf/f_c)}{\frac{1}{3} + (1 + jf/f_c)^2}. \quad (35)$$

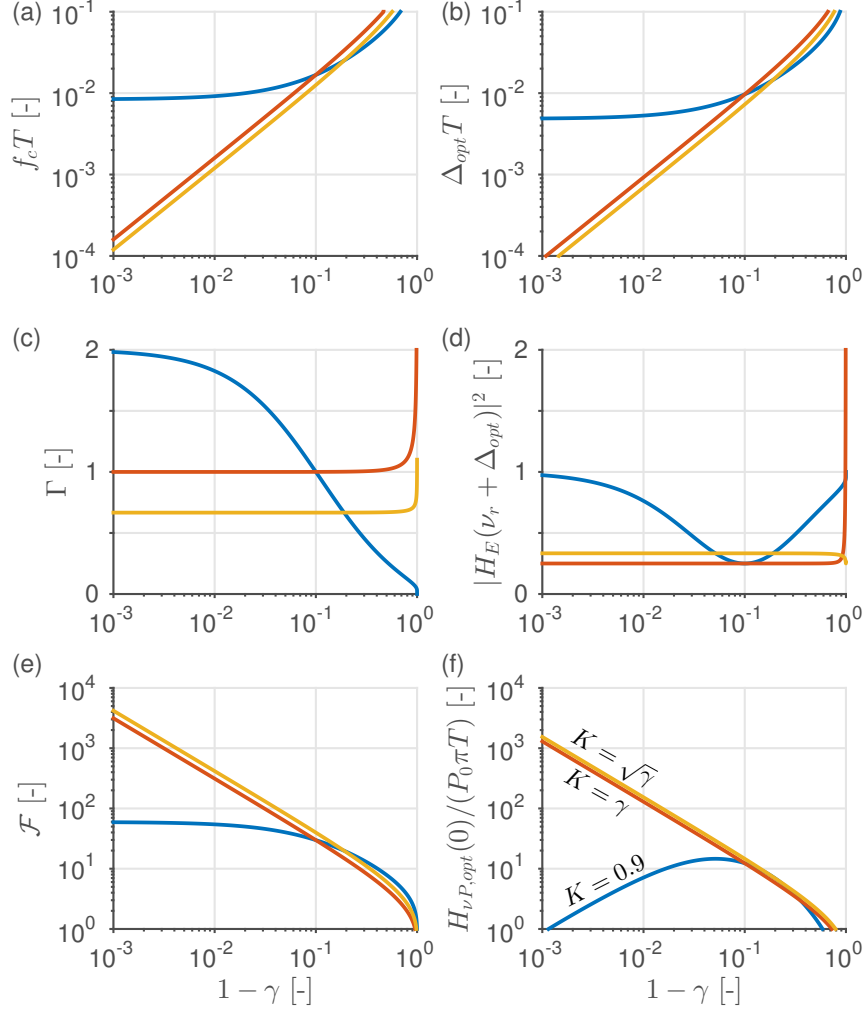


FIGURE 0.12 – Impact des pertes internes ($1 - \gamma$) sur le comportement de discrimination du résonateur pour $K = \{0.9, \gamma, \sqrt{\gamma}\}$ en bleu, orange et jaune, respectivement. (a) Fréquence de coupure, ou mi-largeur à mi-hauteur, de la résonance. (b) Désaccord de fréquence optimal par rapport au creux de la résonance. (c) Profondeur de la raie en champ. (d) Fraction de puissance transmise au point d'opération optimal. (e) Finesse du résonateur. (f) Gain DC de discrimination, normalisé par le gain de la ligne à délai. Le gain DC de discrimination est maximisé pour $K = \sqrt{\gamma}$ et opération à $\Delta_{opt} = f_c/\sqrt{3}$. La profondeur de la raie converge alors vers $\Gamma = 2/3$ pour de faibles pertes, et le tiers de la puissance incidente est transmise par le résonateur.

où on a utilisé $f_c = (2T\mathcal{F})^{-1}$ pour exprimer le gain DC en fonction de la finesse. La figure 0.12 illustre certaines des quantités précédentes pour $K = 0.9$, $K = \gamma$ et $K = \sqrt{\gamma}$ en fonction des pertes internes ($1 - \gamma$).

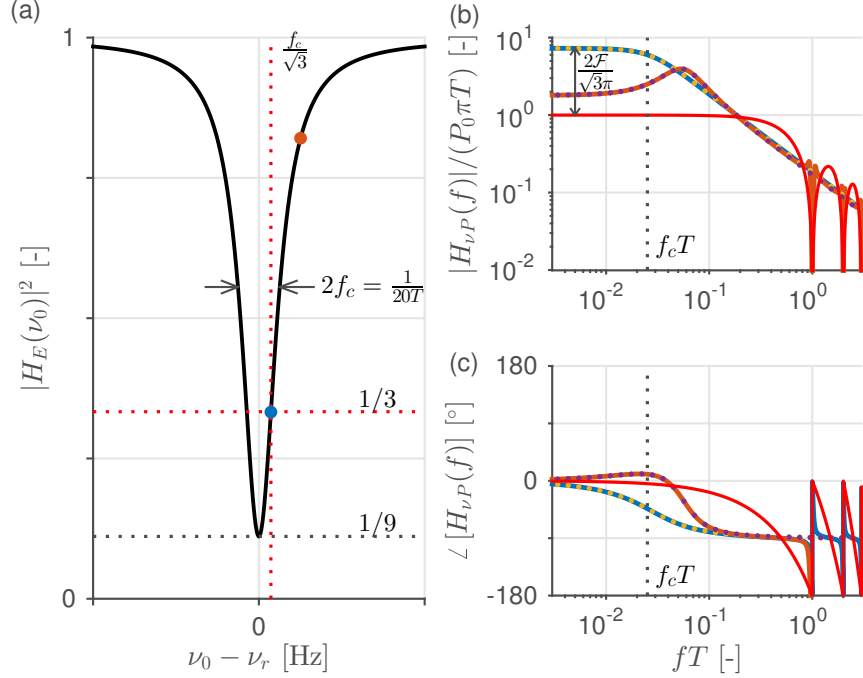


FIGURE 0.13 – Réponse de discrimination d'un résonateur pour $\gamma = 0.81$, $K = 0.9$ (paramètres associés à une finesse $\mathcal{F} = 20$) à deux points d'opération. (a) Module au carré de la réponse en champ. Le marqueur bleu indique le point d'opération optimal, le marqueur orange un point d'opération quelconque. (b) Module de la fonction de transfert de discrimination, normalisée par le gain DC de discrimination de la ligne à délai. Les traits pleins en bleu et orange représentent les fonctions de transfert exactes (Eq. (18)), les traits pointillés en jaune et mauve constituent les approximations valides aux basses fréquences (Eq. (32)). La fonction de transfert de la ligne à délai est indiquée en rouge pour référence. (c) Idem pour la phase de la fonction de transfert de discrimination.

Comparaison de la ligne à délai et du résonateur

Dans le meilleur des cas, c'est-à-dire pour un résonateur à faibles pertes internes ($\gamma \rightarrow 1$), avec la fréquence laser ajustée au point de pente maximale de la fonction de transfert en champ ($\nu_0 = \nu_r + \Delta_{opt}$), et pour un ratio de couplage idéal ($K = \sqrt{\gamma}$), la réponse du résonateur opéré à flanc de frange est semblable à celle d'un filtre de premier ordre avec fréquence de coupure f_c (un certain désaccord est apparent à proximité de la coupure, mais l'accord est parfait aux deux asymptotes) et un gain DC de $(2P_0T\mathcal{F})/\sqrt{3}$. Ce gain DC est plus élevé que celui d'une ligne à délai comparable, soit $P_0(\pi T)$, par un facteur $2\mathcal{F}/(\sqrt{3}\pi)$. D'ailleurs, ce facteur peut être considéré comme le nombre effectif de «tours» que parcourt le signal laser dans le résonateur avant d'être complètement dissipé ou découplé, à tout le moins du point de vue du gain de discrimination. La figure 0.13 donne un exemple de la fonction de transfert de discrimination du résonateur, avec et sans approximation, pour $\gamma = 0.81$, $K = \sqrt{\gamma} = 0.9$ et deux désaccords : $\Delta = \Delta_{opt} = f_c/\sqrt{3}$ et $\Delta = 2f_c$.

Pour un résonateur complètement optimisé, on peut aussi montrer que $|H_E(\nu_0)|^2 = |H_E(\nu_r + \Delta_{opt})|^2 \rightarrow 1/3$ pour de faibles pertes, et donc que le tiers de la puissance incidente est transmise et détectée. Le reste de la puissance incidente est dissipée dans l’anneau. Ceci peut être comparé au facteur de transmission $|H_E(\nu_0)|^2 = 1/2$ de la ligne à délai opérée au point optimal (dans ce cas, la balance de la puissance n’est pas dissipée mais plutôt aiguillée vers le second port de sortie). Comme le niveau de bruit de grenaille est proportionnel à la puissance transmise (Eq. (20)), le niveau basses fréquences de $S_{m_p}^{(1)}(f)/|H_{\nu P}(f)|^2$ pouvant être atteint par un résonateur limité par le bruit de grenaille est un facteur $[2\mathcal{F}/(\sqrt{3}\pi)]^2(3/2) = 2\mathcal{F}^2/\pi^2$ plus faible que celui d’une ligne à délai si on suppose le même espace spectral libre, la même puissance d’entrée ainsi qu’une optimisation complète des deux systèmes. Un argument similaire peut être fait pour deux systèmes limités par le bruit d’amplitude relative (Eq.(21)) et on peut alors calculer que le résonateur offre un avantage de $3\mathcal{F}^2/\pi^2$ aux basses fréquences par rapport à la ligne à délai.

La bande d’asservissement qui peut être atteinte par un résonateur se compare aussi favorablement à la bande d’asservissement possible pour une ligne à délai. En effet, comme la fonction de transfert de discrimination est de la forme d’un système passe-bas du premier ordre pour $f \ll 1/T$, le système agit approximativement comme un intégrateur pour $f > f_c$, avec un déphasage qui atteint $-\pi/2$. Dans cette plage, le signal produit par le discriminateur est donc proportionnel au bruit de phase plutôt qu’au bruit de fréquence du laser⁶. Avec une telle forme de fonction de transfert, la fréquence de gain de boucle unitaire f_L peut être placée largement au-dessus de f_c par un ajustement adéquat des paramètres du régulateur, négligeant les potentielles limites associées à l’actionneur et aux délais électroniques. Toutefois, une limite fondamentale est atteinte lorsque f_L se rapproche de l’espace spectral libre $1/T$, car le déphase de $H_{\nu P}(f)$ diminue alors rapidement ; ce comportement n’est pas capturé par l’approximation qui a été faite à l’équation (28b), mais il est bien visible dans la forme complète de la fonction de transfert (figure 0.13). En comparant avec une ligne à délai de même longueur T , la fréquence de gain de boucle unitaire n’est donc pas réduite par un facteur comparable à la finesse, comme on pourrait le croire à première vue. Le produit gain-bande de l’asservissement à un résonateur peut ainsi être considérablement plus grand que celui de l’asservissement à une ligne à délai (figure 0.14). Il est à noter qu’il est possible d’étendre la bande d’asservissement au-delà de $1/T$, en acceptant une certaine amplification du bruit autour des multiples de $1/T$, par l’ajout d’un terme dérivateur dans le régulateur ou par la conception d’un régulateur plus sophistiqué permettant de créer une réponse en $1/f$ [139, 142]. Ceci permet d’augmenter encore plus le gain de boucle aux basses fréquences, autant pour une ligne à délai que pour un résonateur. Néanmoins, la bande d’asservissement *utile* demeure comparable à $1/T$ dans tous les cas, comme illustré à la figure 0.14.

6. Contrairement à ce qui est suggéré dans [58], ceci n’est pas une propriété de la méthode Pound-Drever-Hall (PDH), mais bien une propriété du résonateur en tant que tel. Une opération à flanc de frange procure le même bénéfice, de ce point de vue, que la méthode PDH.

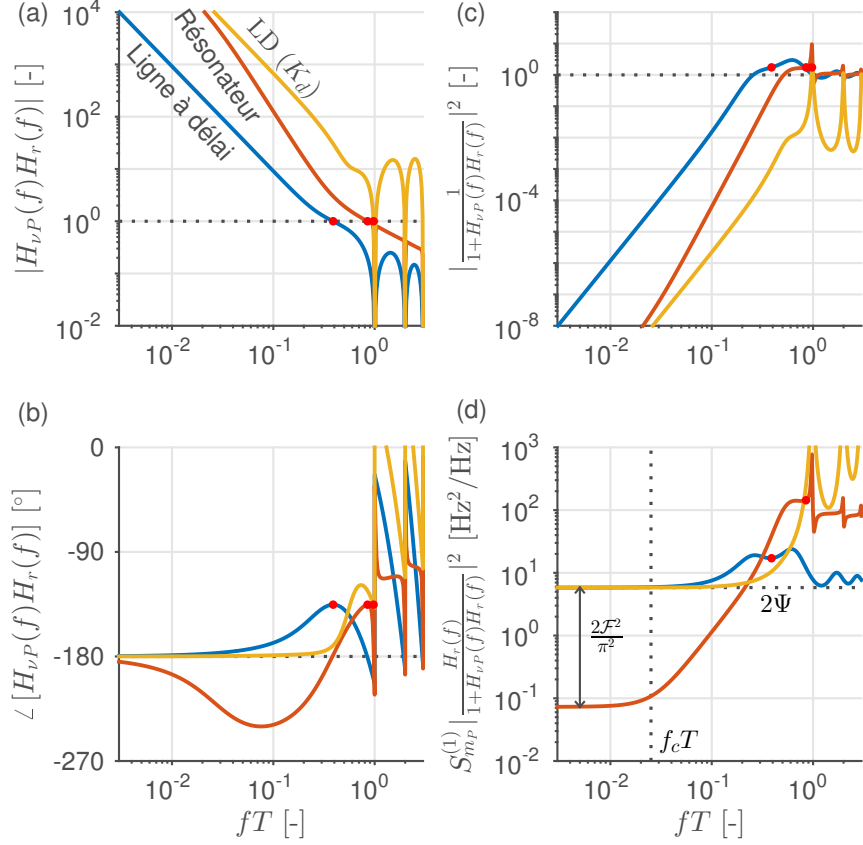


FIGURE 0.14 – Simulation : comparaison de la performance d’asservissement possible pour la ligne à délai (bleu) et pour le résonateur (orange). La courbe en jaune représente un asservissement plus agressif pour la ligne à délai, avec ajout d’un terme dérivateur K_d au régulateur. On ignore la contribution de l’actionneur dans cette simulation. (a) Module de la fonction de transfert de boucle. La fréquence de gain de boucle unitaire est indiquée par un marqueur rouge dans chaque cas. (b) Phase de la fonction de transfert de boucle. Une marge de phase de 45° est conservée pour les trois asservissements. (c) Fonction d’atténuation du bruit de fréquence natif du laser. (d) Contribution du bruit de mesure à la DSP de bruit de fréquence du laser asservi dans le cas d’une performance limitée par le bruit de grenaille ; on suppose ici $\nu_0 = 195$ THz, $\eta = 0.9$, $P_0 = 100$ μW et $T = 5$ ns.

En résumé, la ligne à délai (interféromètre à deux ports) et le résonateur ont en commun d’exhiber deux points optimaux de discrimination par espace spectral libre et d’offrir une bande utile d’asservissement de l’ordre de $1/T$ lorsque l’actionneur ne constitue pas une contrainte. Toutefois, pour le même espace spectral libre, la pente de discrimination est plus élevée dans un résonateur par un facteur comparable à la finesse alors que les bruits de photodétection et d’amplitude laser sont d’un niveau comparable pour les deux systèmes. Ainsi, la performance d’un laser asservi sur le résonateur peut être meilleure, en termes de DSP de bruit de fréquence aux basses fréquences, par un facteur comparable au carré de la finesse lorsque le discriminateur n’introduit pas de bruit. Ce bénéfice maximum est uniquement alloué à l’intérieur de la bande

passante du résonateur f_c , les performances des deux systèmes devenant comparables au-delà de cette fréquence. Toutefois, un tel gain de performance implique un résonateur à faible pertes internes et un ajustement optimal du point d'opération et du ratio de couplage, ce qui n'est pas nécessairement simple à réaliser en pratique. À ce point il semble néanmoins que le résonateur soit un meilleur candidat que la ligne à délai dans le contexte de la stabilisation laser ; les avantages de la ligne à délai seront mis en lumière en étudiant d'autres méthodes de discrimination et en décrivant le bruit introduit par le discriminateur même.

Référence microscopique opérée à flanc de frange

Les références microscopiques telles que les raies atomiques, moléculaires ou ioniques peuvent aussi être opérées à flanc de frange ou en détection directe [132, 143]. Aujourd'hui, cette méthode d'interrogation est surtout utilisée pour des systèmes commerciaux affichant une performance modeste. Néanmoins, une brève analyse de l'opération à flanc de frange permet d'exposer certaines des caractéristiques propres aux références microscopiques.

De façon simplifiée, on peut dire que la susceptibilité électrique complexe associée à une certaine transition optique élargie de manière homogène (forme lorentzienne), pour un milieu atomique ou moléculaire isotrope et linéaire, s'exprime dans la forme générale suivante [113] :

$$\chi(f) \propto \frac{-j\Delta N/f_c}{1 + j(f - \nu_r)/f_c}, \quad (36)$$

où $\Delta N \equiv N_1 - N_2$ est la différence de (densité de) population entre les deux niveaux définissant la transition optique, en m^{-3} , ν_r est la fréquence centrale de la raie et f_c est sa mi-largeur à mi-hauteur. Cette dernière quantité est inversement proportionnelle au temps de vie de l'état excité τ_v , $f_c = (4\pi\tau_v)^{-1}$. L'expression précédente est uniquement valide pour une valeur de f proche de ν_r , c'est-à-dire pour des fréquences optiques et pour une raie isolée, et en pratique il peut être nécessaire de refroidir le milieu d'interaction ou d'employer une approche pompe-sonde pour exposer la forme lorentzienne [144]. Pour produire l'effet de discrimination en fréquence, on peut laisser le signal laser interagir avec la collection d'atomes ou de molécules sur une certaine longueur optique nL , où n est l'indice de réfraction et L et la longueur physique, avec le délai $T \equiv nL/c$, par exemple dans une cellule à gaz. Dans la mesure où la différence de population ΔN n'est pas significativement modifiée par la propagation du signal laser, la fonction de transfert pour le champ peut ainsi être calculée par résolution de l'équation d'onde :

$$\begin{aligned} H_E(f) &= e^{-j2\pi fT\sqrt{1+\chi(f)}}, \\ &\approx e^{-j2\pi fT(1+\chi(f)/2)}, \\ &\approx e^{-j2\pi fT} \left[1 - \frac{\Gamma}{1 + j(f - \nu_r)/f_c} \right], \end{aligned} \quad (37)$$

où la première approximation binomiale est valide si la susceptibilité $\chi(f)$ est de magnitude significativement inférieure à l'unité, ce qui est vrai dans de nombreux cas pratiques [113],

alors que la seconde approximation (linéarisation de l'exponentielle) est valide pour une faible densité optique et se traduit ultimement en une condition $\Gamma \ll 1$ sur la profondeur en champ de la raie. Cette seconde condition n'est pas toujours vraie en pratique, mais est utile pour les fins de la présentation sommaire faite ici. D'autre part, une grande densité optique est associée à une saturation de la réponse en puissance (la raie observée s'écrase et produit un plancher de transmission quasi-nulle), ce qui n'est pas une condition désirable pour maximiser la pente de discrimination aux fins de l'asservissement laser. Ainsi, dans la limite où les conditions précédentes sont respectées, on peut voir par comparaison avec l'équation (28b) que la référence microscopique se comporte comme un résonateur avec une profondeur de raie Γ proportionnelle, entre autres, à la différence de population ΔN et à la longueur d'interaction représentée par le délai T . La fonction de transfert de discrimination $H_{\nu P}(f)$ est donc similaire à celles des équations (32) et (33), avec un gain DC maximisé lorsque le désaccord $\Delta = \nu_0 - \nu_r$ vaut $f_c/\sqrt{3}$. Cette fois, bien sûr, la largeur de raie n'est pas reliée à la valeur du délai T , mais est bien une propriété de la transition tout comme ν_r . Par ailleurs, un terme de phase $e^{-j2\pi fT}$ additionnel apparaît dans la fonction de transfert de discrimination ; ce terme est associé au délai de propagation dans la zone d'interaction (la cellule à gaz vide, par exemple) et doit être considéré lors de la conception du régulateur.

Néanmoins, même dans le cas d'une faible susceptibilité, d'une faible densité optique et d'un petit signal de bruit de fréquence, la référence microscopique agit fondamentalement comme un discriminateur non-linéaire puisque l'augmentation de la puissance incidente P_0 entraîne une réduction de la différence de population ΔN via pompage optique. Mathématiquement, ceci se traduit en une différence de population qui s'exprime comme :

$$\Delta N(f, I) \equiv \frac{\Delta N_0}{1 + \frac{I}{I_{sat}} \left[1 + \left(\frac{f - \nu_r}{f_c} \right)^2 \right]^{-1}}, \quad (38)$$

où ΔN_0 est la différence de population en absence de signal, I est l'intensité du faisceau laser et I_{sat} est l'intensité de saturation à résonance, en W/m^2 , une propriété de la transition [113]. La déplétion de la différence de population par un fort signal rend le milieu atomique ou moléculaire plus transparent pour le faisceau laser, ce qui se traduit en une raie moins profonde et plus large puisque l'effet de pompage est moins prononcé hors-résonance. Une augmentation de la puissance d'entrée diminue donc la pente de discrimination et déplace le point d'opération optimal plus loin dans les ailes de la raie (figure 0.15). En considérant ce phénomène de saturation, on peut montrer que le gain DC de discrimination pour une opération au décalage optimal et pour une faible densité optique s'exprime comme :

$$H_{\nu P, opt}(0) \approx \frac{3\sqrt{3}P_0\Gamma_0(2 - \Gamma_0)}{8f_c} \left(1 + \frac{I}{I_{sat}} \right)^{-3/2}, \quad \Gamma_0 \ll 1, \quad (39)$$

où Γ_0 est la profondeur de la raie pour une faible intensité du faisceau ($I \ll I_{sat}$) et où le premier terme est égal à la fonction de l'équation (33) évaluée à $f = 0$. Clairement, le gain DC

n'augmente pas de façon linéaire avec la puissance d'entrée comme dans le cas d'une référence géométrique ; en fait, le gain DC atteint un maximum pour $I/I_{sat} = 2$. La conséquence de ce comportement de saturation est que le bruit de photodétection impose un certain plancher de bruit de fréquence blanc au signal du laser asservi, et ce plancher ne peut pas être diminué de façon arbitraire par une augmentation de la puissance incidente. En effet, pour les basses fréquences et pour un bruit de mesure dominé par le bruit de grenaille fondamental, la DSP de bruit de fréquence du laser asservi est :

$$S_{\nu'}^{(1)}(f) \approx \frac{2h\nu_0 P_0 / \eta}{|H_{\nu P, opt}(0)|^2} = \frac{128h\nu_0 f_c^2}{27\eta [\Gamma_0(2 - \Gamma_0)]^2} \frac{\left(1 + \frac{I}{I_{sat}}\right)^3}{P_0}, \quad f \ll f_L, \quad (40)$$

où on suppose que presque toute la puissance est transmise pour calculer le niveau de bruit de grenaille (approximation de faible densité optique). Le second terme contenant les termes de puissance est minimisé lorsque $I/I_{sat} = 1/2$. En substituant $P_0 = \pi w^2 I_{sat} / 2$ dans l'expression précédente, avec w^2 comme le rayon à e^{-2} d'un champ gaussien, on obtient finalement un estimé du plancher de bruit de fréquence blanc qui peut être atteint pour un laser stabilisé sur une référence microscopique limitée par le bruit de grenaille :

$$S_{\nu'}^{(1)}(f) \approx \frac{32h\nu_0 f_c^2}{\pi w^2 \eta [\Gamma_0(2 - \Gamma_0)]^2 I_{sat}}, \quad f \ll f_L. \quad (41)$$

Comme l'intensité de saturation I_{sat} est proportionnelle à la largeur de raie f_c pour les transitions d'intérêt en stabilisation laser [7], le plancher de bruit de fréquence devient directement proportionnel à f_c . Les dernières relations sont illustrées à la figure 0.15 pour une transition du rubidium.

Bien que l'analyse précédente soit spécifique à un cas particulier et ignore de nombreux défis expérimentaux [145], elle illustre quand même que la principale faiblesse des références microscopiques : le rapport signal sur bruit est ultimement limité par la saturation de la transition, peu importe la performance du système de photodétection [4, 146]. Ce phénomène désavantage les références microscopiques pour les courtes échelles de temps, ce qu'on peut voir en calculant la variance Allan associée à un bruit blanc de fréquence : celle-ci est inversement proportionnelle au temps d'intégration (annexe B). Par ailleurs, la méthode n'est pas très flexible puisqu'il faut que la fréquence porteuse du laser soit proche, ou accordable à proximité, de la fréquence de la transition optique d'intérêt. Ceci implique normalement des contraintes sur l'espèce atomique ou moléculaire utilisable pour une application donnée (voir [78] pour un tableau intéressant), en contraste avec les références géométriques qui offrent une série de points d'opération régulièrement espacés, avec un espacement ajustable. Toutefois, les références microscopiques permettent normalement une grande bande d'asservissement, limitée par le délai T ou par la phase associée à des transitions voisines lorsque l'actionneur ne constitue pas simplement la principale limite, et leur performance globale est moins influencée par les fluctuations environnementales [50, 125, 144]. Ceci peut leur permettre de mieux performer

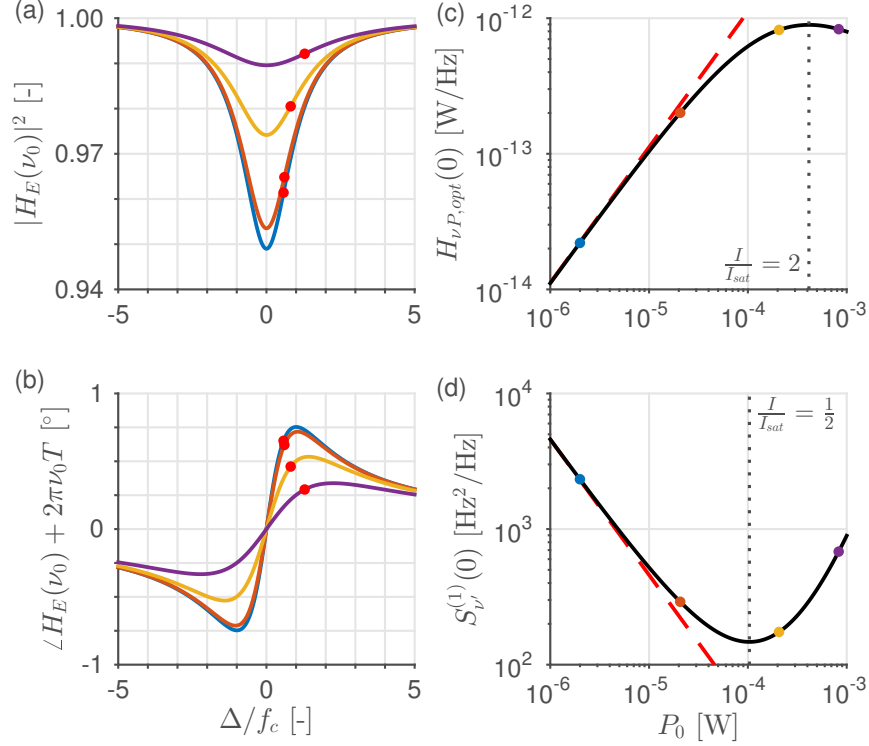


FIGURE 0.15 – Réponse de discrimination d’une raie atomique ou moléculaire élargie de façon homogène pour différentes intensités du faisceau laser. (a, b) Réponse en champ, module au carré et phase, pour $I/I_{sat} = \{0, 0.1, 1, 4\}$ (de bas en haut pour (a)). La profondeur en champ de la raie non saturée est $\Gamma_0 = 0.026$. Chaque point rouge correspond au point d’opération qui maximise la pente de discrimination. (c) Gain DC de discrimination en fonction de la puissance incidente, assumant un faisceau gaussien avec $w = 2$ mm et une transition définie par $f_c = 3$ MHz et $I_{sat} = 1.6$ mW/cm². Ceci est représentatif d’une transition hyperfine dans la ligne D₂ ($5^2S_{1/2}$ - $5^2P_{3/2}$) du rubidium, à $\nu_r \approx 384.50$ THz [7, 78]. (d) DSP de bruit de fréquence du laser asservi dans le cas d’une performance limitée par le bruit de grenaille. On suppose ici $\eta = 0.9$ et la même transition qu’en (c). Dans les deux derniers cas, le trait pointillé rouge indique la tendance attendue en absence de saturation et les marqueurs colorés correspondent aux cas illustrés en (a) et (b).

que les références géométriques pour les très grands temps d’intégration [62, 65, 75, 147]. Par ailleurs, la fréquence connue et répétable (dans des conditions contrôlées) des raies atomiques ou moléculaires, parfois même calculable selon des principes fondamentaux, permet aux références microscopiques d’agir comme standards de fréquence [125]. Ces références ne seront pas considérées davantage pour la suite de cette discussion.

0.1.6 Interrogation d’un discriminateur par méthode Pound-Drever-Hall

La méthode de détection la plus commune pour l’asservissement laser à un résonateur est assurément la méthode Pound-Drever-Hall [58, 148] (PDH). De façon synthétique, cette méthode consiste à imprimer une modulation de phase sinusoïdale au signal laser, normalement

à l'aide d'un modulateur électro-optique, avant qu'il interagisse avec le discriminateur. Par le mécanisme de filtrage du discriminateur (Eq. (16)), cette modulation de phase est convertie en modulation d'amplitude de même fréquence qui peut être mesurée par un photodétecteur. L'amplitude et la phase de ce signal renseignent sur le désaccord entre la fréquence porteuse du laser et le creux d'une raie, d'une frange, ou d'une résonance. Ces paramètres peuvent être extraits et envoyés au régulateur via démodulation cohérente basée sur une copie du signal de modulation. En particulier, à un point de symétrie hermitienne de la fonction de transfert en champ du discriminateur (normalement un creux de $|H_E(f)|^2$), la conversion phase vers amplitude est nulle au premier ordre et la modulation imprimée au laser n'apparaît pas dans le signal photodétecté ; de part et d'autre de ce point, le déphasage du signal est antisymétrique et son amplitude est symétrique. Ces deux éléments font entrevoir la possibilité de générer un signal antisymétrique autour du point de symétrie hermitienne, ce qui est associé à certains avantages. Dans le traitement qui suit, on suppose que les bruits laser $\epsilon(t)$ et $\phi(t)$ sont nuls pour se concentrer sur la forme du signal d'erreur afin d'exposer les propriétés importantes de la méthode. Un traitement plus complet, incluant les bruits laser, est présenté à l'annexe C.

En considérant la modulation intentionnelle de la phase, le signal incident sur le discriminateur peut être décrit comme :

$$\widetilde{E}_{in}(t) = E_0 \cos [2\pi\nu_0 t + \phi_0 + m_i \sin (2\pi f_m t + \phi_m)], \quad (42)$$

où m_i est l'indice de modulation, f_m est la fréquence de modulation et ϕ_m est la phase initiale du signal de démodulation. Le tilde au-dessus de $E_{in}(t)$ indique qu'il s'agit de la valeur du signal avec bruits laser nuls. Dans le régime où $m_i \ll 1$, l'équation (16b) peut être utilisée pour décrire la conversion de la modulation de phase en modulation d'amplitude pouvant être mesurée par un photodétecteur. Le signal de puissance optique devient :

$$\widetilde{P}_{out}(t) \approx n(t) + P_0 |H_E(\nu_0)|^2 \{1 + 2m_i |H_{E,c}(f_m, \nu_0)| \sin [2\pi f_m t + \phi_m + \angle H_{E,c}(f_m, \nu_0)]\}. \quad (43)$$

Ce signal photodétecté⁷ est ensuite démodulé par $A_d \sin(2\pi f_m t + \phi_d)$, une copie du signal de modulation avec A_d comme une amplitude ajustable (en V/W) et ϕ_d comme une phase ajustable pouvant compenser de potentiels délais dans la chaîne électronique. Le signal démodulé est ensuite filtré passe-bas pour éliminer les termes oscillants à f_m et $2f_m$. Le signal de tension résultant de ces opérations est :

$$\begin{aligned} \widetilde{V}_{out}(t) &= m_V(t) + m_i P_0 A_d |H_E(\nu_0)|^2 |H_{E,c}(f_m, \nu_0)| \cos [\phi_m - \phi_d + \angle H_{E,c}(f_m, \nu_0)], \quad (44) \\ &= m_V(t) + \frac{m_i P_0 A_d}{2} \operatorname{Re} \left\{ j e^{j\Delta\phi} [H_E(\nu_0 + f_m) H_E^*(\nu_0) - H_E^*(\nu_0 - f_m) H_E(\nu_0)] \right\}, \end{aligned}$$

où $\Delta\phi \equiv \phi_m - \phi_d$ et $m_V(t)$ est le bruit résultant de la démodulation et du filtrage du bruit de photodétection $n(t)$. On peut montrer par analyse de la fonction d'autocorrélation que la

7. Cette approximation est trop grossière pour bien prédire le niveau de bruit de grenaille lorsque le laser est verrouillé à un point de symétrie hermitienne parfaitement sombre avec $|H_E(\nu_0)|^2 = |H_E(\nu_r)|^2 = 0$. L'annexe C montre comment corriger ce problème.

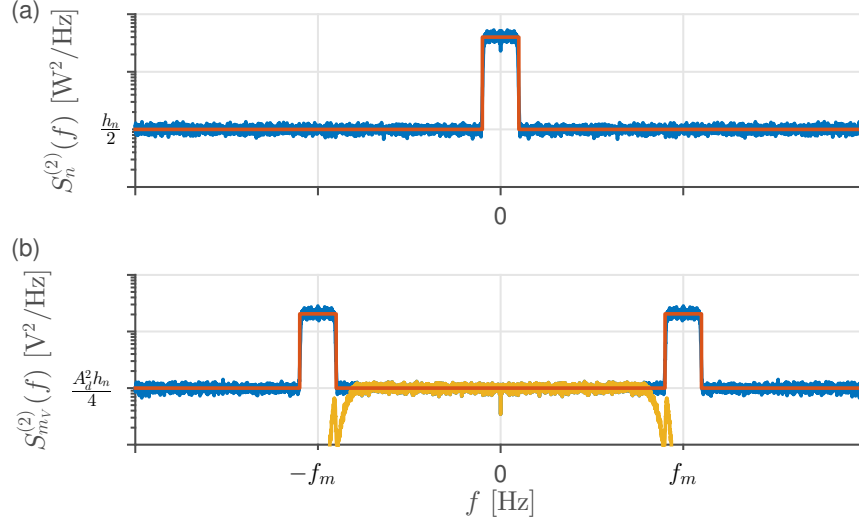


FIGURE 0.16 – Simulation de l’effet de la démodulation sur le bruit de photodétection. (a) Bruit de photodétection affichant une DSP de niveau bilatéral $h_n/2$ aux hautes fréquences, mais un niveau plus élevé aux basses fréquences. (b) DSP du bruit après démodulation avant (bleu) et après (jaune) filtrage passe-bas. Aux basses fréquences, le niveau bilatéral est $A_d^2 h_n/4$. La courbe orange constitue l’équation (45).

relation mathématique entre la DSP de $n(t)$ et la DSP de $m_V(t)$ est, pour un bruit stationnaire :

$$S_{m_V}^{(2)}(f) \approx \frac{A_d^2}{4} \left[S_n^{(2)}(f + f_m) + S_n^{(2)}(f - f_m) \right], \quad |f| \lesssim f_m, \quad (45a)$$

$$S_{m_V}^{(1)}(f) \approx \frac{A_d^2}{2} h_n, \quad f \lesssim f_m, \quad (45b)$$

où la seconde approximation est valide dans la mesure où le bruit $n(t)$ est blanc, avec une DSP unilatérale de niveau h_n , sur une large bande centrée à f_m . Encore une fois, il y a des subtilités à considérer pour le bruit de grenaille qui est cyclostationnaire dans le contexte de la méthode PDH, comme discuté plus loin. Néanmoins, on constate que les opérations de modulation et démodulation permettent de décaler le spectre de bruit à $f = \pm f_m$, ce qui constitue un avantage considérable en pratique. En effet, la DSP du bruit de photodétection $n(t)$ tend à augmenter aux basses fréquences pour des raisons techniques [125]. En décalant le spectre du bruit à $\pm f_m$, le bruit de mesure final peut généralement être minimisé sur une large bande qui inclut les basses fréquences (figure 0.16).

L’équation (44) décrit le «signal d’erreur» moyen et est similaire à la forme trouvée dans [149]. Ce signal d’erreur est antisymétrique autour des creux de frange ou de raie comme illustré à la figure 0.17 pour une ligne à délai et pour un résonateur. Autour de ces points, le bruit d’amplitude relative du laser ne contribue pas au signal PDH. La puissance au photodétecteur ainsi que la tension démodulée sont aussi minimisées, ce qui aide à maximiser la plage dynamique [150]. Au premier ordre, seul le bruit de fréquence est converti par le discriminateur et

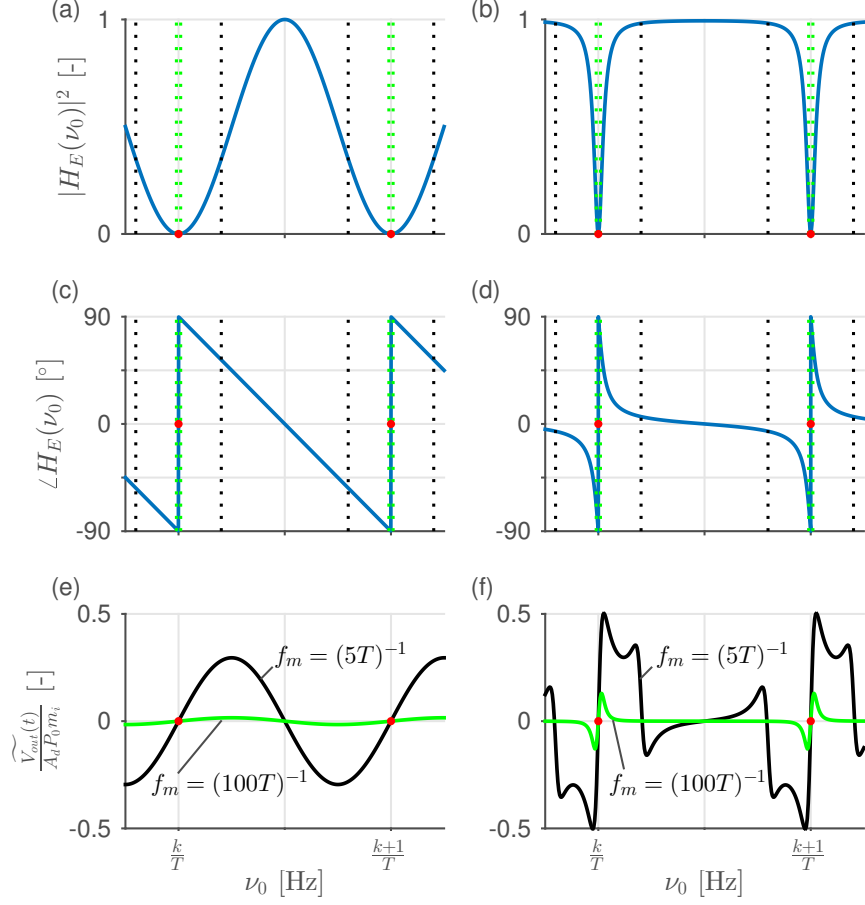


FIGURE 0.17 – Comparaison du signal d’erreur obtenu pour une ligne à délai (colonne gauche) et un résonateur (colonne droite) interrogés par modulation PDH pour deux fréquences de modulation, $f_m = (5T)^{-1}$ (noir) et $f_m = (100T)^{-1}$ (vert). Le résonateur a une finesse $\mathcal{F} = 20$ et est opéré dans le régime de couplage critique. (a,b) Module au carré de la réponse en champ. Les traits tiretés en noir et vert indiquent les fréquences des bandes latérales créées par la modulation de phase. (c,d) Phase de la réponse en champ. (e,f) Signal d’erreur sans bruit laser. Dans tous les cas, les marqueurs rouges indiquent les points d’opération optimaux.

le gain DC de discrimination est donné par la pente du signal d’erreur qui est partiellement ajustable. Ainsi, et en considérant l’effet de la modulation sur le bruit de photodétection, une opération à la limite du bruit de grenaille est plus facile à atteindre qu’avec la méthode à flanc de frange présentée à la section précédente.

La maximisation de la pente du signal d’erreur implique une optimisation de $\Delta\phi$ afin de maximiser la valeur de la partie réelle dans $\widetilde{V}_{out}(t)$. Pour simplifier la suite de l’analyse, on définit le terme entre crochets de l’équation (44) comme :

$$C(\nu_0, f_m) \equiv H_E(\nu_0 + f_m)H_E^*(\nu_0) - H_E^*(\nu_0 - f_m)H_E(\nu_0) \quad (46)$$

Lorsque la fréquence de modulation f_m est faible, on peut faire le développement en série des

termes en $\nu_0 \pm f_m$:

$$H_E(\nu_0 + f_m) \approx H_E(\nu_0) + f_m \frac{dH_E(\nu_0)}{d\nu_0}, \quad (47a)$$

$$H_E^*(\nu_0 - f_m) \approx H_E^*(\nu_0) - f_m \frac{dH_E^*(\nu_0)}{d\nu_0}, \quad (47b)$$

$$C(\nu_0, f_m) \approx f_m \frac{d|H_E(\nu_0)|^2}{d\nu_0}, \quad (47c)$$

où la dernière approximation est obtenue en utilisant la règle de dérivation d'un produit. Cette expression est purement réelle, et dans ce cas on maximise la pente du signal d'erreur en choisissant $\phi_m - \phi_d = \pm\pi/2$. Un autre extrême est celui où on peut considérer que la fréquence du laser est déjà ajustée à proximité d'un point de symétrie hermitienne ν_r de la fonction de transfert $H_E(f)$ et que les bandes latérales résultant de la modulation de phase du signal laser, à $\nu_0 \pm f_m$, ne voient qu'une réponse uniforme sans structure spectrale. Ceci implique de plus grandes valeurs de la fréquence de modulation f_m . Dans ce cas :

$$H_E(\nu_0 + f_m) \approx 1, \quad (48a)$$

$$H_E^*(\nu_0 - f_m) \approx 1, \quad (48b)$$

$$C(\nu_0, f_m) \approx -2j \operatorname{Im} \{H_E(\nu_0)\}, \quad (48c)$$

qui est purement imaginaire. On maximise donc la pente du signal d'erreur en choisissant $\phi_m - \phi_d = 0$. C'est typiquement le régime d'opération lorsque la méthode PDH est utilisée avec des cavités Fabry-Perot [74, 149]. Entre ces deux extrêmes, la phase de démodulation optimale dépend de la valeur exacte de la fréquence de modulation f_m ainsi que du type de discriminateur. Mathématiquement, l'optimisation se fait en calculant :

$$\left. \frac{dC(\nu_0, f_m)}{d\nu_0} \right|_{\nu_0=\nu_r} = 2 \left[H_E(\nu_0) \frac{dH_E(\nu_0 + f_m)}{d\nu_0} - H_E(\nu_0 + f_m) \frac{dH_E(\nu_0)}{d\nu_0} \right] \Big|_{\nu_0=\nu_r}. \quad (49)$$

La pente centrale du signal d'erreur est maximisée lorsque $\Delta\phi + \pi/2$ compense la phase du nombre complexe donné par la dernière expression et devient alors proportionnelle à son module. Le module et la phase de $dC(\nu_0, f_m)/d\nu_0|_{\nu_0=\nu_r}$ sont illustrés à la figure 0.18 pour une ligne à délai et pour un résonateur.

On peut montrer que la fonction de transfert de discrimination pour une ligne à délai interrogée par modulation PDH avec ajustement optimal de la phase de démodulation et opération au creux d'une frange est (voir annexe C) :

$$H_{\nu V, opt}(f) = m_i P_0 A_d(\pi T) \sin(\pi f_m T) \operatorname{sinc}(fT) e^{-j\pi f T}. \quad (50)$$

À l'exception du terme $\sin(\pi f_m T)$ qui est maximisé pour $f_m = 1/(2T)$ et de constantes de conversion, cette fonction de transfert est identique à celle trouvée pour l'opération à flanc de frange. Dans la mesure où le bruit de grenaille domine le bruit de photodétection, ce qui on le rappelle est une condition dont l'atteinte est facilitée par la méthode PDH, on peut

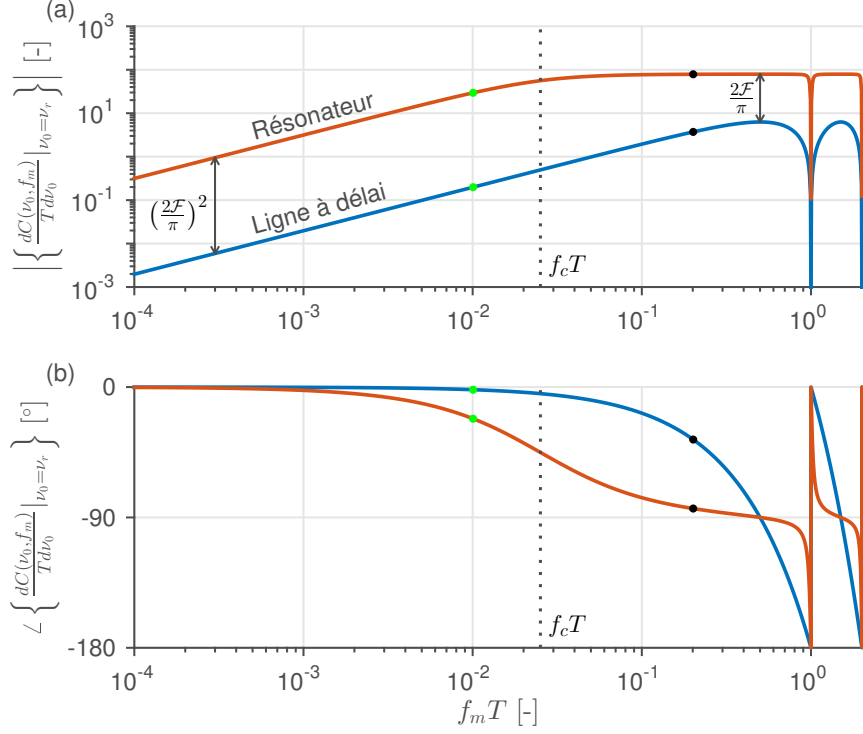


FIGURE 0.18 – Comparaison du gain DC de discrimination possible pour une ligne à délai et pour un résonateur interrogés par modulation PDH. Le résonateur a une finesse $\mathcal{F} = 20$ et est opéré dans le régime de couplage critique. (a) Module de la dérivée du signal d’erreur normalisé, représentatif du gain DC de discrimination optimal, en fonction de la fréquence de modulation f_m . (b) Phase de la dérivée du signal d’erreur normalisé. Cette phase est reliée à la phase initiale du signal de démodulation ϕ_d qui doit être choisie pour maximiser la pente de discrimination. Dans les deux cas, les marqueurs verts et noirs indiquent les conditions choisies pour l’exemple de la figure 0.17.

déterminer que le niveau de bruit de fréquence d’un laser asservi sur le système est $3\Psi/2$ aux basses fréquences. Ce niveau est à mi-chemin entre la performance possible par opération à flanc de frange, 2Ψ , et la limite absolue, Ψ . Cette limite absolue est seulement atteignable par détection PDH dans la mesure où le produit des formes d’onde de modulation et démodulation donne une constante (annexe C, [151, 152]); la manière la plus simple de respecter cette condition est d’utiliser une onde carrée pour la modulation et pour la démodulation. Des conclusions similaires peuvent être tirées pour le résonateur : la dynamique de discrimination et le niveau de bruit de fréquence pour un asservissement limité par le bruit de grenaille sont comparables à ceux calculés pour une opération à flanc de frange, et dans les deux cas le résonateur est avantage par un facteur comparable à la finesse. Avec la méthode PDH toutefois, le comportement de discrimination du résonateur est optimisé pour un couplage critique ($K = \gamma$).

Même si la méthode PDH a d’abord été développée pour des cavités Fabry-Perot en espace

libre, ses bénéfices sont aussi utiles pour stabiliser un laser à un résonateur Fabry-Perot fibré [150, 153], une cavité en anneau fibrée [154, 155], un réseau de Bragg fibré à saut de π [138, 156], un interféromètre à deux ports en espace libre [142, 157], un trou spectral brûlé [158, 159], un microrésonateur à modes de galerie [80, 160], et bien d'autres. Dans le cas particulier d'un interféromètre à deux ports (ligne à délai), la méthode PDH est parfois appelée «modulation de Schnupp» [161].

0.1.7 Autres méthodes de détection propres à la ligne à délai

La ligne à délai est un discriminateur relativement simple et flexible ; la méthode de détection de bruit de fréquence la plus élémentaire, c'est-à-dire l'opération à flanc de frange basée sur une seule des sorties de l'interféromètre, peut être améliorée par différentes méthodes qui ne sont pas disponibles ou possibles pour le résonateur ou d'autres discriminateurs. Ces méthodes permettent de rendre la ligne à délai plus compétitive vis-à-vis du résonateur, entre autres par la réduction de l'effet du bruit d'amplitude et par la modulation du bruit de photodétection. Une brève présentation des principales améliorations possibles est faite ici.

Détection balancée

L'interféromètre Mach-Zehnder illustré à la figure 0.7 possède deux sorties complémentaires ; la puissance d'entrée P_0 est simplement aiguillée entre les deux sorties dans le cas où les pertes internes sont négligeables ($\gamma \approx 1$), et cet aiguillage est déterminé par la valeur exacte de $\nu_0 T$. En effet, dans le cas où des coupleurs 50-50 sont utilisés à l'entrée et à la sortie, les deux signaux de puissance prennent la forme suivante :

$$P_1(t) \approx n_1(t) + \frac{P_0}{2} [1 + \epsilon(t) + \epsilon(t - T)] \{1 - \cos [\phi(t) - \phi(t - T) + 2\pi\nu_0 T]\}, \quad (51a)$$

$$P_2(t) \approx n_2(t) + \frac{P_0}{2} [1 + \epsilon(t) + \epsilon(t - T)] \{1 + \cos [\phi(t) - \phi(t - T) + 2\pi\nu_0 T]\}. \quad (51b)$$

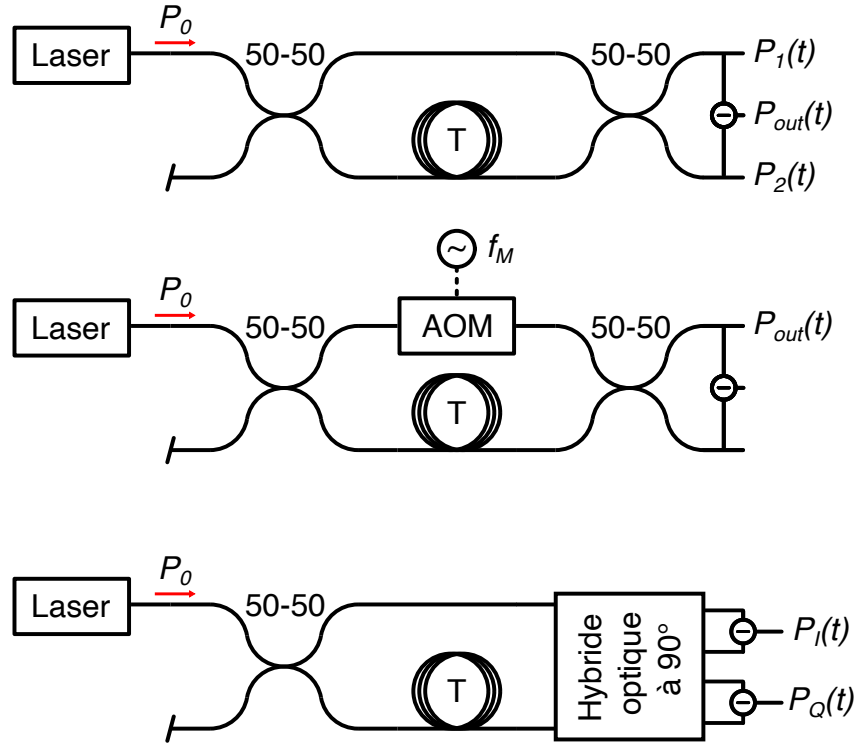
L'utilisation de deux photodétecteurs permet la détection balancée comme présentée pour le battement hétérodyne avec un laser de référence [162, 163] :

$$P_{out}(t) = P_2(t) - P_1(t) = n(t) + P_0 [1 + \epsilon(t) + \epsilon(t - T)] \cos [\phi(t) - \phi(t - T) + 2\pi\nu_0 T]. \quad (52)$$

Lorsque la fréquence porteuse est ajustée au flanc de la frange, c'est-à-dire $\nu_0 = (2k + 1)/4T$ pour k entier (figure 0.8), le bruit d'amplitude relative dans le signal de puissance balancée est annulé. Par la même occasion, le gain de discrimination est maximisé ($\sin [\phi(t) - \phi(t - T)] \approx \phi(t) - \phi(t - T)$ avec l'hypothèse d'analyse à petit signal). Un signal d'erreur antisymétrique est donc produit. La fonction de transfert de discrimination associée est :

$$H_{\nu P, opt}(f) = P_0 \frac{1 - e^{-j2\pi f T}}{j f} = P_0 (2\pi T) \text{sinc}(f T) e^{-j\pi f T}, \quad (53)$$

c'est-à-dire le double de la fonction trouvée sans détection balancée (Eq. (24)). Présumant un bruit de photodétection dominé par le bruit de grenaille ainsi que l'indépendance des bruits



s

FIGURE 0.19 – Schéma des autres méthodes de discrimination considérées pour la ligne à délai. De haut en bas : détection balancée, détection auto-hétérodyne et détection en phase et quadrature (IQ). Pour la détection balancée, on considère que les signaux optiques $P_1(t)$ et $P_2(t)$ sont soustraits, ce qui est fait en pratique avec un photodétecteur balancé. Pour la détection auto-hétérodyne, on considère les cas avec et sans balancement.

$n_1(t)$ et $n_2(t)$, la DSP du bruit de mesure est donnée par la somme de la DSP de $n_1(t)$ et de celle de $n_2(t)$:

$$S_n^{(1)}(f) \approx \frac{2h\nu_0 P_0}{\eta} \frac{1}{2} [1 - \cos(2\pi\nu_0 T) + 1 + \cos(2\pi\nu_0 T)] = \frac{2h\nu_0 P_0}{\eta}, \quad (54)$$

ce qui constitue le même niveau de bruit de grenaille qui serait mesuré par un photodétecteur placé à l'entrée de l'interféromètre. Cette expression est valide à tous les points d'opération, incluant le point optimal. Par division de l'équation (54) par le module au carré de l'équation (53), le niveau de bruit de fréquence d'un laser stabilisé au point d'opération optimal vaut Ψ aux basses fréquences, ce qui constitue le cas idéal. L'avantage principal de cette méthode est, évidemment, l'annulation ou la diminution de la contribution du bruit d'amplitude laser. En contrepartie, le balancement demande un second photodétecteur qui peut augmenter le niveau de bruit de photodétection total dans certaines conditions. On note que la méthode de détection balancée se porte moins naturellement à un interféromètre à deux ports de type Michelson, mais elle est possible si un circulateur est utilisé pour accéder au signal qui est réfléchi vers la branche d'entrée de l'interféromètre.

Détection auto-hétérodyne

Une méthode souvent employée en interférométrie est la détection auto-hétérodyne. Celle-ci implique d'insérer un modulateur acousto-optique dans un des bras de l'interféromètre afin de produire un décalage en fréquence du signal s'y propageant, généralement de l'ordre de 30 à 300 MHz ; le battement des champs provenant des deux bras, autrement à fréquence moyenne nulle, est décalé de la même façon et peut être mesuré à l'aide d'un photodétecteur suffisamment rapide. Cette méthode a d'abord été utilisée pour caractériser la forme de raie de lasers avec un analyseur de spectre radio-fréquence [164, 165]. Plus tard, ses avantages ont été reconnus pour la génération d'un signal d'erreur servant à la stabilisation laser, d'une manière somme toute comparable à l'approche PDH [82, 85].

Lorsqu'une seule sortie de l'interféromètre auto-hétérodyne est utilisée, le signal de puissance prend la forme :

$$P_{out}(t) \approx n(t) + \frac{P_0}{2} [1 + \epsilon(t) + \epsilon(t - T)] \{1 - \cos[\phi(t) - \phi(t - T) + 2\pi\nu_0 T + 2\pi f_m t + \phi_m]\}, \quad (55)$$

où ϕ_m est encore une phase de modulation. Comme pour le cas du battement hétérodyne entre deux lasers indépendants, la phase du terme oscillant peut être extraite par différentes approches, la plus simple à implémenter avec des outils analogiques étant sans doute la démodulation cohérente, c'est-à-dire la multiplication du signal photodéfecté par une copie du signal alimentant le modulateur ($A_d \sin(2\pi f_m t + \phi_d)$ par exemple). Dans ce cas, la phase de démodulation ϕ_d sert à compenser de potentiels délais et à assurer la démodulation en quadrature afin d'obtenir un signal final proportionnel à $\sin[\phi(t) - \phi(t - T)] \approx \phi(t) - \phi(t - T)$. Cette approche donne un signal d'erreur antisymétrique et permet la modulation du bruit (le décalage de son spectre), comme la méthode PDH. Toutefois, dans ce cas le gain DC de discrimination ne dépend pas de la fréquence du signal de modulation, mais uniquement de la valeur du délai T déterminée par la longueur de la ligne à délai. Par ailleurs, avec un seul photodétecteur, le bruit d'amplitude laser est modulé, mais pas annulé, et parfois le décalage en fréquence associé n'est pas suffisant pour que le bruit de grenaille domine. L'utilisation de la détection balancée en plus du modulateur acousto-optique permet de s'affranchir de ce problème. Au final, on peut montrer que le bruit de fréquence d'un laser asservi à un interféromètre auto-hétérodyne limité par le bruit de grenaille est 4Ψ sans détection balancée et 2Ψ avec détection balancée. Cette pénalité par rapport au meilleur scénario (Ψ , atteignable par détection balancée sans modulation, entre autres) peut être réduite par la considération adéquate du caractère cyclostationnaire du bruit de grenaille et par un traitement indépendant des signaux provenant des deux détecteurs (chapitre 3). On note aussi que le chapitre 2 présente une approche alternative pour produire un décalage en fréquence du signal de battement qui n'implique pas d'insérer un modulateur dans un des bras, procurant des bénéfices similaires à la méthode auto-hétérodyne.

Un avantage critique du décalage en fréquence du signal est que la phase $\theta(t) \equiv \phi(t) - \phi(t-T)$ peut être extraite puis déroulée sans passer par une opération de linéarisation. Ceci peut être fait par démodulation complexe [166], transformée d'Hilbert [167] ou démodulation en phase et en quadrature [168]. Le résultat est le même dans tous les cas : le laser peut être verrouillé à n'importe quel point sur une frange avec une fonction de transfert de discrimination constante donnée par :

$$H_{\nu\theta}(f) = \frac{1 - e^{-j2\pi fT}}{jf} = (2\pi T) \operatorname{sinc}(fT) e^{-j\pi fT}. \quad (56)$$

L'hypothèse de petites fluctuations n'a pas à être respectée dans ce cas. Une telle forme de traitement de signal peut dramatiquement augmenter la plage dynamique de l'asservissement et améliorer sa robustesse vis-à-vis de fortes perturbations [126].

Détection en phase et en quadrature

Comme pour le cas d'un signal interférométrique décalé en fréquence, la phase d'intérêt peut être extraite et déroulée lorsque le coupleur directionnel de sortie de l'interféromètre est remplacé par un coupleur de type hybride à 90° [129, 169]. Ce genre de coupleur produit deux copies d'un des champs avant recombinaison, une des copies étant retardée d'un quart de cycle optique ($\Delta T = 1/(4\nu_0)$). Ceci peut être fait, par exemple, par l'utilisation de composantes optiques biréfringentes. Dans le cas d'un hybride à 90° idéal et d'un signal optique à spectre relativement étroit autour de ν_0 , on peut considérer que deux interféromètres quasi-identiques sont rendus accessibles par le coupleur hybride. Chacun des deux interféromètres utilise la moitié de la puissance optique incidente, et le déphasage entre les deux termes de battement est $2\pi\nu_0\Delta T = \pi/2$. Les signaux photodétectés, supposant une détection balancée, sont donc :

$$P_I(t) \approx n_I(t) + \frac{P_0}{2} [1 + \epsilon(t) + \epsilon(t-T)] \cos [\phi(t) - \phi(t-T) + 2\pi\nu_0 T], \quad (57a)$$

$$P_Q(t) \approx n_Q(t) + \frac{P_0}{2} [1 + \epsilon(t) + \epsilon(t-T)] \sin [\phi(t) - \phi(t-T) + 2\pi\nu_0 T]. \quad (57b)$$

Ces deux signaux sont normalement appelés «en phase» (*in phase*, I) et «en quadrature» (*quadrature*, Q), la méthode étant donc souvent nommée «détection IQ». En combinant les deux signaux de l'équation (57) par traitement de signal numérique, on peut créer un signal complexe dont la phase contient l'information d'intérêt pour l'asservissement :

$$P_{out}(t) = P_I(t) + jP_Q(t) = n(t) + \frac{P_0}{2} [1 + \epsilon(t) + \epsilon(t-T)] e^{j[\phi(t) - \phi(t-T) + 2\pi\nu_0 T]}. \quad (58)$$

Après extraction de phase, la fonction de transfert de discrimination peut être vue comme identique à celle de l'équation (56). Ceci est valide peu importe le point d'opération, c'est-à-dire peu importe la valeur de $2\pi\nu_0 T$. Toutefois, la séparation de la puissance incidente en deux interféromètres est associée à une pénalité sur le bruit de fréquence fondamental d'un laser asservi à la ligne à délai qui devient alors 2Ψ (voir chapitre 1, mais ceci peut aussi être

facilement calculé en forçant la phase totale à zéro et en estimant le bruit projeté dans le signal $P_Q(t)$. Tel que démontré au chapitre 1, cette pénalité peut être réduite, et asymptotiquement éliminée, lorsque des photodétecteurs indépendants sont utilisés pour mesurer les signaux aux quatre sorties de l'hybride à 90° . Un traitement de signal est ensuite requis pour combiner ces signaux de façon optimale, maximisant le rapport signal-sur-bruit.

Une des principales faiblesses de cette approche par rapport à la détection auto-hétérodyne est que le bruit de photodétection n'est pas modulé. Ainsi, une opération à la limite du bruit de grenaille est généralement difficile à atteindre aux basses fréquences en raison des bruits d'origine technique. La plage dynamique disponible peut toutefois être mieux utilisée puisqu'il n'est pas nécessaire de mesurer la pleine amplitude de la frange comme en détection auto-hétérodyne. Par ailleurs, la qualité du signal dépend du degré auquel un hybride à 90° réel est en mesure de produire deux signaux de puissance similaires avec un déphasage approchant $\pi/2$. Dans une certaine mesure, les imperfections peuvent être corrigées par une précalibration (régression elliptique [170]) suivie d'une correction en traitement de signal. La détection IQ a été utilisée d'une façon ou d'une autre pour tous les articles présentés dans cette thèse, à l'exception de celui du chapitre 3.

La table 0.3 résume les performances à la limite du bruit de grenaille des configurations qui ont été présentées dans les sections précédentes. On peut constater que la limite de bruit de grenaille pour un résonateur est de forme similaire à la limite de Schawlow-Townes énoncée à l'équation (2) si on associe P_{out} à P_0 et n_{sp} à $1/\eta$.

0.1.8 Impact du bruit intrinsèque d'une référence géométrique

Les deux références géométriques qui ont été considérées jusqu'à maintenant affichent une réponse de discrimination qui dépend du délai T , lui-même déterminé par la taille physique du système et l'indice du milieu de propagation : longueur optique de la ligne à délai dans le cas d'interféromètre à deux ports et longueur optique de l'anneau dans le cas du résonateur. Des fluctuations de la valeur de T sont inévitables en pratique, tant en raison de perturbations dans l'environnement du discriminateur que de fluctuations fondamentales de la taille et de l'indice du milieu de propagation à température non-nulle.

Dans le cas de la ligne à délai, l'impact de ces fluctuations est relativement simple à modéliser : il suffit de redéfinir le délai comme $T \equiv T_0 + T(t)$, c'est-à-dire comme une valeur moyenne T_0 additionnée de fluctuations à moyenne nulle $T(t)$. À l'équation (58) par exemple, cette nouvelle définition donne la phase totale :

$$2\pi\nu_0 T_0 + \phi(t) - \phi(t - T_0) + 2\pi\nu_0 T(t) \equiv \theta_0 + \theta(t) + m_\theta(t), \quad (59)$$

où on considère, comme défini dans le schéma de la figure 0.3, que $m_\theta(t) = 2\pi\nu_0 T(t)$ est un bruit introduit par la mesure de $\theta(t)$, la variable qui contient l'information à propos du bruit du laser et qui est requise pour réaliser l'asservissement. La dernière définition implique de

TABLE 0.3 – DSP de bruit de fréquence aux basses fréquences, $S_{\nu'}^{(1)}(f)$ pour $f \ll f_L$, d'un laser asservi au discriminateur pour opération à la limite du bruit de grenaille : comparaison de méthodes de discrimination pour la ligne à délai et pour le résonateur. $\Psi \equiv h\nu_0/(2\pi^2\eta P_0 T^2)$ où h est la constante de Planck, ν_0 est la fréquence porteuse, η est l'efficacité quantique du photodétecteur, P_0 est la puissance optique moyenne incidente sur le discriminateur et T est le délai (pour un seul parcours), ou l'inverse de l'espace spectral libre. \mathcal{F} est la finesse du résonateur. La première valeur affichée est celle pour l'implémentation «classique» de chaque méthode de détection, avec opération au point maximisant le gain de discrimination. Dans chaque cas, la seconde valeur est celle qu'il est possible d'atteindre par des techniques particulières impliquant de changer le point d'opération, de mesurer tous les signaux disponibles de façon indépendante pour en faire une combinaison optimale et/ou d'utiliser des formes d'onde de modulation et démodulation différentes d'une sinusoïde.

Méthode de détection	Ligne à délai	Résonateur
Flanc de frange (détection directe)	$2\Psi \rightarrow \Psi$	$(\frac{\pi}{\mathcal{F}})^2\Psi \rightarrow (\frac{\pi}{2\mathcal{F}})^2\Psi$ ¹
Pound-Drever-Hall	$\frac{3}{2}\Psi \rightarrow \Psi$	$\frac{3}{2}(\frac{\pi}{2\mathcal{F}})^2\Psi \rightarrow (\frac{\pi}{2\mathcal{F}})^2\Psi$
Détection balancée	Ψ	-
Détection auto-hétérodyne	$4\Psi \rightarrow 2\Psi$	-
Détection auto-hétérodyne balancée	$2\Psi \rightarrow \Psi$	-
Détection IQ	$2\Psi \rightarrow \Psi$	-

¹ La première condition implique $K = \sqrt{\gamma}$ (régime sous-couplé), la seconde condition implique $K = \gamma$ (couplage critique).

négliger certains termes croisés qui ont un impact négligeable en pratique si $\nu(t) \ll \nu_0$ et $T(t) \ll T_0$. Ignorant le bruit de photodétection et le bruit d'amplitude laser, la DSP de bruit de fréquence d'un laser asservi à ce discriminateur devient :

$$S_{\nu'}^{(1)}(f) = \frac{S_{m_\theta}^{(1)}(f)}{|H_{\nu\theta}(f)|^2} \approx \frac{(2\pi\nu_0)^2 S_T^{(1)}(f)}{(2\pi T_0)^2}, \quad f \ll f_L. \quad (60)$$

En réorganisant la dernière équation, on trouve :

$$\frac{S_{\nu'}^{(1)}(f)}{\nu_0^2} \approx \frac{S_T^{(1)}(f)}{T_0^2}, \quad f \ll f_L. \quad (61)$$

Cette relation mathématique traduit un concept bien connu : l'instabilité relative de la fréquence du laser asservi est égale à l'instabilité relative de la longueur optique de la ligne à délai à l'intérieur de la bande d'asservissement [10, 68, 74, 82]. Ceci présume évidemment que le bruit intrinsèque du discriminateur domine le bruit de photodétection et le bruit d'amplitude laser. Une fibre donnée est donc adéquate pour la stabilisation laser dans la mesure où son instabilité relative est plus faible que celle du laser solitaire. Lorsque l'instabilité de longueur optique est déterminée par les fluctuations thermodynamiques de la ligne à délai, cette dernière relation désigne une limite tout aussi fondamentale que la limite de bruit de grenaille.

Le fait que la relation (61) tienne pour un résonateur, et en fait pour n'importe quel discriminateur géométrique, peut être raisonné de la façon suivante : la grand gain de discrimination possible avec un résonateur vient de l'accumulation cohérente du signal, pleinement effective

pour les fréquences à l'intérieur de la bande passante f_c ; la même accumulation cohérente se produit pour les fluctuations indésirées de la longueur optique de la boucle. Ainsi, le phénomène de résonance qui avantage grandement le résonateur du point de vue du bruit de photodétection et du bruit d'amplitude laser ne procure pas d'avantage pour le bruit intrinsèque du discriminateur, le signal et le bruit étant dans ce cas amplifiés de la même façon. Plus mathématiquement, si on considère la réponse impulsionnelle du résonateur à l'équation (27) ainsi qu'un champ d'entrée de la forme $E_0 \cos [2\pi\nu_0 t + \phi(t)]$, on obtient le champ de sortie :

$$\begin{aligned}
E_{out}(t) = & \sqrt{K} E_0 \cos [2\pi\nu_0 t + \phi(t)] - \frac{1-K}{\sqrt{K}} \left\{ \right. \\
& + (\gamma K)^{1/2} E_0 \cos [2\pi\nu_0(t - T_0) + \phi(t - T_0) + m_\theta(t)] \\
& + (\gamma K)^{2/2} E_0 \cos [2\pi\nu_0(t - 2T_0) + \phi(t - 2T_0) + m_\theta(t) + m_\theta(t - T_0)] \\
& + (\gamma K)^{3/2} E_0 \cos [2\pi\nu_0(t - 3T_0) + \phi(t - 3T_0) + m_\theta(t) + m_\theta(t - T_0) + m_\theta(t - 2T_0)] \\
& \left. + \dots \right\}, \tag{62}
\end{aligned}$$

où, dans ce cas, $m_\theta(t)$ représente le bruit de phase accumulé par le signal pour un seul tour de la boucle en raison des perturbations de longueur optique de l'anneau. À l'équation (62), le battement des paires de termes à un simple niveau de séparation donnera des termes de bruit de phase de la forme $\phi(t) - \phi(t - T_0) - m_\theta(t)$ et $\phi(t - T_0) - \phi(t - 2T_0) - m_\theta(t - T_0)$. Le battement des paires à deux niveaux de séparation donnera plutôt $\phi(t) - \phi(t - 2T_0) - m_\theta(t) - m_\theta(t - T_0)$ et $\phi(t - T_0) - \phi(t - 3T_0) - m_\theta(t - T_0) - m_\theta(t - 2T_0)$, c'est-à-dire le résultat du battement des paires à un niveau de séparation convolué par $[\delta(t) + \delta(t - T_0)]$. Le même raisonnement peut être appliqué pour les paires à k niveaux de séparation qui sont convoluées par $\sum_{i=0}^{k-1} \delta(t - iT_0)$. On voit donc que le bruit accumulé pour un seul tour de la boucle, $m_\theta(t)$, est toujours filtré de la même manière que la différence de bruit de phase laser, $\phi(t) - \phi(t - T_0)$; en fait, ces deux termes demeurent indiscernables dans l'analyse à petit signal, peu importe la forme de la réponse impulsionnelle du discriminateur. Ceci confirme que le bruit de fréquence du laser asservi sur le résonateur est aussi de la forme de l'équation (60) lorsque le bruit intrinsèque du discriminateur domine. De plus, ce raisonnement met en lumière une méthode pour calculer la fonction de transfert entre le bruit intrinsèque et la variable mesurée μ (puissance, tension, phase, etc.) :

$$H_{m_\theta\mu}(f) = \frac{H_{\nu\mu}(f)}{H_{\nu\theta}(f)} = \frac{H_{\nu\mu}(f)}{2\pi T_0 \text{sinc}(fT_0) e^{-j\pi f T_0}}. \tag{63}$$

La fonction de transfert de discrimination de fréquence, $H_{\nu\mu}(f)$, peut être calculée par les méthodes présentées en début de chapitre. Pour l'interféromètre à ligne à délai avec extraction de phase, ceci donne $H_{m_\theta\theta}(f) = 1$, comme attendu. Aux basses fréquences, on trouve $H_{m_\theta\mu}(f) \approx H_{\nu\mu}(f)/(2\pi T_0)$, ce qui est aussi un résultat attendu par analyse à DC. La fonction de transfert $H_{m_\theta\mu}(f)$ peut être utile pour prédire la réponse du système quand un modulateur de phase est inséré dans le bras de l'interféromètre ou dans la boucle du résonateur, par exemple (figure 0.20).

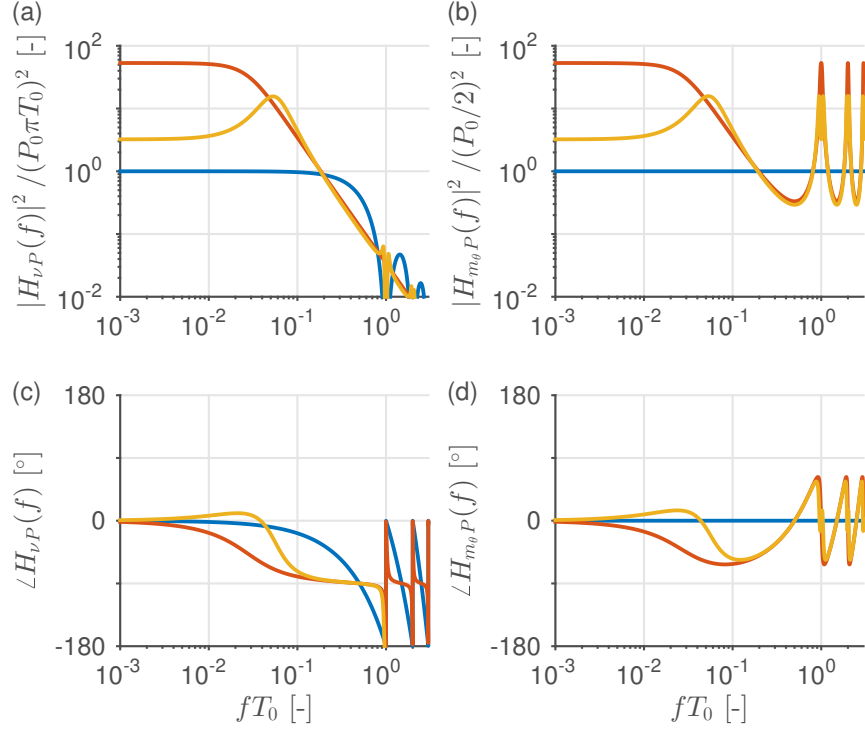


FIGURE 0.20 – Comparaison de la fonction de transfert de discrimination (a, c) (bruit de fréquence laser vers puissance de sortie) et de la fonction de transfert du bruit de phase intrinsèque du discriminateur (b, d) (bruit de phase d'un simple parcours vers puissance de sortie). Dans tous les cas, on compare la ligne à délai opérée à flanc de frange (bleu, point optimal) et un résonateur de finesse $\mathcal{F} = 20$ opéré à deux points d'opération (orange optimal, jaune quelconque).

De manière générale, le bruit de phase intrinsèque du discriminateur pour un simple parcours, $m_\theta(t)$, peut être modélisé comme le résultat de l'accumulation de perturbations localisées de la longueur optique. Pour le signal laser qui se propage dans la ligne à délai de l'interféromètre à deux ports ou dans la boucle du résonateur, ceci est équivalent à l'accumulation de perturbations de phase représentées par une densité linéaire de bruit $\delta m_\theta(t, x)$, en rad/m :

$$m_\theta(t) = \int_{x=0}^{x=L} \delta m_\theta \left(t - \frac{L-x}{c/n}, x \right) dx, \quad (64a)$$

$$M_\theta(f) = \int_{x=0}^{x=L} \delta M_\theta(f, x) e^{-j2\pi f(L-x)/(c/n)} dx, \quad (64b)$$

où on rappelle que n est l'indice de réfraction du milieu de propagation, c est la vitesse de la lumière, x est la distance physique et $L = cT_0/n$ est la longueur physique de la ligne à délai ou de la boucle. La seconde équation est obtenue par transformation de Fourier de la première. Deux scénarios sont d'intérêt particulier pour la stabilisation laser : lorsque les perturbations localisées sont identiques d'un point de l'espace à un autre, par exemple en raison d'un changement de température uniforme de la ligne à délai, le spectre des perturbations

$\delta M_\theta(f, x) = \delta M_\theta(f)$ peut être mis en évidence :

$$M_\theta(f) = \int_{x=0}^{x=L} \delta M_\theta(f) e^{-j2\pi f(L-x)/(c/n)} dx = L \operatorname{sinc}(fT_0) e^{-j\pi fT_0} \delta M_\theta(f), \quad (65a)$$

$$S_{m_\theta}^{(1)}(f) = L^2 \operatorname{sinc}^2(fT_0) S_{\delta m_\theta}^{(1)}(f). \quad (65b)$$

La performance d'un laser stabilisé à un système limité par ce type de perturbations «cohérentes» n'est normalement pas modifiée par la valeur de L puisque le gain de discrimination est aussi proportionnel à L (c'est-à-dire que la puissance du signal suit L^2). Ceci suppose que la DSP des perturbations localisées, $S_{\delta m_\theta}^{(1)}(f)$, ne dépend pas elle-même de L , ce qui est vrai pour des fluctuations de la température environnementale ; toutefois, ceci constitue une mauvaise hypothèse pour les vibrations puisque la sensibilité vibrationnelle dépend de la taille physique du discriminateur [68, 74, 125] (le poids du système joue dans la relation contrainte-déformation).

Alternativement, si les perturbations sont spatialement indépendantes («incohérentes») et identiquement distribuées, on peut calculer la fonction d'autocorrélation suivante :

$$\begin{aligned} \langle m_\theta(t) m_\theta(t - \tau) \rangle &= \iint_0^L \left\langle \delta m_\theta \left(t - \frac{L-x}{c/n}, x \right) \delta m_\theta \left(t - \tau - \frac{L-x'}{c/n}, x' \right) \right\rangle dx dx' \\ &= \iint_0^L R_{\delta m_\theta} \left(\tau + \frac{x-x'}{c/n}, x-x' \right) dx dx' = R_{m_\theta}(\tau). \end{aligned} \quad (66)$$

La fonction d'autocorrélation des perturbations localisées, $R_{\delta m_\theta}(\tau, \chi)$, peut être exprimée comme le produit d'un terme temporel et d'un terme spatial, le terme spatial étant ici supposé de la forme $L_{c,p} \delta(\chi)$ où $L_{c,p}$ est une petite longueur de cohérence et χ est la variable de séparation spatiale. Ce modèle de fonction d'autocorrélation est la manifestation mathématique de l'hypothèse d'indépendance des perturbations à des positions distinctes. On pourrait inclure une certaine forme de corrélation spatiale [171], mais la forme exacte de cette fonction n'a qu'une faible importance tant que la longueur de cohérence des perturbations localisées, $L_{c,p}$, demeure faible par rapport à la longueur L [172, 173]. On note que $L_{c,p}$ ne représente pas la longueur de cohérence du signal laser dans ce cas. Avec ces considérations, on peut simplifier la fonction d'autocorrélation et calculer la DSP :

$$\begin{aligned} R_{m_\theta}(\tau) &= \iint_0^L R_{\delta m_\theta} \left(\tau + \frac{x-x'}{c/n} \right) L_{c,p} \delta(x-x') dx dx' \\ &= L_{c,p} \int_0^L R_{\delta m_\theta}(\tau) dx' = L_{c,p} L R_{\delta m_\theta}(\tau), \\ S_{m_\theta}^{(1)}(f) &= L_{c,p} L S_{\delta m_\theta}^{(1)}(f). \end{aligned} \quad (67)$$

Puisque la DSP du bruit intrinsèque du discriminateur est dans ce cas proportionnelle à la longueur physique alors que la puissance du signal de discrimination augmente en L^2 , la DSP de bruit de fréquence du laser verrouillé sur la discriminateur est *réduite* par une augmentation de la longueur de la ligne à délai ou de la boucle ; la stabilité relative de longueur est meilleure.

Finalement, on note que dans le cas où le signal laser fait un aller-retour dans la ligne à délai ou dans la boucle du résonateur, le bruit total accumulé lorsque la lumière revient au point d'entrée est :

$$m_{\theta,2}(t) = \int_{x=0}^{x=L} \left[\delta m_{\theta} \left(t - \frac{x}{c/n}, x \right) + \delta m_{\theta} \left(t - \frac{2L-x}{c/n}, x \right) \right] dx, \quad (68a)$$

$$M_{\theta,2}(f) = \int_{x=0}^{x=L} 2 \cos \left(2\pi f \frac{L-x}{c/n} \right) e^{-j2\pi f T_0} \delta M_{\theta}(f, x) dx. \quad (68b)$$

Pour une perturbation cohérente, le bruit accumulé est identique à celui de l'équation (65) où on remplace L par $2L$ et on redéfinit $T_0 \equiv 2nL/c$ comme étant le délai total. Pour une perturbation incohérente, on trouve plutôt :

$$S_{m_{\theta,2}}^{(1)}(f) = 2S_{m_{\theta}}^{(1)}(f) [1 + \text{sinc}(2fT_0)]. \quad (69)$$

Aux basses fréquences, quand les fluctuations à une position donnée s'additionnent en phase pour l'aller et pour le retour du signal optique, la DSP de bruit total associée à l'aller-retour est quatre fois plus élevée que la DSP associée à un aller simple. Cette condition est respectée dans la plus grande partie de la bande d'asservissement définie par $f_L \approx 1/T$. Ceci est pertinent pour des interféromètres à deux ports de type Michelson ou pour des cavités résonantes de type Fabry-Perot : pour des perturbations distribuées et incohérentes de la longueur optique, la performance de stabilisation aux basses fréquences est déterminée par le délai associé à un aller simple, la puissance du signal et la puissance du bruit étant augmentées de la même manière lors du retour. L'aller-retour ne fournit pas de bénéfice de ce point de vue (tout comme de multiples allers ou multiples allers et retours) et il réduit la bande d'asservissement possible par rapport à un aller simple. Toutefois, l'aller-retour aide à réduire l'impact des bruits de photodétection et d'amplitude laser par l'augmentation de la pente de discrimination.

0.1.9 Modèle de bruit de mesure pour une fibre de silice conventionnelle

Pour minimiser l'instabilité relative du laser asservi à la référence géométrique lorsque le bruit intrinsèque domine (Eq. 61), il faut minimiser le rapport $S_{m_{\theta}}^{(1)}(f)/T_0^2$. Les fibres optiques monomodes en silice, par leur propriété de guidage et leurs très faibles pertes de propagation autour de $\nu_0 = 200$ THz, sont des candidates de choix pour maximiser le délai T_0 ; il importe donc de modéliser la DSP des fluctuations qui peuvent être observées dans de telles fibres afin de prédire les limites de performance, que ce soit dans la configuration d'un interféromètre à deux ports (ligne à délai) ou dans celle d'une cavité résonante fibrée.

Bruit thermodynamique

Avec le développement frénétique des capteurs interférométriques à fibre optique dans les années 1980, il est vite devenu apparent que la performance ultime d'un interféromètre à fibre n'était pas limitée par le bruit de grenaille, comme initialement attendu, mais plutôt

par une forme de bruit indépendante de la puissance optique (ignorant les possibles effets photothermiques). Une première publication théorique a lié ce bruit aux fluctuations thermodynamiques fondamentales de l'indice de réfraction de la fibre [174] en faisant appel au théorème de fluctuation-dissipation énoncé quarante ans plus tôt [175, 176] (on note une discussion similaire dans [84], la même année). Quelques années plus tard, Wanser a raffiné cette idée en publiant une équation plus pratique incluant la contribution des fluctuations de la longueur physique de la fibre [177]. Malheureusement, la dérivation de cette équation n'a jamais été publiée ou répliquée. Néanmoins, une vérification expérimentale convaincante de son équation a été publiée par Wanser l'année suivante, montrant un bon accord dans la plage de 1 à 100 kHz [88]. Cette première initiative a généré un fort intérêt et stimulé davantage d'efforts de modélisation, d'abord dans le domaine des gyroscopes à fibre optique [178–181] et plus tard dans les domaines des références fibrées [82, 86, 139], des lasers fibrés à rétroaction distribuée [182, 183] et des capteurs fibrés passifs [184–186]. En particulier, Foster a publié un modèle complet donnant des prédictions presque identiques à celle du modèle de Wanser, mais en détaillant les hypothèses requises et en explicitant l'effet des conditions limites thermiques [187, 188]. Une démonstration expérimentale de l'effet des conditions limites a aussi été publiée [189]. Foster a donné le nom «thermoconductif» à ce bruit et une réorganisation de son modèle, valide pour une fibre à gaine infinie (voir chapitre 5), peut s'exprimer comme :

$$S_{m_\theta}^{(1)}(f) = (2\pi\nu_0 T_0)^2 \xi_\Theta^2 \frac{k_B \Theta^2}{\pi k_\Theta L} \operatorname{Re} \left[e^{jf/f_c} E_1(jf/f_c) \right], \quad (70a)$$

$$\xi_\Theta \equiv \alpha_L + \frac{1}{n} \frac{dn}{d\theta}, \quad (70b)$$

$$f_c \equiv \frac{2k_\Theta}{A_m c_v}, \quad (70c)$$

où ξ_Θ est la sensibilité thermique, k_B est la constante de Boltzmann, Θ est la température, k_Θ et c_v sont la conductivité thermique et la capacité thermique volumique de la silice, respectivement, E_1 est la fonction exponentielle intégrale, α_L est le coefficient d'expansion thermique (linéaire), $dn/d\theta$ est le coefficient thermo-optique, et $A_m = \pi w^2$ est l'aire effective du mode fondamental (w est encore le rayon à e^{-2} du mode gaussien équivalent). Les valeurs des paramètres, adéquates pour une fibre de silice standard, sont répertoriées à la table 5.1 de l'article présenté au chapitre 5. Pour une telle fibre, la modification des conditions limites thermiques affecte la DSP de bruit de phase de façon significative seulement sous 100 Hz, environ. Autrement, on peut voir par la forme de l'équation (70) que le bruit thermoconductif affiche une DSP de la même forme que celle associée à l'accumulation de perturbations localisées de la longueur optique à faible corrélation spatiale (Eq. (67)), comme attendu.

Cependant, peu importe les conditions limites choisies, le modèle de bruit thermoconductif de Foster (tout comme le modèle de Wanser) ne s'accorde pas très bien avec le bruit de phase mesuré dans une fibre conventionnelle sous 1 kHz [190]. Pour expliquer ce désaccord, un modèle complémentaire a été développé par Duan [191, 192] en s'inspirant des travaux de

TABLE 0.4 – Valeurs des paramètres utilisés dans le modèle de bruit thermomécanique pour une fibre de silice standard, tirées de [195]. Ces paramètres considèrent une fibre standard constituée d’un coeur et d’une gaine de silice (diamètre 125 μm) et d’une gaine de protection de polymère (diamètre 250 μm).

Symbole	Nom	Valeur
φ	Angle de perte mécanique	0.01
A_f	Aire de section	49 000 μm^2
E_Y	Module de Young	19 GPa
ρ	Densité	1430 kg/m^3

modélisation faits pour l’espaceur d’une cavité Fabry-Perot [66, 193]. La DSP de ce bruit dit «thermomécanique» prend la forme suivante :

$$S_{m_\theta}^{(1)}(f) \approx (2\pi\nu_0 T_0)^2 \frac{2k_B \Theta \varphi}{3\pi A_f E_Y L} \frac{1}{f}, \quad f \ll \frac{\sqrt{E_Y/\rho}}{2L}, \quad (71)$$

où φ est l’angle de perte mécanique, A_f est l’aire de section de la fibre et E_Y est le module de Young. Cette DSP exhibe la même dépendance envers la longueur L que celle prédite par le modèle thermoconductif (Eq. (70)); les deux densités spectrales se «suivent» donc lorsque la longueur de la fibre est modifiée. On doit mentionner que le modèle de Duan prédit des résonances aux multiples entiers de $f = \sqrt{(E_Y/\rho)}/(2L)$, mais de telles résonances n’ont jamais été observées en pratique ; ceci explique le caractère approximatif de la définition donnée ici. La forme spectrale en $1/f$ de la DSP du bruit thermomécanique, qui fait dominer ce bruit aux basses fréquences, peut être expliquée par la manière dont les pertes mécaniques internes d’un solide sont modélisées : au lieu d’une force d’amortissement proportionnelle à la vitesse (loi de la viscosité), une faible partie imaginaire uniforme en fréquence est ajoutée au module de Young ($\equiv -j\varphi E_Y$) [194]. Selon le théorème de fluctuation-dissipation, la dissipation associée à cette élasticité imaginaire est la source du bruit thermomécanique ; la forme spectrale particulière du terme de dissipation produit une DSP en $1/f$.

Des mesures expérimentales ont montré que le modèle thermomécanique explique raisonnablement bien le bruit de phase aux basses fréquences si les valeurs de la table 0.4 sont considérées [83, 95, 196]. À l’exception de l’aire de section, ces valeurs ont été estimées par une mesure de la déformation de la surface de gaine de protection après excitation d’une fibre optique par une impulsion mécanique [195]. L’angle de perte trouvé par cette méthode, $\varphi \approx 10^{-2}$, est considérablement différent des valeurs acceptées pour de la silice pure qui tournent autour de $\varphi = 10^{-6}$ [193, 197]. L’hypothèse qui semble acceptée à ce jour est que cette augmentation de φ par quatre ordres de grandeur est causée par la gaine de protection de la fibre qui constitue la principale source d’atténuation mécanique [196]. Pour des ondes acoustiques guidées (effet Brillouin), d’autres chercheurs ont pourtant identifié une différence d’un seul ordre de grandeur entre l’atténuation mécanique d’une fibre avec et sans gaine de protection [198, 199]. D’autres éléments de la théorie du Duan soulèvent des questions, par exemple

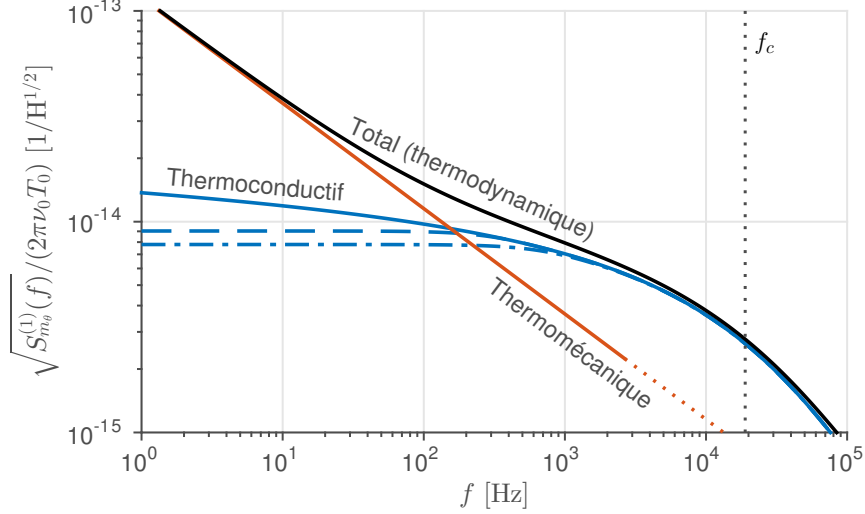


FIGURE 0.21 – Bruit thermodynamique fondamental d’une fibre optique de silice pour $nL = 1$ m, $\Theta = 293$ K, $\nu_0 = 195$ THz (racine de la DSP unilatérale de bruit de phase, normalisée par $2\pi\nu_0 T_0$). Pour le bruit thermoconductif, on affiche le modèle pour trois conditions limites : (de haut en bas) gaine infinie, gaine isolante et gaine conductrice. On suppose que la gaine de silice a un diamètre externe de $125 \mu\text{m}$. Les autres paramètres de la fibre sont tels que donnés aux tables 0.4 et 5.1. Le modèle de bruit thermomécanique n’est pas adéquat au-delà de $\sqrt{(E_Y/\rho)}/(2L) \approx 2.6$ kHz (région pointillée).

la différence d’un facteur trois avec l’équation (9) de [193] qui semble pourtant équivalente, la valeur de l’aire A_f qui doit être utilisée pour un système composite comme une fibre avec une gaine protectrice de polymère, l’effet de la structure supportant la fibre sur la dissipation mécanique, et l’absence des résonances prédites par la modèle tel que mentionné précédemment. Clairement, pour le bruit thermomécanique, les paramètres du modèle ont été ajustés pour s’accorder avec les mesures au lieu d’être mesurés de façon indépendante. Néanmoins, en absence d’un meilleur modèle et considérant que les mesures expérimentales suggèrent que le modèle s’accorde avec quelque chose de bien réel, on utilisera le modèle tel quel avec les valeurs présentement acceptées (table 0.4). La figure 0.21 illustre le bruit thermodynamique (aussi appelé «bruit thermique») d’une fibre de silice conventionnelle, c’est-à-dire la somme du bruit thermoconductif et du bruit thermomécanique .

À partir des équations (70) et (71), on peut évaluer que le bruit de phase thermodynamique accumulé par un signal laser à $\nu_0 = 195$ THz se propageant dans une fibre standard, à $f = 1$ kHz et température pièce, est environ 10^{-15} rad²/Hz pour chaque unité de longueur optique nL . Ceci constitue une valeur relativement élevée : le bruit de phase pour les meilleures cavités Fabry-Perot en espace libre est de l’ordre de 10^{-20} rad²/Hz par unité de longueur optique lorsque le bruit de l’espaceur domine le bruit total, ce qui se produit normalement pour les cavités de longueur similaire au mètre (selon les matériaux utilisés) [66, 193]. La performance des cavités plus courtes est déterminée par le bruit thermodynamique des miroirs de Bragg

(diélectriques) et des substrats associés, et dans ce cas le bruit de phase accumulé ne dépend pas de la longueur puisque les perturbations ne sont pas distribuées dans toute la cavité. Pour que les références fibrées soient compétitives vis-à-vis des meilleures cavités Fabry-Perot, on peut donc anticiper que des fibres de silice d’une longueur de l’ordre de 100 km doivent être utilisées, ce qui est possible d’un point de vue technologique, mais est certainement associé à de nombreux défis ne serait-ce qu’en raison des pertes de propagation. La performance supérieure des cavités Fabry-Perot, du point de vue du bruit thermodynamique fondamental, peut être principalement expliquée par la propagation du signal dans un espace évacué, par la plus grande aire effective du mode transverse fondamental (de l’ordre de 10^3 à 10^4 fois plus élevée, sur les miroirs, que dans le coeur d’une fibre conventionnelle [74]), et d’une plus grande flexibilité dans le choix du matériau constituant l’espaceur qui n’a pas besoin d’être transparent pour la lumière laser (figure 0.2). Il y a aussi, pour les cavités Fabry-Perot, quelques décennies de recherche et d’optimisation qui contribuent aux records actuels de performance [10].

Bruit environnemental

Les bruits environnementaux, c’est-à-dire les perturbations qui affectent la fibre de manière hautement cohérente, sont beaucoup plus difficiles à modéliser sur la base de principes fondamentaux. Le bruit de fréquence d’un laser verrouillé à une ligne à délai ne sera pas le même si l’interféromètre fibré est opéré dans un laboratoire de recherche ou à bord d’un hélicoptère, par exemple [200, 201]. Néanmoins, on peut comparer différents systèmes sur la base de la sensibilité aux perturbations, c’est-à-dire d’une fonction de transfert entre les perturbations externes et le bruit de phase $m_\theta(t)$ accumulé par le signal se propageant dans la fibre. Pour des fluctuations de la température environnementale, par exemple, on aura :

$$S_{m_\theta}^{(1)}(f) = (2\pi\nu_0 T_0)^2 |H_\Theta(f)|^2 S_\Theta^{(1)}(f), \quad (72)$$

où $S_\Theta^{(1)}(f)$ est la DSP des fluctuations de température environnementale dont la forme et le niveau dépendent fortement des conditions d’opération. La fonction de transfert $H_\Theta(f)$, en unités de 1/K, peut être considérée comme une sensibilité thermique plus générale que celle utilisée dans le modèle de bruit thermoconductif, ξ_Θ à l’équation 70, et qui est plutôt envisagée comme la sensibilité thermique intrinsèque du matériau à proximité du coeur. Pour une fibre dépourvue de gaine protectrice de polymère, supportée de manière à pouvoir se déformer librement et complètement exposée à l’environnement, on peut attendre $H_\Theta(f) \approx \xi_\Theta$, au moins sur une certaine plage spectrale aux basses fréquences, c’est-à-dire 6 à 8 ppm/K pour de la fibre de silice standard à température pièce et opérée autour de $\nu_0 = 195$ THz [202]. À cette fréquence porteuse, une telle sensibilité intrinsèque implique que la fréquence du laser asservi change par environ 1 GHz lorsque la température de la fibre change par 1 °C, et ce, peu importe la longueur de la fibre. Ceci annonce un défi considérable de stabilisation en température.

Dans une fibre de silice à température pièce, la valeur de la sensibilité intrinsèque ξ_Θ est dominée par le coefficient thermo-optique et est considérablement plus élevée que la sensibilité thermique intrinsèque atteignable pour une transition hyperfine, de l'ordre de 0.01 ppb/K et moins [7, 79, 203], ou pour une cavité Fabry-Perot en espace libre. En effet, la propagation dans un espace évacué supprime la contribution thermo-optique ($dn/d\Theta$), l'espaceur qui supporte les deux miroirs peut être fait d'un matériau à très faible coefficient d'expansion thermique et/ou la cavité peut être opérée à une température où le coefficient d'expansion thermique de l'espaceur est minimisé ou nul [7, 10, 59, 63, 64]. On parle, par exemple, de $\xi_\Theta \approx 1.2$ ppm/K dans l'Invar, 0.6 ppm/K dans la silice (puisque la contribution thermo-optique n'est pas comptée), 3 à 7 ppb/K dans les verres commerciaux ULE et Zerodur (ajustables), et < 0.1 ppb/K dans le saphir et le silicium à 4.2 K, c'est-à-dire la température de l'hélium liquide [7, 64]. Dans le contexte de la stabilisation laser, on voudra assurément isoler la fibre des fluctuations de la température environnementale, soit par stabilisation active [91], par filtrage passif [83] ou par une combinaison des deux approches [95], et ainsi minimiser la valeur de $H_\Theta(f)$ du système complet de façon à ce qu'elle soit significativement plus faible que la sensibilité intrinsèque de la fibre. Évidemment, on voudra aussi réduire au maximum les fluctuations de la température externe, dans la mesure où c'est possible. On note que, pour une opération en laboratoire, les fluctuations de température deviennent particulièrement problématiques sous $f = 1$ Hz, typiquement [91].

De façon similaire, on peut modéliser l'impact qu'ont les vibrations sur la performance du système via une sensibilité en accélération :

$$S_{m_\theta}^{(1)}(f) = (2\pi\nu_0 T_0)^2 |H_a(f)|^2 S_a^{(1)}(f), \quad (73)$$

où $S_a^{(1)}(f)$ dénote la DSP du bruit d'accélération, en $(\text{m/s}^2)^2/\text{Hz}$, qui est souvent normalisée par l'accélération gravitationnelle $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. On exprime dans ce cas la fonction de transfert $H_a(f)$ en unités de g^{-1} . En contraste avec le cas de la température, la sensibilité en accélération intrinsèque d'une fibre de silice est relativement faible [204–206]⁸ ; c'est le besoin pratique de supporter de longs segments de fibre sur une bobine ou une autre structure de support qui entraîne une augmentation de la sensibilité effective. En effet, pour une seule couche de fibre solidaire à la surface d'une bobine cylindrique de hauteur H_b (figure 0.22), la sensibilité verticale (dans l'axe de la bobine) peut être approximée comme [200, 209] :

$$H_a(f) \approx K_{eo} \frac{\nu_P \rho g H_b}{2E_Y}, \quad f \ll \frac{\sqrt{E_Y/\rho}}{2H_b}, \quad (74)$$

où K_{eo} est une constante de l'ordre de l'unité qui est associée aux propriétés élasto-optiques de la fibre ($K_{eo} \approx 0.79$ pour la silice autour de 195 THz [210]), ν_P est le coefficient de Poisson de la bobine et les autres propriétés mécaniques (ρ , E_Y) sont celles du matériau constituant

8. La sensibilité en accélération n'est pas faible pour une fibre tendue entre deux points et pouvant vibrer librement comme une corde de guitare [207, 208].

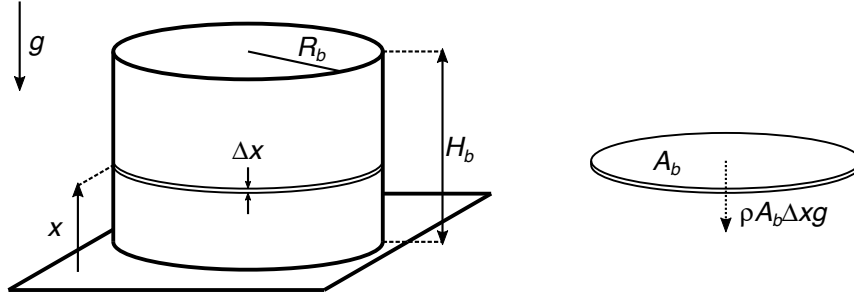


FIGURE 0.22 – Schéma d’une bobine simple servant à supporter une fibre optique. La bobine est supportée par le bas et la tranche d’épaisseur Δx à hauteur x se déforme en présence de fluctuations de l’accélération, étirant la couche de fibre qui y est enroulée. La déformation est proportionnelle à $(H_b - x)$, car chaque tranche doit supporter toutes les tranches qui lui sont supérieures.

la bobine. La limite aux hautes fréquences est associée à la condition de résonance d’une onde mécanique se propageant dans l’axe de la bobine. Cette dernière équation suppose que la déformation à proximité du coeur de la fibre est égale à la déformation de la surface de la bobine induite par une accélération, ce qui est une hypothèse raisonnable pour des segments de fibre d’au moins quelques mètres enroulés sous une certaine tension [211]. La hauteur de la bobine H_b est proportionnelle à la longueur de la fibre dans une telle configuration ; la sensibilité en vibration l’est donc aussi. Par exemple, pour une bobine en aluminium d’un diamètre de 0.1 m et d’une hauteur de 0.1 m qui peut supporter une monocouche d’environ 100 mètres de fibre conventionnelle (supposant que la gaine de protection est conservée pour un diamètre de section de 250 μm), la sensibilité verticale est approximativement $5 \times 10^{-9} \text{ g}^{-1}$ aux fréquences inférieures à la première résonance mécanique à 25 kHz. Ceci constitue une relativement forte sensibilité : pour une perturbation d’écart-type $1 \times 10^{-3} \text{ g}$, typique pour le plancher d’un laboratoire silencieux autour de 50 à 60 Hz, la fréquence du laser asservi à la fibre montée sur la bobine fluctue avec un écart-type de l’ordre de 1 kHz.

Néanmoins, en supportant une bobine dans son plan de centre de masse [212], en choisissant un matériau maximisant le ratio E_Y/ρ et en ajustant finement la forme du plan de support de la fibre [213–215], une sensibilité en accélération verticale d’environ $8 \times 10^{-11} \text{ g}^{-1}$ peut être atteinte pour une fibre d’une longueur $L = 600 \text{ m}$ enroulée sur la surface de la bobine. Il est raisonnable de croire qu’une valeur similaire peut être atteinte pour une plus longue fibre en enroulant de nombreuses couches sur la même surface [216]. Par ailleurs, cette valeur peut être comparée aux sensibilités verticales de $5 \times 10^{-12} \text{ g}^{-1}$ atteintes pour des cavités Fabry-Perot opérées dans un environnement contrôlé [11, 217]. En laboratoire, les vibrations sont particulièrement problématiques entre 1 et 1000 Hz, typiquement, avec une forte signature entre 10 et 100 Hz [73, 200, 218]. Encore une fois, des approches d’isolation passives [83, 169]

et/ou actives [73, 219] sont requises pour minimiser la sensibilité aux vibrations d'un système de stabilisation laser. Par ailleurs, la sensibilité dans les trois axes doit généralement être considérée pour atteindre la meilleure performance possible.

Optimisation de la longueur de la ligne à délai fibrée

La figure 0.23 résume l'effet de tous les bruits considérés jusqu'à maintenant sur la DSP de bruit de fréquence, à une fréquence de 1 kHz, du laser asservi à une ligne à délai fibrée. On y montre les différents régimes d'opération atteints en fonction de la longueur de la fibre. Clairement, la meilleure performance globale est obtenue lorsque le bruit de photodétection est minimisé, ce qui implique que le bruit de grenaille domine et que les pertes de propagation sont maintenues à un niveau faible, et surtout lorsque la longueur de la fibre est ajustée de façon à ce que le bruit thermodynamique fondamental soit de variance similaire au bruit environnemental. Cette longueur optimale dépend nécessairement du système et de la fréquence sous considération. Même si en théorie il est possible qu'une ligne à délai offre une performance ultime à 1 kHz similaire à celle des meilleures cavités Fabry-Perot en espace libre (lignes rouges, de l'ordre de 10^{-4} Hz²/Hz), en pratique le défi de stabilisation est considérable et une telle performance n'a jamais été démontrée pour un laser asservi à un interféromètre fibré. Le défi est encore plus important aux basses fréquences, comme discuté plus loin.

Autres bruits et limites

Le bruit d'amplitude laser, le bruit de photodétection et le bruit intrinsèque du discriminateur, incluant la contribution thermodynamique fondamentale et la contribution des vibrations et fluctuations de température externe, devraient normalement constituer les principales sources de bruit de mesure pour un laser asservi à une référence fibrée. Néanmoins, on peut anticiper la contribution significative d'autres bruits dans certaines conditions spécifiques. Pour les longues échelles de temps, par exemple, une variation du champ magnétique environnant peut se traduire en un bruit de phase par effet Faraday [220, 221]. Des effets de fluage ou de relaxation viscoélastique peuvent aussi modifier la longueur optique de la fibre [4, 222, 223]. À des échelles plus courtes, on peut anticiper une certaine conversion du bruit d'amplitude laser en bruit de phase dans la fibre en raison de l'effet photo-thermique [224, 225] et de l'effet Kerr [221, 226]. Dans ce contexte, l'actionneur de fréquence ne corrige pas le bruit de fréquence du laser, mais plutôt une certaine somme filtrée du bruit de fréquence et du bruit d'amplitude converti. D'autres effets non-linéaires, tels que la diffusion Brillouin stimulée et la diffusion Raman, sont associés à des pertes de propagation non-linéaires qui limitent la puissance d'entrée d'une manière qui dépend de la longueur de la fibre [13, 227]; dans ce cas, la limite de bruit de photodétection doit être modifiée et n'est plus proportionnelle à T_0^{-2} (Eq. (26)). À l'exception peut-être du phénomène de fluage, des solutions spécifiques peuvent être envisagées pour minimiser l'impact de chacun des autres bruits décrits ici.

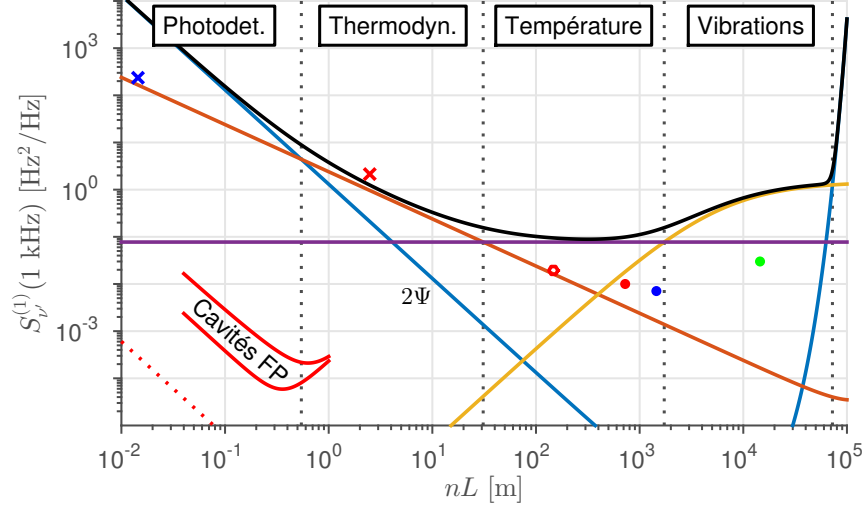


FIGURE 0.23 – DSP de bruit de fréquence à 1 kHz d’un laser asservi à une ligne à délai fibrée de longueur variable. On suppose $P_0 = 1$ mW, $\eta = 0.9$, $\nu_0 = 195$ THz et une fibre monomode standard affichant des pertes de propagation élevées de 2 dB/km pour les fins de l’illustration. La courbe noire est la performance globale : pour une courte fibre, la performance est limitée par le bruit de photodétection (bleu), supposant que le bruit d’amplitude laser est bien contrôlé. Le bruit thermodynamique domine pour les longueurs intermédiaires (orange) jusqu’à l’atteinte d’un potentiel plancher déterminé par les bruits environnementaux, qui peuvent être de niveau indépendant de la longueur (température, mauve) ou augmentant avec la longueur (vibrations, jaune), ici arbitraires pour les fins de l’illustration. Un dernier régime est atteint lorsque les pertes de propagation deviennent trop élevées, faisant de nouveau dominer le bruit de photodétection, ou lorsque la bande d’asservissement devient insuffisante. Les croix indiquent des performances à la limite du bruit thermodynamique mesurées dans des lasers fibrés (bleue [182], rouge [183]), le cercle vide rouge indique une mesure dans un interféromètre passif (chapitre 2), les cercles pleins indiquent des mesures de stabilisation laser sur une ligne à délai (rouges [83], bleus [82], verts [139]). Il est à noter que ce graphique apparaîtrait très différent à une autre fréquence que 1 kHz. On illustre aussi, en rouge, une approximation des meilleures performances atteintes pour des lasers verrouillés à des cavités de type Fabry-Perot [10, 76, 193] (il faut extrapoler, les performances étant rarement données à 1 kHz). Ces cavités exhibent des finesses de l’ordre de 10^5 à 10^6 , réduisant grandement l’impact du bruit de photodétection même pour des puissances incidentes de l’ordre du μ W [11] (pointillé rouge). Leur performance est limitée par le bruit thermodynamique fondamental des miroirs diélectriques en premier lieu ($S_{\nu'}^{(1)}(f) \propto L^{-2}$); lorsque la longueur de la cavité est augmentée, le bruit thermodynamique de l’espaceur prend une plus grande importance ($S_{\nu'}^{(1)}(f) \propto L^{-1}$) et l’effet des vibrations devient plus difficile à contrôler ($S_{\nu'}^{(1)}(f) \propto L$).

Pour les oscillateurs optoélectroniques basés sur des lignes à délai fibrés ainsi que les gyroscopes fibrés, la rétrodiffusion Rayleigh et la dispersion de la fibre sont aussi considérées comme des limites importantes [218, 228–230]. Dans le contexte de la stabilisation laser sur un interféromètre à deux ports opéré à flanc de frange, ces deux phénomènes peuvent être modélisés en

modifiant la réponse impulsionnelle en champ à l'équation (22) :

$$h_E(t) = \frac{\delta(t) - g_E(t)}{2}, \quad (75a)$$

$$H_E(f) = \frac{1 - G_E(f)}{2}, \quad (75b)$$

où $g_E(t)$ est la réponse impulsionnelle en champ de la ligne à délai en tant que telle et $G_E(f)$ est sa fonction de transfert. Pour la dispersion en particulier, on définit $G_E(f) = e^{-j2\pi f T_0(f)}$, où le délai moyen devient une fonction de la fréquence (la réponse impulsionnelle $g_E(t)$ n'est plus une impulsion, en général). À partir de l'équation (19), le gain DC de discrimination à petit signal devient :

$$H_{\nu P}(0) = P_0 \pi \underbrace{\left[T_0(\nu_0) + \nu_0 \frac{dT_0(\nu_0)}{d\nu_0} \right]}_{\text{délai de groupe}} \sin [2\pi \nu_0 T_0(\nu_0)]. \quad (76)$$

Au premier ordre, on constate donc deux impacts de la dispersion : un déplacement de la position des points d'opération optimaux, maintenant donnée par la condition $\sin [2\pi \nu_0 T_0(\nu_0)] = \pm 1$, qui ne sont plus également espacés, et une redéfinition de la pente de conversion qui devient proportionnelle au délai de groupe évalué à la fréquence porteuse du laser. Pour un asservissement laser à un point d'opération fixe, ces modifications ont peu d'importance et aucun bruit significatif n'est introduit par la dispersion dans la mesure où les paramètres associés sont stables dans le temps, ce qui est normalement le cas pour une fibre utilisée pour la stabilisation laser. Autrement, l'effet des fluctuations de longueur optique (premier ordre) demeure dominant sur l'effet des fluctuations qui couplent au travers de la dispersion (second ordre ou perturbation). Toutefois, pour un laser accordable qui est référencé à l'interféromètre (ν_0 variable), la dispersion doit être bien caractérisée au préalable afin de produire un glissement en fréquence linéaire sur une large bande spectrale [23, 231]. D'une façon similaire, la rétrodiffusion distribuée peut être perçue comme générant une distribution continue de faibles impulsions d'amplitudes aléatoires lorsque une impulsion est injectée dans la fibre. Conséquemment, la réponse impulsionnelle de la fibre, ignorant la dispersion, peut être écrite comme $g_E(t) = \delta(t - T_0) + b(t)$, où $b(t)$ est une variable aléatoire. Les propriétés statistiques de $b(t)$ dépendent du coefficient de rétrodiffusion de la fibre ainsi que de sa longueur et de son atténuation. Elles dépendent aussi de la configuration de l'interféromètre : pour un interféromètre Michelson, la variable $b(t)$ est nulle en dehors de $0 \leq t \leq T_0$ si on ignore la rétrodiffusion triple ; pour un interféromètre Mach-Zehnder, $b(t)$ est nulle en dehors de $T_0 \leq t \leq 2T_0$ si on ignore la rétrodiffusion quadruple (seule la rétrodiffusion double contribue). Dans les deux cas, il faut considérer qu'une fibre donnée est associée à une unique réalisation du processus aléatoire $b(t)$: des mesures successives de la rétrodiffusion sur la même fibre donnent le même résultat dans la mesure où la température est stable [232]. Une autre fibre, étirée dans des conditions similaires, donne une autre réalisation du processus qui peut être considérée comme une signature spécifique à cette fibre. Ainsi, la rétrodiffusion a un impact similaire à la dispersion pour une fibre stable : un ajustement généralement subtil de la fonction de transfert de

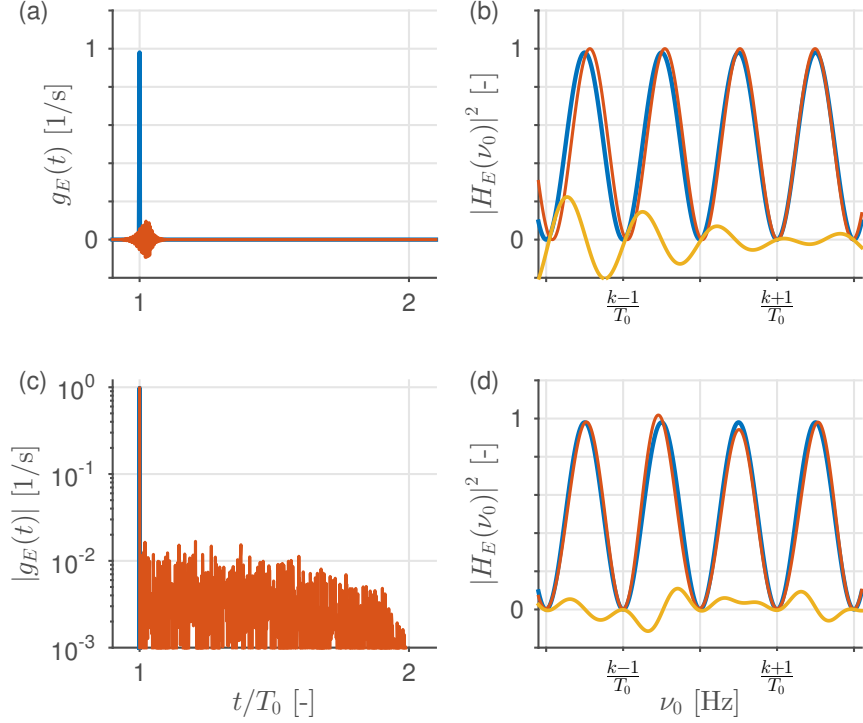


FIGURE 0.24 – Simulation : impact de la dispersion et de la rétrodiffusion Rayleigh sur la réponse d'un interféromètre Mach-Zehnder opéré à flanc de frange. (a) Réponse impulsionnelle de la ligne à délai et (b) fonction de transfert en puissance du discriminateur pour le cas avec (orange) et sans (bleu) dispersion. (c, d) Idem pour la rétrodiffusion Rayleigh double. Dans les deux cas, l'effet est grandement exagéré pour les fins de l'illustration. La courbe jaune en (b) et (d) est la différence de la courbe bleue et de la courbe orange.

discrimination, cette fois via $b(t) \leftrightarrow B(f)$. L'impact sur la performance de stabilisation laser à un point d'opération donné est négligeable dans la mesure où les conditions d'opération sont stables. La conclusion est différente pour un laser accordé en fréquence et référencé à une fibre qui subit alors le caractère aléatoire de $B(\nu_0)$ sur une large bande spectrale [233] (figure 0.24).

0.2 État de l'art et voies d'amélioration

0.2.1 Meilleures performances rapportées à ce jour

Le référencement d'un laser à un interféromètre fibré est une approche souvent employée dans les milieux académiques et industriels. On peut penser, par exemple, à tous les systèmes permettant de contrôler le taux de glissement en fréquence dans les applications de type FMCW [23, 231]. Toutefois, les démonstrations de stabilisation laser tentant de minimiser l'instabilité relative du discriminateur et d'atteindre une limite fondamentale, même si seulement dans une plage spectrale restreinte, sont beaucoup plus rares. À la figure 0.23, on identifie deux publications faisant état d'un laser monofréquence ($\nu_0 \approx 195$ THz) stabilisé à

une longue ligne à délai fibrée dont le bruit de fréquence est mesuré à proximité de la limite thermodynamique théorique à une fréquence de 1 kHz [82, 83]. L'écart restant peut être expliqué par la contribution d'un laser de référence dans le cas de [82] et par la contribution du bruit thermique d'un amplificateur dans le cas de [83]. D'autre part, pour les deux publications, le bruit observé entre 1 et 10 Hz s'accorde raisonnablement bien avec le modèle de bruit thermomécanique de Duan. Ceci laisse entrevoir, pour une fibre d'une longueur similaire au kilomètre et tel que prévu par le modèle théorique, une instabilité relative (déviaton Allan) de l'ordre de $\sigma_y(\tau) = 4 \times 10^{-15}$ pour les longs temps d'intégration. Une version améliorée du montage présenté dans [83] a récemment été décrite dans une publication [95] : on y présente une ligne à délai fibrée d'une longueur physique de 5 km limitée par une combinaison de bruit thermomécanique ainsi que de bruit thermique d'un amplificateur et affichant une instabilité minimale mesurée à 2×10^{-15} à $\tau = 2$ s. À ma connaissance, ceci est la meilleure performance rapportée à ce jour pour une ligne à délai fibrée et un long temps d'intégration. Cette valeur peut être comparée à 4×10^{-17} , la plus faible déviaton Allan mesurée dans un résonateur Fabry-Perot à ce jour et à ma connaissance [10] (pour à peu près la même fréquence porteuse et le même temps d'intégration), une mesure réalisée avec un laser verrouillé à cavité de silicium monocristallin d'une longueur de 212 mm et d'une finesse de 5×10^5 maintenue à 124 K, température à laquelle le coefficient d'expansion thermique de l'espaceur et des substrats est nul. La figure 0.25 compare la DSP de bruit de fréquence et la déviaton Allan qui peuvent être attendues en théorie pour la stabilisation laser à une fibre conventionnelle, supposant que le bruit thermodynamique est dominant. On y montre aussi ce qui semble être l'état de l'art pour des références microscopiques [79, 159] et pour les résonateurs en espace libre.

Visiblement, pour les temps d'intégration inférieurs à la seconde approximativement, les références fibrées basées sur de longues fibres de silice conventionnelles peuvent être compétitives vis-à-vis des meilleures références microscopiques. Ceci est vrai dans la mesure où la justesse absolue ou reproductibilité de la fréquence laser n'est pas critique, les références microscopiques pouvant agir comme standards de fréquence contrairement aux références fibrées [125]. En contrepartie, une ligne à délai fibrée peut être utilisée pour stabiliser un laser à n'importe quelle fréquence porteuse (littéralement, si la phase interférométrique est extraite sans ambiguïté) tombant dans une zone de bonne transparence de la fibre. Par ailleurs, des efforts restent à faire pour minimiser la contribution des vibrations environnementales au bruit de phase de la fibre dans la plage s'étendant de 1 à 100 Hz environ. Cette contribution est manifeste dans toutes les meilleures démonstrations et prévient l'atteinte exacte du plancher d'instabilité déterminé par le bruit thermodynamique pour les temps d'intégration de 0.01 à 1 s. À partir de la figure 0.25, il est aussi clair que les interféromètres fibrés peuvent atteindre une performance ultime similaire à celle des cavités Fabry-Perot pour les fréquences supérieures à 1 kHz et pour les temps d'intégration inférieurs à 1 ms, moyennant certains efforts d'optimisation de la longueur de la fibre, de l'ajustement du régulateur et du bruit de fréquence du laser solitaire. Toutefois, il n'est pas réaliste de croire qu'une instabilité inférieure à 10^{-16} peut être atteinte

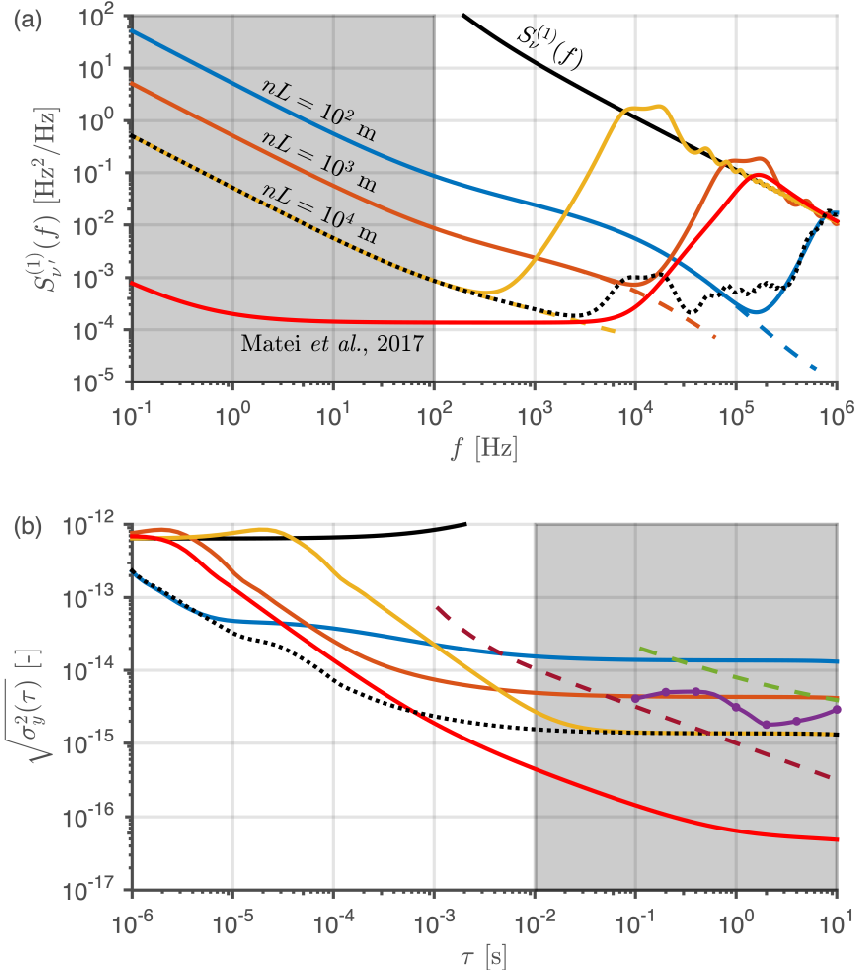


FIGURE 0.25 – Performance théorique fondamentale d'un laser stabilisé à une ligne à délai fibrée pour trois longueurs de fibre ($\nu_0 = 195$ THz, $\Theta = 293$ K). (a) DSP de bruit de fréquence. On suppose que la DSP du laser à asservir est donnée par la courbe noire, représentative du laser utilisé pour les articles présentés dans cette thèse. Les courbes bleue, orange et jaune donnent la performance théorique du laser asservi à une fibre standard de silice dans le cas où le bruit thermodynamique est dominant pour $nL = \{100, 1000, 10000\}$ m, respectivement. Dans tous les cas, le régulateur PII^2 est ajusté pour maintenir une marge de phase de 45° et l'effet de l'actionneur est ignoré. La courbe tiretée en noir est représentative de la performance d'un verrouillage en cascade donnant la meilleure performance globale (le signal stabilisé sur le plus court interféromètre est envoyé aux plus longs interféromètres pour améliorer la performance aux basses fréquences). La zone grisée indique la plage où les fluctuations environnementales sont difficiles à ignorer et où le modèle de bruit thermomécanique est incertain. La courbe rouge illustre le record de performance actuel pour une cavité Fabry-Perot en espace libre [10]. (b) Déviation Allan associée à chaque courbe présentée en (a). Le plancher d'instabilité atteint en théorie par une fibre $nL = 10$ km, soit $\sigma_y(\tau) \approx 1.3 \times 10^{-15}$, est comparable au plancher de $\sigma_y(\tau) \approx 2 \times 10^{-15}$ mesuré dans une ligne à délai fibrée de longueur $nL = 7.2$ km [95] (points en mauve). Le trait tiretée en vert est représentatif de la performance d'un laser verrouillé à une transition hyperfine de diode [79], le trait tiretée en bourgogne de celle d'un laser verrouillé à trou brûlé spectral dans un cristal dopé à l'euprium [159].

avec une fibre de silice puisque le bruit thermodynamique dicte qu’une telle fibre devrait être plus longue que 2000 km. Clairement, le bruit thermodynamique de phase accumulé pour chaque unité de longueur optique est simplement trop élevé dans la silice en comparaison du vide.

0.2.2 Voies d’amélioration pour une fibre de silice conventionnelle

Pour les courtes lignes à délai fibrées, la minimisation du bruit de photodétection est essentielle. La première étape en ce sens est de faire dominer le bruit de grenaille vis-à-vis de tous les autres bruits de photodétection afin d’utiliser la puissance optique disponible de façon optimale. Sans entrer dans les détails, ceci implique normalement un ajustement adéquat du gain transimpédance, en fonction de la puissance P_0 disponible, de façon à faire dominer le bruit de grenaille vis-à-vis du bruit thermique du photodétecteur et d’autres bruits techniques ainsi qu’un choix et ajustement adéquat de l’amplificateur opérationnel [234]. Dans certains contextes, cette optimisation peut être facilitée par l’utilisation d’un détecteur refroidi ou d’un détecteur résonant [234, 235]. Les méthodes de modulation présentées plus tôt peuvent aussi aider à s’affranchir de bruits techniques problématiques aux basses fréquences. Enfin, pour les cas où la numérisation du signal est requise, la plage dynamique du convertisseur analogique-numérique est aussi essentielle à considérer. Néanmoins, en supposant qu’il est possible de garantir la dominance du bruit de grenaille dans le bruit de photodétection, la définition de la limite ultime de bruit de fréquence dans un interféromètre à deux ports (peu importe la méthode d’interrogation, mais valide pour une faible atténuation) renseigne sur les voies d’amélioration possibles :

$$\Psi = \frac{h\nu_0}{2\pi^2\eta P_0 T^2}. \quad (77)$$

En plus de la maximisation de l’efficacité quantique du photodétecteur, on voudra maximiser la fréquence d’opération (le bruit de fréquence normalisée étant ainsi diminué) et la puissance incidente. Pour une ligne à délai faite de fibre de silice standard, la maximisation de la fréquence porteuse est limitée par le requis d’une opération monomode et de faibles pertes de propagation, mais une amélioration de l’instabilité relative par un facteur 2 à 3 est sans doute envisageable en faisant certains compromis. Cependant, une telle modification n’est pas la plus simple à implémenter et la fréquence porteuse du laser est souvent une contrainte du système⁹. Augmenter la puissance photodétectée est une approche plus simple et générale, mais encore une fois il y a des contraintes reliées au photodétecteur et à l’interféromètre fibré en tant que tel. En utilisant des photodiodes d’InGaAs qui performant bien autour de 195 THz, il faut porter une attention particulière à la conception du photodétecteur pour une puissance incidente excédant environ 10 mW. Une matrice de photodiodes peut être considérée pour augmenter la puissance totale [101, 236], mais au-delà de 100 mW on entre assez rapidement dans un régime où des dommages peuvent survenir aux connecteurs, dans les coupleurs et éventuellement

9. Il y a évidemment une différence entre l’optimisation du montage de stabilisation pour un laser donné et l’optimisation du montage conceptuel dans le but d’atteindre la plus faible instabilité relative possible.

dans la fibre même ; la diffusion Brillouin stimulée devient aussi problématique pour un signal hautement cohérent entrant dans ce régime de puissance [13]. Si la fibre constitue le facteur limitant la puissance P_0 , l’insertion de la ligne à délai dans une configuration résonante (cavité linéaire [186] ou cavité en anneau [155]) ne procure pas l’avantage habituel pour le bruit de photodétection puisque la puissance d’entrée doit être diminuée pour que la puissance interne (circulante) n’excède pas le seuil de dommage. Néanmoins, pour une ligne à délai fibrée opérée à $\nu_0 = 195$ THz, une puissance technologiquement réaliste de $P_0 = 100$ mW est suffisante pour amener le bruit de grenaille sous le bruit thermodynamique à $f = 1$ kHz pour toutes les longueurs optiques excédant $nL \approx 1$ cm (voir figure 0.23 où cette transition se produit pour $nL \approx 1$ m puisque la puissance d’entrée est supposée 100 fois plus faible). Ceci est convenable dans la plupart des contextes imaginables.

Pour les longues lignes à délai fibrées, c’est la minimisation du bruit environnemental qui constitue le principal défi technologique. Du point de vue de l’insensibilisation en température, l’opération de la ligne à délai fibrée à des températures cryogéniques semble une approche prometteuse pour améliorer les performances. En effet, des simulations et des mesures expérimentales ont montré que la sensibilité thermique intrinsèque d’une fibre de silice est significativement réduite pour des températures inférieures à 77 K [155, 202] (tout comme le coefficient d’expansion thermique de nombreux matériaux [63], mais ici la sensibilité inclut aussi l’effet thermo-optique). Par ailleurs, cette sensibilité peut être annulée au premier ordre à une température spécifique qui dépend de la manière dont la fibre est tenue [91] ainsi que de la nature de la gaine protectrice (≈ 23 K pour une fibre nue et libre de se déformer [202], ≈ 4 K pour une fibre gainée enroulée sur une bobine d’aluminium [155] ; le coefficient d’expansion thermique de la silice croise zéro entre 160 et 190 K [237]). Pour de longues fibres, l’enroulage sur une bobine est souvent nécessaire pour des raisons pratiques ; la conception d’une bobine insensible en température peut donc aussi être envisagée pour réduire la sensibilité thermique du système composite [238]. Enfin, pour opération à température pièce ou température cryogénique, des gaines spéciales peuvent être appliquées sur la silice [239–241] et certains dopants peuvent être utilisés dans le coeur ou dans la gaine [242–244] afin de diminuer, et possiblement annuler, la sensibilité thermique.

Du côté de la sensibilité en accélération, il semble nécessaire d’étudier davantage l’effet du couplage mécanique entre la fibre et la bobine. En effet, il a déjà été montré que la sensibilité en accélération est réduite par plus d’un ordre de grandeur par le simple ajout d’un coussin entre la fibre et la bobine (comme trouvé sur les bobines commerciales en plastique qui sont utilisées par les manufacturiers de fibre) [205]. De plus, comme indiqué plus tôt, la sensibilité en accélération n’augmente pas de façon linéaire lorsque plusieurs couches de fibre sont enroulées sur la même surface [216]. En combinant ces idées avec la bobine hautement optimisée présentée dans [215], il devrait être possible d’atteindre une sensibilité similaire à celle montrée pour les meilleures cavités Fabry-Perot en espace libre. Finalement, les approches de compensation active utilisées

pour les cavités peuvent aussi être considérées pour les lignes à délai fibrées [201, 245].

Finalement, pour les lignes à délai fibrées de longueur intermédiaire, c'est le bruit thermodynamique fondamental qui détermine le niveau de bruit de fréquence du laser asservi. Ce bruit fixe aussi la performance ultime qui peut être atteinte pour une ligne à délai de longueur donnée après optimisation du système de stabilisation. Par inspection des équations (70) et (71), il est évident qu'une réduction de la température de la fibre devrait permettre une réduction du bruit thermodynamique comme dans les cavités Fabry-Perot [11]. Pour le bruit thermoconductif dans une fibre de silice, cette relation a été vérifiée expérimentalement par Foster dans la plage de 195 K à 369 K [182]. Aux températures inférieures à 195 K, les résultats montrent que le bruit de phase de la fibre cesse de diminuer avec la température. Il est possible que cette «saturation» soit causée par le changement dramatique des propriétés mécaniques de la gaine de protection à proximité de cette température [202]. Si cette hypothèse est vraie, une réduction supplémentaire de la température (sous 77 K environ), ou un retrait de la gaine de protection de polymère, devrait permettre de rétablir la diminution du niveau de bruit. Par ailleurs, comme la sensibilité intrinsèque (conversion de bruit de température thermodynamique à bruit de phase thermodynamique) diminue également avec la température, il devrait être possible d'amener le bruit thermoconductif à un niveau négligeable par opération à des températures cryogéniques (figure 0.26).

Autrement, le bruit thermoconductif peut être réduit par ajustement des propriétés thermiques et par augmentation de l'aire modale. Changer la conductivité thermique k_{Θ} ne change pas l'aire sous la courbe de la DSP de bruit thermoconductif (ne change pas la variance), mais son augmentation permet de hausser la fréquence de coupure f_c (équation (70)) et d'étaler le bruit total sur une plus large bande, ce qui baisse le niveau aux basses fréquences. À l'inverse, augmenter la capacité c_v ou l'aire modale A_m diminue la variance par filtrage passe-bas plus agressif de la DSP. On voudra donc maximiser ces deux valeurs pour baisser la DSP de bruit aux hautes fréquences. Il a déjà été montré qu'une modification de l'aire effective du mode fondamental modifie le niveau de bruit thermoconductif [190] et il est clair qu'il y a une marge de manoeuvre pour multiplier la valeur de A_m d'une fibre conventionnelle par quelques unités [246–248]. Il est moins clair comment les propriétés thermiques k_{Θ} et c_v peuvent être augmentées dans une fibre sans introduire des pertes ohmiques importantes, mais une optimisation des propriétés de la gaine et de la structure qui supporte la fibre peut avoir un impact non négligeable sur le bruit [189]. Finalement, dans le cas où le coefficient d'expansion thermique compense le coefficient thermo-optique, par exemple lorsque certains co-dopants sont utilisés dans le coeur pour baisser la sensibilité thermique, il semble possible de produire une annulation au moins partielle du bruit thermoconductif (c'est-à-dire que le bruit associé aux fluctuations d'indice n'est pas indépendant du bruit associé aux fluctuations de longueur) [249, 250].

Il est beaucoup plus difficile d'établir comment la contribution thermomécanique aux basses

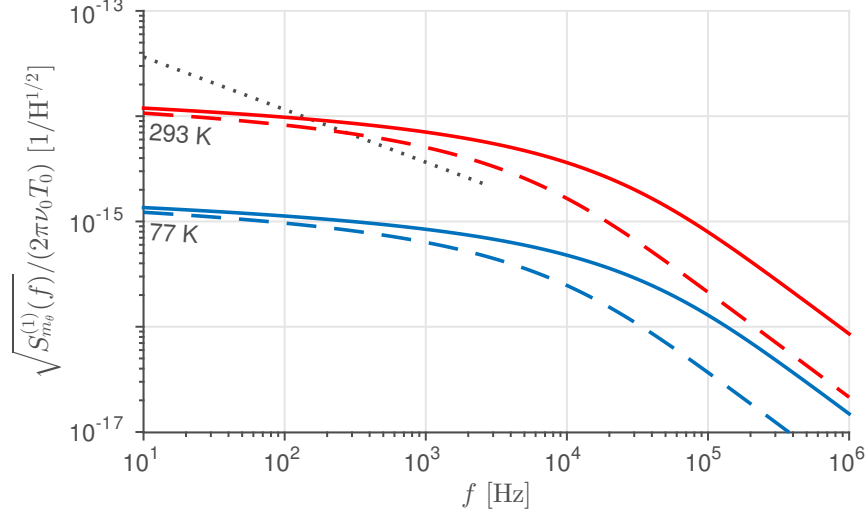


FIGURE 0.26 – Bruit thermoconductif théorique d’une fibre de silice nue (sans gaine protectrice) pour deux températures d’opération et deux aires modales (racine de la DSP unilatérale de bruit de phase, normalisée par $2\pi\nu_0 T_0$, $nL = 1$ m, $\nu_0 = 195$ THz). Les courbes rouges sont pour $\Theta = 293$ K, les courbes bleues pour $\Theta = 77$ K. Les traits pleins sont pour $w = 5.25 \mu\text{m}$, les traits pointillés pour $w = 10.5 \mu\text{m}$. Pour $\Theta = 77$ K, la sensibilité thermique ξ_Θ est estimée à partir de [202] et les propriétés thermiques de la silice k_Θ et c_v sont prises dans [252] (à 77 K, la conductivité et la capacité thermiques sont plus faibles qu’à température pièce, une pénalité dans le présent contexte). Pour référence, le trait pointillé noir est le bruit thermomécanique de la fibre *gainée* à une température de 293 K.

fréquences peut être réduite vu l’incertitude actuelle sur le modèle de Duan. Dans la silice pure, une réduction de la température est associée à une augmentation significative de l’angle de perte mécanique [251]; il n’est donc pas certain que le bruit thermomécanique puisse être réduit par opération à des températures cryogéniques. À température ambiante, l’utilisation d’une gaine de polyimide permet une réduction appréciable du bruit thermomécanique aux basses fréquences [196]; une gaine optimisée en tenant compte de tous les paramètres du tableau 0.4 pourrait donner d’encore meilleurs résultats.

Pour les lignes à délai utilisant une fibre de silice conventionnelle, il est donc raisonnable d’envisager qu’une diminution de l’instabilité relative fondamentale par environ un ordre de grandeur est accessible pour les courts temps d’intégration. Ceci implique d’opérer la fibre à une température cryogénique, comme il est présentement fait pour les meilleures cavités en espace libre, de maximiser l’aire du mode fondamental et d’encore mieux contrôler le bruit de photodétection et le bruit environnemental pour maintenir l’accès au plancher thermodynamique. Pour les longs temps d’intégration où la contribution thermomécanique domine, le portrait est beaucoup moins clair; il est tout à fait possible qu’une limite fondamentale ait déjà été atteinte pour les fibres de silice opérées dans ce régime de fréquences.

0.2.3 Autres voies d'amélioration

Dans toutes les démonstrations de stabilisation laser sur une ligne à délai fibrée citées jusqu'à présent, une fibre de silice à saut d'indice et monomode a été utilisée. De telles fibres guident la lumière par réflexion totale interne à l'interface entre un coeur et une gaine dont l'indice est plus faible que celui du coeur, un mécanisme de confinement qui est idéal et qui n'introduit pas de pertes dans la mesure où la gaine est suffisamment large pour éviter le couplage évanescent vers l'environnement externe. Les pertes de propagation dans une fibre de silice conventionnelle sont plutôt principalement déterminées par la diffusion Rayleigh due au désordre fondamental du matériau amorphe, par l'absorption infrarouge de la silice (absorption multiphonon) ainsi que par l'absorption de certaines impuretés ; elles peuvent être inférieures à 1 dB/km sur une large bande s'étendant d'environ 1000 nm à 1750 nm (170 à 300 THz) [253, 254]. Ces fibres conventionnelles ont aujourd'hui atteint une grande maturité technologique et constituent un élément essentiel du système moderne de télécommunications [255]. Or, les fibres de silice à saut d'indice ne sont pas les seules à permettre de faibles pertes de propagation. En effet, de nombreux schémas de fibres à coeur creux, microstructures de verre dans lesquelles le mode fondamental est presque entièrement confiné dans un espace central vide ou rempli de gaz, affichent aujourd'hui un niveau d'atténuation suffisamment faible pour être utilisés pour la stabilisation laser. Comme l'indice de réfraction des matériaux solides est supérieur à celui du vide ou d'un gaz à densité normale, le guidage de la lumière dans ces fibres se fait par un mécanisme non-idéal qui est différent de la réflexion totale interne. Le mode fondamental des fibres à coeur creux est donc un mode de fuite en raison des pertes de confinement non nulles [256, 257]. Toutefois, pour certaines fibres, il est possible d'ajuster la forme de la microstructure de façon à rendre les pertes de confinement comparables ou même inférieures aux autres pertes contribuant à l'atténuation totale, même lorsque la fibre est courbée [258, 259]. Mais surtout, puisque la propagation de la lumière se fait principalement en dehors du verre, ces fibres à coeur creux sont des candidates intéressantes dans l'optique d'améliorer la performance des lignes à délai fibrées.

La première démonstration de propagation guidée dans un coeur creux a été faite en 1999 dans un type de fibre aujourd'hui appelée fibre à bande interdite photonique (*PBGF : photonic bandgap fiber*) [260], une forme de fibre à cristal photonique [261]. Ce genre de fibre confine la lumière dans le coeur creux à l'aide d'une microstructure air-verre hautement périodique (d'où le nom «cristal photonique») qui forme une bande interdite, c'est-à-dire une forte réflexion dans la direction transverse, sur une relativement faible plage spectrale de largeur inférieure à 10 à 30% de la fréquence ou longueur d'onde centrale. Après un progrès rapide sur 5 ans, les pertes de propagation des fibres de type PBGF ont atteint un plancher de 1.7 dB/km à 1565 nm [262], limitées par le relativement grand recouvrement du mode fondamental avec le verre de la microstructure qui est de l'ordre de 0.1 à 1% en termes de fraction de la puissance totale guidée [263]. Comme les interfaces air-verre exhibent une forte rugosité d'origine

thermodynamique, la lumière guidée à proximité du verre est fortement diffusée, un phénomène donnant lieu aux pertes de «diffusion aux surfaces» qui sont encore dominantes pour ces fibres [264]. Certaines méthodes sont envisageables pour diminuer un peu l'atténuation globale en minimisant la fraction de recouvrement [265], mais une valeur inférieure à 1 dB/km n'a jamais été démontrée dans une fibre de type PBGF (néanmoins, ceci ne les disqualifie pas pour la stabilisation laser).

En parallèle aux fibres à bande interdite qui sont commercialement disponibles, d'autres fibres à coeur creux ont été développées dans les vingt dernières années. La plus notable est sans doute la fibre Kagomé [266] qui permet un plus faible recouvrement avec les interfaces air-verre et une transmission sur une large bande pouvant atteindre environ 50% de la longueur d'onde centrale [267]. Toutefois, ceci se fait au prix d'une plus grande atténuation de quelques centaines de dB/km lorsque la membrane la plus proche du coeur est forcée à adopter une courbure négative pour rendre le confinement plus robuste [268]. Il a rapidement été reconnu que le mécanisme de guidage dans une fibre Kagomé n'était pas explicable par la formation d'une bande interdite [269] et le rôle dominant de la première membrane de verre a plus tard été mis en évidence [270]. Il est aujourd'hui accepté que ce genre de fibre guide le signal optique principalement via réflexion antirésonante dans la mince membrane qui délimite le coeur. Ce phénomène d'antirésonance a d'abord été expliqué par Michel A. Duguay et mis à profit pour produire des guides d'onde planaires sur silicium [271]. Par ailleurs, les nombreuses membranes qui forment le reste de la microstructure d'une fibre Kagomé agissent en *détriment* au guidage de la lumière et introduisent des pertes autrement évitables. En d'autres mots, la performance théorique de la fibre Kagomé est améliorée par le retrait de toutes les membranes sauf la toute première. Cette réalisation a mené à l'introduction de designs antirésonants grandement simplifiés, basés sur un petit nombre de membranes antirésonantes souvent à courbure négative [272–275]. Il a même été montré qu'il est possible de bien guider la lumière dans un simple capillaire, à condition que l'épaisseur du verre soit ajustée pour respecter la condition d'antirésonance [276]. Ces nouvelles fibres antirésonantes ont le grand avantage d'être plus faciles à produire que les fibres à bande interdite et d'afficher une performance globale beaucoup moins sensible aux inévitables imperfections introduites lors de la fabrication [272]. Par ailleurs, malgré leur design simple, ces fibres conservent les avantages connus de la fibre Kagomé : transmission sur une relativement large plage spectrale et recouvrement 10 à 1000 fois plus faible du mode fondamental avec la microstructure de verre [259].

Le guidage par antirésonance peut être simplement expliqué par la formation d'un résonateur Fabry-Perot dans la membrane de verre qui entoure le coeur. Supposant une géométrie planaire (figure 0.27(c)), le coefficient de réflexion effectif de la membrane mince est donné par :

$$\rho(\delta) = \frac{r(1 - e^{-j\delta})}{1 - r^2 e^{-j\delta}}, \quad (78)$$

où r est le coefficient de réflexion de Fresnel pour l'interface air-verre ; sa valeur approche -1

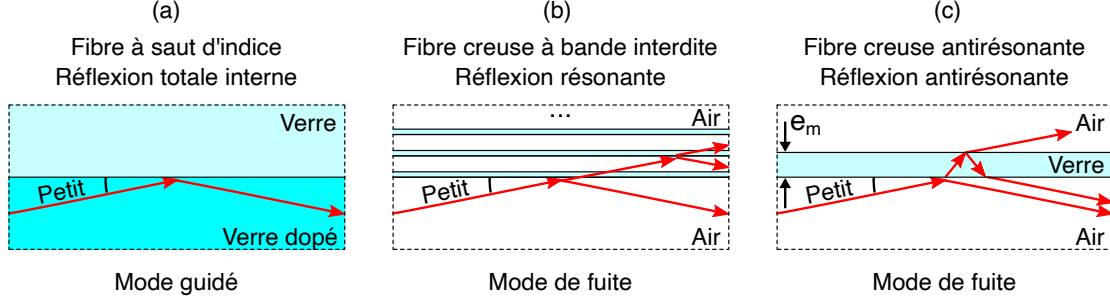


FIGURE 0.27 – Illustration simplifiée de méthodes de confinement de la lumière dans une fibre optique. (a) Fibre de silice à saut d'indice. La lumière est guidée par réflexion totale interne si l'indice du cœur est plus élevé que l'indice de la gaine (une condition généralement atteinte par dopage du verre dans le cœur, comme illustré ici) et si l'angle rasant est suffisamment faible. (b) Fibre à cœur creux à bande interdite photonique. La lumière est imparfaitement guidée sur une relativement faible bande par réflexion résonante dans une structure périodique. (c) Fibre à cœur creux antirésonante. La lumière est imparfaitement guidée sur une relativement large bande par réflexion antirésonante dans une fine membrane de verre. Dans tous les cas, l'air peut être conceptuellement remplacé par un autre gaz ou par le vide.

pour un angle rasant [277]. La variable δ est le déphasage entre l'onde réfléchie à la première interface et celle réfléchie à la seconde interface :

$$\delta = \frac{4\pi\nu_0 e_m}{c} n_m \cos \theta_m \approx \frac{4\pi\nu_0 e_m}{c} \sqrt{n_m^2 - n_i^2}, \quad (79a)$$

$$n_m \sin \theta_m = n_i \sin \theta_i, \quad (79b)$$

où la seconde équation représente la relation de Snell et où e_m et n_m sont l'épaisseur physique et l'indice de la membrane de verre, respectivement. Les angles sont définis par rapport à la normale au plan d'incidence et l'indice i fait référence au milieu d'incidence (air, vide ou gaz). Toujours pour un angle rasant, le déphasage δ est presque indépendant de la valeur exacte de l'angle d'incidence (approximation à l'équation (79a)). Malgré la géométrie tridimensionnelle plus complexe d'une fibre antirésonante réelle, ce modèle simple explique bien les propriétés observées lorsque le rapport entre la taille du cœur (rayon R_c) et la longueur d'onde λ est élevé de façon à garantir un angle rasant [278, 279]. En particulier, le modèle prédit que des fenêtres de réflexion ou confinement relativement larges apparaissent entre les fines résonances de la membrane de verre (figure 0.28). La position spectrale des résonances est donnée par la condition $\delta = 2\pi k$, où k est un entier, ce qui équivaut approximativement à $\lambda = 2e_m \sqrt{n_m^2 - n_i^2} / k$. La taille spectrale des fenêtres est comparable à l'espace spectral libre du résonateur et est inversement proportionnelle à l'épaisseur de la membrane. Au centre des fenêtres de confinement, la réflectance R prend une valeur maximale $R_{max} = |\rho(\pi)|^2 = [2r/(1+r^2)]^2$ qui est élevée si la réflexion à l'interface air-verre est forte, ce qui est le cas pour un angle rasant. Cette réflectance maximale peut être augmentée davantage par courbure négative des membranes et par ajout d'autres membranes antirésonantes séparées de façon adéquate [280] (ces améliorations ne sont évidemment pas décrites par le modèle simple présenté ici). Finale-

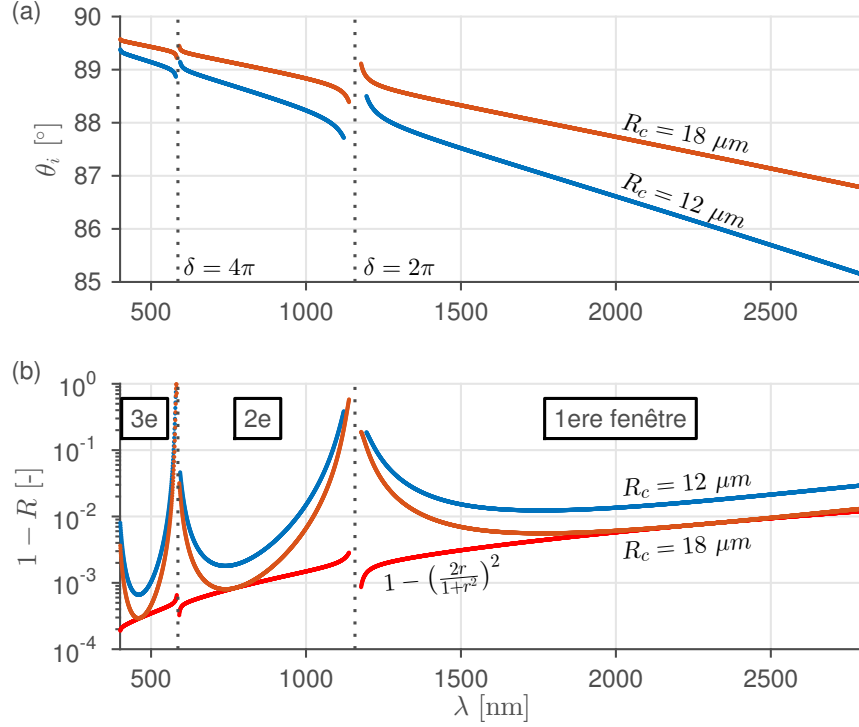


FIGURE 0.28 – Illustration simplifiée du principe de confinement par antirésonance. (a) Angle d’incidence en fonction de la longueur d’onde pour deux tailles de coeur ; approximation géométrique pour le mode fondamental dans une fibre de type NANF [278]. (b) Transmittance d’une membrane de silice d’épaisseur $e_m = 550$ nm en fonction de la longueur d’onde supposant les angles d’incidence illustrés en (a), un mode transverse électrique et un coeur rempli d’azote à pression et température normales. Ces courbes sont représentatives de la transmittance d’un résonateur Fabry-Perot dont les deux interfaces diélectriques ont une réflectivité qui augmente avec l’angle d’incidence (augmente en R_c/λ), suivant la loi de Fresnel. La courbe rouge illustre le minimum de réflectance pour le cas $R_c = 18 \mu m$, à peu près atteignable par ajustement adéquat de l’épaisseur e_m . Dans les fenêtres spectrales où le résonateur effectif formé par la membrane est hautement réfléchif, les pertes de confinement de la fibre sont faibles. Selon la force des autres mécanismes de perte, l’atténuation globale peut être comparable à celle d’une fibre conventionnelle.

ment, comme l’angle d’incidence augmente lorsque le rapport R_c/λ s’accroît [278], les basses longueurs d’onde et les grands coeurs favorisent le confinement via augmentation du module du coefficient de réflexion de Fresnel. Évidemment, les pertes de confinement ne constituent qu’un des mécanismes limitant la propagation de la lumière sur de longues distances dans ces fibres ; n’importe quel design de fibre antirésonante tente normalement de balancer les pertes de confinement, les pertes de diffusion aux interfaces et dans le gaz présent dans le coeur, les pertes par absorption dans la microstructure de verre et dans le gaz ainsi que les pertes dues aux courbures macroscopiques et microscopiques [258, 281].

À ce jour, la fibre à coeur creux détenant le record de la plus faible perte de propagation

est la fibre antirésonante, imbriquée et sans noeud (*NANF* : *nested antiresonant nodeless fiber*) décrite pour la première fois en 2014 [258], fabriquée et peaufinée dans les années suivantes [282, 283] et maintenant commercialement disponible. Ce schéma de fibre antirésonante est inspiré de fibres à treillis tubulaires [284] et intègre deux améliorations critiques [259] : la séparation des tubes de manière à éviter les noeuds qui sont sources de pertes résonantes [285] et l’imbrication de tubes secondaires afin d’augmenter le confinement du mode fondamental et diminuer celui des modes d’ordre supérieur [286]. La figure 0.29 illustre la section d’une ancienne version de cette fibre antirésonante dont l’atténuation a été mesurée à environ 1.3 dB/km à 1550 nm ; des améliorations de fabrication permettent aujourd’hui de diminuer cette valeur à 0.28 dB/km [287]. Une version modifiée avec une plus grande gaine de support et 5 tubes principaux (au lieu de 6) procure des pertes de propagation totales de 0.22 dB/km à 1625 nm, ce qui est comparable à une fibre SMF-28e [288]. Enfin, la plus récente version de cette fibre rapportée dans la littérature utilise une seconde couche de tubes imbriqués (*DNANF* : *double nested antiresonant nodeless fiber*) et offre une atténuation inférieure à 0.4 dB/km dans une plage allant de 1200 à 1700 nm et inférieure à 0.2 dB/km dans toute la bande C [97] ; ces performances surpassent celles de la fibre SMF-28e. La fibre de type NANF détient aussi le record de plus faible atténuation dans n’importe quel type de fibre à 850 nm (0.6 dB/km) et à 1060 nm (0.3 dB/km) [288] et sa géométrie peut être ajustée pour offrir une faible atténuation de l’ultraviolet [289] jusqu’à l’infrarouge moyen (sous 10 dB/km jusqu’à environ 3300 nm) [290] en passant par tout le visible [281]. Enfin, on note que la fibre de type NANF peut présentement être fabriquée en segments de plusieurs kilomètres [288] et qu’elle peut être courbée à un rayon d’environ 10 cm avant que l’atténuation soit doublée (de 0.2 dB/km pour une fibre droite à 0.4 dB/km pour une fibre courbée, par exemple) [97]. Par ailleurs, sa géométrie peut être ajustée pour que le premier mode d’ordre supérieur subisse des pertes supérieures à 1000 dB/km, ce qui rend la fibre effectivement monomode pour une longueur modeste [97, 281], et elle peut être jointe par fusion froide ou collage à de la fibre de silice standard avec une perte de jonction d’environ 0.15 dB (ceci implique généralement l’utilisation d’un adaptateur de mode) [291]. Bref, il s’agit d’une fibre performante dont les propriétés générales admettent son utilisation en tant que ligne à délai dans un interféromètre à deux ports.

La fibre de type NANF possède d’autres propriétés qui la rendent particulièrement intéressante aux fins de la stabilisation laser en comparaison d’une fibre de silice conventionnelle. Ces propriétés sont généralement associées à la très faible interaction du mode fondamental avec la microstructure de verre (recouvrement inférieur à 100 ppm pour le schéma NANF [173, 292]) :

1. Elle affiche une faible sensibilité thermique intrinsèque d’environ 0.3 ppm/K à température pièce, soit environ 20 fois plus faible qu’une fibre de silice conventionnelle [223]. Cette sensibilité est dominée par le coefficient d’expansion thermique de la microstructure de silice avec contribution thermo-optique généralement négligeable [293]. Ceci implique que la sensibilité thermique peut être supprimée par enroulage sur une bobine

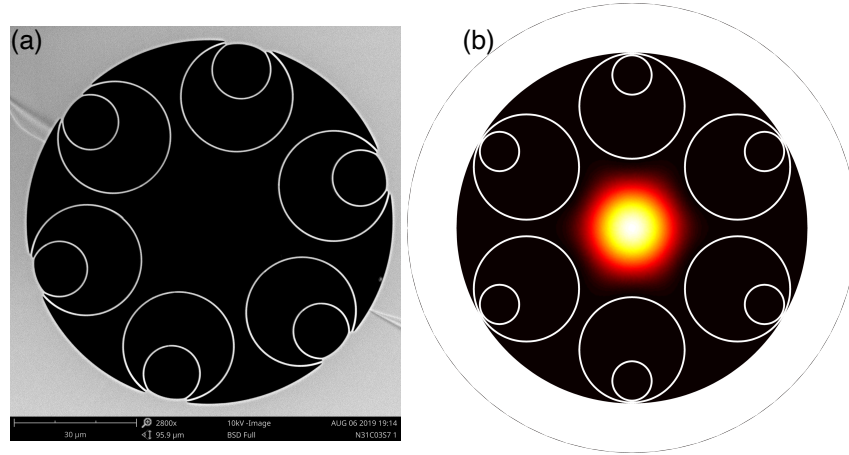


FIGURE 0.29 – Section de la fibre de type NANF. (a) Image par microscope à balayage électronique de la fibre utilisée dans cette thèse, similaire à celle décrite dans [287]. Le coeur (cercle le plus grand pouvant être inséré entre les grands tubes capillaires) affiche un diamètre de 35 à 36 μm . Les fines membranes des tubes ont une épaisseur d'environ 550 nm. L'atténuation de la fibre est inférieure à 1.5 dB/km de 1500 à 1700 nm. (b) Simulation montrant la distribution spatiale d'intensité du mode fondamental pour une géométrie similaire.

de Zerodur ou de ULE aux propriétés ajustées [238]. Cette faible sensibilité facilite la stabilisation en température de la ligne à délai fibrée.

2. Elle exhibe un coefficient de couplage des modes de polarisation inférieur à 10^{-9} m^{-1} et des propriétés de polarisation (axes principaux, pertes dépendantes de la polarisation, délai de groupe différentiel et degré de polarisation) très peu affectées par les variations de température [292]. Ceci facilite d'autant plus la stabilisation en température de la ligne à délai.
3. Elle tolère de grandes puissances continues sans dommage ou effet non-linéaire, c'est-à-dire au-delà de 1 kW sur 1 km pour un coeur rempli d'air [294]. Cette propriété simplifie le travail de minimisation du bruit de photodétection et permet de considérer une géométrie hautement résonante (pour laquelle la puissance circulante est plus élevée que la puissance incidente ou que la puissance photodétectée).
4. Elle offre une grande aire modale d'environ $500 \mu\text{m}^2$ [291], soit 5 à 15 fois plus élevée que dans une fibre à saut d'indice conventionnelle, mais est quand même tolérante aux courbures et demeure effectivement monomode dans la plupart des scénarios d'intérêt. Ceci permet une réduction du bruit thermodynamique accumulé par unité de longueur optique (supposant un milieu de propagation constant).

Par ailleurs, la fibre de type NANF permet d'envisager la stabilisation de lasers dont la fréquence porteuse ne tombe pas dans une zone d'excellente transmission de la silice. Il faut toutefois mentionner qu'il est attendu que la sensibilité intrinsèque en accélération d'une fibre de type NANF soit plus élevée que celle d'une fibre de silice conventionnelle [295, 296], bien

que ceci n'ait pas encore été étudié en détail. Il devrait être possible de minimiser cet effet par une sélection adéquate de la gaine de protection.

Comme mentionné précédemment, un des objectifs centraux de cette thèse est de vérifier si le bruit thermodynamique dans une fibre de type NANF peut être significativement plus faible que celui d'une fibre de silice conventionnelle, offrant une voie pour l'amélioration de la performance ultime d'un laser stabilisé à une ligne à délai fibrée. Après tout, ces nouvelles fibres ressemblent à une version miniaturisée et allongée de l'espaceur d'une cavité en espace libre et offrent des avantages similaires. En particulier, considérant que la propagation de la lumière dans une fibre de type NANF se fait à 99.99% dans l'air, et que cet air peut être évacué du coeur de la fibre avec impact minimal sur le comportement de la fibre, il apparaît possible de dénouer le noeud qui limite présentement la performance des interféromètres fibrés, c'est-à-dire le trop grand bruit de phase fondamental accumulé par unité de longueur optique dans la silice. Cette question est étudiée au chapitre 5.

0.3 Bibliographie

- [1] T. H. Maiman. Stimulated optical radiation in ruby. *Nature*, 4736 :493–494, 1960. URL <https://doi.org/10.7208/9780226284163-019>.
- [2] W. R. C. Rowley and D. C. Wilson. Wave-length stabilization of an optical maser. *Nature*, 200(4908) :745–747, 1963. URL <https://doi.org/10.1038/200745a0>.
- [3] T. S. Jaseja, A. Javan, and C. H. Townes. Frequency stability of He-Ne masers and measurements of length. *Physical Review Letters*, 10(5) :165, 1963. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.10.165>.
- [4] J. L. Hall. Frequency-stabilized lasers: a parochial review. In *Frequency-Stabilized Lasers and Their Applications*, volume 1837, pages 2–15. SPIE, 1993. URL <https://doi.org/10.1117/12.143668>.
- [5] A. White. Frequency stabilization of gas lasers. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 1(8) :349–357, 1965. URL <https://doi.org/10.1109/JQE.1965.1072246>.
- [6] M. Ohtsu. Frequency stabilization in semiconductor lasers. *Optical and Quantum Electronics*, 20(4) :283–300, 1988. URL <https://doi.org/10.1007/BF00620246>.
- [7] F. Riehle. *Frequency standards: basics and applications*. John Wiley & Sons, 2006.
- [8] U. Sterr, T. Legero, T. Kessler, H. Schnatz, G. Grosche, O. Terra, and F. Riehle. Ultras-table lasers: new developments and applications. In *Time and Frequency Metrology II*, volume 7431, pages 33–46. SPIE, 2009. URL <https://doi.org/10.1117/12.825217>.

- [9] S. Fu, W. Shi, Y. Feng, L. Zhang, Z. Yang, S. Xu, X. Zhu, R. A. Norwood, and N. Peyghambarian. Review of recent progress on single-frequency fiber lasers. *Journal of the Optical Society of America B*, 34(3) :A49–A62, 2017. URL <https://doi.org/10.1364/JOSAB.34.000A49>.
- [10] D. G. Matei, T. Legero, S. Häfner, C. Grebing, R. Weyrich, W. Zhang, L. Sonderhouse, J. M. Robinson, J. Ye, F. Riehle, and U. Sterr. 1.5 μm lasers with sub-10 mHz linewidth. *Physical Review Letters*, 118(26) :263202, 2017. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.263202>.
- [11] J. M. Robinson, E. Oelker, W. R. Milner, W. Zhang, T. Legero, D. G. Matei, F. Riehle, U. Sterr, and J. Ye. Crystalline optical cavity at 4 K with thermal-noise-limited instability and ultralow drift. *Optica*, 6(2) :240–243, 2019. URL <https://doi.org/10.1364/OPTICA.6.000240>.
- [12] P. Castellini, M. Martarelli, and E. P. Tomasini. Laser Doppler vibrometry: Development of advanced solutions answering to technology’s needs. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20(6) :1265–1285, 2006. URL <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2005.11.015>.
- [13] D. H. Dolan. Extreme measurements with photonic Doppler velocimetry (PDV). *Review of Scientific Instruments*, 91(5) :051501, 2020. URL <https://doi.org/10.1063/5.0004363>.
- [14] R. Meynart. Sampling jitter in Fourier-transform spectrometers: spectral broadening and noise effects. *Applied Optics*, 31(30) :6383–6388, 1992. URL <https://doi.org/10.1364/AO.31.006383>.
- [15] C. S. Turcotte, P. Tremblay, and J. Genest. Semiconductor lasers used as the metrology source in Fourier-transform spectrometers: effect of their noise. In *Proc. SPIE 3415*, pages 122–134, 1998. URL <https://doi.org/10.1117/12.326627>.
- [16] I. Coddington, W. C. Swann, and N. R. Newbury. Coherent multiheterodyne spectroscopy using stabilized optical frequency combs. *Physical Review Letters*, 100(1) :013902, 2008. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.013902>.
- [17] J.-D. Deschênes, P. Giaccari, and J. Genest. Optical referencing technique with CW lasers as intermediate oscillators for continuous full delay range frequency comb interferometry. *Optics Express*, 18(22) :23358–23370, 2010. URL <https://doi.org/10.1364/OE.18.023358>.
- [18] R. S. Eng, J. F. Butler, and K. J. Linden. Tunable diode laser spectroscopy: an invited review. *Optical Engineering*, 19(6) :945–960, 1980. URL <https://doi.org/10.1117/12.7972642>.

- [19] J. Ye, L.-S. Ma, and J. L. Hall. Ultrasensitive detections in atomic and molecular physics: demonstration in molecular overtone spectroscopy. *JOSA B*, 15(1) :6–15, 1998. URL <https://doi.org/10.1364/JOSAB.15.000006>.
- [20] Wolfgang Demtröder. *Laser spectroscopy*, volume 2. Springer, 1982.
- [21] D. G. C. Luck. *Frequency modulated radar*. McGraw-Hill, 1962.
- [22] J. P. Von Der Weid, R. Passy, G. Mussi, and N. Gisin. On the characterization of optical fiber network components with optical frequency domain reflectometry. *Journal of Lightwave Technology*, 15(7) :1131–1141, 1997. URL <https://doi.org/10.1109/50.596958>.
- [23] B. J. Soller, D. K. Gifford, M. S. Wolfe, and M. E. Froggatt. High resolution optical frequency domain reflectometry for characterization of components and assemblies. *Optics Express*, 13(2) :666–674, 2005. URL <https://doi.org/10.1364/OPEX.13.000666>.
- [24] L. Palmieri and L. Schenato. Distributed optical fiber sensing based on Rayleigh scattering. *The Open Optics Journal*, 7(1), 2013. URL <http://dx.doi.org/10.2174/1874328501307010104>.
- [25] Z. Ding, C. Wang, K. Liu, J. Jiang, D. Yang, G. Pan, Z. Pu, and T. Liu. Distributed optical fiber sensors based on optical frequency domain reflectometry: A review. *Sensors*, 18(4) :1072, 2018. URL <https://doi.org/10.3390/s18041072>.
- [26] T. Klein and R. Huber. High-speed OCT light sources and systems. *Biomedical Optics Express*, 8(2) :828–859, 2017. URL <https://doi.org/10.1364/BOE.8.000828>.
- [27] J. F. De Boer, R. Leitgeb, and M. Wojtkowski. Twenty-five years of optical coherence tomography: the paradigm shift in sensitivity and speed provided by fourier domain OCT. *Biomedical Optics Express*, 8(7) :3248–3280, 2017. URL <https://doi.org/10.1364/BOE.8.003248>.
- [28] E. Baumann, F. R. Giorgetta, J.-D. Deschênes, W. C. Swann, I. Coddington, and N. R. Newbury. Comb-calibrated laser ranging for three-dimensional surface profiling with micrometer-level precision at a distance. *Optics Express*, 22(21) :24914–24928, 2014. URL <https://doi.org/10.1364/OE.22.024914>.
- [29] Z. Wang, B. Potsaid, L. Chen, C. Doerr, H.-C. Lee, T. Nielson, V. Jayaraman, A. E. Cable, E. Swanson, and J. G. Fujimoto. Cubic meter volume optical coherence tomography. *Optica*, 3(12) :1496–1503, 2016. URL <https://doi.org/10.1364/OPTICA.3.001496>.
- [30] C. J. Karlsson, F. Å. A. Olsson, D. Letalick, and M. Harris. All-fiber multifunction continuous-wave coherent laser radar at 1.55 μm for range, speed, vibration, and wind

- measurements. *Applied Optics*, 39(21) :3716–3726, 2000. URL <https://doi.org/10.1364/AO.39.003716>.
- [31] T. Mikkelsen, N. Angelou, K. Hansen, M. Sjöholm, M. Harris, C. Slinger, P. Hadley, R. Scullion, G. Ellis, and G. Vives. A spinner-integrated wind lidar for enhanced wind turbine control. *Wind Energy*, 16(4) :625–643, 2013. URL <https://doi.org/10.1002/we.1564>.
- [32] Arnaud Brignon. *Coherent laser beam combining*. John Wiley & Sons, 2013.
- [33] F. Wellmann, N. Bode, P. Wessels, L. Overmeyer, J. Neumann, B. Willke, and D. Kracht. Low noise 400 W coherently combined single frequency laser beam for next generation gravitational wave detectors. *Optics Express*, 29(7) :10140–10149, 2021. URL <https://doi.org/10.1364/OE.420350>.
- [34] T. W. Hänsch and A. L. Schawlow. Cooling of gases by laser radiation. *Optics Communications*, 13(1) :68–69, 1975. URL [https://doi.org/10.1016/0030-4018\(75\)90159-5](https://doi.org/10.1016/0030-4018(75)90159-5).
- [35] S. S. Sané, S. Bennetts, J. E. Debs, C. C. N. Kuhn, G. D. McDonald, P. A. Altin, J. D. Close, and N. P. Robins. 11 W narrow linewidth laser source at 780 nm for laser cooling and manipulation of rubidium. *Optics Express*, 20(8) :8915–8919, 2012. URL <https://doi.org/10.1364/OE.20.008915>.
- [36] E. Ip, A. P. T. Lau, D. J. F. Barros, and J. M. Kahn. Coherent detection in optical fiber systems. *Optics Express*, 16(2) :753–791, 2008. URL <https://doi.org/10.1364/OE.16.000753>.
- [37] A. Kakkar, J. Rodrigo Navarro, R. Schatz, X. Pang, O. Ozolins, A. Udalcovs, H. Louchet, S. Popov, and G. Jacobsen. Laser frequency noise in coherent optical systems: spectral regimes and impairments. *Scientific Reports*, 7(1) :1–10, 2017. URL <https://doi.org/10.1038/s41598-017-00868-4>.
- [38] A. D. Ludlow, M. M. Boyd, J. Ye, E. Peik, and P. O. Schmidt. Optical atomic clocks. *Reviews of Modern Physics*, 87(2) :637, 2015. URL <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.87.637>.
- [39] C. Cahillane, G. L. Mansell, and D. Sigg. Laser frequency noise in next generation gravitational-wave detectors. *Optics Express*, 29(25) :42144–42161, 2021. URL <https://doi.org/10.1364/OE.439253>.
- [40] G. Santarelli, C. Audoin, A. Makdissi, P. Laurent, G. J. Dick, and A. Clairon. Frequency stability degradation of an oscillator slaved to a periodically interrogated atomic resonator. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 45(4) :887–894, 1998. URL <https://doi.org/10.1109/58.710548>.

- [41] H. S. Margolis. Optical frequency standards and clocks. *Contemporary Physics*, 51(1) : 37–58, 2010. URL <https://doi.org/10.1080/00107510903257616>.
- [42] Y. Y. Jiang, A. D. Ludlow, N. D. Lemke, R. W. Fox, J. A. Sherman, L.-S. Ma, and C. W. Oates. Making optical atomic clocks more stable with 10^{-16} -level laser stabilization. *Nature Photonics*, 5(3) :158–161, 2011. URL <https://doi.org/10.1038/nphoton.2010.313>.
- [43] N. Poli, C. W. Oates, P. Gill, and G. M. Tino. Optical atomic clocks. *La Rivista del Nuovo Cimento*, 36(12) :555–624, 2013. URL <https://doi.org/10.1393/ncr/i2013-10095-x>.
- [44] R. Bondarescu, M. Bondarescu, G. Hetényi, L. Boschi, P. Jetzer, and J. Balakrishna. Geophysical applicability of atomic clocks: direct continental geoid mapping. *Geophysical Journal International*, 191(1) :78–82, 2012. URL <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2012.05636.x>.
- [45] J. Grotti, S. Koller, S. Vogt, S. Häfner, U. Sterr, C. Lisdat, H. Denker, C. Voigt, L. Timmen, A. Rolland, F. N. Baynes, H. S. Margolis, M. Zampaolo, P. Thoumany, M. Pizzocaro, B. Rauf, F. Bregolin, A. Tampellini, P. Barbieri, M. Zucco, G. A. Costanzo, C. Clivati, F. Levi, and D. Calonico. Geodesy and metrology with a transportable optical clock. *Nature Physics*, 14(5) :437–441, 2018. URL <https://doi.org/10.1038/s41567-017-0042-3>.
- [46] M. J. Martin, M. Bishof, M. D. Swallows, X. Zhang, C. Benko, J. Von-Stecher, A. V. Gorshkov, A. M. Rey, and J. Ye. A quantum many-body spin system in an optical lattice clock. *Science*, 341(6146) :632–636, 2013. URL <https://doi.org/10.1126/science.1236929>.
- [47] A. M. Rey, A. V. Gorshkov, C. V. Kraus, M. J. Martin, M. Bishof, M. D. Swallows, X. Zhang, C. Benko, J. Ye, N. D. Lemke, and A. D. Ludlow. Probing many-body interactions in an optical lattice clock. *Annals of Physics*, 340(1) :311–351, 2014. URL <https://doi.org/10.1016/j.aop.2013.11.002>.
- [48] C. J. Kennedy, E. Oelker, J. M. Robinson, T. Bothwell, D. Kedar, W. R. Milner, G. E. Marti, A. Derevianko, and J. Ye. Precision metrology meets cosmology: improved constraints on ultralight dark matter from atom-cavity frequency comparisons. *Physical Review Letters*, 125(20) :201302, 2020. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.125.201302>.
- [49] Boulder Atomic Clock Optical Network BACON Collaboration. Frequency ratio measurements at 18-digit accuracy using an optical clock network. *Nature*, 591(7851) :564–569, 2021. URL <https://doi.org/10.1038/s41586-021-03253-4>.

- [50] T. Rosenband, D. B. Hume, P. O. Schmidt, C.-W. Chou, A. Brusch, L. Lorini, W. H. Oskay, R. E. Drullinger, T. M. Fortier, J. E. Stalnaker, S. A. Diddams, W. C. Swann, N. R. Newbury, W. M. Itano, D. J. Wineland, and J. C. Bergquist. Frequency ratio of Al^+ and Hg^+ single-ion optical clocks; metrology at the 17th decimal place. *Science*, 319(5871) :1808–1812, 2008. URL <https://doi.org/10.1126/science.1154622>.
- [51] R. M. Godun, P. B. R. Nisbet-Jones, J. M. Jones, S. A. King, L. A. M. Johnson, H. S. Margolis, K. Szymaniec, S. N. Lea, K. Bongs, and P. Gill. Frequency ratio of two optical clock transitions in $^{171}\text{Yb}^+$ and constraints on the time variation of fundamental constants. *Physical Review Letters*, 113(21) :210801, 2014. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.210801>.
- [52] C. Sanner, N. Huntemann, R. Lange, C. Tamm, E. Peik, M. S. Safronova, and S. G. Porsev. Optical clock comparison for Lorentz symmetry testing. *Nature*, 567(7747) : 204–208, 2019. URL <https://doi.org/10.1038/s41586-019-0972-2>.
- [53] M. Takamoto, I. Ushijima, N. Ohmae, T. Yahagi, K. Kokado, H. Shinkai, and H. Katori. Test of general relativity by a pair of transportable optical lattice clocks. *Nature Photonics*, 14(7) :411–415, 2020. URL <https://doi.org/10.1038/s41566-020-0619-8>.
- [54] S. Kolkowitz, I. Pikovski, N. Langellier, M. D. Lukin, R. L. Walsworth, and J. Ye. Gravitational wave detection with optical lattice atomic clocks. *Physical Review D*, 94(12) :124043, 2016. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.124043>.
- [55] F. Riehle. Towards a redefinition of the second based on optical atomic clocks. *Comptes Rendus Physique*, 16(5) :506–515, 2015. URL <https://doi.org/10.1016/j.crhy.2015.03.012>.
- [56] W. R. Milner, J. M. Robinson, C. J. Kennedy, T. Bothwell, D. Kedar, D. G. Matei, T. Legero, U. Sterr, F. Riehle, H. Leopardi, T. M. Fortier, J. A. Sherman, J. Levine, J. Yao, J. Ye, and E. Oelker. Demonstration of a timescale based on a stable optical carrier. *Physical Review Letters*, 123(17) :173201, 2019. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.123.173201>.
- [57] R. L. Barger, M. S. Sorem, and J. L. Hall. Frequency stabilization of a cw dye laser. *Applied Physics Letters*, 22(11) :573–575, 1973. URL <https://doi.org/10.1063/1.1654513>.
- [58] R. W. P. Drever, J. L. Hall, F. V. Kowalski, J. Hough, G. M. Ford, A. J. Munley, and H. Ward. Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator. *Applied Physics B*, 31(2) :97–105, 1983. URL <https://doi.org/10.1007/BF00702605>.
- [59] C. Salomon, D. Hils, and J. L. Hall. Laser stabilization at the millihertz level. *JOSA B*, 5(8) :1576–1587, 1988. URL <https://doi.org/10.1364/JOSAB.5.001576>.

- [60] N. M. Sampas, E. K. Gustafson, and R. L. Byer. Long-term stability of two diode-laser-pumped nonplanar ring lasers independently stabilized to two Fabry–Perot interferometers. *Optics Letters*, 18(12) :947–949, 1993. URL <https://doi.org/10.1364/OL.18.000947>.
- [61] F. Bondu, P. Fritschel, C. N. Man, and A. Brillet. Ultrahigh-spectral-purity laser for the VIRGO experiment. *Optics Letters*, 21(8) :582–584, 1996. URL <https://doi.org/10.1364/OL.21.000582>.
- [62] B. C. Young, F. C. Cruz, W. M. Itano, and J. C. Bergquist. Visible lasers with subhertz linewidths. *Physical Review Letters*, 82(19) :3799, 1999. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.82.3799>.
- [63] J.-P. Richard and J. J. Hamilton. Cryogenic monocrystalline silicon Fabry–Perot cavity for the stabilization of laser frequency. *Review of Scientific Instruments*, 62(10) :2375–2378, 1991. URL <https://doi.org/10.1063/1.1142249>.
- [64] C. T. Taylor, M. Notcutt, and D. G. Blair. Cryogenic, all-sapphire, Fabry–Perot optical frequency reference. *Review of Scientific Instruments*, 66(2) :955–960, 1995. URL <https://doi.org/10.1063/1.1145629>.
- [65] S. Seel, R. Storz, G. Ruoso, J. Mlynek, and S. Schiller. Cryogenic optical resonators: a new tool for laser frequency stabilization at the 1 Hz level. *Physical Review Letters*, 78(25) :4741, 1997. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.78.4741>.
- [66] K. Numata, A. Kemery, and J. Camp. Thermal-noise limit in the frequency stabilization of lasers with rigid cavities. *Physical Review Letters*, 93(25) :250602, 2004. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.250602>.
- [67] M. Notcutt, L.-S. Ma, A. D. Ludlow, S. M. Foreman, J. Ye, and J. L. Hall. Contribution of thermal noise to frequency stability of rigid optical cavity via Hertz-linewidth lasers. *Physical Review A*, 73(3) :031804, 2006. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.73.031804>.
- [68] M. Notcutt, L.-S. Ma, J. Ye, and J. L. Hall. Simple and compact 1-Hz laser system via an improved mounting configuration of a reference cavity. *Optics Letters*, 30(14) :1815–1817, 2005. URL <https://doi.org/10.1364/OL.30.001815>.
- [69] T. Nazarova, F. Riehle, and U. Sterr. Vibration-insensitive reference cavity for an ultra-narrow-linewidth laser. *Applied Physics B*, 83(4) :531–536, 2006. URL <https://doi.org/10.1007/s00340-006-2225-y>.
- [70] A. D. Ludlow, X. Huang, M. Notcutt, T. Zanon-Willette, S. M. Foreman, M. M. Boyd, S. Blatt, and J. Ye. Compact, thermal-noise-limited optical cavity for diode

- laser stabilization at 1×10^{-15} . *Optics Letters*, 32(6) :641–643, 2007. URL <https://doi.org/10.1364/OL.32.000641>.
- [71] S. A. Webster, M. Oxborrow, S. Pugla, J. Millo, and P. Gill. Thermal-noise-limited optical cavity. *Physical Review A*, 77(3) :033847, 2008. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.77.033847>.
- [72] J. Millo, D. V. Magalhães, C. Mandache, Y. Le Coq, E. M. L. English, P. G. Westergaard, J. Lodewyck, S. Bize, P. Lemonde, and G. Santarelli. Ultrastable lasers based on vibration insensitive cavities. *Physical Review A*, 79(5) :053829, 2009. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.79.053829>.
- [73] M. J. Thorpe, D. R. Leibbrandt, T. M. Fortier, and T. Rosenband. Measurement and real-time cancellation of vibration-induced phase noise in a cavity-stabilized laser. *Optics Express*, 18(18) :18744–18751, 2010. URL <https://doi.org/10.1364/OE.18.018744>.
- [74] S. Amairi, T. Legero, T. Kessler, U. Sterr, J. B. Wübbena, O. Mandel, and P. O. Schmidt. Reducing the effect of thermal noise in optical cavities. *Applied Physics B*, 113(2) :233–242, 2013. URL <https://doi.org/10.1007/s00340-013-5464-8>.
- [75] S. Häfner, S. Falke, C. Grebing, S. Vogt, T. Legero, M. Merimaa, C. Lisdat, and U. Sterr. 8×10^{-17} fractional laser frequency instability with a long room-temperature cavity. *Optics Letters*, 40(9) :2112–2115, 2015. URL <https://doi.org/10.1364/OL.40.002112>.
- [76] T. Kessler, C. Hagemann, C. Grebing, T. Legero, U. Sterr, F. Riehle, M. J. Martin, L. Chen, and J. Ye. A sub-40-mHz-linewidth laser based on a silicon single-crystal optical cavity. *Nature Photonics*, 6(10) :687–692, 2012. URL <https://doi.org/10.1038/nphoton.2012.217>.
- [77] M. Granata, A. Amato, G. Cagnoli, M. Coulon, J. Degallaix, D. Forest, L. Mereni, C. Michel, L. Pinard, B. Sassolas, and J. Teillon. Progress in the measurement and reduction of thermal noise in optical coatings for gravitational-wave detectors. *Applied Optics*, 59(5) :A229–A235, 2020. URL <https://doi.org/10.1364/AO.377293>.
- [78] M. Têtu, B. Villeneuve, N. Cyr, P. Tremblay, S. Theriault, and M. Breton. Multiwavelength sources using laser diodes frequency-locked to atomic resonances. *Journal of Lightwave Technology*, 7(10) :1540–1548, 1989. URL <https://doi.org/10.1109/50.39095>.
- [79] T. Schuldt, K. Döringshoff, E. V. Kovalchuk, A. Keetman, J. Pahl, A. Peters, and C. Braxmaier. Development of a compact optical absolute frequency reference for space with 10^{-15} instability. *Applied Optics*, 56(4) :1101–1106, 2017. URL <https://doi.org/10.1364/AO.56.001101>.

- [80] J. Alnis, A. Schliesser, C. Y. Wang, J. Hofer, T. J. Kippenberg, and T. W. Hänsch. Thermal-noise-limited crystalline whispering-gallery-mode resonator for laser stabilization. *Physical Review A*, 84(1) :011804, 2011. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.84.011804>.
- [81] W. Liang, V. S. Ilchenko, D. Eliyahu, A. A. Savchenkov, A. B. Matsko, D. Seidel, and L. Maleki. Ultralow noise miniature external cavity semiconductor laser. *Nature Communications*, 6(1) :1–6, 2015. URL <https://doi.org/10.1038/ncomms8371>.
- [82] F. Kéfélian, H. Jiang, P. Lemonde, and G. Santarelli. Ultralow-frequency-noise stabilization of a laser by locking to an optical fiber-delay line. *Optics Letters*, 34(7) :914–916, 2009. URL <https://doi.org/10.1364/OL.34.000914>.
- [83] J. Dong, Y. Hu, J. Huang, M. Ye, Q. Qu, T. Li, and L. Liu. Subhertz linewidth laser by locking to a fiber delay line. *Applied Optics*, 54(5) :1152–1156, 2015. URL <https://doi.org/10.1364/AO.54.001152>.
- [84] Y. T. Chen. Use of single-mode optical fiber in the stabilization of laser frequency. *Applied Optics*, 28(11) :2017–2021, 1989. URL <https://doi.org/10.1364/AO.28.002017>.
- [85] C. Greiner, B. Boggs, T. Wang, and T. W. Mossberg. Laser frequency stabilization by means of optical self-heterodyne beat-frequency control. *Optics Letters*, 23(16) :1280–1282, 1998. URL <https://doi.org/10.1364/OL.23.001280>.
- [86] G. A. Cranch. Frequency noise reduction in erbium-doped fiber distributed-feedback lasers by electronic feedback. *Optics Letters*, 27(13) :1114–1116, 2002. URL <https://doi.org/10.1364/OL.27.001114>.
- [87] K. Takahashi, M. Ando, and K. Tsubono. Stabilization of laser intensity and frequency using optical fiber. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 122, page 012016. IOP Publishing, 2008. URL <https://doi.org/10.1088/1742-6596/122/1/012016>.
- [88] K. H. Wanser, A. D. Kersey, and A. Dandridge. Intrinsic thermal phase noise limit in optical fiber interferometers. *Optics and Photonics News*, 4(12) :37–38, 1993. URL <https://doi.org/10.1364/OPN.4.12.000037>.
- [89] W.-K. Lee, C. Y. Park, J. Mun, and D.-H. Yu. Linewidth reduction of a distributed-feedback diode laser using an all-fiber interferometer with short path imbalance. *Review of Scientific Instruments*, 82(7) :073105, 2011. URL <https://doi.org/10.1063/1.3606439>.
- [90] T. G. McRae, S. Ngo, D. A. Shaddock, M. T. L. Hsu, and M. B. Gray. Frequency stabilization for space-based missions using optical fiber interferometry. *Optics Letters*, 38(3) :278–280, 2013. URL <https://doi.org/10.1364/OL.38.000278>.

- [91] J. Kong, V. G. Lucivero, R. Jiménez-Martínez, and M. W. Mitchell. Long-term laser frequency stabilization using fiber interferometers. *Review of Scientific Instruments*, 86(7) :073104, 2015. URL <https://doi.org/10.1063/1.4926345>.
- [92] R. Šmíd, M. Čížek, B. Mikel, and O. Číp. Frequency noise suppression of a single mode laser with an unbalanced fiber interferometer for subnanometer interferometry. *Sensors*, 15(1) :1342–1353, 2015. URL <https://doi.org/10.3390/s150101342>.
- [93] D. Li, C. Qian, Y. Li, and J. Zhao. Efficient laser noise reduction method via actively stabilized optical delay line. *Optics Express*, 25(8) :9071–9077, 2017. URL <https://doi.org/10.1364/OE.25.009071>.
- [94] M. Parniak, I. Galinskiy, T. Zewtler, and E. S. Polzik. High-frequency broadband laser phase noise cancellation using a delay line. *Optics Express*, 29(5) :6935–6946, 2021. URL <https://doi.org/10.1364/OE.415942>.
- [95] J. Huang, L. Wang, Y. Duan, Y. Huang, M. Ye, L. Liu, and T. Li. All-fiber-based laser with 200 mHz linewidth. *Chinese Optics Letters*, 17(7) :071407, 2019.
- [96] Y. Huang, L. Wang, Y. Duan, Y. Li, M. Ye, Q. Qu, L. Liu, and T. Li. All-fiber-based miniaturized transportable ultra-stable laser at 1550 nm. In *Advances in Precision Instruments and Optical Engineering*, pages 365–372. Springer, 2022. URL https://doi.org/10.1007/978-981-16-7258-3_35.
- [97] G. T. Jasion, H. Sakr, J. R. Hayes, S. R. Sandoghchi, L. Hooper, E. N. Fokoua, A. Saljoghei, H. C. Mulvad, M. Alonso, A. Taranta, T. D. Bradley, I. A. Davidson, Y. Chen, D. J. Richardson, and F. Poletti. 0.174 dB/km hollow core double nested antiresonant nodeless fiber (DNANF). In *2022 Optical Fiber Communications Conference and Exhibition (OFC)*, pages 1–3. IEEE, 2022.
- [98] E. Rubiola. *Phase noise and frequency stability in oscillators*. Cambridge University Press, 2008.
- [99] O. Svelto. *Principles of lasers*. Springer New York, 2010.
- [100] P. Kwee, B. Willke, and K. Danzmann. Optical AC coupling to overcome limitations in the detection of optical power fluctuations. *Optics Letters*, 33(13) :1509–1511, 2008. URL <https://doi.org/10.1364/OL.33.001509>.
- [101] P. Kwee, B. Willke, and K. Danzmann. Shot-noise-limited laser power stabilization with a high-power photodiode array. *Optics Letters*, 34(19) :2912–2914, 2009. URL <https://doi.org/10.1364/OL.34.002912>.

- [102] P. Kwee, B. Willke, and K. Danzmann. Laser power noise detection at the quantum-noise limit of 32 A photocurrent. *Optics Letters*, 36(18) :3563–3565, 2011. URL <https://doi.org/10.1364/OL.36.003563>.
- [103] E. A. Michael and L. Pallanca. Broadband near-to-shot-noise suppression of arbitrary cw-laser excess intensity noise in the gigahertz range. *Optics Letters*, 40(7) :1334–1337, 2015. URL <https://doi.org/10.1364/OL.40.001334>.
- [104] J. Junker, P. Oppermann, and B. Willke. Shot-noise-limited laser power stabilization for the AEI 10 m Prototype interferometer. *Optics Letters*, 42(4) :755–758, 2017. URL <https://doi.org/10.1364/OL.42.000755>.
- [105] R. Paschotta, H. R. Telle, and U. Keller. Noise of solid-state lasers. In *Solid-State Lasers and Applications*, pages 473–510. CRC press, 2017.
- [106] J. L. Hall, M. Notcutt, and J. Ye. Improving laser coherence. In *Laser Spectroscopy*, pages 3–13. World Scientific, 2005. URL https://doi.org/10.1142/9789812701473_0001.
- [107] J. L. Hall, L.-S. Ma, and G. Kramer. Principles of optical phase-locking: application to internal mirror He-Ne lasers phase-locked via fast control of the discharge current. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 23(4) :427–437, 1987. URL <https://doi.org/10.1109/JQE.1987.1073354>.
- [108] M. Heurs, V. M. Quetschke, B. Willke, K. Danzmann, and I. Freitag. Simultaneously suppressing frequency and intensity noise in a Nd:YAG nonplanar ring oscillator by means of the current-lock technique. *Optics Letters*, 29(18) :2148–2150, 2004. URL <https://doi.org/10.1364/OL.29.002148>.
- [109] L. Tombez, S. Schilt, J. Di Francesco, T. Führer, B. Rein, T. Walther, G. Di Domenico, D. Hofstetter, and P. Thomann. Linewidth of a quantum-cascade laser assessed from its frequency noise spectrum and impact of the current driver. *Applied Physics B*, 109(3) :407–414, 2012. URL <https://doi.org/10.1007/s00340-012-5005-x>.
- [110] S. Foster. Fundamental limits on $1/f$ frequency noise in rare-earth-metal-doped fiber lasers due to spontaneous emission. *Physical Review A*, 78(1) :013820, 2008. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.78.013820>.
- [111] P. Kwee. *Laser characterization and stabilization for precision interferometry*. PhD thesis, Hannover: Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover, 2010.
- [112] Z. Liu and R. Slavík. Optical injection locking: From principle to applications. *Journal of Lightwave Technology*, 38(1) :43–59, 2020. URL <https://doi.org/10.1109/JLT.2019.2945718>.
- [113] A. E. Siegman. *Lasers*. University Science Books, 1986.

- [114] J. Hald and V. Ruseva. Efficient suppression of diode-laser phase noise by optical filtering. *JOSA B*, 22(11) :2338–2344, 2005. URL <https://doi.org/10.1364/JOSAB.22.002338>.
- [115] T. Nazarova, C. Lisdat, F. Riehle, and U. Sterr. Low-frequency-noise diode laser for atom interferometry. *JOSA B*, 25(10) :1632–1638, 2008. URL <https://doi.org/10.1364/JOSAB.25.001632>.
- [116] L. Zhang, A. Poddar, U. Rohde, and A. Daryoush. Analytical and experimental evaluation of SSB phase noise reduction in self-injection locked oscillators using optical delay loops. *IEEE Photonics Journal*, 5(6) :6602217–6602217, 2013. URL <https://doi.org/10.1109/JPHOT.2013.2289958>.
- [117] P. Laurent, A. Clairon, and C. Breant. Frequency noise analysis of optically self-locked diode lasers. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 25(6) :1131–1142, 1989. URL <https://doi.org/10.1109/3.29238>.
- [118] W. Liang, V. S. Ilchenko, D. Eliyahu, E. Dale, A. A. Savchenkov, D. Seidel, A. B. Matsko, and L. Maleki. Compact stabilized semiconductor laser for frequency metrology. *Applied Optics*, 54(11) :3353–3359, 2015. URL <https://doi.org/10.1364/AO.54.003353>.
- [119] R. Tkach and A. Chraplyvy. Regimes of feedback effects in 1.5- μm distributed feedback lasers. *Journal of Lightwave technology*, 4(11) :1655–1661, 1986. URL <https://doi.org/10.1109/JLT.1986.1074666>.
- [120] K. Petermann. External optical feedback phenomena in semiconductor lasers. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, 1(2) :480–489, 1995. URL <https://doi.org/10.1109/2944.401232>.
- [121] M. Ohtsu. Realization of ultrahigh coherence in semiconductor lasers by negative electrical feedback. *Journal of Lightwave Technology*, 6(2) :245–256, 1988. URL <https://doi.org/10.1109/50.3996>.
- [122] V. V. Spirin, J. L. B. Escobedo, D. A. Korobko, P. Mégret, and A. A. Fotiadi. Stabilizing DFB laser injection-locked to an external fiber-optic ring resonator. *Optics Express*, 28(1) :478–484, 2020. URL <https://doi.org/10.1364/OE.28.000478>.
- [123] K. H. Ang, G. Chong, and Y. Li. PID control system analysis, design, and technology. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 13(4) :559–576, 2005. URL <https://doi.org/10.1109/TCST.2005.847331>.
- [124] M. Zhu and J. L. Hall. Stabilization of optical phase/frequency of a laser system: application to a commercial dye laser with an external stabilizer. *JOSA B*, 10(5) :802–816, 1993. URL <https://doi.org/10.1364/JOSAB.10.000802>.

- [125] J. L. Hall, M. S. Taubman, and J. Ye. Laser stabilization. *OSA Handbook v14*, 1999.
- [126] L. C. Sinclair, J.-D. Deschênes, L. Sonderhouse, W. C. Swann, I. H. Khader, E. Baumann, N. R. Newbury, and I. Coddington. Invited article: A compact optically coherent fiber frequency comb. *Review of Scientific Instruments*, 86(8) :081301, 2015. URL <https://doi.org/10.1063/1.4928163>.
- [127] J.-D. Deschênes. Non-stationary photodetection shot noise in frequency combs: a signal processing perspective. 2014.
- [128] P. Y. Ktonas and N. Papp. Instantaneous envelope and phase extraction from real signals: theory, implementation, and an application to EEG analysis. *Signal Processing*, 2(4) :373–385, 1980. URL [https://doi.org/10.1016/0165-1684\(80\)90079-1](https://doi.org/10.1016/0165-1684(80)90079-1).
- [129] R. Hui and M. O’Sullivan. *Fiber optic measurement techniques*. Academic Press, 2009.
- [130] H. Bergeron, J.-D. Deschênes, and J. Genest. Improving the signal-to-noise ratio of the beat note between a frequency comb and a tunable laser using a dynamically tracking optical filter. *Optics Letters*, 41(18) :4253–4256, 2016. URL <https://doi.org/10.1364/OL.41.004253>.
- [131] S. L. Gilbert. Frequency stabilization of a tunable erbium-doped fiber laser. *Optics Letters*, 16(3) :150–152, 1991. URL <https://doi.org/10.1364/OL.16.000150>.
- [132] R. M. Williams, J. F. Kelly, J. S. Hartman, S. W. Sharpe, M. S. Taubman, J. L. Hall, F. Capasso, C. Gmachl, D. L. Sivco, J. N. Baillargeon, and A. Y. Cho. Kilohertz linewidth from frequency-stabilized mid-infrared quantum cascade lasers. *Optics Letters*, 24(24) :1844–1846, 1999. URL <https://doi.org/10.1364/OL.24.001844>.
- [133] F. Benabid, F. Couny, J. C. Knight, T. A. Birks, and P. S. J. Russell. Compact, stable and efficient all-fibre gas cells using hollow-core photonic crystal fibres. *Nature*, 434 (7032) :488–491, 2005. URL <https://doi.org/10.1038/nature03349>.
- [134] E. Bedrosian and S. O. Rice. Distortion and crosstalk of linearly filtered, angle-modulated signals. *Proceedings of the IEEE*, 56(1) :2–13, 1968. URL <https://doi.org/10.1109/PROC.1968.6133>.
- [135] P. Tremblay and M. Têtu. Characterization of frequency stability: Effect of RF filtering. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, (2) :151–154, 1985. URL <https://doi.org/10.1109/TIM.1985.4315290>.
- [136] P. Tremblay, M. Têtu, and A. Michaud. Frequency stability characterization from the filtered signal of a precision oscillator in the presence of additive noise. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 38(5) :967–973, 1989. URL <https://doi.org/10.1109/19.39038>.

- [137] G. Liu and M. Han. Wavelength locking of a diode laser to the maximal slope of a π -phase-shifted fiber Bragg grating for acoustic emission detection. *IEEE Sensors Journal*, 18(22) :9257–9262, 2018. URL <https://doi.org/10.1109/JSEN.2018.2869799>.
- [138] M. Poulin, S. Ayotte, C. Latrasse, Y. Painchaud, J.-F. Cliche, A. Babin, M. Aubé, M. Picard, F. Costin, M. Têtu, and G. Lafrance. Compact narrow linewidth semiconductor laser module. In *Laser Technology for Defense and Security V*, volume 7325, pages 134–140. SPIE, 2009. URL <https://doi.org/10.1117/12.818802>.
- [139] B. S. Sheard, M. B. Gray, and D. E. McClelland. High-bandwidth laser frequency stabilization to a fiber-optic delay line. *Applied Optics*, 45(33) :8491–8499, 2006. URL <https://doi.org/10.1364/AO.45.008491>.
- [140] G. Skolianos, H. Wen, and M. J. F. Digonnet. Thermal phase noise in Fabry-Perot resonators and fiber Bragg gratings. *Physical Review A*, 89(3) :033818, 2014. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.89.033818>.
- [141] P. Tremblay and R. Ouellet. Frequency response of a Fabry-Perot interferometer used as a frequency discriminator. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 40(2) :204–207, 1991. URL <https://doi.org/10.1109/TIM.1990.1032916>.
- [142] B. S. Sheard, M. B. Gray, D. E. McClelland, and D. A. Shaddock. Laser frequency stabilization by locking to a LISA arm. *Physics Letters A*, 320(1) :9–21, 2003. URL <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2003.10.076>.
- [143] A. A. Madej, L. Marmet, and J. E. Bernard. Rb atomic absorption line reference for single Sr+ laser cooling systems. *Applied Physics B*, 67(2) :229–234, 1998. URL <https://doi.org/10.1007/s003400050498>.
- [144] R. L. Barger and J. L. Hall. Pressure shift and broadening of methane line at 3.39μ studied by laser-saturated molecular absorption. *Physical Review Letters*, 22(1) :4, 1969. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.22.4>.
- [145] G.-W. Truong, J. D. Anstie, E. F. May, T. M. Stace, and A. N. Luiten. Absolute absorption line-shape measurements at the shot-noise limit. *Physical Review A*, 86(3) :030501, 2012. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.86.030501>.
- [146] C. W. Oates, E. A. Curtis, and L. Hollberg. Improved short-term stability of optical frequency standards: approaching 1 Hz in 1 s with the Ca standard at 657 nm. *Optics Letters*, 25(21) :1603–1605, 2000. URL <https://doi.org/10.1364/OL.25.001603>.
- [147] L. Hollberg, E. H. Cornell, and A. Abdelrahmann. Optical atomic phase reference and timing. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 375(2099) :20160241, 2017. URL <https://doi.org/10.1098/rsta.2016.0241>.

- [148] G. C. Bjorklund, M. D. Levenson, W. Lenth, and C. Ortiz. Frequency modulation (FM) spectroscopy. *Applied Physics B*, 32(3) :145–152, 1983. URL <https://doi.org/10.1007/BF00688820>.
- [149] E. D. Black. An introduction to Pound–Drever–Hall laser frequency stabilization. *American Journal of Physics*, 69(1) :79–87, 2001. URL <https://doi.org/10.1119/1.1286663>.
- [150] J. H. Chow, I. C. M. Littler, G. De Vine, D. E. McClelland, and M. B. Gray. Phase-sensitive interrogation of fiber Bragg grating resonators for sensing applications. *Journal of Lightwave Technology*, 23(5) :1881, 2005. URL <https://doi.org/10.1109/JLT.2005.846895>.
- [151] T. M. Niebauer, R. Schilling, K. Danzmann, A. Rüdiger, and W. Winkler. Nonstationary shot noise and its effect on the sensitivity of interferometers. *Physical Review A*, 43(9) :5022, 1991. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.43.5022>.
- [152] B. J. Meers and K. A. Strain. Modulation, signal, and quantum noise in interferometers. *Physical Review A*, 44(7) :4693, 1991. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.44.4693>.
- [153] N. M. R. Hoque and L. Duan. Ultrahigh-resolution fiber-optic sensing based on high-finesse, meter-long fiber Fabry-Perot resonators. *IEEE Photonics Journal*, 12(3) :1–9, 2020. URL <https://doi.org/10.1109/JPHOT.2020.2974628>.
- [154] P.-H. Merrer, O. Llopis, and G. Cibiel. Laser stabilization on a fiber ring resonator and application to RF filtering. *IEEE Photonics Technology Letters*, 20(16) :1399–1401, 2008. URL <https://doi.org/10.1109/LPT.2008.927877>.
- [155] B. Merkel, D. Repp, and A. Reiserer. Laser stabilization to a cryogenic fiber ring resonator. *Optics Letters*, 46(2) :444–447, 2021. URL <https://doi.org/10.1364/OL.413847>.
- [156] D. Gatti, G. Galzerano, D. Janner, S. Longhi, and P. Laporta. Fiber strain sensor based on a π -phase-shifted Bragg grating and the Pound-Drever-Hall technique. *Optics Express*, 16(3) :1945–1950, 2008. URL <https://doi.org/10.1364/OE.16.001945>.
- [157] A. Shehzad, P. Brochard, R. Matthey, T. Südmeyer, and S. Schilt. 10 kHz linewidth mid-infrared quantum cascade laser by stabilization to an optical delay line. *Optics Letters*, 44(14) :3470–3473, 2019. URL <https://doi.org/10.1364/OL.44.003470>.
- [158] N. M. Strickland, P. B. Sellin, Y. Sun, J. L. Carlsten, and R. L. Cone. Laser frequency stabilization using regenerative spectral hole burning. *Physical Review B*, 62(3) :1473, 2000. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.62.1473>.

- [159] S. Cook, T. Rosenband, and D. R. Leibbrandt. Laser-frequency stabilization based on steady-state spectral-hole burning in $\text{Eu}^{3+}:\text{Y}_2\text{SiO}_5$. *Physical Review Letters*, 114(25) : 253902, 2015. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.253902>.
- [160] L. M. Baumgartel, R. J. Thompson, and N. Yu. Frequency stability of a dual-mode whispering gallery mode optical reference cavity. *Optics Express*, 20(28) :29798–29806, 2012. URL <https://doi.org/10.1364/OE.20.029798>.
- [161] A. Freise and K. Strain. Interferometer techniques for gravitational-wave detection. *Living Reviews in Relativity*, 13(1) :1–81, 2010. URL <https://doi.org/10.12942/lrr-2010-1>.
- [162] I. P. Kaminow. Balanced optical discriminator. *Applied Optics*, 3(4) :507–510, 1964. URL <https://doi.org/10.1364/AO.3.000507>.
- [163] E. Goobar. A Michelson interferometer with balanced detection for the characterization of modulation and noise properties of semiconductor lasers. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 29(4) :1116–1130, 1993. URL <https://doi.org/10.1109/3.214498>.
- [164] A. Reisinger, C. David, K. Lawley, and A. Yariv. Coherence of a room-temperature CW GaAs/GaAlAs injection laser. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 15(12) : 1382–1387, 1979. URL <https://doi.org/10.1109/JQE.1979.1069944>.
- [165] T. Okoshi, K. Kikuchi, and A. Nakayama. Novel method for high resolution measurement of laser output spectrum. *Electronics Letters*, 16(16) :630–631, 1980. URL <https://doi.org/10.1049/el:19800437>.
- [166] D. W. Choi, E. J. Powers, R. D. Bengtson, G. Joyce, D. L. Brower, N. C. Luhmann Jr, and W. A. Peebles. Digital complex demodulation applied to interferometry. *Review of Scientific Instruments*, 57(8) :1989–1991, 1986. URL <https://doi.org/10.1063/1.1138762>.
- [167] T.-J. Ahn, J. Y. Lee, and D. Y. Kim. Suppression of nonlinear frequency sweep in an optical frequency-domain reflectometer by use of Hilbert transformation. *Applied Optics*, 44(35) :7630–7634, 2005. URL <https://doi.org/10.1364/AO.44.007630>.
- [168] A. Tourigny-Plante, V. Michaud-Belleau, N. B. Hébert, H. Bergeron, J. Genest, and J.-D. Deschênes. An open and flexible digital phase-locked loop for optical metrology. *Review of Scientific Instruments*, 89(9) :093103, 2018. URL <https://doi.org/10.1063/1.5039344>.
- [169] V. Michaud-Belleau, H. Bergeron, P. S. Light, N. B. Hébert, J.-D. Deschênes, A. N. Luiten, and J. Genest. Passive coherent discriminator using phase diversity for the simultaneous measurement of frequency noise and intensity noise of a continuous-wave

- laser. *Metrologia*, 53(5) :1154, 2016. URL <https://doi.org/10.1088/0026-1394/53/5/1154>.
- [170] A. W. Fitzgibbon, M. Pilu, and R. B. Fisher. Direct least squares fitting of ellipses. In *Proceedings of 13th International Conference on Pattern Recognition*, volume 1, pages 253–257. IEEE, 1996. URL <https://doi.org/10.1109/ICPR.1996.546029>.
- [171] F. Stefani, O. Lopez, A. Bercy, W.-K. Lee, C. Chardonnet, G. Santarelli, P.-E. Pottie, and A. Amy-Klein. Tackling the limits of optical fiber links. *JOSA B*, 32(5) :787–797, 2015. URL <https://doi.org/10.1364/JOSAB.32.000787>.
- [172] D. Marcuse. Rayleigh scattering and the impulse response of optical fibers. *Bell System Technical Journal*, 53(4) :705–715, 1974. URL <https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1974.tb02765.x>.
- [173] E. Numkam Fokoua, V. Michaud-Belleau, J. Genest, R. Slavík, and F. Poletti. Theoretical analysis of backscattering in hollow-core antiresonant fibers. *APL Photonics*, 6(9) :096106, 2021. URL <https://doi.org/10.1063/5.0057999>.
- [174] W. H. Glenn. Noise in interferometric optical systems: An optical Nyquist theorem. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 25(6) :1218–1224, 1989. URL <https://doi.org/10.1109/3.29251>.
- [175] H. B. Callen and T. A. Welton. Irreversibility and generalized noise. *Physical Review*, 83(1) :34, 1951. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRev.83.34>.
- [176] H. B. Callen and R. F. Greene. On a theorem of irreversible thermodynamics. *Physical Review*, 86(5) :702, 1952. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRev.86.702>.
- [177] K. H. Wanser. Fundamental phase noise limit in optical fibres due to temperature fluctuations. *Electronics Letters*, 28 :53, 1992. URL <https://doi.org/10.1049/el:19920033>.
- [178] K. Krakenes and K. Blotekjaer. Comparison of fiber-optic Sagnac and Mach-Zehnder interferometers with respect to thermal processes in the fiber. *Journal of Lightwave Technology*, 13(4) :682–686, 1995. URL <https://doi.org/10.1109/50.372481>.
- [179] S. Knudsen, A. B. Tveten, and A. Dandridge. Measurements of fundamental thermal induced phase fluctuations in the fiber of a Sagnac interferometer. *IEEE Photonics Technology Letters*, 7(1) :90–92, 1995. URL <https://doi.org/10.1109/68.363366>.
- [180] V. Annovazzi-Lodi, S. Donati, and S. Merlo. Thermodynamic phase noise in fibre interferometers. *Optical and Quantum Electronics*, 28(1) :43–49, 1996. URL <https://doi.org/10.1007/BF00578549>.

- [181] R. P. Moeller and W. K. Burns. Observation of thermal noise in a dynamically biased fiber-optic gyro. *Optics Letters*, 21(3) :171–173, 1996. URL <https://doi.org/10.1364/OL.21.000171>.
- [182] S. Foster, G. A. Cranch, and A. Tikhomirov. Experimental evidence for the thermal origin of $1/f$ frequency noise in erbium-doped fiber lasers. *Physical Review A*, 79(5) : 053802, 2009. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.79.053802>.
- [183] G. A. Cranch and G. A. Miller. Fundamental frequency noise properties of extended cavity erbium fiber lasers. *Optics Letters*, 36(6) :906–908, 2011. URL <https://doi.org/10.1364/OL.36.000906>.
- [184] G. Gagliardi, M. Salza, S. Avino, P. Ferraro, and P. De Natale. Probing the ultimate limit of fiber-optic strain sensing. *Science*, 330(6007) :1081–1084, 2010. URL <https://doi.org/10.1126/science.1195818>.
- [185] G. Skolianos, A. Arora, M. Bernier, and M. J. F. Digonnet. Photonics sensing at the thermodynamic limit. *Optics Letters*, 42(10) :2018–2021, 2017. URL <https://doi.org/10.1364/OL.42.002018>.
- [186] N. M. R. Hoque and L. Duan. A Mach-Zehnder Fabry-Perot hybrid fiber-optic interferometer operating at the thermal noise limit. *Scientific Reports*, 12(1) :1–6, 2022. URL <https://doi.org/10.1038/s41598-022-16474-y>.
- [187] S. Foster, A. Tikhomirov, and M. Milnes. Fundamental thermal noise in distributed feedback fiber lasers. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 43(5) :378–384, 2007. URL <https://doi.org/10.1109/JQE.2007.894744>.
- [188] S. Foster. Low-frequency thermal noise in optical fiber cavities. *Physical Review A*, 86 (4) :043801, 2012. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.86.043801>.
- [189] S. Foster, A. Tikhomirov, and J. Harrison. Fundamental limits on low frequency cavity fluctuations in optical fibre lasers. In *Conference on Lasers and Electro-Optics/Pacific Rim*, page C1200. Optica Publishing Group, 2011.
- [190] R. E. Bartolo, A. B. Tveten, and A. Dandridge. Thermal phase noise measurements in optical fiber interferometers. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 48(5) :720–727, 2012. URL <https://doi.org/10.1109/JQE.2012.2190717>.
- [191] L. Duan. Intrinsic thermal noise of optical fibres due to mechanical dissipation. *Electronics Letters*, 46(22) :1, 2010. URL <https://doi.org/10.1049/el.2010.1653>.
- [192] L. Duan. General treatment of the thermal noises in optical fibers. *Physical Review A*, 86(2) :023817, 2012. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.86.023817>.

- [193] T. Kessler, T. Legero, and U. Sterr. Thermal noise in optical cavities revisited. *JOSA B*, 29(1) :178–184, 2012. URL <https://doi.org/10.1364/JOSAB.29.000178>.
- [194] P. R. Saulson. Thermal noise in mechanical experiments. *Physical Review D*, 42(8) : 2437, 1990. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.42.2437>.
- [195] B. M. Beadle and J. Jarzynski. Measurement of speed and attenuation of longitudinal elastic waves in optical fibers. *Optical Engineering*, 40(10) :2115–2119, 2001. URL <https://doi.org/10.1117/1.1403449>.
- [196] J. Dong, J. Huang, T. Li, and L. Liu. Observation of fundamental thermal noise in optical fibers down to infrasonic frequencies. *Applied Physics Letters*, 108(2) :021108, 2016. URL <https://doi.org/10.1063/1.4939918>.
- [197] A. M. Gretarsson and G. M. Harry. Dissipation of mechanical energy in fused silica fibers. *Review of Scientific Instruments*, 70(10) :4081–4087, 1999. URL <https://doi.org/10.1063/1.1150040>.
- [198] R. M. Shelby, M. D. Levenson, and P. W. Bayer. Guided acoustic-wave Brillouin scattering. *Physical Review B*, 31(8) :5244, 1985. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.31.5244>.
- [199] A. J. Poustie. Bandwidth and mode intensities of guided acoustic-wave Brillouin scattering in optical fibers. *JOSA B*, 10(4) :691–696, 1993. URL <https://doi.org/10.1364/JOSAB.10.000691>.
- [200] A. Hati, C. Nelson, and D. Howe. Vibration-induced PM noise in oscillators and its suppression. In *Aerial Vehicles*, pages 259–286. InTech, 2009.
- [201] D. R. Leibbrandt, J. C. Bergquist, and T. Rosenband. Cavity-stabilized laser with acceleration sensitivity below 10^{-12} g^{-1} . *Physical Review A*, 87(2) :023829, 2013. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.87.023829>.
- [202] W. Zhu, E. R. Numkam Fokoua, A. A. Taranta, Y. Chen, T. D. Bradley, M. N. Petrovich, F. Poletti, M. Zhao, D. J. Richardson, and R. Slavík. The thermal phase sensitivity of both coated and uncoated standard and hollow core fibers down to cryogenic temperatures. *Journal of Lightwave Technology*, 38(8) :2477–2484, 2020. URL <https://doi.org/10.1109/JLT.2019.2960437>.
- [203] C. Affolderbach and G. Miletì. A compact laser head with high-frequency stability for Rb atomic clocks and optical instrumentation. *Review of Scientific Instruments*, 76(7) : 073108, 2005. URL <https://doi.org/10.1063/1.1979493>.

- [204] G. B. Hocker. Fiber-optic acoustic sensors with increased sensitivity by use of composite structures. *Optics Letters*, 4(10) :320–321, 1979. URL <https://doi.org/10.1364/OL.4.000320>.
- [205] J. Taylor, C. Nelson, A. Hati, N. Ashby, and D. A. Howe. Vibration-induced PM noise measurements of a rigid optical fiber spool. In *2008 IEEE International Frequency Control Symposium*, pages 807–810. IEEE, 2008. URL <https://doi.org/10.1109/FREQ.2008.4623110>.
- [206] M. J. Murray, A. Davis, and B. Redding. Fiber-wrapped mandrel microphone for low-noise acoustic measurements. *Journal of Lightwave Technology*, 36(16) :3205–3210, 2018. URL <https://doi.org/10.1109/JLT.2018.2838051>.
- [207] G. H. Ames, C. M. Hansen, C. V. Poulsen, and J. M. Maguire. Reduced acceleration sensitivity of fiber lasers. *Journal of Lightwave Technology*, 26(17) :3149–3154, 2008. URL <https://doi.org/10.1109/JLT.2008.920120>.
- [208] C. W. Nelson, A. Hati, and D. A. Howe. Common-arm counterpropagating interferometer for measurement of vibration-induced noise in fibers. *IEEE Photonics Technology Letters*, 23(21) :1633–1635, 2011. URL <https://doi.org/10.1109/LPT.2011.2165839>.
- [209] N. Ashby, D. A. Howe, J. Taylor, A. Hati, and C. Nelson. Optical fiber vibration and acceleration model. In *2007 IEEE International Frequency Control Symposium Joint with the 21st European Frequency and Time Forum*, pages 547–551. IEEE, 2007. URL <https://doi.org/10.1109/FREQ.2007.4319132>.
- [210] A. Bertholds and R. Dandliker. Determination of the individual strain-optic coefficients in single-mode optical fibres. *Journal of Lightwave Technology*, 6(1) :17–20, 1988. URL <https://doi.org/10.1109/50.3956>.
- [211] K. T. Wan, C. K. Y. Leung, and N. G. Olson. Investigation of the strain transfer for surface-attached optical fiber strain sensors. *Smart Materials and Structures*, 17(3) : 035037, 2008. URL <https://doi.org/10.1088/0964-1726/17/3/035037>.
- [212] S. Huang, M. Tu, S. Yao, and L. Maleki. A turnkey optoelectronic oscillator with low acceleration sensitivity. In *Proceedings of the 2000 IEEE/EIA International Frequency Control Symposium and Exhibition (Cat. No. 00CH37052)*, pages 269–279. IEEE, 2000. URL <https://doi.org/10.1109/FREQ.2000.887365>.
- [213] T. Li, B. Argence, A. Haboucha, H. Jiang, J. L. Dornaux, D. Koné, A. Clairon, P. Lemonde, G. Santarelli, C. Nelson, A. Hati, and E. Burt. Low vibration sensitivity fiber spools for laser stabilization. In *2011 Joint Conference of the IEEE International Frequency Control and the European Frequency and Time Forum (FCS) Proceedings*, pages 1–3. IEEE, 2011. URL <https://doi.org/10.1109/FCS.2011.5977897>.

- [214] Y.-Q. Hu, J. Dong, J.-C. Huang, T. Li, and L. Liu. An optical fiber spool for laser stabilization with reduced acceleration sensitivity to $10^{-12}/g$. *Chinese Physics B*, 24(10) :104213, 2015. URL <https://doi.org/10.1088/1674-1056/24/10/104213>.
- [215] J. Huang, L. Wang, Y. Duan, Y. Huang, M. Ye, L. Li, L. Liu, and T. Li. Vibration-insensitive fiber spool for laser stabilization. *Chinese Optics Letters*, 17(8) :081403, 2019. URL <https://doi.org/10.1364/COL.17.081403>.
- [216] J. P. Cahill, G. M. Carter, C. R. Menyuk, J. Pritchett, R. Sorenson, M. Berman, O. Okusaga, and W. Zhou. Inverse relationship between the OEO Q-factor and vibration sensitivity. In *2013 Joint European Frequency and Time Forum & International Frequency Control Symposium (EFTF/IFC)*, pages 43–45. IEEE, 2013. URL <https://doi.org/10.1109/EFTF-IFC.2013.6702215>.
- [217] D. G. Matei, T. Legero, C. Grebing, S. Häfner, C. Lisdat, R. Weyrich, W. Zhang, L. Sonderhouse, J. M. Robinson, F. Riehle, J. Ye, and U. Sterr. A second generation of low thermal noise cryogenic silicon resonators. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 723, page 012031. IOP Publishing, 2016. URL <https://doi.org/10.1088/1742-6596/723/1/012031>.
- [218] J. P. Cahill, W. Zhou, and C. R. Menyuk. Additive phase noise of fiber-optic links used in photonic microwave-generation systems. *Applied Optics*, 56(3) :B18–B25, 2017. URL <https://doi.org/10.1364/AO.56.000B18>.
- [219] A. Hati, C. W. Nelson, J. Taylor, N. Ashby, and D. A. Howe. Cancellation of vibration-induced phase noise in optical fibers. *IEEE Photonics Technology Letters*, 20(22) : 1842–1844, 2008. URL <https://doi.org/10.1109/LPT.2008.2004697>.
- [220] K. Hotate and K. Tabe. Drift of an optical fiber gyroscope caused by the Faraday effect: influence of the earth’s magnetic field. *Applied Optics*, 25(7) :1086–1092, 1986. URL <https://doi.org/10.1364/AO.25.001086>.
- [221] M. Dignonnet, S. Blin, H. K. Kim, V. Dangui, and G. Kino. Sensitivity and stability of an air-core fibre-optic gyroscope. *Measurement Science and Technology*, 18(10) :3089, 2007. URL <https://doi.org/10.1088/0957-0233/18/10/S07>.
- [222] Z. Xu and F. Ansari. Measurement of creep of optical fiber by a low coherent white light double interferometer system. *Science in China Series E: Technological Sciences*, 52(3) :647–650, 2009. URL <https://doi.org/10.1007/s11431-009-0066-8>.
- [223] B. Shi, H. Sakr, J. Hayes, X. Wei, E. N. Fokoua, M. Ding, Z. Feng, G. Marra, F. Poletti, D. J. Richardson, and R. Slavík. Thinly coated hollow core fiber for improved thermal phase-stability performance. *Optics Letters*, 46(20) :5177–5180, 2021. URL <https://doi.org/10.1364/OL.438302>.

- [224] D. Chardon and S. J. Huard. Absorption losses and thermal diffusivity of optical fibers investigated by photothermal methods: theory and experiments. *Canadian Journal of Physics*, 61(9) :1334–1346, 1983. URL <https://doi.org/10.1139/p83-171>.
- [225] J. H. Chow, B. S. Sheard, D. E. McClelland, M. B. Gray, and I. C. M. Littler. Photothermal effects in passive fiber Bragg grating resonators. *Optics Letters*, 30(7) :708–710, 2005. URL <https://doi.org/10.1364/OL.30.000708>.
- [226] J. P. Gordon and L. F. Mollenauer. Phase noise in photonic communications systems using linear amplifiers. *Optics Letters*, 15(23) :1351–1353, 1990. URL <https://doi.org/10.1364/OL.15.001351>.
- [227] Y. Aoki, K. Tajima, and I. Mito. Input power limits of single-mode optical fibers due to stimulated Brillouin scattering in optical communication systems. *Journal of Lightwave Technology*, 6(5) :710–719, 1988. URL <https://doi.org/10.1109/50.4057>.
- [228] K. Petermann. Intensity-dependent nonreciprocal phase shift in fiber-optic gyroscopes for light sources with low coherence. *Optics Letters*, 7(12) :623–625, 1982. URL <https://doi.org/10.1364/OL.7.000623>.
- [229] K. Volyanskiy, Y. K. Chembo, L. Larger, and E. Rubiola. Contribution of laser frequency and power fluctuations to the microwave phase noise of optoelectronic oscillators. *Journal of Lightwave Technology*, 28(18) :2730–2735, 2010. URL <https://doi.org/10.1109/JLT.2010.2064230>.
- [230] S. W. Lloyd, M. J. F. Digonnet, and S. Fan. Modeling coherent backscattering errors in fiber optic gyroscopes for sources of arbitrary line width. *Journal of Lightwave Technology*, 31(13) :2070–2078, 2013. URL <https://doi.org/10.1109/JLT.2013.2261285>.
- [231] Z. W. Barber, W. R. Babbitt, B. Kaylor, R. R. Reibel, and P. A. Roos. Accuracy of active chirp linearization for broadband frequency modulated continuous wave ladar. *Applied Optics*, 49(2) :213–219, 2010. URL <https://doi.org/10.1364/AO.49.000213>.
- [232] M. E. Froggatt and D. K. Gifford. Rayleigh backscattering signatures of optical fibers—their properties and applications. In *Optical Fiber Communication Conference*, pages OW1K–6. Optical Society of America, 2013. URL <https://doi.org/10.1364/OFC.2013.OW1K.6>.
- [233] H. Jiang, F. Kéfélian, P. Lemonde, A. Clairon, and G. Santarelli. An agile laser with ultra-low frequency noise and high sweep linearity. *Optics Express*, 18(4) :3284–3297, 2010. URL <https://doi.org/10.1364/OE.18.003284>.
- [234] P. C. D. Hobbs. *Building electro-optical systems: making it all work*. John Wiley & Sons, 2022.

- [235] W. Bowden, A. Vianello, and R. Hobson. A low-noise resonant input transimpedance amplified photodetector. *Review of Scientific Instruments*, 90(10) :106106, 2019. URL <https://doi.org/10.1063/1.5114896>.
- [236] N. Uehara and K. Ueda. Ultrahigh-frequency stabilization of a diode-pumped Nd:YAG laser with a high-power-acceptance photodetector. *Optics Letters*, 19(10) :728–730, 1994. URL <https://doi.org/10.1364/OL.19.000728>.
- [237] W. Zhu, E. R. N. Fokoua, Y. Chen, T. Bradley, M. N. Petrovich, F. Poletti, M. Zhao, D. J. Richardson, and R. Slavík. Temperature insensitive fiber interferometry. *Optics Letters*, 44(11) :2768–2770, 2019. URL <https://doi.org/10.1364/OL.44.002768>.
- [238] M. Ding, E. R. Numkam Fokoua, J. R. Hayes, H. Sakr, P. Horak, F. Poletti, D. J. Richardson, and R. Slavík. Hollow-core fiber Fabry–Perot interferometers with reduced sensitivity to temperature. *Optics Letters*, 47(10) :2510–2513, 2022. URL <https://doi.org/10.1364/OL.456589>.
- [239] R. Kashyap, S. Hornung, M. H. Reeve, and S. A. Cassidy. Temperature desensitisation of delay in optical fibres for sensor applications. *Electronics Letters*, 19 :1039, 1983. URL <https://doi.org/10.1049/el:19830705>.
- [240] T. Iwashima, A. Inoue, M. Shigematsu, M. Nishimura, and Y. Hattori. Temperature compensation technique for fibre Bragg gratings using liquid crystalline polymer tubes. *Electronics Letters*, 33(5) :417–419, 1997. URL <https://doi.org/10.1049/el:19970289>.
- [241] M. Bousonville, M. K. Bock, M. Felber, T. Ladwig, T. Lamb, H. Schlarb, S. Schulz, C. Sydlo, S. Hunziker, P. Kownacki, and S. Jablonski. New phase stable optical fiber. In *Proc. Beam Instrum. Workshop*, pages 101–103, 2012.
- [242] Y.-G. Han, S. B. Lee, and Y. Chung. Compositional dependence of the temperature sensitivity in long-period fiber gratings with doping concentration of GeO₂ and B₂O₃ and their applications. *Optical Engineering*, 43(5) :1144–1147, 2004. URL <https://doi.org/10.1117/1.1690280>.
- [243] P. Dragic, M. Cavillon, C. Kucera, J. Parsons, T. Hawkins, and J. Ballato. Tailoring the thermo-optic coefficient in silica optical fibers. In *Optical Fiber Sensors*, page TuE81. Optical Society of America, 2018. URL <https://doi.org/10.1364/OFS.2018.TuE81>.
- [244] Z. Feng, V. Michaud-Belleau, J. K. Sahu, J. Nilsson, C. A. Codemard, X. Zhang, J. Genest, D. J. Richardson, and R. Slavík. Fiber interferometry with low temperature sensitivity. In *2020 IEEE Photonics Conference (IPC)*, pages 1–2. IEEE, 2020. URL <https://doi.org/10.1109/IPC47351.2020.9252524>.

- [245] D. R. Leibrandt, M. J. Thorpe, J. C. Bergquist, and T. Rosenband. Field-test of a robust, portable, frequency-stable laser. *Optics Express*, 19(11) :10278–10286, 2011. URL <https://doi.org/10.1364/OE.19.010278>.
- [246] J. M. Fini. Bend-resistant design of conventional and microstructure fibers with very large mode area. *Optics Express*, 14(1) :69–81, 2006. URL <https://doi.org/10.1364/OPEX.14.000069>.
- [247] S. Ramachandran, J. W. Nicholson, S. Ghalmi, M. F. Yan, P. Wisk, E. Monberg, and F. V. Dimarcello. Light propagation with ultralarge modal areas in optical fibers. *Optics Letters*, 31(12) :1797–1799, 2006. URL <https://doi.org/10.1364/OL.31.001797>.
- [248] M.-J. Li, X. Chen, A. Liu, S. Gray, J. Wang, D. T. Walton, and L. A. Zenteno. Limit of effective area for single-mode operation in step-index large mode area laser fibers. *Journal of Lightwave Technology*, 27(15) :3010–3016, 2009. URL <https://doi.org/10.1109/JLT.2009.2020682>.
- [249] T. Chalermongsak, E. D. Hall, G. D. Cole, D. Follman, F. Seifert, K. Arai, E. K. Gustafson, J. R. Smith, M. Aspelmeyer, and R. X. Adhikari. Coherent cancellation of photothermal noise in GaAs/Al_{0.92}Ga_{0.08}As Bragg mirrors. *Metrologia*, 53(2) :860, 2016. URL <https://doi.org/10.1088/0026-1394/53/2/860>.
- [250] C. Panuski, D. Englund, and R. Hamerly. Fundamental thermal noise limits for optical microcavities. *Physical Review X*, 10(4) :041046, 2020. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevX.10.041046>.
- [251] A. Schroeter, R. Nawrodt, R. Schnabel, S. Reid, I. Martin, S. Rowan, C. Schwarz, T. Koettig, R. Neubert, M. Thürk, W. Vodel, K. Tünnermann, K. Danzmann, and P. Seidel. On the mechanical quality factors of cryogenic test masses from fused silica and crystalline quartz. *arXiv preprint arXiv :0709.4359*, 2007. URL <https://doi.org/10.48550/arXiv.0709.4359>.
- [252] R. C. Zeller and R. O. Pohl. Thermal conductivity and specific heat of noncrystalline solids. *Physical Review B*, 4(6) :2029, 1971. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.4.2029>.
- [253] J. A. Buck. *Fundamentals of optical fibers*. John Wiley & Sons, 2004.
- [254] Y. Tamura, H. Sakuma, K. Morita, M. Suzuki, Y. Yamamoto, K. Shimada, Y. Honma, K. Sohma, T. Fujii, and T. Hasegawa. The first 0.14-dB/km loss optical fiber and its impact on submarine transmission. *Journal of Lightwave Technology*, 36(1) :44–49, 2018. URL <https://doi.org/10.1109/JLT.2018.2796647>.

- [255] P. J. Winzer, D. T. Neilson, and A. R. Chraplyvy. Fiber-optic transmission and networking: the previous 20 and the next 20 years. *Optics Express*, 26(18) :24190–24239, 2018. URL <https://doi.org/10.1364/OE.26.024190>.
- [256] J.-L. Archambault, R. J. Black, S. Lacroix, and J. Bures. Loss calculations for anti-resonant waveguides. *Journal of Lightwave Technology*, 11(3) :416–423, 1993. URL <https://doi.org/10.1109/50.219574>.
- [257] J. Hu and C. R. Menyuk. Understanding leaky modes: slab waveguide revisited. *Advances in Optics and Photonics*, 1(1) :58–106, 2009. URL <https://doi.org/10.1364/AOP.1.000058>.
- [258] F. Poletti. Nested anti-resonant nodeless hollow core fiber. *Optics Express*, 22(20) :23807–23828, 2014. URL <https://doi.org/10.1364/OE.22.023807>.
- [259] W. Ding, Y.-Y. Wang, S.-F. Gao, M.-L. Wang, and P. Wang. Recent progress in low-loss hollow-core anti-resonant fibers and their applications. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, 26(4) :1–12, 2019. URL <https://doi.org/10.1109/JSTQE.2019.2957445>.
- [260] R. F. Cregan, B. J. Mangan, J. C. Knight, T. A. Birks, P. S. J. Russell, P. J. Roberts, and D. C. Allan. Single-mode photonic band gap guidance of light in air. *Science*, 285(5433) :1537–1539, 1999. URL <https://doi.org/10.1126/science.285.5433.1537>.
- [261] P. Russell. Photonic crystal fibers. *Science*, 299(5605) :358–362, 2003. URL <https://doi.org/10.1126/science.1079280>.
- [262] B. J. Mangan, L. Farr, A. Langford, P. J. Roberts, D. P. Williams, F. Couny, M. Lawman, M. Mason, S. Coupland, R. Flea, H. Sabert, T. A. Birks, J. C. Knight, and P. S. J. Russell. Low loss (1.7 dB/km) hollow core photonic bandgap fiber. In *Optical Fiber Communication Conference*, page PD24. Optical Society of America, 2004.
- [263] P. J. Roberts, F. Couny, H. Sabert, B. J. Mangan, D. P. Williams, L. Farr, M. W. Mason, A. Tomlinson, T. A. Birks, J. C. Knight, and P. S. J. Russell. Ultimate low loss of hollow-core photonic crystal fibres. *Optics Express*, 13(1) :236–244, 2005. URL <https://doi.org/10.1364/OPEX.13.000236>.
- [264] E. Numkam Fokoua, F. Poletti, and D. J. Richardson. Analysis of light scattering from surface roughness in hollow-core photonic bandgap fibers. *Optics Express*, 20(19) :20980–20991, 2012. URL <https://doi.org/10.1364/OE.20.020980>.
- [265] P. J. Roberts, D. P. Williams, B. J. Mangan, H. Sabert, F. Couny, W. J. Wadsworth, T. A. Birks, J. C. Knight, and P. S. J. Russell. Realizing low loss air core photonic crystal fibers by exploiting an anti-resonant core surround. *Optics Express*, 13(20) :8277–8285, 2005. URL <https://doi.org/10.1364/OPEX.13.008277>.

- [266] F. Benabid, J. C. Knight, G. Antonopoulos, and P. S. J. Russell. Stimulated Raman scattering in hydrogen-filled hollow-core photonic crystal fiber. *Science*, 298(5592) : 399–402, 2002. URL <https://doi.org/10.1126/science.1076408>.
- [267] F. Couny, F. Benabid, and P. S. Light. Large-pitch Kagome-structured hollow-core photonic crystal fiber. *Optics Letters*, 31(24) :3574–3576, 2006. URL <https://doi.org/10.1364/OL.31.003574>.
- [268] Y. Y. Wang, F. Couny, P. J. Roberts, and F. Benabid. Low loss broadband transmission in optimized core-shape Kagome hollow-core PCF. In *Conference on Lasers and Electro-Optics*, page CPDB4. Optical Society of America, 2010. URL <https://doi.org/10.1364/CLEO.2010.CPDB4>.
- [269] F. Couny, F. Benabid, P. J. Roberts, P. S. Light, and M. G. Raymer. Generation and photonic guidance of multi-octave optical-frequency combs. *Science*, 318(5853) :1118–1121, 2007. URL <https://doi.org/10.1126/science.1149091>.
- [270] S. Février, B. Beaudou, and P. Viale. Understanding origin of loss in large pitch hollow-core photonic crystal fibers and their design simplification. *Optics Express*, 18(5) : 5142–5150, 2010. URL <https://doi.org/10.1364/OE.18.005142>.
- [271] M. A. Duguay, Y. Kokubun, T. L. Koch, and L. Pfeiffer. Antiresonant reflecting optical waveguides in SiO₂-Si multilayer structures. *Applied Physics Letters*, 49(1) :13–15, 1986. URL <https://doi.org/10.1063/1.97085>.
- [272] F. Gérôme, R. Jamier, J.-L. Auguste, G. Humbert, and J.-M. Blondy. Simplified hollow-core photonic crystal fiber. *Optics Letters*, 35(8) :1157–1159, 2010. URL <https://doi.org/10.1364/OL.35.001157>.
- [273] F. Poletti, J. R. Hayes, and D. J. Richardson. Optimising the performances of hollow antiresonant fibres. In *European Conference and Exposition on Optical Communications*, pages Mo–2. Optica Publishing Group, 2011. URL <https://doi.org/10.1364/ECOC.2011.Mo.2.LeCervin.2>.
- [274] F. Yu, W. J. Wadsworth, and J. C. Knight. Low loss silica hollow core fibers for 3–4 μm spectral region. *Optics Express*, 20(10) :11153–11158, 2012. URL <https://doi.org/10.1364/OE.20.011153>.
- [275] A. Hartung, J. Kobelke, A. Schwuchow, K. Wondraczek, J. Bierlich, J. Popp, T. Frosch, and M. A. Schmidt. Double antiresonant hollow core fiber–guidance in the deep ultraviolet by modified tunneling leaky modes. *Optics Express*, 22(16) :19131–19140, 2014. URL <https://doi.org/10.1364/OE.22.019131>.

- [276] P. Rugeland, C. Sterner, and W. Margulis. Visible light guidance in silica capillaries by antiresonant reflection. *Optics Express*, 21(24) :29217–29222, 2013. URL <https://doi.org/10.1364/OE.21.029217>.
- [277] E. Hecht. *Optics*. Pearson Education India, 2012.
- [278] M. Zeisberger and M. A. Schmidt. Analytic model for the complex effective index of the leaky modes of tube-type anti-resonant hollow core fibers. *Scientific Reports*, 7(1) : 1–13, 2017. URL <https://doi.org/10.1038/s41598-017-12234-5>.
- [279] M. Zeisberger, A. Hartung, and M. A. Schmidt. Understanding dispersion of revolver-type anti-resonant hollow core fibers. *Fibers*, 6(4) :68, 2018. URL <https://doi.org/10.3390/fib6040068>.
- [280] F. Yu, P. Song, D. Wu, T. Birks, D. Bird, and J. Knight. Attenuation limit of silica-based hollow-core fiber at mid-IR wavelengths. *APL Photonics*, 4(8) :080803, 2019. URL <https://doi.org/10.1063/1.5115328>.
- [281] H. Sakr, Y. Chen, G. T. Jasion, T. D. Bradley, J. R. Hayes, H. C. H. Mulvad, I. A. Davidson, E. Numkam Fokoua, and F. Poletti. Hollow core optical fibres with comparable attenuation to silica fibres between 600 and 1100 nm. *Nature Communications*, 11(1) : 1–10, 2020. URL <https://doi.org/10.1038/s41467-020-19910-7>.
- [282] T. D. Bradley, J. R. Hayes, Y. Chen, G. T. Jasion, S. R. Sandoghchi, R. Slavík, E. N. Fokoua, S. Bawn, H. Sakr, I. A. Davidson, A. Taranta, J. P. Thomas, M. N. Petrovich, D. J. Richardson, and F. Poletti. Record low-loss 1.3 dB/km data transmitting antiresonant hollow core fibre. In *2018 European Conference on Optical Communication (ECOC)*, pages 1–3. IEEE, 2018. URL <https://doi.org/10.1109/ECOC.2018.8535324>.
- [283] T. D. Bradley, G. T. Jasion, J. R. Hayes, Y. Chen, L. Hooper, H. Sakr, M. Alonso, A. Taranta, A. Saljoghei, H. C. Mulvad, M. Fake, I. A. K. Davidson, N. V. Wheeler, E. N. Fokoua, W. Wang, S. R. Sandoghchi, D. J. Richardson, and F. Poletti. Antiresonant hollow core fibre with 0.65 dB/km attenuation across the C and L telecommunication bands. In *45th European Conference on Optical Communication (ECOC 2019)*, pages 1–4. IET, 2019. URL <https://doi.org/10.1049/cp.2019.1028>.
- [284] A. D. Pryamikov, A. S. Biriukov, A. F. Kosolapov, V. G. Plotnichenko, S. L. Semjonov, and E. M. Dianov. Demonstration of a waveguide regime for a silica hollow-core microstructured optical fiber with a negative curvature of the core boundary in the spectral region $> 3.5 \mu\text{m}$. *Optics Express*, 19(2) :1441–1448, 2011. URL <https://doi.org/10.1364/OE.19.001441>.
- [285] A. N. Kolyadin, A. F. Kosolapov, A. D. Pryamikov, A. S. Biriukov, V. G. Plotnichenko, and E. M. Dianov. Light transmission in negative curvature hollow core fiber in extremely

- high material loss region. *Optics Express*, 21(8) :9514–9519, 2013. URL <https://doi.org/10.1364/OE.21.009514>.
- [286] W. Belardi and J. C. Knight. Hollow antiresonant fibers with reduced attenuation. *Optics Letters*, 39(7) :1853–1856, 2014. URL <https://doi.org/10.1364/OL.39.001853>.
- [287] G. T. Jasion, T. D. Bradley, K. Harrington, H. Sakr, Y. Chen, E. N. Fokoua, I. A. Davidson, A. Taranta, J. R. Hayes, D. J. Richardson, and F. Poletti. Hollow core NANF with 0.28 dB/km attenuation in the C and L bands. In *Optical Fiber Communication Conference*, pages Th4B–4. Optica Publishing Group, 2020. URL <https://doi.org/10.1364/OFC.2020.Th4B.4>.
- [288] H. Sakr, T. D. Bradley, G. T. Jasion, E. N. Fokoua, S. R. Sandoghchi, I. A. Davidson, A. Taranta, G. Guerra, W. Shere, Y. Chen, J. R. Hayes, D. J. Richardson, and F. Poletti. Hollow core NANFs with five nested tubes and record low loss at 850, 1060, 1300 and 1625 nm. In *Optical Fiber Communication Conference*, pages F3A–4. Optica Publishing Group, 2021. URL <https://doi.org/10.1364/OFC.2021.F3A.4>.
- [289] G. Jackson, T. D. Bradley, G. T. Jasion, and F. Poletti. Exploring fabrication limits for UV guiding hollow core anti-resonant fiber. In *Frontiers in Optics*, pages FW1C–3. Optical Society of America, 2021. URL <https://doi.org/10.1364/FIO.2021.FW1C.3>.
- [290] A. Deng and W. Chang. Geometrical scaling of antiresonant hollow-core fibers for mid-infrared beam delivery. *Crystals*, 11(4) :420, 2021. URL <https://doi.org/10.3390/cryst11040420>.
- [291] D. Suslov, M. Komanec, E. R. Numkam Fokoua, D. Dousek, A. Zhong, S. Zvánovec, T. D. Bradley, F. Poletti, D. J. Richardson, and R. Slavík. Low loss and high performance interconnection between standard single-mode fiber and antiresonant hollow-core fiber. *Scientific Reports*, 11(1) :1–9, 2021. URL <https://doi.org/10.1038/s41598-021-88065-2>.
- [292] A. Taranta, E. Numkam Fokoua, S. Abokhamis Mousavi, J. R. Hayes, T. D. Bradley, G. T. Jasion, and F. Poletti. Exceptional polarization purity in antiresonant hollow-core optical fibres. *Nature Photonics*, 14(8) :504–510, 2020. URL <https://doi.org/10.1038/s41566-020-0633-x>.
- [293] R. Slavík, E. R. N. Fokoua, M. Bukshtab, Y. Chen, T. D. Bradley, S. R. Sandoghchi, M. N. Petrovich, F. Poletti, and D. J. Richardson. Demonstration of opposing thermal sensitivities in hollow-core fibers with open and sealed ends. *Optics Letters*, 44(17) : 4367–4370, 2019. URL <https://doi.org/10.1364/OL.44.004367>.
- [294] H. C. H. Mulvad, S. Abokhamis Mousavi, V. Zuba, L. Xu, H. Sakr, T. D. Bradley, J. R. Hayes, G. T. Jasion, E. Numkam Fokoua, A. Taranta, S.-U. Alam, D. J. Richardson, and

- F. Poletti. Kilowatt-average-power single-mode laser light transmission over kilometre-scale hollow-core fibre. *Nature Photonics*, pages 1–6, 2022. URL <https://doi.org/10.1038/s41566-022-01000-3>.
- [295] M. Pang and W. Jin. Detection of acoustic pressure with hollow-core photonic bandgap fiber. *Optics Express*, 17(13) :11088–11097, 2009. URL <https://doi.org/10.1364/OE.17.011088>.
- [296] S. N. Turtaev, M. I. Belovolov, A. E. Levchenko, A. F. Kosolapov, A. D. Pryamikov, and A. N. Kolyadin. Acoustic sensitivity of the negative curvature hollow core fiber. In *2014 International Conference Laser Optics*, pages 1–1. IEEE, 2014. URL <https://doi.org/10.1109/LO.2014.6886396>.

Chapitre 1

Optimal detection scheme for shot-noise-limited phase estimation in passive classical-light interferometry

Vincent Michaud-Belleau, Jérôme Genest et Jean-Daniel Deschênes

Centre d'optique, photonique et laser, Université Laval, Québec, QC G1V 0A6, Canada

Publié dans *Physical Review Applied*, 10(2) :024025, 2018¹.

URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.10.024025>.

1.1 Résumé

Poussées en partie par les requis extrêmes de la détection des ondes gravitationnelles, les recherches récentes sur l'estimation de phase interférométrique se sont concentrées sur l'utilisation d'états non classiques de la lumière afin de battre la limite du bruit de grenaille, permettant d'améliorer la sensibilité en phase une fois la puissance au détecteur maximisée. Pourtant, pour une large gamme d'applications en interférométrie, l'utilisation efficace de ces états non classiques demeure d'une complexité prohibitive. À la recherche d'améliorations simples pouvant être apportées aux instruments illuminés par un champ laser classique, nous étudions à nouveau l'interféromètre de Mach-Zehnder passif ou non modulé en structurant le problème d'estimation de la phase sous la forme d'un modèle linéaire pour lequel un estimateur non biaisé atteignant la borne de Cramér-Rao est facilement calculé. Le présent article compare les performances de tels estimateurs linéaires et efficaces pour plusieurs schémas de détection pertinents pour des interféromètres à deux et quatre ports de sortie (ou IQ, pour *in-phase and quadrature*). Nous y montrons que la détection indépendante des signaux à tous les ports disponibles permet d'atteindre une sensibilité en phase qui est, dans la plupart des

1. Reprinted article, with permission, from Vincent Michaud-Belleau, Jérôme Genest, and Jean-Daniel Deschênes, *Physical Review Applied*, 10(2), 024025, 2018. © 2018 by the American Physical Society.

cas, meilleure que celle atteignable via détection balancée ou lorsqu'un seul photodétecteur est utilisé. De plus, ce schéma permet d'annuler la contribution technique ou non fondamentale du bruit d'amplitude à tous les points d'opération, sans recourir à la modulation. Ce schéma de détection rarement utilisé mais simple devrait donc être pris en considération lors de la conception d'instruments interférométriques opérant à proximité de la limite de bruit de grenaille et peut-être même en dessous.

1.2 Abstract

Driven in part by the extreme requirements of gravitational-wave detection, recent research about interferometric phase estimation has focused on the use of non-classical states of light in order to beat the shot-noise limit, allowing further improvements in sensitivity once the detected optical power has been maximized. Still, for a large class of interferometric applications, the efficient use of these states remains prohibitively complicated. Seeking simple improvements to instruments illuminated by classical laser light, we revisited the passive or unmodulated Mach-Zehnder interferometer by structuring the estimation problem in the form of a linear model for which an unbiased estimator attaining the Cramér-Rao bound is easily computed. This paper compares the performance of such linear and efficient estimators for several detection schemes used with two-output and four-output (IQ) interferometers. We found that the independent monitoring of all available output ports leads to an overall sensitivity that is, in most cases, better than that of balanced detection and single-output detection. In addition, it allows the cancellation of the technical amplitude noise contribution at all operating phases without resorting to modulation techniques. This seldom used but simple detection scheme should therefore be considered when designing instruments for operation close to and perhaps below the shot-noise limit.

1.3 Introduction

The precise measurement of phase fluctuations from an already known or measurable operating phase is one of the most common challenges in optical interferometry. For instance, it is relevant in the fields of laser stabilization and characterization [1, 2], gravitational-wave detection [3, 4], rotational measurements using optical gyroscopes [5, 6], and, more generally, in the large family of applications in which a physical effect can be transduced to an optical path-length variation [7]. Optimizing the performance of a phase estimator, that is, minimizing its variance or power spectral density (PSD) in a given spectral band without the introduction of a bias, is important as it often constitutes the most straightforward way to improve the sensitivity of a given instrument.

The ultimate performance of interferometers illuminated by classical continuous-wave laser light is generally determined by the photon counting error, commonly referred to as shot noise

[8]. In the semiclassical framework, the shot-noise limit (SNL) for phase sensitivity can be expressed through the variance $\Lambda = 2h\nu_0 B / (\eta P_0)$ rad² in the ideal case, with h being Planck's constant, ν_0 the laser frequency, B the equivalent noise bandwidth, η the detection quantum efficiency, and P_0 the input laser power [9]. The use of non-classical light at the interferometer's inputs is required to beat the SNL [10]. Although impressive demonstrations have been made in this direction [11–13], the efficient use of non-classical light, even for modest sensitivity improvements, still constitutes a considerable technical challenge [13, 14] that might not be reasonable to take in a number of applications, especially when the SNL itself is difficult to attain.

In search for easy-to-implement methods to optimize the performance of standard instruments, we reinvestigated common detection schemes by structuring the estimation problem in the form of a linearized model. Even though this constitutes an approximation that is only valid for small phase excursions around the operating point, most interferometers naturally work in this regime when the SNL constitutes a concern. For each detection scheme, the linearization allows direct identification of an efficient minimum variance unbiased (MVU) estimator whose statistical behavior is fully defined [15]. Using this simple process, we were able to confirm well-known facts about the optimal operation of interferometers. We also found that using as many photodetectors as there are output ports is associated with significant benefits. This paper focuses on the elements supporting these findings.

Section 1.4 of the paper is dedicated to the theoretical analysis of the interferometric phase estimation problem based on the semiclassical model of photodetection. Although internal modulation [16] (similar to heterodyne readout [17]) and external modulation [18] (similar to homodyne readout [19]) are often used to reduce the contribution of low-frequency technical amplitude noise and avoid additive flicker noise, they introduce other complications [20, 21] and require tailored modulation and demodulation waveforms to efficiently approach the SNL [22]. For this last reason, a distinct theoretical framework would be required to properly treat these cases. The analysis made here is consequently restricted to fully passive interferometers (this format could also be called "DC-readout" or "direct detection"). Several detection schemes which respect this restriction are compared using the introduced theory. Section 1.5 of the paper covers an experimental demonstration supporting the original conclusions of the theoretical analysis and providing additional insights about its application.

1.4 Theory

In this section, a series of approximations and assumptions is introduced, allowing the interferometric signals to be put in the form of a linear model. The associated MVU estimator is then presented along with its statistical performance. This provides the theoretical tools required for a comparison of the phase sensitivity of several detection schemes used with pas-

sive two-output and four-output interferometers. The section concludes with a short comment about the effect of typical imperfections found in interferometric instruments.

1.4.1 Linearized form of the estimation problem

When illuminated by laser light of average power P_0 , the lossless 50/50 interferometer illustrated in Fig. 1.1(a) outputs two time-varying power signals that take the following forms:

$$P'_1(t) = \frac{P_0}{2} [1 + \alpha(t)] \{1 - V \cos [\theta_0 + \theta(t)]\} + n_1(t), \quad (1.1a)$$

$$P'_2(t) = \frac{P_0}{2} [1 + \alpha(t)] \{1 + V \cos [\theta_0 + \theta(t)]\} + n_2(t), \quad (1.1b)$$

where $\alpha(t)$ represents a zero-mean relative power signal that can be related to amplitude modulation of the laser field² and V is the fringe visibility, a power ratio that takes value 1 only in an ideal interferometer. Here, the visibility V is modeled so that it can naturally account for a polarization mismatch in the interferometer; other imperfections such as losses and imperfectly balanced coupling have to be modeled in a slightly different manner, as we later discuss. The total interferometric phase is the sum of two terms: θ_0 , the mean phase or operating point, which is determined by the laser's carrier frequency ν_0 and the average interferometric delay τ_0 ($\theta_0 = 2\pi\nu_0\tau_0$), and $\theta(t)$, the zero-mean phase signal of interest that is typically produced through delay modulation of the interferometer or phase modulation of the input laser field³. The term "modulation" is used here in its largest sense: it can represent a deterministic or stochastic signal without loss of generality.

The terms $n_1(t)$ and $n_2(t)$ account for all measurement noises expressed in units of optical power. This includes shot noise, which is the most fundamental contributor, but also all forms of additive noise, for instance thermal noise and amplifier noise in the photodetector's electronics. These measurement noises are assumed to be zero-mean and Gaussian, an accurate model even for Poissonian shot noise as long as more than approximately 10 photons are measured during the system's effective integration time [24, 25], a condition that is most often respected in practical contexts. Quantization noise is notably non-Gaussian, but it is rarely dominant in typical analog-to-digital converter (ADC) designs. We thus consider its small contribution to the overall noise to be Gaussian, when it is not simply negligible.

The use of the Gaussian model allows the zero-mean measurement noises to be fully defined using a single covariance matrix. Each element of this matrix can include a contribution from shot noise and a contribution from additive noise. Since our treatment is based on the semiclassical model of photodetection, we assume that shot noise at one output of the interferometer is statistically independent from shot noise at the other output, with a variance

2. $\alpha(t) \approx \epsilon(t) + \epsilon(t - \tau_0)$, where $\epsilon(t)$ is the laser's zero-mean relative amplitude modulation.

3. $\theta(t) \approx \phi(t) - \phi(t - \tau_0) + 2\pi\nu_0\tau(t)$, where $\phi(t)$ is the laser's zero-mean phase modulation and $\tau(t)$ the interferometer's zero-mean delay modulation.

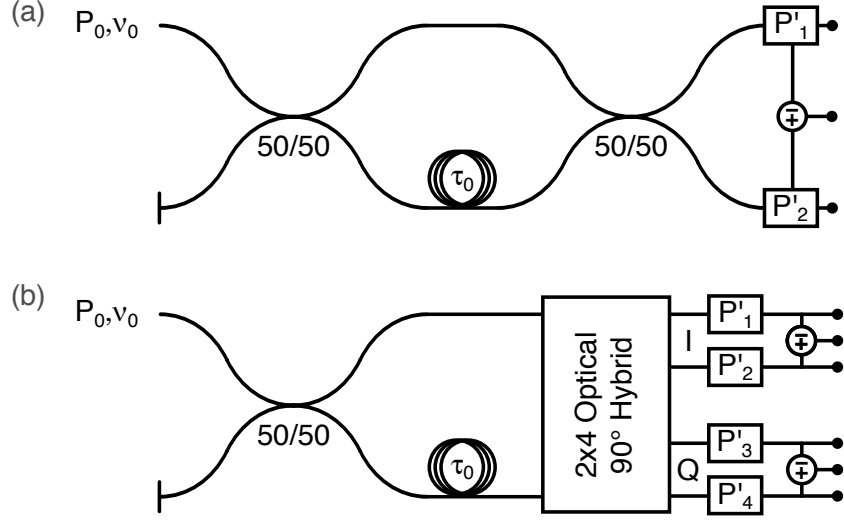


Figure 1.1 – (a) Passive two-output interferometer. (b) Passive four-output interferometer based on a 2×4 optical 90° optical hybrid coupler [23]. Only shot noise is considered in the displayed power signals; additive noise is introduced at a later stage, represented by the black dots. Although fiber interferometers are illustrated here, the treatment of this paper is also valid for free-space interferometers.

that is proportional to the average output power. The exact variance can be computed from the mean photocurrent and the detector's quantum efficiency. The additive noise in each detection channel is also assumed to be independent from that in the other channel, although in this case we consider the two variances to be equal and known. In practice, this information is obtained by measuring the noise level in the absence of illumination. To simplify the theoretical results, we introduce the dimensionless parameter γ , which we define as the ratio between the additive noise variance and the shot noise variance that would be measured at the input of the interferometer using a detector with the same quantum efficiency η . In units of optical power, this "total" shot noise variance is given as $2h\nu_0BP_0/\eta = \Lambda P_0^2$. Using this definition, it is understood that only shot noise contributes to the measurement noise when $\gamma = 0$, while additive noise has the potential to be the dominant contributor when $\gamma > 0$, depending on the average power that is measured at the output under consideration.

When $\theta(t) \ll 1$, that is, when the unknown phase fluctuations can be assumed to be sufficiently small, it is possible to linearize Eq. (1.1) around the known operating point θ_0 . This linearization leads to the following approximate expressions:

$$P'_1(t) \approx \frac{P_0}{2} (1 - V \cos \theta_0) [1 + \alpha(t)] + \left(\frac{P_0}{2} V \sin \theta_0 \right) \theta(t) + n_1(t), \quad (1.2a)$$

$$P'_2(t) \approx \frac{P_0}{2} (1 + V \cos \theta_0) [1 + \alpha(t)] - \left(\frac{P_0}{2} V \sin \theta_0 \right) \theta(t) + n_2(t), \quad (1.2b)$$

where the cross-terms have been neglected under the additional assumption that the relative

power signal is small ($\alpha(t) \ll 1$). Since all time-varying signals are modeled to be zero-mean⁴, the mean part of each power signal in Eq. (1.2) can be removed or filtered out without loss of information. This leads to a natural description of the observed data in matrix form:

$$P = G\psi + n, \quad (1.3)$$

in which P is the mean-subtracted measurement vector (or data vector), G is the observation matrix (or sensitivity matrix or Jacobian matrix), ψ is the parameter vector, and n is the noise vector having statistical properties defined by C_n , which can represent a variance or covariance depending on context. Note that optical power signals without the prime symbol implicitly have their mean subtracted and that the time dependence is dropped from this point on. Equation (1.3) constitutes the linear model; the exact structure of the variables it contains depends on the detection scheme used to conduct the interferometric experiment and on assumptions about the relative contribution of θ versus α . For a two-output interferometer (Fig. 1.1(a)), the three detection schemes we consider are: “single detection”, where the power is measured at only one of the two output ports (P_1 or P_2), “balanced detection”, for which the difference between the powers incident on both detectors is recorded ($P_2 - P_1$), and “double detection”, where both output ports are monitored independently (P_1 and P_2). For single detection and balanced detection, the linear model is set to estimate θ assuming α has negligible contribution, regardless of the validity of this assumption. We call this method “individual estimation” since the available information is insufficient to separately estimate both parameters. However, double detection *does* provide sufficient information for this to be achieved, in which case the method is called “simultaneous estimation”. Still, if α is considered to be negligible, double detection can be set for individual estimation through a proper organization of the linear model. The structure of the model for each of these detection schemes is detailed in Table 1.1.

Under certain experimental conditions, it can be beneficial to replace the interferometer’s 50/50 output coupler with a 90° optical hybrid coupler (Fig. 1.1(b)). This has an effect analogous to splitting the laser signal in two parts of equal power $P_0/2$, sending one part to the interferometer, and sending the other part to a second interferometer that is identical to the first one except for an extra differential delay that ideally corresponds to a $\pi/2$ phase shift at the laser’s carrier frequency [2]. An interferometer based on such a coupler outputs four

4. If they are not in practice, the means can be appropriately distributed by redefining P_0 , V , and θ_0 .

signals instead of two:

$$P'_1 = \frac{P_0}{4} (1 + \alpha) [1 - V \cos(\theta_0 + \theta)] + n_1, \quad (1.4a)$$

$$P'_2 = \frac{P_0}{4} (1 + \alpha) [1 + V \cos(\theta_0 + \theta)] + n_2, \quad (1.4b)$$

$$P'_3 = \frac{P_0}{4} (1 + \alpha) [1 - V \sin(\theta_0 + \theta)] + n_3, \quad (1.4c)$$

$$P'_4 = \frac{P_0}{4} (1 + \alpha) [1 + V \sin(\theta_0 + \theta)] + n_4, \quad (1.4d)$$

where P_0 still represents the average laser power at the full system's input. For such a four-output interferometer, the previous approximations can also be applied in order to obtain a linear model. The main difference with the case of the two-output interferometer resides in the available detection schemes. Here, we consider two of them: "double balanced detection", for which the I signals (P_1 and P_2) and Q signals (P_3 and P_4) are each treated as in balanced detection, and "quadruple detection", where the four output ports are monitored independently. The structure of the linear model for each of these cases is presented in Table 1.2.

1.4.2 Minimum variance unbiased estimator

When the observed signals can be put in the linear form of Eq. (1.3), it can be shown [15] that the MVU estimator is given by:

$$\hat{\psi} = (G^T C_n^{-1} G)^{-1} G^T C_n^{-1} P, \quad (1.5)$$

provided that $G^T C_n^{-1} G$ is invertible. Moreover, this MVU estimator is efficient in the sense that it attains the Cramér-Rao bound (CRB). It is thus the best possible unbiased estimator and it makes full use of the recorded information. Since the last equation represents a linear transformation of a Gaussian noise vector, the statistical performance of the estimator $\hat{\psi}$ is also completely specified, i.e.,

$$\hat{\psi} \sim \mathcal{N}(\psi, C_{\hat{\psi}}), \quad (1.6)$$

where

$$C_{\hat{\psi}} = (G^T C_n^{-1} G)^{-1} \quad (1.7)$$

can either represent the estimation variance $\sigma_{\hat{\theta}}^2$ if ψ is modeled to contain only θ or the estimation covariance under simultaneous estimation of α and θ . In the latter case, the individual estimation variances are found on the diagonal of the matrix $C_{\hat{\psi}}$. These variances, $\sigma_{\hat{\alpha}}^2$ and $\sigma_{\hat{\theta}}^2$, are typically used to define the sensitivity of an interferometric measurement in relative power and in phase, respectively, although relative power estimation is seldom done this way since it can easily be performed without an interferometer.

The advantage of simultaneous estimation rather lies in the absence of crosstalk between the two parameters. This property can be recognized by switching the mean-subtracted measurement matrix containing the power signals in Eq. (1.5) for $G\psi$, which is the same minus the

measurement noise contribution (i.e., $P - n = G\psi$). This produces the following expression:

$$(G^T C_n^{-1} G)^{-1} G^T C_n^{-1} G \psi, \quad (1.8)$$

in which the premultiplier for ψ can be identified as the identity matrix of size 2 if simultaneous estimation is performed. The presence of null off-diagonal elements confirms there is no crosstalk on average between the two estimates. For most applications, the important implication is that simultaneous estimation allows phase to be estimated without contamination from technical relative intensity noise (RIN) regardless of the level of the phase signal relative to RIN and the point of operation, but provided the linear approximation remains valid.

1.4.3 Performance comparison in a two-output interferometer

The variances of the phase estimates obtained by linear MVU analysis of a two-output interferometer are compiled in Table 1.1 and illustrated in Fig. 1.2 for a few insightful combinations of γ and V . One apparent conclusion is that all detection schemes can theoretically reach and practically approach the SNL at a minimum of one operating point θ_0 per 2π range (one complete fringe cycle) in the regime of small additive noise and high visibility. For single detection, this occurs close to the dark fringe ($\theta_0 = 0$ for P_1), at a phase offset which depends sharply on γ and V . This property was recognized in [16] and it is considered in the design of LIGO [20]. For a non-zero offset from the dark fringe, the contribution from the relative power α is not canceled and can be dominant at low frequencies. In balanced detection, the SNL is reached halfway between the bottom and the top of the balanced fringe ($\theta_0 = \{\pi/2, 3\pi/2\}$), a fact that is also well known in the interferometry community. This is a convenient property since it is also where the relative power α is naturally canceled when balancing, or significantly attenuated in the presence of imperfections. This remains true for all values of γ and V . Finally, in double detection, whether it is based on individual or simultaneous estimation, all operating points are optimal in the asymptotical sense ($\gamma \rightarrow 0, V \rightarrow 1$). Far from one asymptote however, the minimum variance is reached at the same operating points as balanced detection, that is, $\theta_0 = \{\pi/2, 3\pi/2\}$. Just like in balanced detection, the relative power α is canceled at those points (individual estimation). This scheme is almost never used in interferometry and we believe that its interesting properties are not well known. Wider recognition of these properties would likely lead to broader usage.

The optimal detection scheme ultimately depends on various application-dependent factors, but we can draw several general conclusions from the linear MVU estimation analysis. Single detection is the simplest in terms of hardware and implementation, but its performance suffers from the largest penalty for higher γ and/or lower V . Balanced detection is the most robust under all experimental conditions with a variance that reaches $(\gamma + 1) \Lambda/V^2$ at the optimal point of operation. This corresponds to the absolute minimum that is achievable for a two-output interferometer fed with a classical state of light, a condition that occurs for this scheme because we assume that additive noise is introduced after balancing (Fig. 1.1(a)) as is typically

Table 1.1 – Elements of the linear model and MVU phase estimator variance for the three detection schemes studied in a passive 50/50 two-output interferometer. Λ is the SNL, γ is the ratio between the additive noise variance in one detection channel and the total shot noise variance measured at the input, and V is the fringe visibility. In double detection with simultaneous estimation, α can be estimated concurrently with θ and the SNL for relative power, also expressed as Λ , can be reached when $\gamma \rightarrow 0$ and $V \rightarrow 1$. In all cases of individual estimation, a non-negligible α instead contaminates the phase estimate θ .

Detection scheme	Single	Balanced	Double	Double
Estimation method	Individual	Individual	Individual	Simultaneous
P	P_1	$P_2 - P_1$	$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$
G	$\frac{VP_0}{2} \sin \theta_0$	$-VP_0 \sin \theta_0$	$\frac{VP_0}{2} \begin{bmatrix} \sin \theta_0 \\ -\sin \theta_0 \end{bmatrix}$	$\frac{P_0}{2} \begin{bmatrix} (1-V \cos \theta_0) & (V \sin \theta_0) \\ (1+V \cos \theta_0) & (-V \sin \theta_0) \end{bmatrix}$
ψ	θ	θ	θ	$\begin{bmatrix} \alpha \\ \theta \end{bmatrix}$
$C_n / (\Lambda P_0^2)$	$\frac{1}{2} (2\gamma + 1 - V \cos \theta_0)$	$\gamma + 1$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\gamma+1-V \cos \theta_0 & 0 \\ 0 & 2\gamma+1+V \cos \theta_0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\gamma+1-V \cos \theta_0 & 0 \\ 0 & 2\gamma+1+V \cos \theta_0 \end{bmatrix}$
$\sigma_\theta^2 / \Lambda$ (any γ, V)	$\frac{2(2\gamma+1-V \cos \theta_0)}{V^2 \sin^2 \theta_0}$	$\frac{\gamma+1}{V^2 \sin^2 \theta_0}$	$\frac{(2\gamma+1)^2 - V^2 \cos^2 \theta_0}{(2\gamma+1)V^2 \sin^2 \theta_0}$	$\frac{2\gamma+1+(2\gamma-1)V^2 \cos^2 \theta_0}{V^2 \sin^2 \theta_0}$
$\sigma_\theta^2 / \Lambda$ ($\gamma = 0, V = 1$)	$\frac{2}{1+\cos \theta_0}$	$\frac{1}{\sin^2 \theta_0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$

the case in practice. Double detection requires more hardware than balanced detection for the same total shot noise variance, which implies a larger additive noise contribution and thus higher estimation variance at the optimal operating point when γ is increased (see Fig. 1.2(b)). However, it offers a better overall performance when shot noise is dominant ($\gamma \ll 1$), as can be recognized by the fact that its estimation variance remains closer to the SNL over a large range of operating phases. This feature can be explained by the fact that the two signals contain more information in total than what remains in their difference. This can provide some advantages for nonstationary phase measurements (phase drift) [26, 27], when there is no prior knowledge about θ_0 and the overall estimation fidelity has to be maximized [28, 29], or when active stabilization of θ_0 through actuation of the laser or the interferometer is impractical or undesired [30, 31]. Double detection is also the only passive scheme that permits independent and simultaneous measurement of α and θ in a two-output interferometer, a convenient property when both parameters convey useful information or when crosstalk is

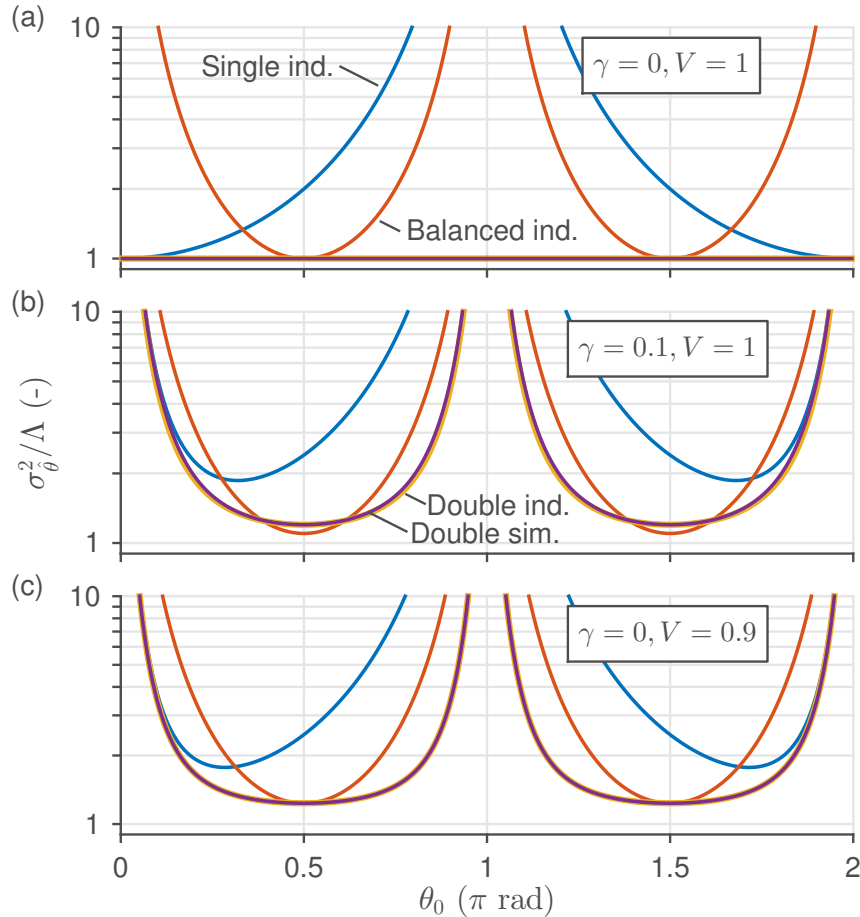


Figure 1.2 – (a) Theoretical ratio between the phase estimator variance and the SNL in the absence of additive noise for a two-output interferometer displaying perfect visibility. (b) Same for perfect visibility with additive noise. (c) Same for imperfect visibility without additive noise.

problematic. However, simultaneous estimation implies a penalty with respect to individual estimation (see Fig. 1.2(b)), a phenomenon that becomes more apparent for higher γ , so it should only be used if the advantages outweigh this penalty.

It is worth noting that double detection has already been recognized by Pezzé *et al.* to perform better than balanced detection for operation close to the SNL in classical-light interferometry [32]. Besides the general form of the mathematical model, notable differences between our works include the initial assumptions (linearity and Gaussian noise, mainly), which are more restrictive here but lead to simple analytical expressions even under explicit consideration of additive noise and various interferometric imperfections, the capacity of our model to properly take technical RIN into account if required, and our following treatment of four-output interferometers. Still, our conclusions about the sensitivity of a two-output interferometer are similar, suggesting that the formalism described here could be successfully translated to interferometers fed by squeezed-vacuum light, as was done by Pezzé *et al.* in a following paper [33].

1.4.4 Performance comparison in a four-output interferometer

The results of the linear MVU estimation analysis for a four-output interferometer are compiled in Table 1.2. Once again, the phase estimate variances for three selected combinations of γ and V are illustrated in Fig. 1.3. By inspection of Table 1.2, it is apparent that double balanced detection produces measurements that are in quadrature. This allows independent and simultaneous extraction of amplitude and phase, even when the phase signal cannot be linearized [2]. Here however, our interest still lies in cases where $\theta \ll 1$ and for which the estimation problem can be put in the linear form of Eq. (1.3). The quadrature relation implies there are no optimal operating points even when $\gamma > 0$ and $V < 1$. In other words, the variance of the phase estimate is always constant, which means that active stabilization is not required for optimal estimation. Moreover, individual and simultaneous estimation always yield the same performance since crosstalk is directly eliminated. The only disadvantage of the double balanced detection scheme is that the SNL cannot be reached: a 3-dB penalty arises even in the ideal case because the total input power is effectively split between two interferometers (I and Q) that both rely on balanced detection, an operation that leads to a loss of useful information as was recognized in the previous section.

In contrast, the SNL can be reached in theory if the quadruple detection scheme is used. This means that the 3-dB penalty of double balanced detection can be eliminated at most but not all operating points. To benefit from this improvement, it might thus be necessary to reintroduce active stabilization. Of course, this constitutes a net advantage only when the increased hardware complexity is tolerable, when additive noise is small, and when fringe visibility is high. As γ increases, the performance of quadruple detection becomes worse than that of double balanced detection, first at certain operating points and eventually over the

Table 1.2 – Elements of the linear model and MVU phase estimator variance for the two detection schemes studied in a passive 50/50 four-output interferometer. Λ is the SNL, γ is the ratio between the additive noise variance in one channel and the total shot noise variance measured at the input, and V is the fringe visibility.

Detection scheme Estimation method	Double balanced		Double balanced		Quadruple	
	Individual	Simultaneous	Individual	Simultaneous	Individual	Simultaneous
P	$\begin{bmatrix} P_2 - P_1 \\ P_4 - P_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} P_2 - P_1 \\ P_4 - P_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{bmatrix}^T$	$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{bmatrix}^T$	Quadruple Simultaneous	
G	$\frac{VP_0}{2} \begin{bmatrix} -\sin \theta_0 \\ \cos \theta_0 \end{bmatrix}$	$\frac{VP_0}{2} \begin{bmatrix} (\cos \theta_0) & (-\sin \theta_0) \\ (\sin \theta_0) & (\cos \theta_0) \end{bmatrix}$	$\frac{VP_0}{4} \begin{bmatrix} \sin \theta_0 \\ -\sin \theta_0 \\ -\cos \theta_0 \\ \cos \theta_0 \end{bmatrix}$	$\frac{P_0}{4} \begin{bmatrix} (1-V \cos \theta_0) & (V \sin \theta_0) \\ (1+V \cos \theta_0) & (-V \sin \theta_0) \\ (1-V \sin \theta_0) & (-V \cos \theta_0) \\ (1+V \sin \theta_0) & (V \cos \theta_0) \end{bmatrix}$		
ψ	θ	$\begin{bmatrix} \alpha \\ \theta \end{bmatrix}$	θ	$\begin{bmatrix} \alpha \\ \theta \end{bmatrix}$		
$C_n / (\Lambda P_0^2)$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\gamma+1 & 0 \\ 0 & 2\gamma+1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\gamma+1 & 0 \\ 0 & 2\gamma+1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} w_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{4,4} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} w_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{4,4} \end{bmatrix}$		
$\sigma_\theta^2 / \Lambda$ (any γ, V)	$\frac{2(2\gamma+1)}{V^2}$	$\frac{2(2\gamma+1)}{V^2}$	$\frac{2[(4\gamma+1)^2 - V^2 \cos^2 \theta_0]}{V^2(4\gamma+1)[(4\gamma+1)^2 - V^2(\sin^4 \theta_0 + \cos^4 \theta_0)]}$	$\frac{2[(4\gamma+1)^2 - V^2 \cos^2 \theta_0]}{V^2(4\gamma+1)[(4\gamma+1)^2 - V^2 \sin^2 \theta_0]}$	2	
$\sigma_\theta^2 / \Lambda$ ($\gamma = 0, V = 1$)	2	2	1	1	1	

¹ $w_{1,1} = 4\gamma + 1 - V \cos \theta_0$, $w_{2,2} = 4\gamma + 1 + V \cos \theta_0$, $w_{3,3} = 4\gamma + 1 - V \sin \theta_0$, $w_{4,4} = 4\gamma + 1 + V \sin \theta_0$

² This expression is only valid for individual estimation, although it constitutes a good approximation in simultaneous estimation for which the true expression is significantly more elaborate. At worst, the displayed and non-displayed expressions differ by 0.5% when $\gamma \approx 0.1$; they become identical for $\gamma = 0$ and $\gamma \rightarrow \infty$. The displayed expression is thus sufficiently accurate in most practical cases.

full 2π range, because the extra detection channels add their own noise. As was the case for a two-output interferometer, there are advantages and disadvantages to the independent measurement of all output signals. The trade-offs are however different in the two cases since crosstalk is rarely problematic in a four-output interferometer, regardless of the detection scheme that is used, whereas the 3-dB penalty is not an issue for the two-output interferometer based on single or balanced detection as long as the operating point is controlled. Still, for best overall performance close to the SNL, monitoring all output ports is preferable in all cases.

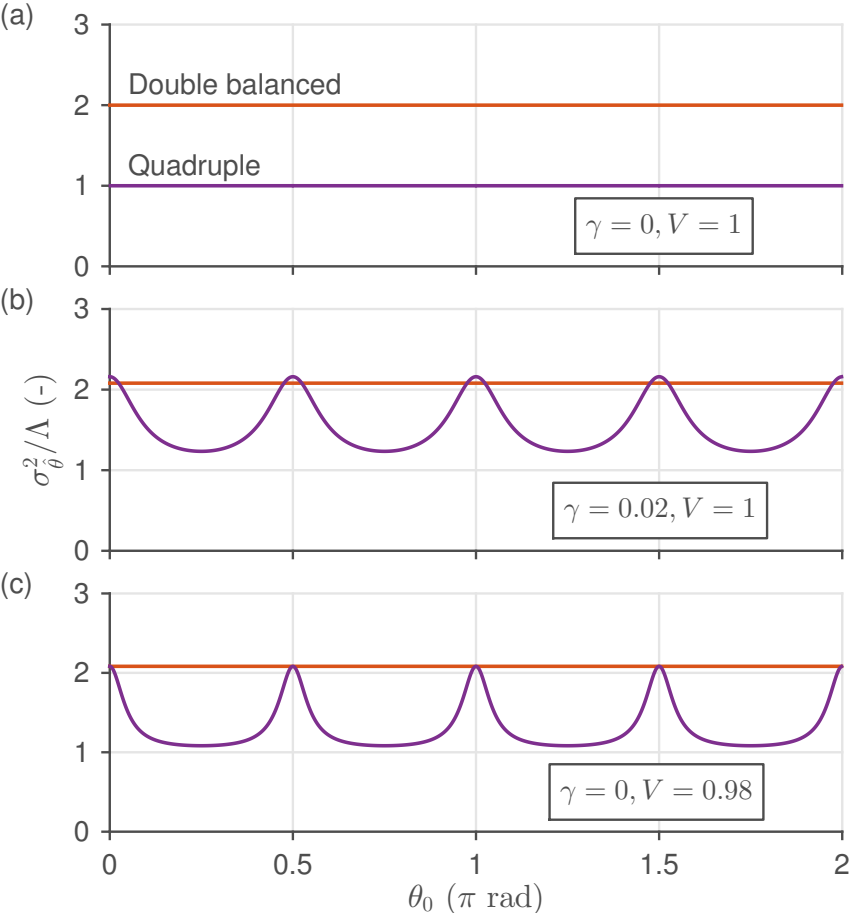


Figure 1.3 – (a) Theoretical ratio between the phase estimator variance and the SNL in the absence of additive noise for a four-output interferometer displaying perfect visibility. (b) Same for perfect visibility with additive noise. (c) Same for imperfect visibility without additive noise. Individual estimation and simultaneous estimation give almost identical results, so only one case is displayed.

1.4.5 Impact of imperfections in the interferometer

At this point, only the imperfect fringe visibility due to polarization mismatch has been considered. It is however easy to model other imperfections such as losses and imperfectly balanced input and output couplers by adjusting the matrix G and the shot noise level in C_n . It should be stressed that any imperfection or departure from the ideal case implies some form of penalty with respect to the estimation variances given in Table 1.1 and Table 1.2, although the final effect may be neutral in some occurrences. Since it can be difficult to accurately model all interferometric imperfections, it is preferable to characterize the instrument in a prior measurement. This calibration can be easily performed through controlled modulation of the laser phase, laser frequency, or the interferometric delay, provided that a full 2π range of θ_0 is explored over the spectral range of interest.

1.5 Experimental demonstration

This section starts with a description of the essential elements of the laboratory setup. We then provide an overview of the signal processing steps before presenting the sensitivities measured experimentally for all detection schemes studied in the previous section, first for a two-output interferometer and then for a four-output interferometer. Instead of working with the phase variance, we consider the integrated PSD between 350 kHz and 1 MHz since it was difficult to reach a satisfying value of γ (for the purpose of this demonstration) when integrating over lower frequencies. With trivial adaptations, the conclusions of the theoretical section remain valid when integrating quantities over a restricted spectral range. Note that the SNL is simply $2h\nu_0/(\eta P_0)$ rad²/Hz when expressed in PSD.

1.5.1 Setup and equipment

The laser used in the experiment (OEwaves, WGM Gen3) outputs continuous-wave light at 194.7 THz (1540 nm) and provides enough optical power to simultaneously saturate all the detectors. A RIN PSD level that is well approximated by the expression $[(4 \times 10^{-11})/f + 3 \times 10^{-17}]$ 1/Hz was measured above 1 kHz, where f is the frequency (shot noise was subtracted for this PSD measurement). The same was done for the frequency noise PSD, with a measured level of roughly $(4 \times 10^6)/f$ Hz²/Hz. An electro-optic modulator (EOM, from EOspace) was used at the interferometer's input, allowing the generation of a phase modulation sinusoidal signal at 300 kHz for verification purposes.

We assembled a fiber interferometer similar to the one illustrated in Fig. 1.1(b) and set a small differential delay $\tau_0 \approx 3$ ps (corresponding to approximately 600 μm in silica) in order to minimize losses, phase drift, and unwanted contribution from laser frequency noise⁵. However,

5. With a low-frequency power gain of $(2\pi\tau_0)^2$ rad²/Hz², the associated phase noise contribution is lower than that of shot noise above 10 Hz.

a small gain for frequency noise also implies a small gain for laser phase modulation (PM). This explains why we observed a significant residual amplitude modulation (AM) at 300 kHz when using the EOM, as the interferometric gain for AM is instead close to unity. It will be necessary to consider the contribution of this residual AM, displaying a 2.6 radians phase shift and a -15 dB level with respect to the phase component (units of α versus θ), in order to explain the results presented later. Since our goal is to expose the ultimate noise floor that lies under the verification signal at 300 kHz, laser frequency noise is undesired in our experiment; however, it would constitute the signal of interest in many applications.

Instead of implementing all detection schemes in succession, we simply performed quadruple detection, recorded the data, and emulated the action of other schemes through signal processing; to study the two-output interferometer, we discarded the two signals of the interferometer's Q branch. This shortcut is associated with one important difference with respect to our previous theoretical treatment: it introduces more additive noise than strictly possible in balanced detection, since a typical balanced detector would add negligible additive noise prior to the subtraction step, as was assumed in the theoretical analysis (see Fig. 1.1). However, this has a small impact in our chosen regime of operation and our conclusions remain the same (the theoretical model could however be adapted in cases for which γ is closer to 1).

Amplified InGaAs detectors were designed to minimize γ , the ratio between additive noise variance and shot noise variance. The first step in this direction usually consists in maximizing the output voltage, given by the product of the transimpedance gain R and the photocurrent I_0 . Here, a maximum value of $RI_0 \approx 18$ V was possible. This figure determines the ratio between the thermal noise variance associated to the feedback resistor and the shot noise variance. With RI_0 fixed, what remains is the adjustment of R so that other forms of additive noise, namely ADC noise, are not contributing too much to the overall noise. With this objective in mind, we chose a value $R = 39$ k Ω . Considering the properties of the photodiode (Thorlabs, FGA01FC), circuit board, and operational amplifier, this value of R sets the detection bandwidth to roughly 1 MHz (resonance at 1.4 MHz with an OP-27 operational amplifier) and the maximum photocurrent to $I_0 = 450$ μ A.

The maximum value of P_0 is also determined by these design choices since the power that can reach a single detector in a four-output interferometer is $P_0/2$ at most in the absence of imperfections. For one of the four detectors to output its maximum voltage at one operating point, $P_0 \approx 1$ mW would be needed at the interferometer's input. In the experiment, the laser signal was instead attenuated down to 865 μ W in order to maintain an acceptable level of nonlinearity. Taking all design parameters into account, we calculated and measured $\gamma \approx 0.003$ (Fig. 1.4(a)), a value that could have been reduced further at the expense of a lower detection bandwidth. However, in spite of these design efforts, the final performance of the interferometer was in large part determined by the fringe visibility, measured at $V = 0.986$ (the geometric mean of the four slightly different visibilities).

The dynamic range of our ADC (GaGe CSE8389) was insufficient to reach this low value of γ when measuring small fluctuations on top of a DC signal that could reach more than 15 V. Consequently, each signal was split using a crossover network into a low-pass-filtered part (LP) and high-pass-filtered part (HP) with cutoff at 6 kHz; the two parts were recorded independently. With their higher signal-to-noise ratio, the HP signals were used for the final noise analysis. However, the LP signals were required to conduct the calibration and extract the average phase, two operations that are based on the processing of DC or low frequency signals. The ADC's voltage noise PSD was measured to be $120 \text{ nV/Hz}^{1/2}$ at 40 kHz, a value associated to $\gamma(40 \text{ kHz}) \approx 0.05$, and decreasing towards a white floor of level $15 \text{ nV/Hz}^{1/2}$ from 300 kHz and up, or $\gamma(f > 300 \text{ kHz}) \approx 0.003$. With the useful detection bandwidth limited at 1 MHz, this explains why the analysis was performed over a restricted spectral range. For a total duration of 160 ms, all signals were sampled at 125 MS/s, the available ADC's highest possible rate, in order to minimize digitizer noise aliasing.

1.5.2 Signal processing

Several offline measurements were performed in order to obtain results as free of the effects of experimental imperfections as possible. First, the frequency response of each detection channel was characterized through laser power modulation over the full detection bandwidth (Fig. 1.4(b)). This allowed the construction of an equalizing filter, effective from the 6 kHz cutoff frequency up to 1 MHz (the gain was also brought back to 1). This filter was applied to all HP signals prior to further processing. Second, the average of the additive noise PSD between 350 kHz and 1 MHz was computed; the single figure obtained for each detection channel was used as the first part of the measurement noise covariance (or variance) C_n , the other part being shot noise which was modeled based on the results of the calibration procedure outlined in the theoretical section. As stated before, this calibration was also required to obtain an accurate estimate of the observation matrix.

Since the calibration was performed using the same laser and interferometer as in the final measurement, it was affected by the same types of noise, leading to a limited sensitivity. However, this calibration was required to characterize the *average* behavior of the interferometer; therefore, aggressive averaging could be performed so as to minimize the uncertainty. We thus started by modeling each LP calibration signal in the following modified form:

$$P'_k = b_k + a_k \cos(\beta + \chi_k) + n_k \quad (1.9)$$

for $k = 1, 2, 3$, and 4, where b_k is the fringe bias, a_k is the fringe amplitude, and χ_k is a phase offset. For a perfect interferometer, the parameters of the last expression would take values $b_k = a_k = P_0/2$ and $\chi_k = \{\pi, 0, -\pi/2, \pi/2\}$. Of course, this is never exactly the case in practice, namely because an optical 90° hybrid coupler does not produce a perfect $\pi/2$ phase shift and because it can introduce some crosstalk between its I and Q branches, but also because of the typical imperfections which have been mentioned in section 1.4. To estimate

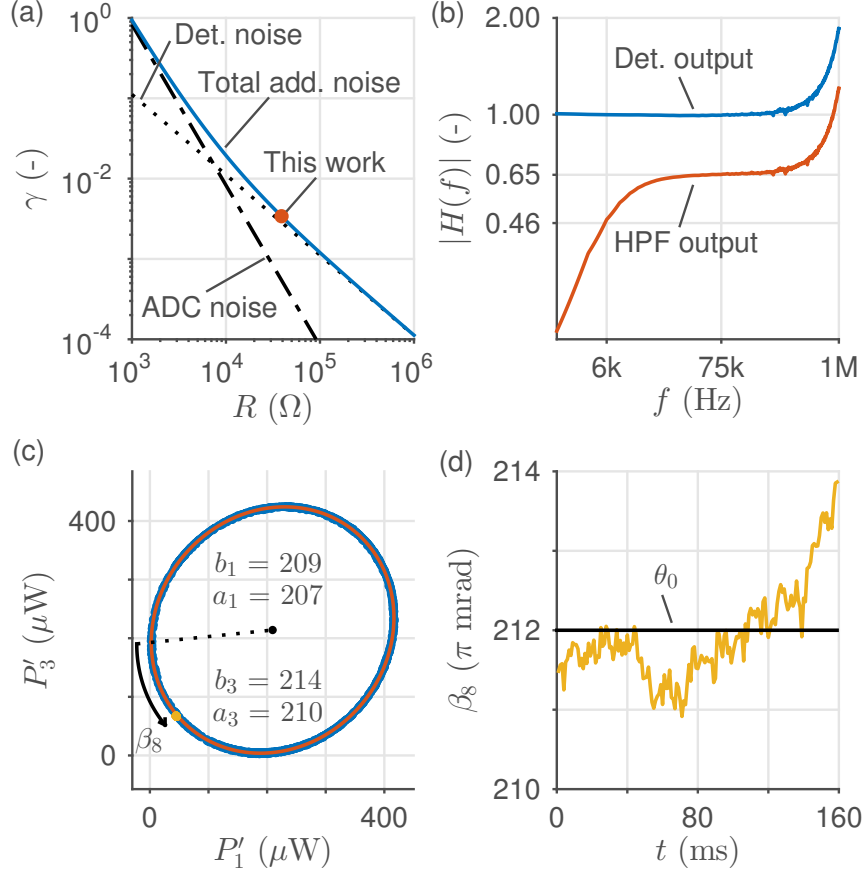


Figure 1.4 – (a) Theoretical relation between γ and the transimpedance gain R for $\eta = 0.79$, $P_0 = 865 \mu\text{W}$, $T = 300 \text{ K}$ (the effective temperature is $T \approx 550 \text{ K}$ considering the operational-amplifier current noise) and $\nu_0 = 194.7 \text{ THz}$, and for an acquisition noise of density $15 \text{ nV/Hz}^{1/2}$. (b) Measured frequency response’s modulus normalized by the transimpedance gain at the detector’s output and at the HP filter’s output. (c) Samples of the calibration data (blue points) and constrained least squares elliptical fit (orange line). Four of the five extracted parameters are displayed in units of μW . The fifth parameter is an angle which has to be combined with the angles provided by the two other fits (not displayed) to extract the four χ_i . Samples of the LP signals associated to the 8th sensitivity measurement are superimposed in yellow. (d) Time-resolved values of β_8 extracted using Eq. (1.9). The value of θ_0 is taken as the mean of this signal.

the value of each parameter, we performed a constrained least squares elliptical fit [34] on the three data sets $P'_3(P'_1)$, $P'_4(P'_2)$, and $P'_2(P'_1)$, which was possible since β (analogous to the full phase $\theta_0 + \theta(t)$ outside of calibration, but more affected by measurement noise) was slowly varied over a full 2π range during the calibration run (Fig. 1.4(c)). Three such fits provide a total of 15 ellipse parameters, of which 4 are redundant, in the context of IQ interferometry; this is enough to estimate the 12 unknowns of Eq. (1.9), of which 11 are independent.

With these 11 parameters and the average additive noise level in hand, the matrices G and C_n

were calculated over the full phase range and for all detection scheme, providing benchmarks to assess the performance of the MVU estimates measured experimentally. Final sensitivity measurements were carried out at 25 static operating points. In each case, it was necessary to extract an accurate value of θ_0 so as to compute the proper estimate from Eq. (1.5). This was done by inverting a noiseless version of Eq. (1.9) in order to isolate β_n using the LP signals (P'_k) recorded for the n^{th} data set. The mean of β_n was taken as the θ_0 value for the n^{th} measurement (Fig. 1.4(d)); its standard deviation was used to trace the x-axis error bar. Finally, each MVU estimate's PSD was computed and the sensitivity was calculated as its integral between 350 kHz and 1 MHz, with y-axis error bars given by the standard deviation of the associated spectral noise.

1.5.3 Results

The outputs of the processing procedure are shown in Fig. 1.5 and Fig. 1.6. Since the results were nearly identical for all schemes in which both individual and simultaneous estimation is possible, we only displayed the latter to minimize clutter. By inspection of Fig. 1.6, it can be noticed that the model curves are slightly asymmetric with respect to $\theta_0 = \pi$. This is caused by the crosstalk between the I and Q branches of the hybrid coupler, which produces a small phase offset measured at 0.02 rad. A similar asymmetry is found in Fig. 1.5, but in this case it is artificial since these results were obtained by discarding the two signals of the four-output interferometer's Q branch, as explained before. Therefore, this phenomenon could not occur in a real two-output interferometer. It is worth noting that the total power, the visibility, and the parameter γ are not perfectly identical in the I and Q branch, which justifies the different model parameters used in the two plots. Other asymmetries can be explained by the 0.1 rad error in the IQ phase shift at 194.7 THz, the definition of the reference angle ($\theta_0 = 0$), and other imperfections visible in Fig. 1.4(c).

For the two-output interferometer, the amplitude of the calibration signal at 300 kHz is visibly different for the three detection schemes. This arises since the input signal is not pure PM, but rather contains AM as stated previously. At the operating point $\theta_0 = 0.21\pi$, AM (and identically RIN) are fully canceled only in double detection and simultaneous estimation: the theoretical interferometric gain for α -type signals instead is -8.8 dB for single detection and 2.1 dB (with a π phase shift) for balanced detection, taking the interferometer imperfections into account. These numbers are fully consistent with the observed signal levels considering the phase shift and relative contribution of AM versus PM in the verification tone. The AM-to-PM crosstalk also explains why the curve for balanced detection is significantly higher below 100 kHz than the two others: it is much more contaminated by technical RIN. Finally, we note that these effects are not visible in Fig. 1.6 primarily because a four-output interferometer is largely immune to such crosstalk.

Starting from 300 kHz and going down, the value of γ increases progressively by roughly one

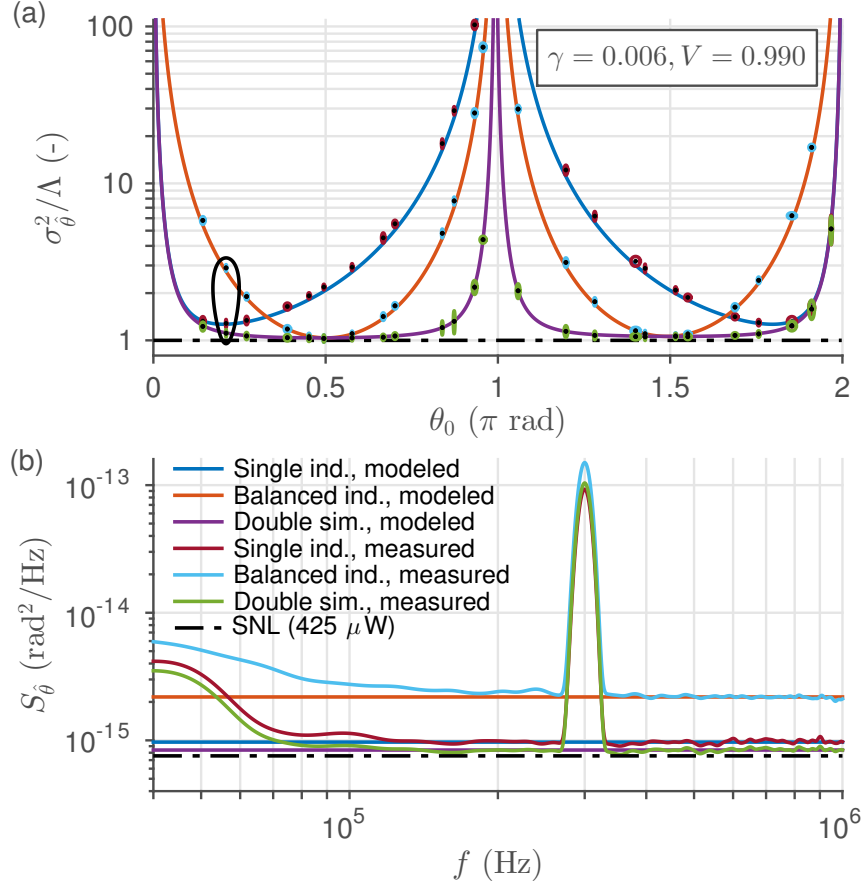


Figure 1.5 – (a) Comparison between the modeled and measured phase estimate variances as a function of operating point in a two-output interferometer. (b) Same for the phase estimate PSD, but only at the operating point circled in the top panel.

order of magnitude. Obviously, this increases the total measurement noise variance, which in turn raises the phase noise floor in this region. However, the main reason why the PSDs are seen to rise significantly below 70 kHz is because the estimator was built assuming a value of γ that is invalid below 300 kHz. Therefore, the estimator is not optimal since the model is inaccurate in this spectral range, which means the CRB cannot be reached. Nevertheless, in the range of interest for this demonstration between 350 kHz and 1 MHz, the experimental results are in excellent agreement with the model, a fact which confirms the conclusions of our theoretical treatment.

1.6 Conclusion

For phase estimation in passive classical-light interferometry, that is, the common problem of precisely measuring a phase shift from a known operating point, our linearized analysis based on minimum variance unbiased estimation theory has shown that the best direct-detection

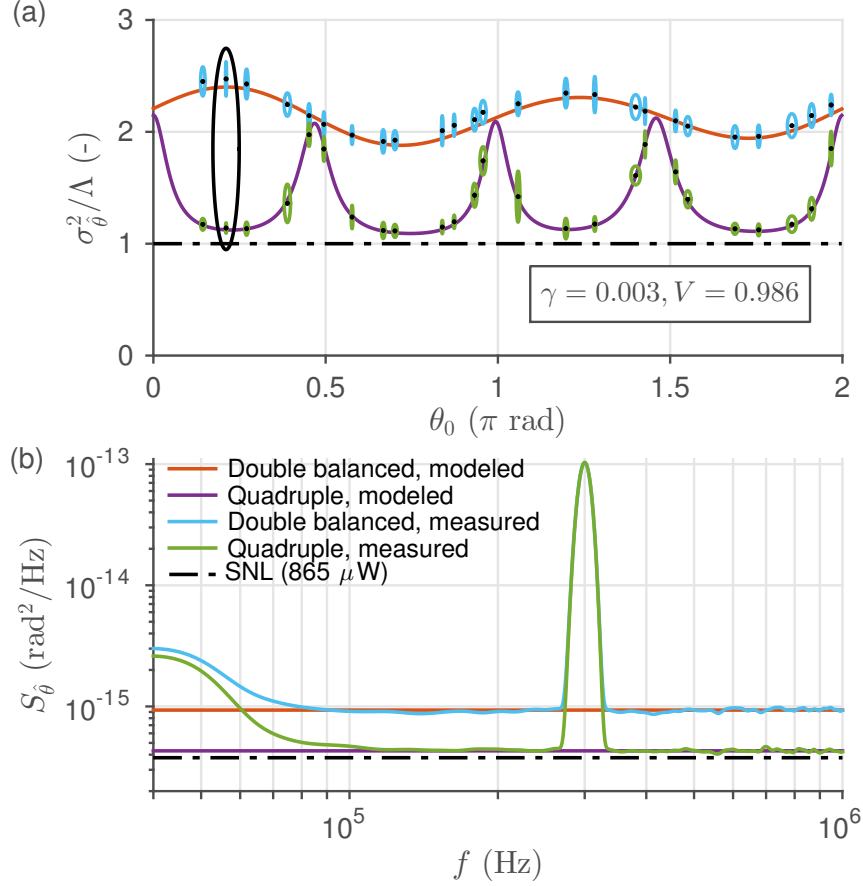


Figure 1.6 – (a) Comparison between the modeled and measured phase estimate variances as a function of operating point in a four-output interferometer. (b) Same for the phase estimate PSD, but only at the operating point circled in the top panel.

scheme when operating close to the shot-noise limit (SNL) is the one in which all output ports are independently monitored. Used in a two-output interferometer, this allows a cancellation of technical laser amplitude noise and broadens the phase range over which the SNL is approached with respect to other passive detection schemes. Used in a four-output interferometer, this almost fully removes the 3-dB sensitivity penalty of the more common double balanced detection scheme. In both cases, an intuitive explanation for the improved performance is that the optimal detection scheme maximizes the ratio of recorded to available information, provided that the level of additive noise introduced by the supplemental detection hardware remains sufficiently low. Otherwise, more conventional detection schemes may be preferable, depending on the application. We have presented a conclusive experimental demonstration that supports these theoretical findings.

For a large class of instruments, the optimal detection scheme presented here can be implemented in a straightforward manner and its benefits can be reaped with modest signal processing that can be easily performed offline or online using modern digital electronics. This claim

can be justified by recognizing that many instruments are based on relatively simple setups illuminated by unmodulated classical light and reach their best performance when operating close to the SNL. Therefore, the demonstration made in this paper should be relevant to a large number of scientists and engineers working on interferometric instruments such as fiber optic sensors and laser gyroscopes. In the near future, the simple detection scheme may also be applied in order to beat the shot-noise-limited phase sensitivity using an interferometer fed with non-classical light.

1.7 Bibliographie

- [1] F. Kéfélian, H. Jiang, P. Lemonde, and G. Santarelli. Ultralow-frequency-noise stabilization of a laser by locking to an optical fiber-delay line. *Optics Letters*, 34(7) :914–916, 2009. URL <https://doi.org/10.1364/OL.34.000914>.
- [2] V. Michaud-Belleau, H. Bergeron, P. S. Light, N. B. Hébert, J.-D. Deschênes, A. N. Luiten, and J. Genest. Passive coherent discriminator using phase diversity for the simultaneous measurement of frequency noise and intensity noise of a continuous-wave laser. *Metrologia*, 53(5) :1154–1164, 2016. URL <https://doi.org/10.1088/0026-1394/53/5/1154>.
- [3] B. P. Abbott et al. GW150914 : The advanced LIGO detectors in the era of first discoveries. *Physical Review Letters*, 116(13) :131103, 2016. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.131103>.
- [4] G. M. Harry et al. Advanced LIGO : the next generation of gravitational wave detectors. *Classical and Quantum Gravity*, 27(8) :084006, 2010. URL <https://doi.org/10.1088/0264-9381/27/8/084006>.
- [5] H. C. Lefevre. *The fiber-optic gyroscope*. Artech House, 2014.
- [6] W. W. Chow, J. Gea-Banacloche, L. M. Pedrotti, V. E. Sanders, W. Schleich, and M. O. Scully. The ring laser gyro. *Review of Modern Physics*, 57(1) :61–104, 1985. URL <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.57.61>.
- [7] P. Hariharan. *Basics of interferometry*. Academic Press, 2010.
- [8] R. Demkowicz-Dobrzański, M. Jarzyna, and J. Kołodyński. Chapter four - Quantum limits in optical interferometry. *Progress in Optics*, 60 :345–435, 2015. URL <https://doi.org/10.1016/bs.po.2015.02.003>.
- [9] P. Fritschel, G. González, B. Lantz, P. Saha, and M. Zucker. High power interferometric phase measurement limited by quantum noise and application to detection of gravitational waves. *Physical Review Letters*, 80(15) :3181–3184, 1998. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.3181>.

- [10] C. M. Caves. Quantum-mechanical noise in an interferometer. *Physical Review D*, 23(8) : 1693–1708, 1981. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.23.1693>.
- [11] U. L. Andersen, T. Gehring, C. Marquardt, and G. Leuchs. 30 years of squeezed light generation. *Physica Scripta*, 91(5) :053001, 2016. URL <https://doi.org/10.1088/0031-8949/91/5/053001>.
- [12] A. A. Berni, T. Gehring, B. M. Nielsen, V. Händchen, M. G. A. Paris, and U. L. Andersen. *Ab initio* quantum-enhanced optical phase estimation using real-time feedback control. *Nature Photonics*, 9(9) :577–581, 2015. URL <https://doi.org/10.1038/nphoton.2015.139>.
- [13] J. Aasi et al. Enhanced sensitivity of the LIGO gravitational wave detector by using squeezed states of light. *Nature Photonics*, 7(8) :613–619, 2013. URL <https://doi.org/10.1038/nphoton.2013.177>.
- [14] J. H. Shapiro. Parity measurements versus dual-homodyne measurements in coherent-state Mach–Zehnder interferometry. *Journal of the Optical Society of America B*, 34(8) : 1699–1704, 2017. URL <https://doi.org/10.1364/JOSAB.34.001699>.
- [15] S. M. Kay. *Fundamentals of statistical signal processing*. Prentice Hall PTR, 1993.
- [16] A. J. Stevenson, M. B. Gray, H.-A. Bachor, and D. E. McClelland. Quantum-noise-limited interferometric phase measurements. *Applied Optics*, 32(19) :3481–3493, 1993. URL <https://doi.org/10.1364/AO.32.003481>.
- [17] B. P. Abbott et al. LIGO : the laser interferometer gravitational-wave observatory. *Reports on Progress in Physics*, 72(7) :076901, 2009. URL <https://doi.org/10.1088/0034-4885/72/7/076901>.
- [18] M. B. Gray, A. J. Stevenson, C. C. Harb, H.-A. Bachor, and D. E. McClelland. External phase-modulation interferometry. *Applied Optics*, 35(10) :1623–1632, 1996. URL <https://doi.org/10.1364/AO.35.001623>.
- [19] T. T. Fricke. *Homodyne detection for laser-interferometric gravitational wave detectors*. PhD thesis, Louisiana State University, 2011.
- [20] S. Hild, H. Grote, J. Degallaix, S. Chelkowski, K. Danzmann, A. Freise, M. Hewitson, J. Hough, H. Lück, M. Prijatelj, K. A. Strain, J. R. Smith, and B. Willke. DC-readout of a signal-recycled gravitational wave detector. *Classical and Quantum Gravity*, 26(5) : 055012, 2009. URL <https://doi.org/10.1088/0264-9381/26/5/055012>.
- [21] A. J. Stevenson, M. B. Gray, C. C. Harb, D. E. McClelland, and H.-A. Bachor. Interferometers with internal and external phase modulation : experimental and analytical comparison. *Australian Journal of Physics*, 48(6) :971–998, 1995. URL <https://doi.org/10.1071/PH950971>.

- [22] T. M. Niebauer, R. Schilling, K. Danzmann, A. Rüdiger, and W. Winkler. Nonstationary shot noise and its effect on the sensitivity of interferometers. *Physical Review A*, 43(9) : 5022–5029, 1991. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.43.5022>.
- [23] R. Hui and M. O’Sullivan. *Fiber optic measurement techniques*. Academic Press, 2009.
- [24] J.-D. Deschênes. *Non-stationary photodetection shot noise in frequency combs : a signal processing perspective*. PhD thesis, Université Laval, 2014.
- [25] A. Papoulis and S. U. Pillai. *Probability, random variables, and stochastic processes*. Tata McGraw-Hill Education, 2002.
- [26] B. T. Gard, C. You, D. K. Mishra, R. Singh, H. Lee, T. R. Corbitt, and J. P. Dowling. Nearly optimal measurement schemes in a noisy Mach-Zehnder interferometer with coherent and squeezed vacuum. *EPJ Quantum Technology*, 4(1) :4, 2017. URL <https://doi.org/10.1140/epjqt/s40507-017-0058-8>.
- [27] M. G. Genoni, S. Olivares, D. Brivio, S. Cialdi, D. Cipriani, A. Santamato, S. Vezzoli, and M. G. A. Paris. Optical interferometry in the presence of large phase diffusion. *Physical Review A*, 85(4) :043817, 2012. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.85.043817>.
- [28] T. B. Bahder. Phase estimation with nonunitary interferometers : Information as a metric. *Physical Review A*, 83(5) :053601, 2011. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.83.053601>.
- [29] T. B. Bahder and P. A. Lopata. Fidelity of quantum interferometers. *Physical Review A*, 74(5) :051801, 2006. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.74.051801>.
- [30] S. Chen, C. Li, and Y. Zhu. Sensitivity evaluation of quantitative phase imaging : a study of wavelength shifting interferometry. *Optics Letters*, 42(6) :1088–1091, 2017. URL <https://doi.org/10.1364/OL.42.001088>.
- [31] H. Yonezawa, D. Nakane, T. A. Wheatley, K. Iwasawa, S. Takeda, H. Arao, K. Ohki, K. Tsumura, D. W. Berry, T. C. Ralph, H. M. Wiseman, E. H. Huntington, and A. Furusawa. Quantum-enhanced optical-phase tracking. *Science*, 337(6101) :1514–1517, 2012. URL <https://doi.org/10.1126/science.1225258>.
- [32] L. Pezzé, A. Smerzi, G. Khoury, J. F. Hodelin, and D. Bouwmeester. Phase detection at the quantum limit with multiphoton Mach-Zehnder interferometry. *Physical Review Letters*, 99(22) :223602, 2007. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.99.223602>.
- [33] L. Pezzé and A. Smerzi. Mach-Zehnder interferometry at the Heisenberg limit with coherent and squeezed-vacuum light. *Physical Review Letters*, 100(7) :073601, 2008. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.073601>.

- [34] A. Fitzgibbon, M. Pilu, and R. B. Fisher. Direct least square fitting of ellipses. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 21(5) :476–480, 1999. URL <https://doi.org/10.1109/34.765658>.

Chapitre 2

External serrodyne modulation for the suppression of low-frequency noise in quadrature interferometry

Vincent Michaud-Belleau, Mark Charlet, Alex Tourigny-Plante, Jean-Daniel Deschênes et Jérôme Genest

Centre d'optique, photonique et laser, Université Laval, Québec, QC G1V 0A6, Canada

Publié dans *Optics Letters*, 45(3) :670-673, 2020¹.

URL <https://doi.org/10.1364/OL.376542>.

2.1 Résumé

En interférométrie, l'atteinte d'un rapport signal sur bruit élevé aux basses fréquences peut être difficile lorsque le bruit additif n'est pas stationnaire. Bien que ce problème soit généralement résolu par l'insertion d'un modulateur acousto-optique dans l'un des bras, dans certains cas l'interféromètre ne peut pas ou ne doit pas être modifié de cette manière. Cet article présente une solution alternative, basée sur la modulation serrodyne en fréquence appliquée à l'extérieur de l'interféromètre, qui est comparable à l'approche typique en termes de complexité et de performance, mais qui ne nécessite pas la modification de l'interféromètre passif. Nous faisons la démonstration d'un prototype atteignant un décalage en fréquence de 500 kHz avec une efficacité en puissance de 89%, ce qui diminue l'impact du bruit additif aux basses fréquences par plus de 19 dB. Cette amélioration permet une mesure entièrement passive du bruit thermoconductif d'une fibre monomode d'une longueur de 100 mètres.

1. *Reprinted article, with permission, from Vincent Michaud-Belleau, Mark Charlet, Alex Tourigny-Plante, Jean-Daniel Deschênes, and Jérôme Genest, Optics Letters, 45(3), 670-673, 2020. © 2020 Optica Publishing Group.*

2.2 Abstract

In interferometry, reaching a high signal-to-noise ratio at low frequencies can be challenging when the additive noise is non-stationary. Although this problem is typically solved by inserting a frequency shifter into one of the arms, in some cases the interferometer cannot or should not be modified in this way. This Letter presents an alternative solution, based on external serrodyne frequency modulation, which is comparable to the typical approach in terms of complexity and performance yet does not require the modification of a passive interferometer. We demonstrate a prototype which achieves frequency shifting at 500 kHz with 89% power efficiency, leading to the wideband suppression of low-frequency additive noise by more than 19 dB. This enables a fully passive measurement of the thermoconductive noise of a 100-meter single-mode fiber.

2.3 Introduction

Measuring phase with the highest possible precision is one of the main objectives of modern interferometry. For instance, it is relevant for the stabilization and characterization of lasers [1], the detection of gravitational waves [2], and, more generally, in any context where a physical effect can be transduced to an optical path-length variation [3]. The achievable precision of the phase estimate is usually determined by the additive noise; this includes all noises modeled as independent from the interferometric signal. Since these noises are somehow converted to undesired phase noise after demodulation, it is critical to minimize their contribution when designing the instrument.

In order for an interferometer to reach its ultimate performance given the available optical power, the dominant form of additive noise should be shot noise [4]. When all other noise sources are white, a reasonable assumption for quantization noise and thermal noise, meeting a set of well-known design rules [5] lead to shot noise being dominant. However, these rules break down for non-stationary noise such as the $1/f$ noise (flicker) that prevails over the low-frequency portion of amplified photodetectors' spectra. Moreover, even when the interferometer is not shot-noise limited, a noise variance that increases with measurement time is an impediment to the characterization of slow processes. Apart from lowering the low-frequency noise in the detection chain, a challenge somewhat outside of the field of optics, the standard solution to this problem is to insert an acousto-optic modulator (AOM) driven by a sinusoid into one of the interferometer's arms [1]. This shifts the photocurrent's spectrum to a band where the noise is white, ensuring its contribution remains stationary and minimal after demodulation. Although this "self-heterodyne" technique is simple and effective, inserting an AOM into an interferometer is not always desirable since it can disrupt its stability or act as a point of entrance for environmental perturbations [6]. Moreover, the arms of an interferometer are not always easily accessible.

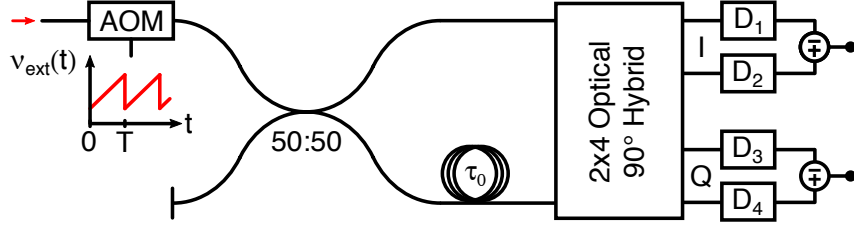


Figure 2.1 – Lossless quadrature interferometer considered in this Letter. The symbol "D" stands for a photodetector and the red arrow represents the injection of continuous-wave (CW) laser light. An AOM is used to produce the external FM in this figure, but it could also be produced through laser modulation.

In this Letter, we show that the photocurrent's spectrum can also be shifted in an efficient manner through frequency modulation (FM) performed outside of a quadrature interferometer. This requires the use of serrodyne (or sawtooth) FM, a format which has been used extensively in fields such as radar [7], lidar [8], and laser reflectometry [9]. However, its advantages have not yet been recognized for the mitigation of low-frequency additive noise in high-precision interferometry. The first section of this Letter is dedicated to the theoretical analysis of the technique used in this specific context, with a focus on its noise suppression capabilities relative to the quadrature homodyne technique. The second section covers an experimental demonstration.

2.4 Theory

Assuming balanced detection, we can model the complex photocurrent at the output of a 50:50 quadrature interferometer illuminated by CW laser light (Fig. 2.1) in the following way:

$$I(t) = I_i(t) + jI_q(t) = Ae^{j[\theta_0 + \theta(t)]} + n_i(t) + jn_q(t), \quad (2.1)$$

where A is the amplitude, considered to be constant for simplicity, and θ_0 is the mean phase given by $2\pi\nu_0\tau_0$, with ν_0 the laser's mean frequency and τ_0 the interferometer's mean delay. The zero-mean signals $n_i(t)$ and $n_q(t)$ account for all additive noises including shot noise; we model them as independent processes sharing a common power spectral density $S_n^{II}(f)$ (PSD, two-sided) and assume their variance is much smaller than A^2 .

The time-varying phase $\theta(t)$ is defined as a sum of several zero-mean processes:

$$\theta(t) = [\nu_{\text{las}}(t) + \nu_{\text{ext}}(t)] * h_{\nu\theta}(t) + 2\pi\nu_0\tau(t), \quad (2.2a)$$

$$h_{\nu\theta}(t) = 2\pi\Pi(t/\tau_0 - 1/2), \quad (2.2b)$$

where $\nu_{\text{las}}(t)$ and $\tau(t)$ represent the intrinsic laser frequency noise and interferometric delay noise, respectively, while $\nu_{\text{ext}}(t)$ is the optional and deterministic FM which could be generated, e.g., through direct laser modulation [10] or using an AOM as in Fig. 2.1 [11]. The

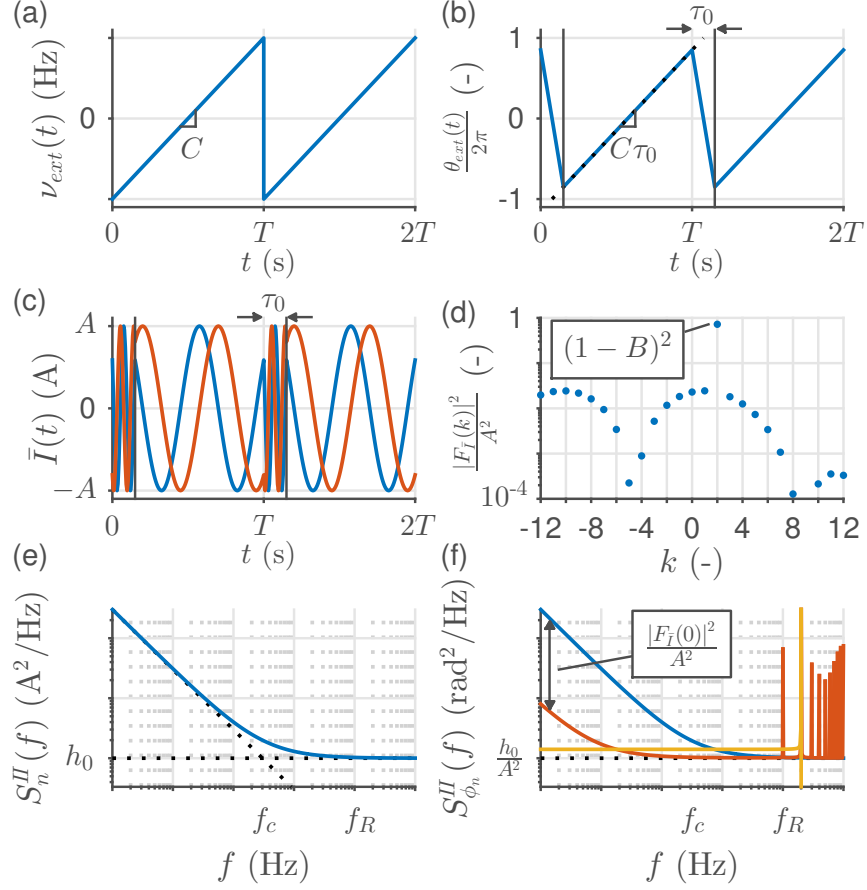


Figure 2.2 – Theoretical waveforms for $B = 0.15$ and $m = 2$. (a) Serrodyne FM (Eq. 2.3). (b) Interferometric PM with visible τ_0 -long flyback. (c) Noiseless photocurrent for $\theta_0 = 0$ with real part in blue and imaginary part in orange (Eq. 2.1). (d) Squared modulus of the normalized Fourier series (Eq. 2.4). The most powerful harmonic is at number k closest to m ; for m integer as illustrated, it contains a fraction $(1 - B)^2$ of the total power. (e) Example of a typical additive noise PSD exhibiting a white floor of level h_0 and some $1/f$ noise below a cutoff frequency f_c . (f) Additive noise contribution to the extracted phase for quadrature homodyne (blue, $S_n^H(f)/A^2$, [13]), serrodyne with AHD (orange, Eq. 2.7), and serrodyne with MHD (yellow, Eq. 2.8).

impulse response $h_{\nu\theta}(t)$ following the convolution operator $(*)$ describes the conceptual filter which converts laser frequency into interferometric phase, with Π as the unit-width boxcar function. This boxcar shape is due to the combination of the phase difference performed by the interferometer with the integration required to convert laser frequency into laser phase; it is the time-domain equivalent of the interferometer's sinc-shaped frequency response to an FM input [12].

If the complex photocurrent is to be frequency-shifted as in a self-heterodyne interferometer, the total phase $\theta(t)$ must contain an unbounded ramp. This can be achieved if $\nu_{\text{ext}}(t)$ describes a linear chirp of rate C : in this case only, the interplay of chirp and delay creates a constant

frequency difference between the two signals that propagate in the interferometer's arms and ultimately beat together. However, such a chirp displays infinite bandwidth and cannot be realized in practice. A substitute is a periodized segment of a linear chirp, or sawtooth waveform:

$$\nu_{\text{ext}}(t) = -CT/2 + Ct \bmod CT, \quad (2.3)$$

with T as the modulation period (Fig. 2.2(a)) and mod as the modulo operator. With this solution, however, even a perfect sawtooth on the laser frequency does not yield the desired sawtooth on the interferometric phase. This is due to the moving average (boxcar) action of the interferometer: filtering the FM waveform defined in Eq. 2.3 with $h_{\nu\theta}(t)$ produces, in each period, a τ_0 transient response during which $\theta_{\text{ext}}(t) = \nu_{\text{ext}}(t) * h_{\nu\theta}(t)$ undergoes a linear flyback (Fig. 2.2(b) and (c)) [7].

The presence of a phase flyback means that the photocurrent spectrum cannot be fully shifted around a single frequency. Since the phase modulation (PM) is periodic in T , shifting instead occurs around all harmonics of $f_R = 1/T$ (Fig. 2.2(d)). The contribution of each harmonic can be computed from the Fourier series of the noiseless complex photocurrent $\bar{I}(t) = Ae^{j[\theta_0 + \theta_{\text{ext}}(t)]}$:

$$F_{\bar{I}}(k) = Ae^{j(\theta_0 - \pi kB)} \left\{ B \text{sinc} [(k - m)B + m] + (-1)^k (1 - B) \text{sinc} [(k - m)(1 - B)] \right\}, \quad (2.4)$$

where k is the harmonic number, $B = \tau_0/T$ is the fraction of time spent in flyback, and $m = C\tau_0/f_R$ is the normalized frequency shift which is not necessarily an integer. Ultimately, the phase of interest is $\phi(t) \equiv \nu_{\text{las}}(t) * h_{\nu\theta}(t) + 2\pi\nu_0\tau(t)$, that is, the total phase minus the contribution from external PM. Using this new definition and the Fourier decomposition leads to two convenient representations of the photocurrent in Eq. 2.1:

$$I(t) = e^{j\phi(t)} Ae^{j[\theta_0 + \theta_{\text{ext}}(t)]} + n_i(t) + jn_q(t) \quad (2.5a)$$

$$= e^{j\phi(t)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_{\bar{I}}(k) e^{j2\pi k f_R t} + n_i(t) + jn_q(t). \quad (2.5b)$$

There are two demodulation schemes that allow the estimation of the phase of interest $\phi(t)$ from $I(t)$ with minimal additive noise contribution. The first one, which we call "all-harmonic demodulation" (AHD), consists in the extraction of the total phase from $I(t)$ followed by the subtraction of $[\theta_0 + \theta_{\text{ext}}(t)]$. For a small phase of interest ($\nu_{\text{las}}(t)$ and $\tau(t)$ lead to $\phi(t) \ll 1$), this is equivalent to the following operations which are simpler to model through linearization: (1) divide $I(t)$ by $\bar{I}(t) = Ae^{j[\theta_0 + \theta_{\text{ext}}(t)]}$ and (2) take the imaginary part of the result. From Eq. 2.5a, these steps produce an unbiased estimate of the phase, $\hat{\phi}(t) \equiv \phi(t) + \phi_n(t)$, where the additive contribution is:

$$\phi_n(t) \approx \frac{-n_i(t) \sin [\theta_0 + \theta_{\text{ext}}(t)] + n_q(t) \cos [\theta_0 + \theta_{\text{ext}}(t)]}{A}. \quad (2.6)$$

This zero-mean contribution is associated to the following PSD, which is a weighted sum of frequency-shifted copies of $S_n^H(f)$:

$$S_{\phi_n}^H(f) \approx \frac{1}{2A^4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[|F_{\bar{I}}(k)|^2 + |F_{\bar{I}}(-k)|^2 \right] S_n^H(f - kf_R). \quad (2.7)$$

In particular, the non-shifted term $S_n^H(f - 0f_R)$ is weighted by $|F_{\bar{I}}(0)|^2/A^4 = \text{sinc}^2[m(1 - B)]/A^2$. If the additive noise is white ($S_n^H(f) = h_0$), Eq. 2.7 simplifies to $S_{\phi_n}^H(f) \approx h_0/A^2$; this is the result that would be obtained with a homodyne or self-heterodyne quadrature interferometer [13]. If the additive noise instead displays a PSD increasing below a cutoff f_c as in Fig. 2.2(e), a proper choice of f_R allows the multiplication of the PSD's low-frequency portion by $\text{sinc}^2[m(1 - B)]$ relative to the homodyne case (Fig. 2.2(f)), a factor which can be set to zero through adjustment of m . This is achieved without increasing the high-frequency noise floor; it therefore represents a global improvement over the performance of the homodyne technique, similar to what can be reached using the self-heterodyne technique.

In the second demodulation scheme, the photocurrent is demodulated using the frequency of the main harmonic and then lowpass-filtered (cutoff $f_R/2$) to permit phase extraction. This scheme is therefore called "main-harmonic demodulation" (MHD). In the context of a small-signal analysis ($\phi(t) \ll 1$), it can be represented by the following operations: (1) divide $I(t)$ by $F_{\bar{I}}(k_m)e^{j2\pi k_m f_R t}$, where k_m is the integer closest to m , (2) lowpass filter the result, and (3) take the imaginary part of the filter's output. From Eq. 2.5b, the estimation noise floor PSD becomes:

$$S_{\phi_n}^H(f) \approx \frac{S_n^H(f - k_m f_R) + S_n^H(f + k_m f_R)}{2 |F_{\bar{I}}(k_m)|^2}, \quad |f| < \frac{f_R}{2}, \quad (2.8)$$

where the inequality is used to take the effect of the ideal lowpass filter into account. Contrary to AHD, MHD does not introduce a non-shifted term, guaranteeing good performances at low frequencies. However, it does so at the expense of a higher high-frequency noise floor (Fig. 2.2(f)). In particular, for m integer, the denominator of Eq. 2.8 evaluates as $2A^2(1 - B)^2$, its maximum. Comparing with the level h_0/A^2 attained with the AHD scheme, the high-frequency penalty is thus $(1 - B)^{-2}$ at best. Setting m to be an integer and minimizing B are therefore critical in MHD.

It is worth mentioning there are limitations to this external FM technique when used for high-precision interferometry. If implemented using an AOM, good performance can be attained for chirp rates on the order of 1-100 THz/s [14]. Therefore, a frequency shift of 1-100 kHz per meter of path imbalance can be expected. For short interferometers, this is much smaller than the shift possible using the self-heterodyne technique and may be insufficient to significantly suppress low-frequency noise. Direct laser modulation can be used to reach higher chirp rates [10], but this typically requires sweep linearization [15].

2.5 Experimental demonstration

In order to confirm the previous theoretical analysis, we constructed a simple prototype out of polarization-maintaining components. The signal from a stable CW laser at 194.7 THz (OEwaves, WGM Gen 3) was frequency-modulated using an AOM (Gooch and Housego, Fibre Q 80 MHz). To drive the AOM, we used a Red Pitaya [16] as an arbitrary waveform generator to produce a linear chirp ranging from 75.50 to 83.57 MHz at a rate of $f_R = 125$ kHz, yielding $C = 1.01$ THz/s. The signal thus modulated (710 μ W) was sent to a fiber interferometer built as in Fig. 2.1 (optical 90° hybrid: Kyria COH24) and set on a vibration isolation platform (Minus K, 25BM-10). The interferometric imbalance was approximately $\tau_0 = 495$ ns (≈ 100 meters, Fujikura SM15-PS-U25A fiber), yielding $m = 4$, $mf_R = 500$ kHz, and $B = 0.062$. From Eq. 2.4, the main harmonic should therefore contain 88% of the total power; we computed 89% from the data (Fig. 2.3(b)). The small discrepancy could be attributed to the finite FM bandwidth of the AOM or to the observed parasitic amplitude modulation (Fig. 2.3(a)). Balanced amplified photodetectors (Thorlabs, PDB430C) were then used to generate signals in the form of $I_i(t)$ and $I_q(t)$. These were lowpass-filtered at 50 MHz and sampled during 4 seconds at 125 MS/s using a digitizer known to produce non-stationary noise (GaGe CSE8389).

To perform AHD, the total phase signal was extracted using an arctangent routine modified to take the $[I_i(t), I_q(t)]$ ellipticity into account. This ellipticity, caused by the imperfect optical hybrid coupler, was characterized through a constrained least-squares elliptical fit on calibration data [13]. The total phase signal was then coherently averaged over the 500,000 recorded periods so as to estimate the modulation-induced phase $\theta_{\text{ext}}(t)$ (Fig. 2.3(c)), which was then periodized and subtracted from the total phase to obtain an estimate of $\phi(t)$ (Fig. 2.3(d)). The ellipticity was also corrected prior to MHD. This alternative demodulation was performed as described previously using $k_m f_R = 500$ kHz.

The first three curves of Fig. 2.4(a) represent the PSD of $\hat{\phi}(t)$ obtained with the homodyne technique and the serrodyne technique with AHD and MHD. They were computed using the averaged periodogram with a Hann window. These curves mainly show the dominating laser noise contribution (term $\nu_{\text{las}}(t) * h_{\nu\theta}(t)$ in Eq. 2.2a): the contributions from additive noise and interferometric delay (term $2\pi\nu_0\tau(t)$) are mostly indiscernible. Figure 2.4(b) shows, for the same three techniques, the PSD of the additive noise contributions to the $\phi(t)$ estimates. These were obtained by measuring the total additive noise in the absence of laser light and adding it to appropriate synthetic signals which were processed as the real signals. For the digitizer used in this demonstration, the serrodyne FM with AHD allows an overall suppression of the additive noise contribution by at least 19 dB below 40 kHz (1) relative to the quadrature homodyne case, converging to 24 dB at lower frequencies (2). This is in good agreement with the predicted $\text{sinc}^{-2}[m(1-B)] = 24.5$ dB. Alternatively, MHD provides a flatter noise spectrum with a slightly lower level. It brings the low-frequency suppression above 40 dB (3),

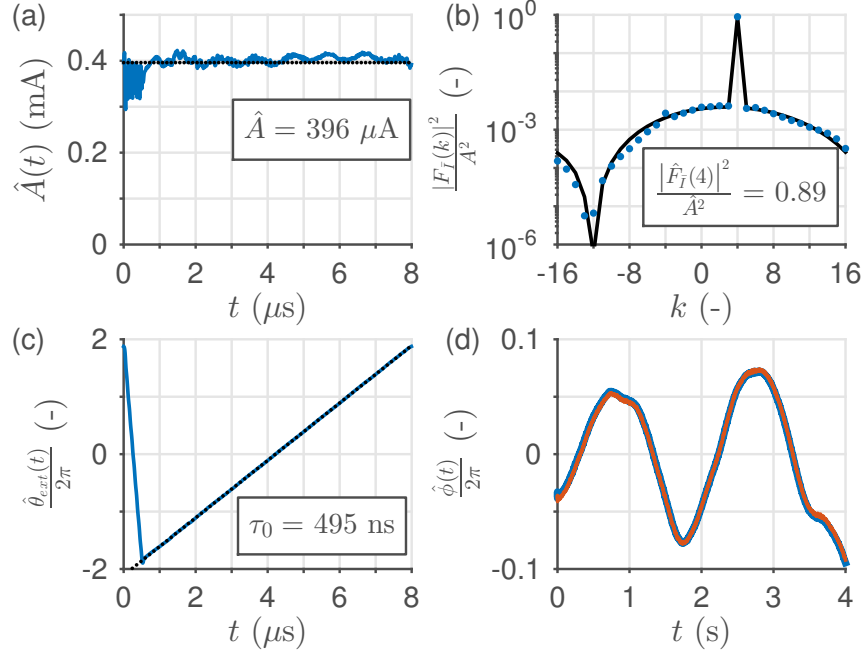


Figure 2.3 – Measured properties of the photocurrent produced through serrodyne FM. (a) Average signal amplitude during one full modulation period. (b) Squared modulus of the normalized Fourier series. The solid line is the theoretical curve (Eq. 2.4) while the markers represent measurements. (c) Average value of $\theta_{\text{ext}}(t)$ during one full modulation period. Outside of the flyback, the phase is highly linear (dotted line, 500 kHz slope). (d) Extracted phase signal for interferometers A and B.

limited by measurement time. Here, MHD appears better than AHD over all the observed spectral range since AHD cannot cancel the non-shifted term with m integer and since the white floor is only reached for $f > 100$ kHz.

To remove the laser noise contribution and directly compare the noise floor of the three techniques, we measured the modulated signal simultaneously using two identical interferometers. We then computed the difference between their demodulated phase signals (Fig. 2.3(d)). The PSD of this difference is displayed in Fig. 2.4(a) only for homodyne and serrodyne with MHD to avoid clutter; serrodyne with AHD provides a result similar to MHD, but with visible contamination by harmonics of 515 Hz. For the serrodyne case (green curve), the phase difference PSD can be separated into two regions. Below 400 Hz, strong, broad tones can be observed. Since they get even stronger when the isolation platforms are deactivated, we attribute them to vibrations that are uncorrelated between the interferometers. Above 400 Hz, the curve is much smoother and its level is in good agreement with the thermoconductive noise model assuming infinite cladding [17]. The one-sided PSD of this noise is:

$$S_\phi(f) = \left[\frac{2\pi\nu_0 L}{c} \left(n\alpha_e + \frac{dn}{d\Theta} \right) \right]^2 \frac{K\Theta^2}{\pi\kappa_t L} \Re [e^{j\rho} E_1(j\rho)], \quad (2.9)$$

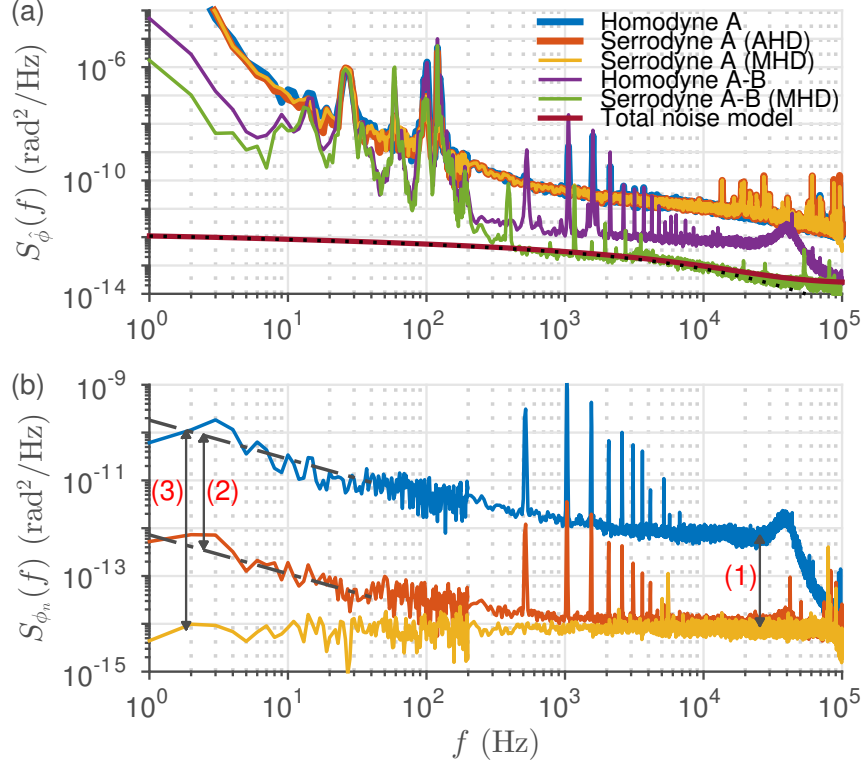


Figure 2.4 – One-sided phase PSD. (a) Full estimate. Colors are as in Fig. 2.2(f). The purple and green curves are the PSD of the phase difference between two nominally identical interferometers (A and B) illuminated simultaneously by the same laser. The dark red curve is a noise model that includes the contribution of shot, detector, digitizer, and thermoconductive noises to the phase difference between serrodyne MHD interferometers (black dots only include the thermoconductive noises). (b) Additive noise contribution calculated from synthetic signals.

where L is the total fiber length (sum of both arm's length), $\rho = \pi f a^2 c_\nu / (2\kappa_t)$, and Θ is the temperature. The other variables are as defined in [17] and we used the same numerical values here except for $a = 5.25 \mu\text{m}$ and $L = 102 \text{ m}$. The dark red curve of Fig.2.4(a) is the sum of Eq. 2.9 and the shot noise contribution, scaled by a factor of two to account for the two independent interferometers, plus smoothed versions of the two $S_{\phi_n}(f)$ measured for serrodyne MHD. Since the total additive contribution is not dominant in the observed range (see the black dots in Fig. 2.4(a)), we conclude that the external FM technique enables the proper measurement of thermoconductive noise. This is not true for the homodyne technique (purple curve).

2.6 Conclusion

In summary, we showed that serrodyne frequency modulation can be used to suppress non-stationary additive noise in high-precision quadrature interferometry. We established the design criteria, described two efficient demodulation schemes, and exposed the advantages

and drawbacks of the technique when compared to the standard approach. In particular, the achievable frequency shift depends on the interferometric imbalance and can be relatively small. In return, the modulation can be performed externally without significantly sacrificing the achievable shifting efficiency. This is a convenient feature when the interferometer needs to be maximally shielded from the environment, for instance. Using a simple prototype, we measured a wideband noise suppression in excellent agreement with our theoretical predictions, sufficient to expose thermoconductive fiber noise between 400 Hz and 100 kHz. With better vibration isolation, this technique could also be used to characterize low-frequency thermomechanical fiber noise [18].

2.7 Bibliographie

- [1] F. Kéfélian, H. Jiang, P. Lemonde, and G. Santarelli. Ultralow-frequency-noise stabilization of a laser by locking to an optical fiber-delay line. *Optics Letters*, 34(7) :914–916, 2009. URL <https://doi.org/10.1364/OL.34.000914>.
- [2] B. P. Abbott et al. GW150914 : The advanced LIGO detectors in the era of first discoveries. *Physical Review Letters*, 116(13) :131103, 2016. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.131103>.
- [3] P. Hariharan. *Basics of Interferometry*. Elsevier, 2010.
- [4] P. Fritschel, G. González, B. Lantz, P. Saha, and M. Zucker. High power interferometric phase measurement limited by quantum noise and application to detection of gravitational waves. *Physical Review Letters*, 80(15) :3181, 1998. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.3181>.
- [5] P. C. D. Hobbs. *Building Electro-Optical Systems : Making it All Work*. John Wiley & Sons, 2011.
- [6] T. G. McRae, S. Ngo, D. A. Shaddock, M. T. L. Hsu, and M. B. Gray. Frequency stabilization for space-based missions using optical fiber interferometry. *Optics Letters*, 38(3) :278–280, 2013. URL <https://doi.org/10.1364/OL.38.000278>.
- [7] A. J. Hymans and J. Lait. Analysis of a frequency-modulated continuous-wave ranging system. *Proceedings of the IEE - Part B : Electronic and Communication Engineering*, 107(34) :365–372, 1960. URL <https://doi.org/10.1049/pi-b-2.1960.0130>.
- [8] E. M. Strzelecki, D. A. Cohen, and L. A. Coldren. Investigation of tunable single frequency diode lasers for sensor applications. *Journal of Lightwave Technology*, 6(10) :1610–1618, 1988. URL <https://doi.org/10.1109/50.7923>.

- [9] T.-J. Ahn, J. Y. Lee, and D. Y. Kim. Suppression of nonlinear frequency sweep in an optical frequency-domain reflectometer by use of Hilbert transformation. *Applied Optics*, 44(35) :7630–7634, 2005. URL <https://doi.org/10.1364/AO.44.007630>.
- [10] T. Klein and R. Huber. High-speed OCT light sources and systems [Invited]. *Biomedical Optics Express*, 8(2) :828–859, 2017. URL <https://doi.org/10.1364/B0E.8.000828>.
- [11] J. Qin, Q. Zhou, W. Xie, Y. Xu, S. Yu, Z. Liu, Y. Tian Tong, Y. Dong, and W. Hu. Coherence enhancement of a chirped DFB laser for frequency-modulated continuous-wave reflectometry using a composite feedback loop. *Optics Letters*, 40(19) :4500–4503, 2015. URL <https://doi.org/10.1364/OL.40.004500>.
- [12] V. Michaud-Belleau, H. Bergeron, P. S. Light, N. B. Hébert, J.-D. Deschênes, A. N. Luiten, and J. Genest. Passive coherent discriminator using phase diversity for the simultaneous measurement of frequency noise and intensity noise of a continuous-wave laser. *Metrologia*, 53(5) :1154, 2016. URL <https://doi.org/10.1088/0026-1394/53/5/1154>.
- [13] V. Michaud-Belleau, J. Genest, and J.-D. Deschênes. Optimal detection scheme for shot-noise-limited phase estimation in passive classical-light interferometry. *Physical Review Applied*, 10(2) :024025, 2018. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.10.024025>.
- [14] E. H. Young and S.-K. Yao. Design considerations for acousto-optic devices. *Proceedings of the IEEE*, 69(1) :54–64, 1981. URL <https://doi.org/10.1109/PROC.1981.11920>.
- [15] N. Satyan, A. Vasilyev, G. Rakuljic, V. Leyva, and A. Yariv. Precise control of broadband frequency chirps using optoelectronic feedback. *Optics Express*, 17(18) :15991–15999, 2009. URL <https://doi.org/10.1364/OE.17.015991>.
- [16] A. Tourigny-Plante, V. Michaud-Belleau, N. B. Hébert, H. Bergeron, J. Genest, and J.-D. Deschênes. An open and flexible digital phase-locked loop for optical metrology. *Review of Scientific Instruments*, 89(9) :093103, 2018. URL <https://doi.org/10.1063/1.5039344>.
- [17] S. Foster. Low-frequency thermal noise in optical fiber cavities. *Physical Review A*, 86(4) :043801, 2012. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.86.043801>.
- [18] L. Duan. General treatment of the thermal noises in optical fibers. *Physical Review A*, 86(2) :023817, 2012. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.86.023817>.

Chapitre 3

Reaching the true shot-noise limited phase sensitivity in self-heterodyne interferometry

Vincent Michaud-Belleau, Jean-Daniel Deschênes et Jérôme Genest

Centre d'optique, photonique et laser, Université Laval, Québec, QC G1V 0A6, Canada

Publié dans *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 58(1) :1-11, 2022¹.

URL <https://doi.org/10.1109/JQE.2022.3141056>.

3.1 Résumé

L'usage d'un modulateur acousto-optique dans un interféromètre permet la détection hétérodyne et peut faciliter la gestion de bruits techniques tels que le bruit d'intensité laser et le bruit de scintillement du photodétecteur. Cependant, cette approche dégrade l'ultime sensibilité en phase de l'interféromètre, c'est-à-dire celle déterminée par le bruit de grenaille, par un minimum de 3 dB vis-à-vis ce qui peut être atteint par détection homodyne (sans modulateur). Dans cet article, nous montrons théoriquement que cette pénalité peut être compensée en mettant en oeuvre des schémas de détection et de démodulation qui tirent parti de la nature cyclostationnaire du bruit de grenaille observé aux sorties de l'interféromètre hétérodyne. Nous discutons également de la façon par laquelle les écarts par rapport à un scénario idéal, à savoir la visibilité interférométrique imparfaite, le bruit stationnaire non nul et la bande de détection limitée, affectent les performances de ces schémas et proposons une procédure simplifiée assouplissant l'exigence d'une caractérisation rigoureuse de l'instrument. Bien que deux détecteurs indépendants soient nécessaires pour atteindre la véritable limite (classique) de bruit de grenaille pour la sensibilité en phase, les instruments basés sur un seul photodétec-

1. © 2022 IEEE. Reprinted, with permission, from Vincent Michaud-Belleau, Jean-Daniel Deschênes, and Jérôme Genest, *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 58(1), 1-11, 2022.

teur peuvent aussi bénéficier des idées introduites dans cet article pour améliorer la sensibilité en phase par un facteur allant jusqu'à 3 dB.

3.2 Abstract

The use of an acousto-optic modulator in an interferometer enables heterodyne detection and can alleviate technical issues such as laser intensity noise and photodetector flicker noise. However, it also introduces at least a 3 dB penalty to the shot-noise limited phase sensitivity when compared to that attainable through homodyne detection. In this paper, we show theoretically that this penalty can be lifted by implementing detection and demodulation schemes that exploit the cyclostationary nature of shot noise observed at the outputs of the self-heterodyne interferometer. We also discuss how expected departures from ideality, namely imperfect interferometric visibility, non-zero stationary noise, and finite detection bandwidth, affect the performance of these schemes and propose a simplified procedure relaxing the requirement for a rigorous instrument characterization. While two independent detectors are required to reach the true (classical-light) shot-noise limit for phase, single-detector instruments can also benefit from the introduced ideas to achieve up to 3 dB improvement in phase sensitivity.

3.3 Introduction

In interferometry, frequency shifting one of the two interfering fields solves problems associated to low-frequency technical intensity noise and detection noise [1] while enabling robust in-phase and quadrature demodulation [2]. The frequency shift is usually introduced by an acousto-optic modulator (AOM) inserted into one of the arms of a Mach-Zehnder or Michelson interferometer, yielding the so-called self-heterodyne configuration that has been used for the measurement of fundamental fiber noise [3], remote vibration signals [4], and laser frequency noise [5], among others. Self-heterodyne interferometers are also commonly employed for laser stabilization [1, 6], chirp linearization [7, 8], and Doppler cancellation [2, 9]. In most cases, the signal of interest is carried by the interferometric phase which must be extracted through some form of demodulation, making the phase sensitivity, or lowest measurable phase, a metric of prime interest.

While the benefit of the frequency shift is clear in the presence of technical noise, the picture is different when the self-heterodyne interferometer is compared to a quiet homodyne interferometer, that is, one where fundamental white noise dominates the spectrum even at low frequencies, say a combination of shot noise and thermal noise. Indeed, whereas the classical-light shot-noise limit (SNL) for phase is attainable for any detection scheme in a homodyne interferometer [10], it is not attainable in a self-heterodyne interferometer based on typical balanced detection, as we demonstrate in this paper. In essence, this is a consequence of the modulation and demodulation operations which introduce a penalty that is at least 3 dB when

standard sine demodulation is chosen. The self-heterodyne interferometer therefore appears to yield a phase sensitivity degraded relative to the fundamental classical-light limit.

In search for a way around this penalty, it is interesting to go beyond standard balanced detection and consider the cases where either one or both signals produced by the interferometer are recorded independently. In this case, shot noise appears cyclostationary since the photon rate seen by both photodetectors, or alternatively the average photocurrent driving the shot noise variance, follows the modulation signal [11]. This is in contrast to the case of a pulsed laser where the shot-noise cyclostationarity is intrinsic to the laser signal [12, 13], but the consequences are similar. Taking inspiration from comparable work done for phase-modulated interferometers operated at the dark fringe [14, 15], and building upon the results of a similar analysis of the homodyne case [10], we perform a small-signal analysis of the self-heterodyne interferometer and demonstrate that a careful consideration of the cyclostationary nature of shot noise enables an improvement in phase sensitivity. To maximize the improvement, it is necessary to use a tailored demodulation waveform which in general is neither a sine wave nor the waveform that is optimal for a phase-modulated interferometer operated at the dark fringe. In the asymptotic case of an ideal interferometer, we show that using the optimal demodulation waveform is sufficient to fully compensate the penalty associated to modulation-demodulation, allowing the true SNL to be reached. We also suggest simple alternative demodulation waveforms which yield better results than standard sine wave demodulation over a range of operating conditions and which are straightforward to implement in the analog domain.

This paper is organized as follows. Section 3.4 presents the case of a single photodetector and introduces most of the theoretical tools while Section 3.5 covers the case of two photodetectors, including the special case of balanced detection. Section 3.6 focuses on simulations that illustrate the most important results of the theoretical analysis.

3.4 Self-heterodyne interferometer with a single photodetector

In this section, we consider the scenario in which a single output port of the self-heterodyne interferometer is monitored. We first describe the setup under consideration and clarify the working hypotheses (subsection A) before introducing a mathematical model for the non-stationary measurement noise (subsection B). In subsection C, we construct a phase estimator for an arbitrary demodulation waveform, focusing on a statistical description of the estimation error, and move on to the computation of the phase sensitivity for selected demodulation waveforms in subsection D. Finally, in subsection E, we study how a limited detection bandwidth modifies the previous results.

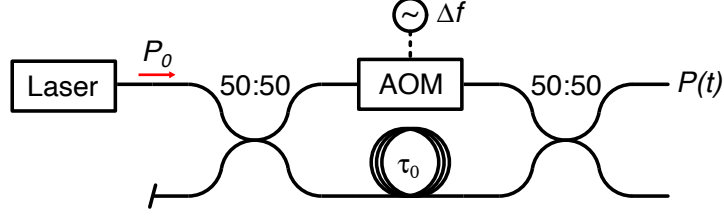


Figure 3.1 – Single-detector self-heterodyne interferometer considered in this section. The optical power signals include the contribution of adequately converted measurement noise, which contains both a stationary component and a cyclostationary component. The laser emits CW light.

3.4.1 Theoretical framework

Under illumination by continuous-wave (CW) laser light, the optical power measured at the first output of a self-heterodyne interferometer (Fig. 3.1) takes the following form:

$$P(t) = \frac{P_0}{2} \{1 - V \cos [\psi(t) + \theta(t)]\} + n(t), \quad (3.1)$$

where P_0 is the constant power at the lossless interferometer's input, V is the fringe visibility (contrast) which accounts for potential polarization mismatch upon recombination², $\psi(t) \equiv 2\pi\Delta ft + \theta_0$ is the phase ramp produced by the AOM to which is combined any interferometric phase offset, and $\theta(t)$ is the zero-mean phase of interest which is related to fluctuations of the laser frequency and/or interferometric delay. For simplicity, laser intensity noise [16] is not considered in the following theoretical treatment, but the opposite choice would not alter our conclusions. The term $n(t)$ accounts for all additive noises expressed in units of optical power, though the case of a dominant shot noise is the most relevant to this demonstration.

Defining $\theta(t)$ as a zero-mean signal implies that drifts of the phase $\theta_0 = 2\pi\nu_0\tau_0$, where ν_0 is the laser frequency and τ_0 the interferometric delay, are either negligible over the measurement time, compensated using a slow servo loop, or measured and properly accounted for during processing. While in-phase and quadrature demodulation would allow a relaxed definition [2], it will become clear that reaching the true shot noise limit requires $\theta(t)$ be small ($\theta(t) \ll 1$), which also implies a small mean. Under such small-signal hypothesis, the output power of Eq. 3.1 can be linearized:

$$P(t) \approx m_\alpha(t) + \theta(t)m_\theta(t) + n(t), \quad (3.2a)$$

$$m_\alpha(t) = \frac{P_0}{2} [1 - V \cos \psi(t)], \quad (3.2b)$$

$$m_\theta(t) = \frac{VP_0}{2} \sin \psi(t), \quad (3.2c)$$

2. Other imperfections such as losses and imperfectly balanced coupling would have to be modeled in a slightly different manner.

where $m_\theta(t)$ is the small-signal phase gain (in W/rad). From this new expression, it is apparent that the phase $\theta(t)$ is effectively amplitude-modulated at Δf , which helps minimize the impact of technical intensity noise and detection noise by shifting the signal's spectrum to a frequency range where fundamental noise is expected to be dominant. An essential condition for this technique to work, however, is that the bandwidth of $\theta(t)$ be smaller than Δf , or conversely that $\theta(t)$ vary slowly with respect to the modulation period. We assume that this condition is respected here.

3.4.2 Noise definition

The cyclostationary nature of shot noise has to be carefully considered when attempting to retrieve the phase signal $\theta(t)$ from the power signal $P(t)$, which motivates the development of an adequate model to describe the noise $n(t)$. Considering all contributing terms to be zero-mean, white, and Gaussian, an accurate model even for Poissonian shot noise as long as more than approximately ten photons are measured during the system's effective integration time [17], the non-stationary noise $n(t)$ can be defined through the following first- and second-order statistics [15, 18]:

$$\langle n(t) \rangle = 0, \quad (3.3a)$$

$$\langle n(t)n(t+\tau) \rangle = q(t)\delta(\tau), \quad (3.3b)$$

where $\langle \cdot \rangle$ denotes the expected value, $\delta(t)$ is the unit impulse, and $q(t)$ can be seen as a "variance envelope" (units of W^2/Hz). It is convenient here to express $q(t)$ in terms of $\Lambda = h\nu_0/(\eta P_0)$, the semi-classical SNL for phase sensitivity expressed as a white two-sided power spectral density (PSD), h being Planck's constant and η the detector's quantum efficiency [10]. Since the SNL can be attained in a homodyne interferometer set at the optimum point of operation (for any detection scheme), such normalization facilitates benchmarking. For the self-heterodyne interferometer considered here, the variance envelope $q(t)$ can be defined as:

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{\Lambda P_0^2}{2} [2\gamma + 1 - V \cos \psi(t) + \theta(t)V \sin \psi(t)], \\ &= \Lambda P_0 \left[\underbrace{\gamma P_0 + m_\alpha(t) + \theta(t)m_\theta(t)}_{\text{shot noise contrib.}} \right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

In the previous expression, a term γ is added to account for additive noises other than shot noise (e.g. thermal noise, amplifier noise, digitizer noise), which are all assumed to be stationary. As in [10], γ is defined as the dimensionless ratio between the stationary noise PSD measured at the output and the (two-sided) shot-noise PSD that would be measured at the input of the interferometer using a detector with the same quantum efficiency, i.e. $h\nu_0 P_0/\eta = \Lambda P_0^2$. A small value of γ simply means that shot noise is the dominant contributor to the overall measurement noise (on average over the modulation period).

The noise defined by Eqs. 3.3 and 3.4 is delta-correlated, but of time-varying variance. This time-dependence implies there are correlations between distinct frequency components [17] which tend to introduce subtle penalties when they are not properly considered [12, 13]. This can be seen by computing the statistics of the associated spectral process:

$$N(f) = \int_{-\infty}^{\infty} n(t)e^{-j2\pi ft} dt, \quad (3.5a)$$

$$\langle N(f) \rangle = 0, \quad (3.5b)$$

$$\langle N^*(f)N(f + \phi) \rangle = Q(\phi), \quad (3.5c)$$

where $Q(f)$ is the Fourier transform of $q(t)$, as defined in Eq. 3.5a. The spectral stochastic process $N(f)$ thus appears stationary but not delta-correlated, in reciprocity with the temporal process $n(t)$. Moreover, from the definition of $q(t)$ in Eq. 3.4, it can be seen that the noise spectrum at any frequency f is partially correlated with that at frequencies $f \pm \Delta f$. Yet, this correlation is not apparent when only observing the measurement noise PSD, which can be adequately defined as³ [19]:

$$S_n^{(2)}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle N_T^*(f)N_T(f) \rangle}{T}, \quad (3.6)$$

where $N_T(f)$ is the Fourier transform of $n_T(t)$, a version of $n(t)$ windowed over $-T/2 < t < T/2$ and the (2) superscript indicates that the PSD is two-sided. It can be shown that inserting Eq. 3.3 in Eq. 3.6 simplifies to:

$$S_n^{(2)}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} q(t) dt \equiv \overline{q(t)}. \quad (3.7)$$

Since $q(t)$ is defined here as a periodic function, the overbar symbol can be alternatively interpreted as a temporal average over a single modulation period. For $q(t)$ defined as in Eq. 3.4, and neglecting for now the term proportional to the small signal $\theta(t)$ (this is justified later), the white PSD in Eq. 3.7 evaluates as $S_n^{(2)}(f) \approx \Lambda P_0^2 (2\gamma + 1) / 2$. The same value would be obtained if the average power at the output of the interferometer was used to define a stationary shot noise, as is usually done. This goes to show that the frequency-domain description based on the PSD can be misleading, or at least somewhat incomplete, in cases where the noise is non-stationary [11, 13].

3.4.3 Phase estimate

To construct an adequate estimate of the phase signal $\theta(t)$, the measured power $P(t)$ should first be multiplied by a demodulation waveform $d(t)$ that is periodic in Δf and then low-pass filtered to only maintain the baseband spectral content. From Eq. 3.2a, these operations yield a new signal of the form:

$$P_{d,h}(t) = [P(t)d(t)] * h(t) = [m_\alpha(t)d(t) + \theta(t)m_\theta(t)d(t) + n(t)d(t)] * h(t) \quad (3.8)$$

3. The Wiener-Khinchin theorem cannot be invoked for non-stationary noise.

where $h(t)$ is the impulse response of the low-pass filter and where the second term is seen to contain the signal to be extracted or estimated. Since $m_\theta(t)$ and $d(t)$ are both periodic in Δf , their product $r(t) \equiv m_\theta(t)d(t)$ has the same period and its Fourier transform $R(f)$ contains weighted impulses at multiples of Δf . The product $\theta(t)r(t)$ can then be understood in the frequency domain as the convolution $\Theta(f) * R(f)$, where the spectra are defined as in Eq. 3.5a, showing that copies of the bandlimited signal spectrum $\Theta(f)$ are located around each impulse of $R(f)$. The copy of interest is that around $f = 0$ (DC) and its scaling or gain is given by the area of the impulse at DC, equal to $\overline{r(t)} = \overline{m_\theta(t)d(t)}$. The same general reasoning applies to the first term since $m_\alpha(t)$ is also periodic in Δf , yielding a scaling $\overline{m_\alpha(t)d(t)}$.

While the low-pass filter can be conveniently set to average the signal over a single modulation period, yielding a constant gain for $\theta(t)$, in practice any filter which preserves the spectral content of $\Theta(f)$ while removing the signal around harmonics of Δf is appropriate. We assume that such a filter is used. For a filter displaying unit DC gain ($h(t)$ has unit area), and normalizing Eq. 3.8 by the scaling of the $\Theta(f)$ copy at DC, a phase estimator can thus be written as:

$$\widehat{\theta(t)} = \frac{P_{d,h}(t)}{m_\theta(t)d(t)} \equiv b + \theta(t) + \theta_n(t), \quad (3.9)$$

where b is a bias given by

$$b = \frac{\overline{m_\alpha(t)d(t)}}{\overline{m_\theta(t)d(t)}}, \quad (3.10)$$

and the error caused by the measurement noise is:

$$\theta_n(t) = \frac{[n(t)d(t)] * h(t)}{\overline{m_\theta(t)d(t)}}. \quad (3.11)$$

Since we expect both $\theta(t)$ and $\theta_n(t)$ to be zero-mean, the bias b can be tolerated here, though it would act as a gain for intensity noise when present. In any case, we will soon see that this bias disappears when optimizing for sensitivity, which requires the minimization of the phase error defined by Eq. 3.11. To simplify the optimization problem, it must be recognized that this error is a stationary process since the low-pass filter averages both signal and noise over a time at least as long as the modulation period. In this case, it is adequate to only consider the PSD of the quantity $n(t)d(t)$ whose low-frequency level is not altered by the filter. Multiplication of $n(t)$ (Eq. 3.3) by $d(t)$ simply modifies the variance envelope without affecting the delta-correlation, so the associated white PSD evaluates as $\overline{q(t)d^2(t)}$. Summing up all those results, the phase error can be represented in the frequency domain through:

$$S_{\theta_n}^{(2)}(f; d) = \frac{\overline{q(t)d^2(t)}}{[\overline{m_\theta(t)d(t)}]^2} |H(f)|^2, \quad (3.12)$$

or

$$S_{\theta_n}^{(2)}(f; d) \approx \frac{\overline{q(t)d^2(t)}}{[\overline{m_\theta(t)d(t)}]^2}, \quad |f| < f_c, \quad (3.13)$$

where we explicitly write the dependence of this quantity upon the choice of $d(t)$. Within the low-pass filter bandwidth, the estimation error is thus described by a white PSD whose level depends on time averages of products of $d(t)$, $q(t)$, and $m_\theta(t)$ (demodulation waveform, variance envelope, and small-signal phase gain, respectively). This last expression, which sets the phase sensitivity, is quite general and could be applied to other measurement scenarios such as phase-modulated interferometers or homodyne interferometers, even when the measurement noise is purely stationary, in which case $m_\theta(t)$ and $q(t)$ would simply take forms different from those defined in Eqs. 3.2c and 3.4. For example, for the single-detector homodyne interferometer with $h(t) = \delta(t)$:

$$q(t) = q = \frac{\Lambda P_0^2}{2} (2\gamma + 1 - V \cos \theta_0), \quad (3.14a)$$

$$m_\theta(t) = m_\theta = \frac{V P_0}{2} \sin \theta_0, \quad (3.14b)$$

$$d(t) = d = 1, \quad (3.14c)$$

$$S_{\theta_n}^{(2)}(f; 1) = \frac{2\Lambda (2\gamma + 1 - V \cos \theta_0)}{V^2 \sin^2 \theta_0}, \quad (3.14d)$$

where the last expression is the same that was found in [10]. For an ideal homodyne interferometer with $\gamma = 0$ and $V = 1$, the sensitivity simplifies to $2\Lambda/(1 + \cos \theta_0)$, which is equal to the SNL (Λ) for $\theta_0 = 2\pi k$, with k an integer.

3.4.4 Demodulation waveforms

The standard choice of demodulation waveform for the self-heterodyne interferometer is a simple sine wave (i.e. a sinusoid) [1, 3]:

$$d_{sin}(t) = C \sin[\psi(t) + \beta], \quad (3.15)$$

where C is any real constant and β is a phase offset. This choice of $d(t)$ yields $b = -\tan \beta$ and

$$S_{\theta_n}^{(2)}(f; d_{sin}) = \frac{4\Lambda (2\gamma + 1)}{V^2 \cos^2 \beta}. \quad (3.16)$$

From now on and for simplicity, the sensitivity is implicitly defined to be the level of the phase error PSD below the cutoff f_c . The evaluation of the numerator $\overline{q(t)d_{sin}^2(t)}$, with $q(t)$ defined as in Eq. 3.4, is simplified by the condition of a slowly-varying $\theta(t)$ which can be taken out of the integral over the modulation period; this integral ($\propto \overline{\sin[\psi(t)] \sin^2[\psi(t) + \beta]}$) evaluates to zero, justifying our earlier choice to neglect the term proportional to $\theta(t)$. It can then be seen that the demodulated noise power does not depend on β for standard sine demodulation, in contrast to the case of the phase-modulated interferometer [20]. Yet, the denominator of Eq. 3.13 does depend on this phase, and it is clear that $\beta = 0$ should be chosen to minimize both error and bias, which we assume is the case from now on. Equation 3.16 then simplifies to 4Λ for an ideal interferometer without stationary noise component and with perfect visibility

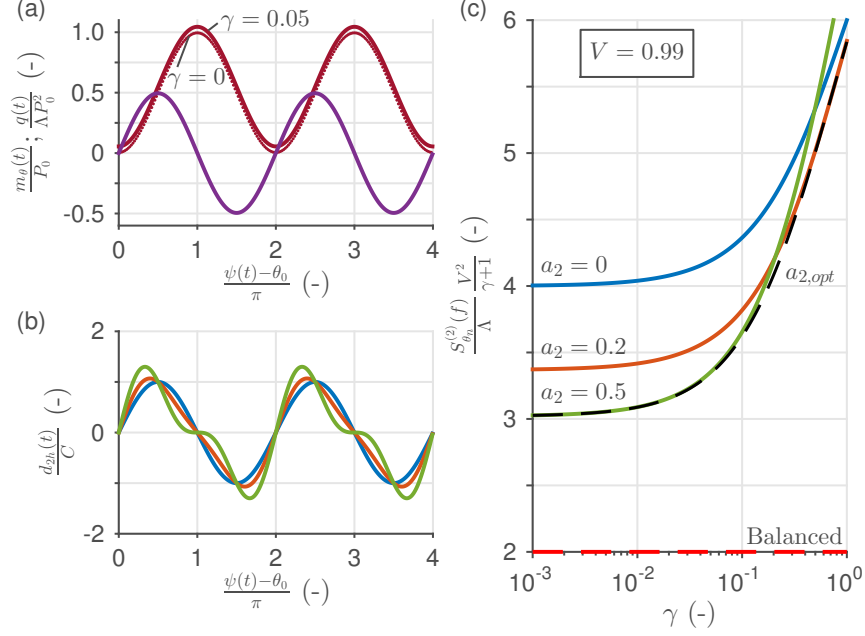


Figure 3.2 – Two-harmonic demodulation for the case of a single photodetector with $V = 0.99$. (a) Small-signal phase gain (purple) and variance envelope (red) for $\gamma = 0$ (dotted) and $\gamma = 0.05$ (solid). (b) Three possible demodulation waveforms ($a_2 = \{0, 0.2, 0.5\}$, blue, orange, and green, respectively). (c) Phase sensitivity versus γ . Colors are as in (b). The normalization by $(\gamma + 1)/V^2$ is made to facilitate comparison with the case of balanced detection, as justified in Section 3.5.

($\gamma = 0, V = 1$). In other words, a single-detector self-heterodyne interferometer with standard phase-coherent sine demodulation is associated to a sensitivity which is, at best, 4 times (6 dB) worse than the SNL. It is worth noting that the sensitivity of Eq. 3.16 coincidentally is the same that is obtained when shot noise is incorrectly assumed to be stationary.

The fact that the sine wave is generally not the demodulation waveform associated to the best phase sensitivity can be quickly demonstrated by adding a second harmonic to $d(t)$, i.e.:

$$d_{2h}(t) = C \{ \sin \psi(t) + a_2 \sin [2\psi(t)] \}. \quad (3.17)$$

In this case, Eq. 3.13 evaluates as:

$$S_{\theta_n}^{(2)}(f; d_{2h}) = S_0 \left(1 + a_2^2 - a_2 \frac{V}{2\gamma + 1} \right), \quad (3.18)$$

where $S_0 \equiv 4\Lambda(2\gamma + 1)/V^2$, the sensitivity associated to sine demodulation with best adjustment of the phase offset β (Eq. 3.16). For certain choices of the a_2 parameter, the term in parentheses can be lower than unity, showing that there exists a path for phase sensitivity improvement. Figure 3.2 compares the cases $a_2 = 0$ (sine demodulation), $a_2 = 0.2$, and $a_2 = 0.5$ over a range of stationary noise ratios and for a realistic visibility of 0.99.

The optimal second harmonic amplitude a_2 visibly depends on the conditions of operation, as can be found through differentiation of Eq. 3.18:

$$a_{2,opt} = \frac{V}{2(2\gamma + 1)}, \quad (3.19)$$

a choice associated to the following sensitivity:

$$S_{\theta_n}^{(2)}(f; d_{2h,opt}) = S_0 \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{V}{2\gamma + 1} \right)^2 \right], \quad (3.20)$$

where the term in square brackets can be seen to quantify the maximum improvement with respect to sine demodulation. The optimum sensitivity of Eq. 3.20 is represented by the dashed black curve in Fig. 3.2(c). In the ideal case ($\gamma = 0$, $V = 1$) and with $a_{2,opt} = 0.5$, the sensitivity becomes 3Λ , which is 1.25 dB better than the sensitivity obtained with standard sine demodulation. This is similar to the result found in [18] for a phase-modulated interferometer. Moreover, the choice $a_2 = 0.5$ is still quite close to optimal in most cases where it is worth accounting for the cyclostationary nature of shot noise, that is, when $\gamma \ll 1$ and $(1 - V) \ll 1$. Yet, this choice can yield a worse sensitivity than sine demodulation if $(2\gamma + 1)/V \geq 2$. This shows that a two-harmonic demodulation waveform with fixed second harmonic amplitude should not be used blindly, for any stationary noise ratio and visibility.

It is apparent from Fig 3.2(a) and (b) that $d_{2h}(t)$ is associated to a better sensitivity than $d_{sin}(t)$ because it better weighs regions of the modulation period where the instantaneous signal-to-noise ratio (SNR) is higher. It is then not surprising that the optimal second harmonic amplitude depends on both γ and V since these parameters affect the instantaneous SNR. It is also clear that the improved demodulation waveform must be properly aligned to the $q(t)$ pattern, requiring a zero-mean and small $\theta(t)$ as stated before. In the frequency domain, the signal before demodulation can be seen to be located only around the first harmonic of Δf (a feature of the lossless self-heterodyne interferometer). Hence, the sensitivity improvement associated to the introduction of another demodulation harmonic does not come from the demodulation and addition of more signal harmonics as in [21], but rather from the demodulation and addition of correlated spectral noise located where there is no signal. Because of the correlation, the noise does not simply add in power or variance, leading to a lower overall noise power when the correlation is sufficient and of the right sign. In other words, the improvement comes from the reduction of the numerator in Eq. 3.13, which describes the demodulated noise level, while the denominator associated to the demodulated signal level is fixed (disregarding the scaling effect of C , which cancels out in the end).

Now that it is established that a sine wave does not yield the best sensitivity in general, the optimal demodulation waveform can be found from differentiation of Eq. 3.13:

$$d_{opt}(t) = C \frac{m_{\theta}(t)}{q(t)}, \quad (3.21)$$

where, once again, C is any real constant. Substituting $d_{opt}(t)$ in Eq. 3.13 then yields the best possible sensitivity:

$$S_{\theta_n}^{(2)}(f; d_{opt}) = \left[\overline{m_\theta^2(t)/q(t)} \right]^{-1}. \quad (3.22)$$

It is worth stating that the two last expressions are general and can be used to predict, as a special case, the optimal demodulation waveform and best possible phase sensitivity for a phase-modulated interferometer operated at the dark fringe. This is perhaps not surprising given the similarity of the signal analysis strategy used here with that in [14, 15]. For such an interferometer, and assuming perfect fringe contrast, it can be shown that $q(t) \approx \Lambda m_\theta^2(t)$ so the optimal demodulation waveform predicted by Eq. 3.21 becomes $d_{opt}(t) \propto m_\theta^{-1}(t)$ while the best sensitivity of Eq 3.22 becomes Λ , the SNL. The same results were found in [14, 15]. The case of a non-ideal self-heterodyne interferometer is different however: the shape of the optimal demodulation waveform strongly depends on the parameters γ and V . For dominant stationary noise or poor visibility, the variance envelope becomes almost constant and $d_{opt}(t)$ tends to a sine wave in accordance with matched field theory, which states that $d(t)$ should be proportional to $m_\theta(t)$ for stationary noise [22]. The optimal waveform, however, is radically different when cyclostationary noise dominates. As shown in Fig. 3.3 and computed from Eqs. 3.2c and 3.4 (ignoring the term proportional to $\theta(t)$ in $q(t)$, which is small and does not survive coherent demodulation), it takes the unbounded form $\cot[\gamma(t)/2]$ in the ideal case, but is bounded and somewhat comparable to a sawtooth in a more realistic case. The substitution of this $d_{opt}(t)$ in Eq. 3.13 can be shown to give a sensitivity:

$$S_{\theta_n}^{(2)}(f; d_{opt}) = \frac{S_0}{2} \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{V}{2\gamma + 1} \right)^2} \right]. \quad (3.23)$$

In the ideal case, the sensitivity becomes 2Λ which, though 3 dB better than that reached with standard sine demodulation, still falls short of the SNL. This can be explained by the fact that only half of the available input power is used on average when a single output of the lossless self-heterodyne interferometer is monitored.

Unfortunately, the dependence of $d_{opt}(t)$ upon the exact values of γ and V can be a problem if these parameters are difficult to measure or model with precision, if they are drifting over time, or if they are frequency-dependent. Furthermore, there can be a limited set of possible waveforms when performing analog demodulation. A solution to this potential issue is to adopt a single, simple demodulation waveform achieving a performance sitting in between that of standard sine demodulation and optimal demodulation, at least for the relatively small values of γ and $(1 - V)$ that are of interest here. A reasonable option is $d_{2h}(t)$ (Eq. 3.17) with $a_2 = 0.5$, as stated before. A slightly better option for low values of $(2\gamma + 1)/V$ is a sawtooth waveform, $d_{saw}(t)$, which resembles $d_{opt}(t)$ around $\gamma = 0.05$, $V = 0.99$ (Fig. 3.3(b)) and also has the benefit of being a commonly available analog waveform. Plugging this demodulation

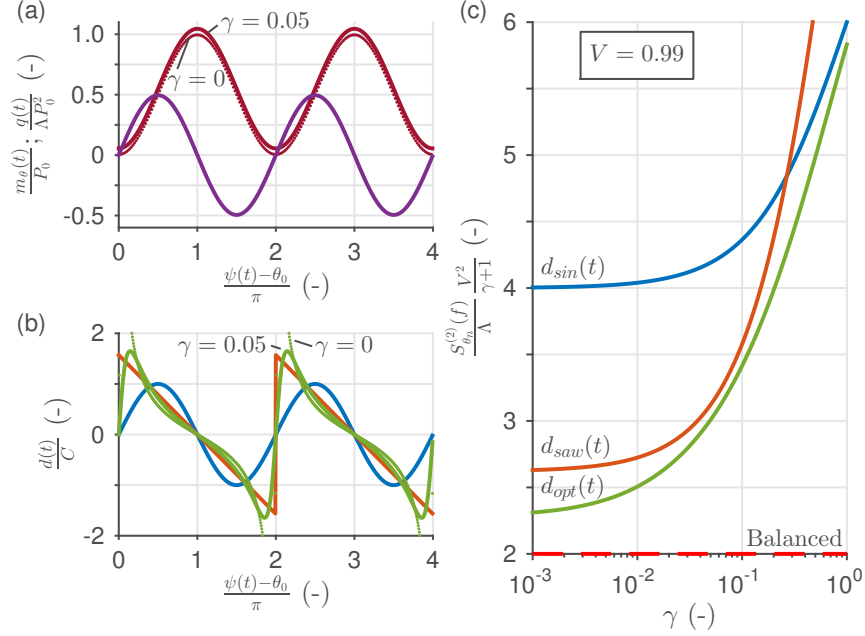


Figure 3.3 – Optimal, sawtooth, and sine demodulation for the case of a single photodetector with $V = 0.99$. (a) Small-signal phase gain (purple) and variance envelope (red) for $\gamma = 0$ (dotted) and $\gamma = 0.05$ (solid). (b) Three possible demodulation waveforms ($\{d_{sin}(t), d_{saw}(t), d_{opt}(t)\}$), blue, orange, and green, respectively). (c) Phase sensitivity versus γ . Colors are as in (b). The normalization by $(\gamma + 1)/V^2$ is made to facilitate comparison with the case of balanced detection, as justified in Section 3.5.

waveform in Eq. 3.13 gives the orange curve in Fig. 3.3, with level given by:

$$S_{\theta_n}^{(2)}(f; d_{saw}) = S_0 \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{V}{2\gamma + 1} \right), \quad (3.24)$$

which is at most 1.90 dB better than sine demodulation. Obviously, the simplicity of this demodulation waveform comes at the price of a slight penalty in sensitivity with respect to the case of optimal demodulation. Moreover, $d_{saw}(t)$ can yield worse sensitivities than sine demodulation; it should not be used instead of a sine wave when $(2\gamma + 1)/V \geq \pi^2/6$. This shows once more that a single, fixed-shape demodulation waveform cannot outperform the sine wave for all values of γ and V . It is also worth pointing out that square wave demodulation, which is quite common when performing analog demodulation using a mixer [8], yields a fixed sensitivity of $S_0\pi^2/8$ which is worse than sine wave demodulation under all conditions.

3.4.5 Limited detection bandwidth

Until now, it has been assumed that the measurement noise $n(t)$ is delta-correlated or white like was done in [14, 15]. This applies to both its stationary and cyclostationary components. In practice of course, the detection bandwidth is always finite, correlating the noise over the extent of some representative system response $g(t)$. To look only at a limiting case, a

detection bandwidth that is adjusted to only capture the modulated spectrum and no extra high-frequency noise will tend to produce purely stationary noise (through effective averaging over the full modulation period), making the sine wave the best demodulation waveform and precluding any sensitivity improvement. Clearly then, cases where the detection bandwidth is a few times the modulation frequency Δf should yield improvement factors in between one and those presented in the previous section. The standing question is how to compute the optimal demodulation waveform in such cases.

While it is possible to compute a low-frequency PSD level for the modified process $[n(t) * g(t)]d(t)$, the mathematics are quite involved and do not lead to an insightful optimization process. Instead, we choose here to consider a more constrained case where the detection bandwidth is $B \equiv (M + 0.5)\Delta f$, with M a positive integer, giving a set of benchmarks to which any practical measurement scenario can be roughly compared. As already stated, for the self-heterodyne interferometer, any sensitivity improvement must be coming from the demodulation and addition of correlated spectral noise components (numerator of Eq. 3.13). If some of these components are removed by the system's limited bandwidth, the demodulation waveform should be adapted so as to contain no power above the cutoff. Therefore, limiting the number of harmonics in the following way:

$$d_M(t) = C \sum_{k=1}^M a_k \sin[k\psi(t)], \quad (3.25)$$

where $a_1 = 1$, should give representative results even if $q(t)$ is not adapted to take the filtering effect of $g(t)$ into account. Plugging this demodulation waveform in Eq. 3.13 gives:

$$S_{\theta_n}^{(2)}(f; d_M) = S_0 \left(\sum_{k=1}^M a_k^2 - \frac{V}{2\gamma + 1} \sum_{k=2}^M a_k a_{k-1} \right), \quad (3.26)$$

where the dependence of $q(t)$ upon $\theta(t)$ does not carry through due to the choice of phases in $d_M(t)$. Minimizing the term in parentheses implies the resolution of a system of equations that can be put in the form of a Toeplitz matrix, with solution given by [23]:

$$a_{k,opt} = \frac{\sinh[(M + 1 - k)\lambda]}{\sinh(M\lambda)}, \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad (3.27a)$$

$$\lambda = \operatorname{arccosh} \left(\frac{2\gamma + 1}{V} \right). \quad (3.27b)$$

The associated sensitivity can be computed by inserting these coefficients into Eq. 3.26:

$$S_{\theta_n}^{(2)}(f; d_{M,opt}) = \frac{S_0}{2} \left[1 + \frac{\tanh \lambda}{\tanh(M\lambda)} \right]. \quad (3.28)$$

In particular, the limiting case of an infinite number of harmonics can be shown to simplify to:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} a_{k,opt} = e^{(1-k)\lambda}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.29)$$

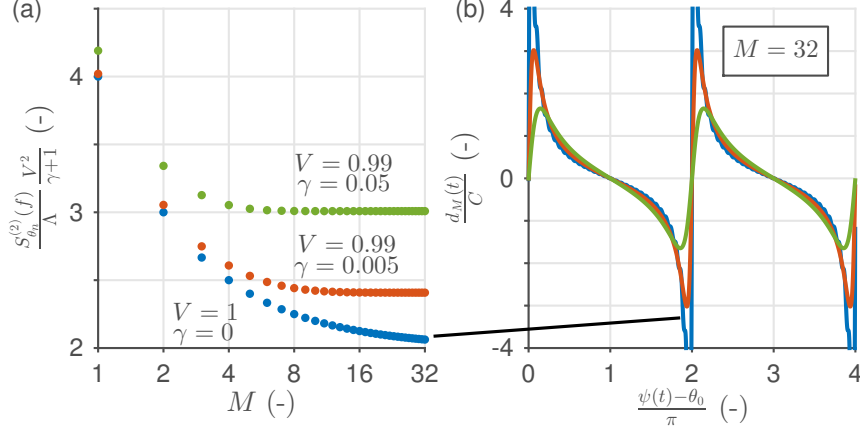


Figure 3.4 – Impact of the number of demodulation harmonics for the case of a single detector. (a) Phase sensitivity versus M for three different pairs (γ, V) , optimal demodulation. (b) Optimal demodulation waveforms for $M = 32$. Colors are as in (a). The Gibbs phenomenon is apparent for the case $\gamma = 0, V = 1$. The first 10 harmonics always give more than 90% of the possible sensitivity improvement.

which, when plugged into Eq. 3.25, yields the explicit form of Eq. 3.21 for the case of the self-heterodyne interferometer. This can then be used to directly derive Eq. 3.23, which is equal to $(S_0/2)(1 + \tanh \lambda)$. Another case of interest is that of the ideal interferometer where $(2\gamma + 1)/V = 1$, or $\lambda = 0$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} a_{k,opt} = 1 - \frac{k-1}{M}, \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad (3.30)$$

for example, with $M = 2$ we get $a_{k,opt} = \{1, 1/2\}$, with $M = 3$ we get $a_{k,opt} = \{1, 2/3, 1/3\}$, and so forth. Furthermore, the sensitivity of Eq. 3.28 simplifies to $2\Lambda(1 + M^{-1})$ which fits prior results for $M = 1$ (sine), $M = 2$ (two-harmonic), and $M \rightarrow \infty$ (optimal).

While Eq. 3.27 can be used to compute an optimized demodulation waveform for a given detection bandwidth B (that has to be associated to the closest integer M), it is also possible to predict the necessary bandwidth for given values of the parameters γ and V using Eq. 3.28. Indeed, as can be seen from Fig 3.4(a), the phase sensitivity improves when the number of demodulation harmonics M is increased, as expected, but it eventually stabilizes close to the sensitivity floor $(S_0/2)(1 + \tanh \lambda)$. When the floor is almost attained, the benefit of adding extra harmonics becomes negligible. This implies that limiting the detection bandwidth to some value $(M_\rho + 0.5)\Delta f$, where M_ρ gives a fraction ρ of the maximum possible sensitivity improvement, is an acceptable design compromise. From Eq. 3.28, M_ρ can be computed as:

$$M_\rho = \frac{1}{\lambda} \operatorname{arctanh} \left[\frac{1-\rho}{\tanh \lambda} + \rho \right]^{-1}, \quad (3.31)$$

which tends to $1/(1-\rho)$ as $\lambda \rightarrow 0$. In particular, the curves illustrated in Fig. 3.4(a) give $M_{0.9} = 3.00, 4.44,$ and 10.0 , which all appear adequate. A rather modest bandwidth of

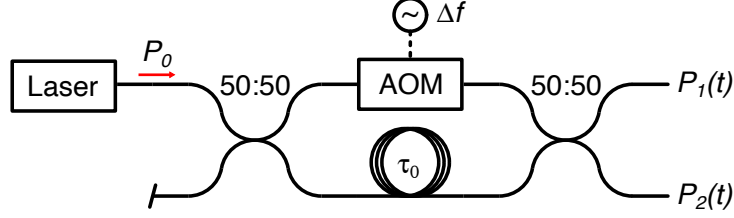


Figure 3.5 – Two-detector self-heterodyne interferometer considered in this section.

approximately $10\Delta f$ is therefore sufficient in practice to unlock more than 90% of the possible sensitivity improvement. Since Δf falls somewhere in between 30 and 300 MHz for typical AOMs optimized for frequency shifting, a realistic detection bandwidth of 0.3 to 3 GHz should be satisfactory in general.

3.5 Self-heterodyne interferometer with two photodetectors

We now consider the common scenario in which both output ports of the self-heterodyne interferometer are monitored (Fig. 3.5). The two optical power signals then take the following forms:

$$P_1(t) = \frac{P_0}{2} \{1 - V \cos[\psi(t) + \theta(t)]\} + n_1(t), \quad (3.32a)$$

$$P_2(t) = \frac{P_0}{2} \{1 + V \cos[\psi(t) + \theta(t)]\} + n_2(t), \quad (3.32b)$$

where the zero-mean measurement noises $n_1(t)$ and $n_2(t)$ are defined as in the previous section and are assumed to be independent under all conditions, i.e.:

$$\langle n_1(t)n_2(t + \tau) \rangle = 0. \quad (3.33)$$

Both $P_1(t)$ and $P_2(t)$ can be linearized as before, revealing small-signal phase gains $m_{\theta,1}(t) = (VP_0/2) \sin \psi(t)$ and $m_{\theta,2}(t) = -m_{\theta,1}(t)$.

Typically, balanced detection is used so as to generate a composite power signal $P(t) \equiv P_1(t) - P_2(t)$, doubling the gain for phase, reducing the contribution of amplitude noise, and facilitating the reduction of γ since the stationary part of the measurement noise is normally introduced after subtraction of the photocurrents (this is our assumption here). More importantly for our purposes, this subtraction results in an effective measurement noise $n(t) \equiv n_1(t) - n_2(t)$ that is stationary regardless of the values of γ and V , with a time-independent variance envelope expressed as $q(t) = q = \Lambda P_0^2(\gamma + 1)$ (it would instead be $\Lambda P_0^2(2\gamma + 1)$, double that for a single detector, if the stationary noise contribution was introduced in each channel before subtraction). From Eq. 3.21, it is then clear that the optimal demodulation waveform for the case of balanced detection is always a sine wave, as expected; any other waveform demodulates extra noise, which in this case contains no redeeming spectral correlation, while

demodulating the same amount of signal. Moreover, the phase sensitivity is $2\Lambda(\gamma + 1)/V^2$, justifying the normalization employed in Figs. 3.2 and 3.3 in order to facilitate comparison. This phase sensitivity simplifies to 2Λ in the ideal case and can be compared to $\Lambda(\gamma + 1)/V^2$, a value valid for a balanced-detection homodyne interferometer operated around a fringe zero-crossing [10]. Therefore, even if both power signals are monitored, the SNL is still not accessible in a self-heterodyne interferometer based on balanced detection. As stated previously, this is due to the fundamental penalty associated to modulation and demodulation, which is a factor of two at minimum for the self-heterodyne interferometer (due to the modulation by a sine wave associated to the frequency shift).

However, it must be recognized here that direct subtraction constitutes only one of the possible linear combinations of the two power signals and that, in the context of noise minimization, it is not the ideal one in general. Since Eqs. 3.32a and 3.32b each provide an independent estimate of the signal of interest $\theta(t)$, the statistically optimal combination can be constructed in the form of $k_1(t)P_1(t) - k_2(t)P_2(t)$, where $k_1(t) + k_2(t) = 1$, yielding an effective gain $m_\theta(t) = (VP_0/2)\sin\psi(t)$. To compute $k_1(t)$, a standard result of estimation theory [24] can be applied to each infinitesimal slice of time in order to build the temporal function which minimizes the total variance:

$$k_1(t) = \frac{q_2(t)}{q_1(t) + q_2(t)} \approx \frac{1}{2} \left[1 + \frac{V \cos \psi(t)}{2\gamma + 1} \right], \quad (3.34)$$

from which $k_2(t)$ naturally follows. The approximation is used since we neglect the small effect of the $\theta(t)$ term. Contrary to the case of balanced detection, we assume here that each power signal is corrupted by stationary additive noise so $q_1(t)$ is defined as in Eq. 3.4 and $q_2(t)$ is complementary. The composite measurement noise that results from this (time-varying) linear combination remains non-stationary. It is however smaller than both measurement noises over the full modulation period, as can be determined from its variance envelope:

$$q(t) = \frac{q_1(t)q_2(t)}{q_1(t) + q_2(t)} = \frac{\Lambda P_0^2 (2\gamma + 1)^2 - V^2 \cos^2 \psi(t)}{4(2\gamma + 1)}. \quad (3.35)$$

This function is illustrated in Fig. 3.6(a) for two selected values of γ and for $V = 0.99$. For the case of a finite detection bandwidth, the optimum linear combination would remain the same provided that $B > 2.5\Delta f$.

From knowledge of $m_\theta(t)$ and $q(t)$ associated to the best linear combination, the sensitivity can be predicted for any demodulation waveform using Eq. 3.13 and the optimal demodulation waveform can be computed from Eq. 3.21. Since the analytical form of the associated sensitivity is difficult to obtain via this approach, we can alternatively follow a reasoning similar to that in the previous section and construct the following Fourier series:

$$d_L(t) = C \sum_{k=1}^L b_k \sin[(2k - 1)\psi(t)], \quad (3.36)$$

where $b_1 = 1$ and where only the odd harmonics are kept since the correlation is now between frequencies f and $f \pm 2\Delta f$, as revealed by the computation of $Q(f)$, the spectrum of $q(t)$ defined by Eq. 3.35. With this form of demodulation waveform, the sensitivity becomes:

$$S_{\theta_n}^{(2)}(f; d_L) = \frac{S_0 \cosh(2\lambda)}{2[1 + \cosh(2\lambda)]} \left(\frac{1}{2 \cosh(2\lambda)} + \sum_{k=1}^L b_k^2 - \frac{1}{\cosh(2\lambda)} \sum_{k=2}^L b_k b_{k-1} \right). \quad (3.37)$$

Minimizing this sensitivity entails almost the same system of equations as that of Eq. 3.26. The best Fourier series is found to be:

$$b_{k,opt} = \frac{\sinh[2(L+1-k)\lambda]}{\sinh(2L\lambda)}, \quad k = 1, 2, \dots, L, \quad (3.38)$$

which is associated to the following sensitivity:

$$S_{\theta_n}^{(2)}(f; d_{L,opt}) = \frac{S_0}{4} \left[1 + \frac{\tanh \lambda}{\tanh(2L\lambda)} \right]. \quad (3.39)$$

For an infinite number of harmonics L , $b_{k,opt}$ defines the optimum demodulation waveform $d_{opt}(t)$ and the sensitivity becomes $(S_0/4)/(1 + \tanh \lambda)$, exactly half that found for a single detector. This sensitivity converges to Λ as $\gamma \rightarrow 0$ and $V \rightarrow 1$. This establishes that the SNL can be reached in an ideal self-heterodyne interferometer with infinite detection bandwidth given that 1) the two available power signals are recorded independently and simultaneously, 2) these signals are linearly combined in a statistically optimal manner, and 3) the optimal waveform is used to demodulate the signal resulting from the linear combination. This agrees with the idea that all available information should be exploited to reach the ultimate sensitivity limit [25]. Alternatively, sensitivity can be traded for simplicity by demodulating the optimum linear combination using a sine wave or a square wave; both these choices yield a better sensitivity than balanced detection for $\gamma < 0.1$, $V > 0.9$, approximately, as shown in Fig. 3.6(c).

Another approach is to treat both $P_1(t)$ and $P_2(t)$ independently, as shown in section 3.4, and average the two resulting phase estimates. Since $n_1(t)$ and $n_2(t)$ are independent, this yields a factor of two (3 dB) improvement to the sensitivity, enough to asymptotically reach Λ when using optimal demodulation and 1.29Λ when using sawtooth demodulation. The case of sine demodulation of both signals is not as interesting since it yields a 2Λ sensitivity for ideal conditions only - balanced detection is otherwise better. If performing all operations in the analog domain, this second approach (demodulation, then averaging) should be significantly simpler since the final averaging step is much easier to implement than a time-varying linear combination prior to demodulation. The main downside is that two demodulators are required instead of one. All detection and demodulation schemes considered in this paper are summarized in Table 3.1.

Table 3.1 – Signals and asymptotic sensitivities.

Detection scheme	$m_\theta(t)/P_0$	$q(t)/(\Delta P_0^2)$	Sensitivity for $\gamma = 0, V = 1$, using $d(t)$				
			$d_{sin}(t)$	$d_{2h}(t)$	$d_{saw}(t)$	$d_{sqr}(t)$	$d_{opt}(t)$
Single detector	$\frac{V}{2} \sin \psi(t)$	$\frac{1}{2} [2\gamma + 1 - V \cos \psi(t)]$	4.00 Ω	3.00 Ω	2.58 Ω	4.93 Ω	2.00 Ω
Balanced detector	$V \sin \psi(t)$	$\gamma + 1$	2.00 Ω	2.50 Ω	3.29 Ω	2.47 Ω	2.00 Ω
Two dets. (combine \rightarrow demod. 1x)	$\frac{V}{2} \sin \psi(t)$	$\frac{(2\gamma+1)^2 - V^2 \cos^2 \psi(t)}{4(2\gamma+1)}$	1.50 Ω	1.75 Ω	1.40 Ω	1.23 Ω	1.00 Ω
Two dets. (demod. 2x \rightarrow average)	$\pm \frac{V}{2} \sin \psi(t)$	$\frac{1}{2} [2\gamma + 1 \mp V \cos \psi(t)]$	2.00 Ω	1.50 Ω	1.29 Ω	2.47 Ω	1.00 Ω

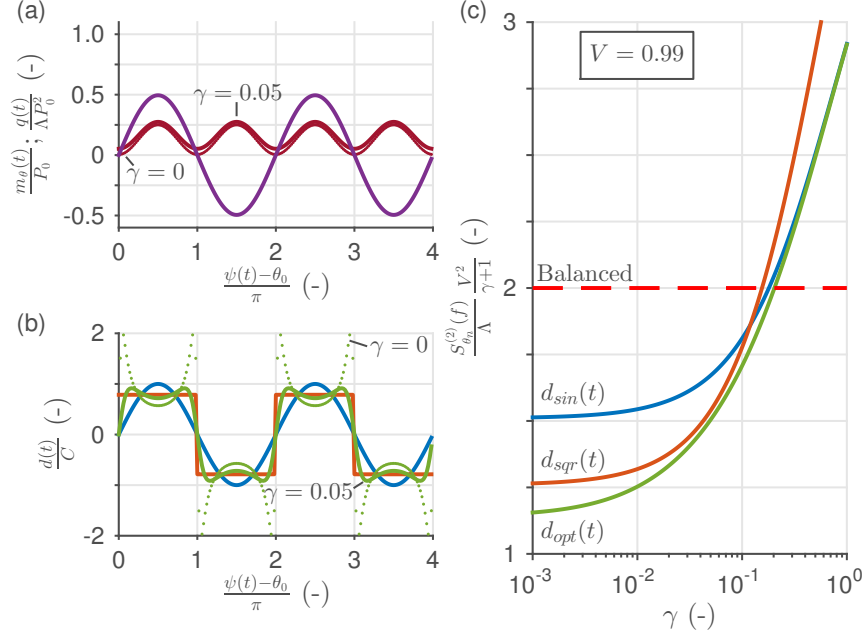


Figure 3.6 – Optimal, square, and sine demodulation for the case of two detectors with optimal linear combination and for $V = 0.99$. (a) Small-signal phase gain (purple) and variance envelope (red) for $\gamma = 0$ (dotted) and $\gamma = 0.05$ (solid). (b) Three possible demodulation waveforms ($\{d_{sin}(t), d_{sqr}(t), d_{opt}(t)\}$, blue, orange, and green, respectively). (c) Phase sensitivity versus γ . Colors are as in (b). The normalization by $(\gamma + 1)/V^2$ is made to facilitate comparison with the case of balanced detection.

3.6 Simulation

In practice, reaching a small value of γ requires care in the design of the detection chain. For example, if we only include shot noise and detector thermal noise in the measurement noise, the stationary noise parameter can be expressed as $\gamma = 2k_B T / (eU_0)$, where k_B is Boltzmann constant, T is the temperature, e is the elementary charge, and U_0 is the output voltage of the photodetector for an input power P_0 . This evaluates as $\gamma \approx 0.05/U_0$ at room temperature. Therefore, at least 500 mV of output voltage is required to reach the condition $\gamma < 0.1$, and values of $\gamma < 0.001$ must be considered difficult to attain in practice except perhaps with cooled photodetectors.

Figure 3.7 shows the outcome of a simple simulation performed in Matlab™ for the case of a single photodetector. A power signal of the form of Eq. 3.1, with Gaussian noise component simulated through a pseudorandom number generator, is defined with $\nu_0 = 194$ THz, $P_0 = 1$ mW, $\eta = 0.8$, $V = 0.99$, $\Delta f = 40$ MHz, and $\gamma = 0.005$. Such level of stationary additive noise is consistent with a thermal-noise limited detector with transimpedance gain 10 k Ω (operated at room temperature) outputting up to 10 V. A low-frequency $1/f$ noise is added for realism, motivating the use of the AOM to avoid contamination of the phase esti-

mate by technical noise. The detection bandwidth is assumed to be $B = 9.5\Delta f = 380$ MHz, which is somewhat unrealistic for this level of transimpedance gain, but two AOMs of opposite shift polarity could be used in practice to reduce Δf and thus reduce B [26]. Furthermore, from Eq. 3.31, this bandwidth is sufficient to extract more than 98 % of the possible sensitivity gain, so a bandwidth reduction would be reasonable in this case. The signal is assumed to be sampled at 1.5 GS/s and an equivalent number of bits above 14.5 is required to maintain roughly the same γ after digitization. The phase signal $\theta(t)$ is simulated as a zero-mean band-pass process (2.5 MHz bandwidth, centered around 2.8 MHz, see black curve in Fig. 3.7(e)) in order to expose both the low- and high-frequency sensitivity floors and confirm the absence of a spectral bias.

Demodulating using $d_{sin}(t)$, $d_{2h}(t)$ (with $a_2 = 0.5$), and $d_{9,opt}$ yields the blue, orange, and green curves in Fig. 3.7(e). The average level of the phase error floor in each case is calculated to be 4.12Λ , 3.13Λ , and 2.49Λ , respectively, where $\Lambda = 161$ nrad²/Hz. This is in perfect agreement with the predictions of Eqs. 3.16, 3.18, and 3.28. To better approach 2Λ , the best possible sensitivity for the single-detector scheme, the visibility would have to be further improved, the stationary noise contribution would have to be lowered, and the detection bandwidth would likely have to be increased accordingly, though $M = 9$ is sufficient to reach $2\Lambda(1+1/9) \approx 2.22\Lambda$ in an ideal interferometer.

Figure 3.8 shows a simulation under the same basic conditions as Fig. 3.7, but this time using two photodetectors with optimal linear combination. Panel (a) shows how the variance envelope is modified by the combination of the two non-stationary measurement noises $n_1(t)$ and $n_2(t)$, yielding a smaller average noise power. Panel (b) shows the three chosen demodulation waveforms, sine, square, and optimal, which yield sensitivities 1.57Λ , 1.32Λ , and 1.24Λ , respectively. Once again, this is in agreement with theoretical predictions; the sensitivity associated to sine and optimal demodulation can be computed from Eq. 3.39 with $L = 1$ and $L = 5$ and the sensitivity of square wave demodulation can be predicted from Eq. 3.37 using its normalized Fourier series $b_k = (2k - 1)^{-1}$ with $L = 5$. While the number of required harmonics is smaller than in the single photodetector case, this is only because the even harmonics are not included in the series definition since they only worsen the sensitivity; the bandwidth is the same in both cases.

3.7 Conclusion

In summary, we showed that the cyclostationary nature of shot noise observed at the outputs of a self-heterodyne interferometer must be carefully considered to reach the best phase sensitivity. In a single-detector interferometer, standard sine demodulation entails at least a 6 dB penalty to the shot-noise limit that is attainable in a properly biased homodyne interferometer. This penalty can be asymptotically lowered to 3 dB through the use of a tailored

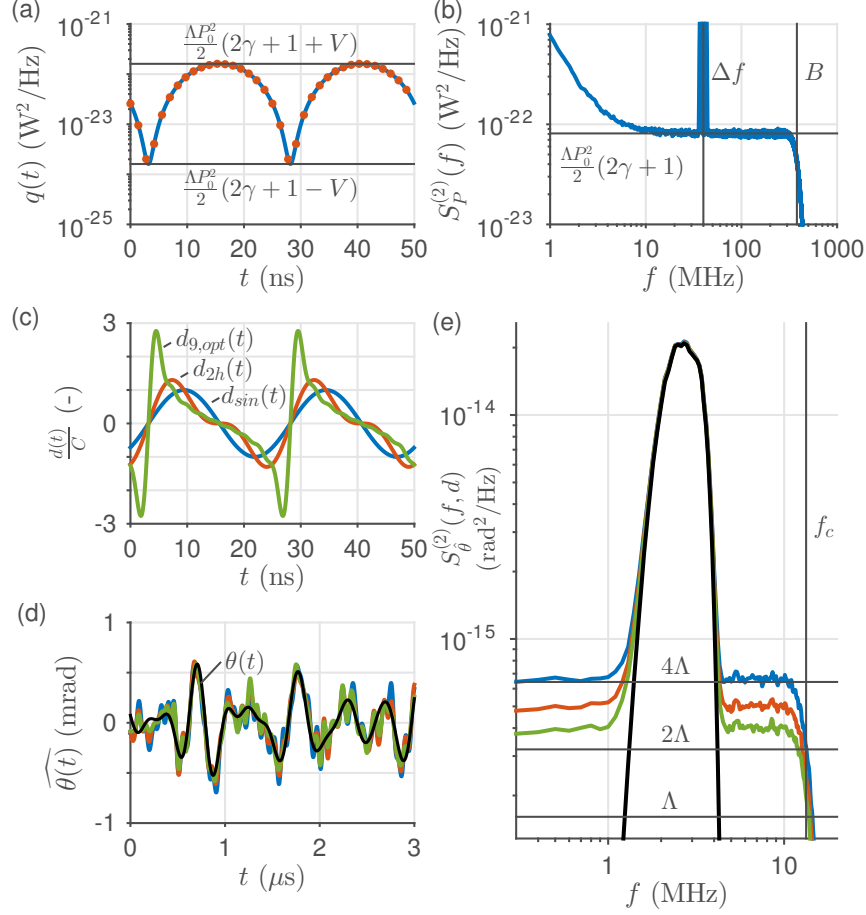


Figure 3.7 – Simulation for the case of a single photodetector with $\gamma = 0.005$ and $V = 0.99$. (a) Variance envelope $q(t)$. Ensemble average over the simulation data (orange markers) compared to Eq. 3.4 (solid blue line). (b) Total signal PSD showing the white noise level and finite detection bandwidth. (c) Chosen demodulation waveforms. Two-harmonic demodulation is performed with $a_2 = 0.5$, which is close to optimal in this case ($a_{2,opt} \approx 0.49$). The optimal demodulation waveform takes the limited bandwidth into account (computation from Eq. 3.27 using $M = 9$). (d) Phase estimate. Colors are as in (c); the solid black curve is the true phase signal $\theta(t)$. (e) Phase estimate PSD showing the low-pass filter cutoff and sensitivity floor. Colors are as in (c); the solid black curve is proportional to the modulus square of the true phase spectrum $\Theta(f)$.

demodulation waveform which maximizes the signal-to-noise ratio of the demodulated signal. Since this optimal waveform displays infinite bandwidth and takes a shape that depends on the conditions of operation, which might require a rigorous characterization of the interferometer and photodetector, a simpler alternative is to use a sawtooth waveform or to simply add a second harmonic with half the amplitude of the fundamental to the sine wave. However, these simplified demodulation waveforms are not as efficient as optimal demodulation and can also yield a worse sensitivity than sine demodulation in cases of high stationary noise contribution and/or low fringe visibility (in which case the optimal demodulation waveform tends to a sine

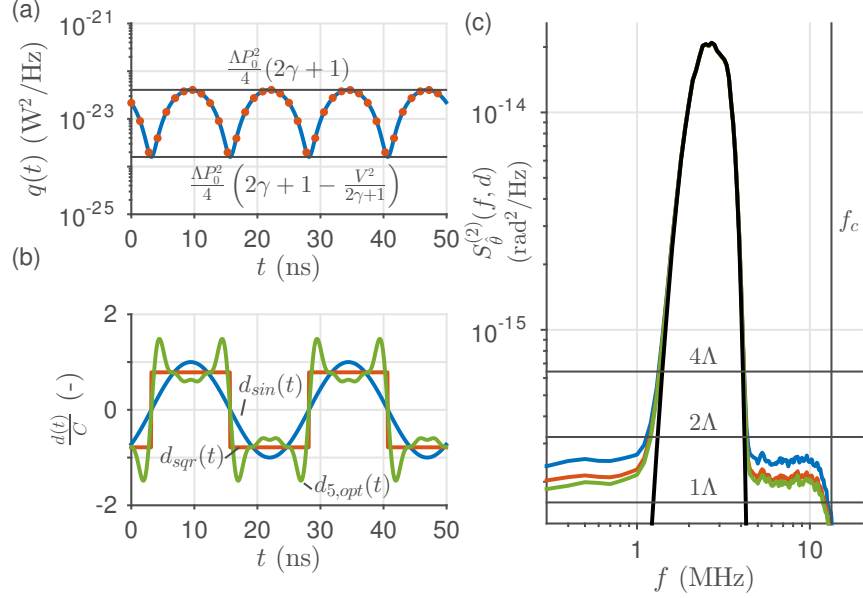


Figure 3.8 – Simulation for the case of two photodetectors with optimal linear combination and with $\gamma = 0.005$ and $V = 0.99$. (a) Variance envelope $q(t)$. Ensemble average over the simulation data (orange markers) compared to Eq. 3.35 (solid blue line). (b) Chosen demodulation waveforms. The optimal demodulation waveform takes the limited bandwidth into account (computation from Eq. 3.38 using $L = 5$). (d) Phase estimate. Colors are as in (c); the solid black curve is the true phase signal $\theta(t)$. (e) Phase estimate PSD showing the low-pass filter cutoff and sensitivity floor. Colors are as in (c); the solid black curve is proportional to the modulus square of the true phase spectrum $\Theta(f)$.

wave). We also showed that most of the possible sensitivity improvement comes from the few first harmonics of the demodulation waveform and described how to compute an optimal demodulation waveform that considers the limited detection bandwidth.

To reach the true shot-noise-limit for phase sensitivity, we established that it is necessary to independently record both signals produced by the interferometer. While the simplest approach in this case is to demodulate each signal independently, as for a single detector, and then average the two phase estimates for a 3 dB improvement, we showed that it is also possible to combine the two signals in a statistically optimal manner prior to demodulation. We gave the optimal demodulation waveform for this alternative approach, once again taking the non-ideality and limited bandwidth into account, and also showed that both a sine wave and a square wave can be adequate to demodulate the linear combination. Regardless of the approach that is taken, recording both signals leads to a better phase sensitivity than balanced detection when shot noise dominates the measurement noise and when the interferometric visibility is high, which are the conditions of interest for high precision measurements. If these conditions are not met, it is preferable to employ standard balanced detection which is always optimal under sine wave demodulation.

The reasoning presented in this paper can be adapted, with a few adjustments, to other cases where shot noise is cyclostationary such as in a phase-modulated interferometer operated at the dark fringe (a particular case which has been studied previously using the same basic strategy, yielding results that we can replicate using the general formalism introduced here), in an external-terrodyne modulation interferometer [27] or for the case of a heterodyne beat between two independent CW lasers. In the latter case however, both laser signals must be highly coherent, polarization-matched, and of a similar power to yield any significant benefit in terms of phase sensitivity. These conditions might be much more constraining than they are for a typical interferometer. We therefore expect that the ideas introduced here will be mostly relevant to the field of interferometry in contexts of operation close to the shot-noise limit, when increasing the optical power is prohibitive or when reaching the ultimate phase sensitivity is important.

3.8 Bibliographie

- [1] F. Kéfélian, H. Jiang, P. Lemonde, and G. Santarelli. Ultralow-frequency-noise stabilization of a laser by locking to an optical fiber-delay line. *Optics Letters*, 34(7) :914–916, 2009. URL <https://doi.org/10.1364/OL.34.000914>.
- [2] A. Tourigny-Plante, V. Michaud-Belleau, N. B. Hébert, H. Bergeron, J. Genest, and J.-D. Deschênes. An open and flexible digital phase-locked loop for optical metrology. *Review of Scientific Instruments*, 89(9) :093103, 2018. URL <https://doi.org/10.1063/1.5039344>.
- [3] J. Dong, J. Huang, T. Li, and L. Liu. Observation of fundamental thermal noise in optical fibers down to infrasonic frequencies. *Applied Physics Letters*, 108(2) :021108, 2016. URL <https://doi.org/10.1063/1.4939918>.
- [4] J. R. Rzasa, K. Cho, and C. C. Davis. Long-range vibration detection system using heterodyne interferometry. *Applied Optics*, 54(20) :6230–6236, 2015. URL <https://doi.org/10.1364/AO.54.006230>.
- [5] N. B. Hébert, A. P. Hilton, P. S. Light, and A. N. Luiten. Hertz-level frequency comparisons between diverse color lasers without a frequency comb. *Optics Letters*, 45(15) : 4196–4199, 2020. URL <https://doi.org/10.1364/OL.394572>.
- [6] J. Dong, Y. Hu, J. Huang, M. Ye, Q. Qu, T. Li, and L. Liu. Subhertz linewidth laser by locking to a fiber delay line. *Applied Optics*, 54(5) :1152–1156, 2015. URL <https://doi.org/10.1364/AO.54.001152>.
- [7] H. Jiang, F. Kéfélian, P. Lemonde, A. Clairon, and G. Santarelli. An agile laser with ultra-low frequency noise and high sweep linearity. *Optics Express*, 18(4) :3284–3297, 2010. URL <https://doi.org/10.1364/OE.18.003284>.

- [8] A. P. Hilton, P. S. Light, L. Talbot, and A. N. Luiten. Optimal design for spectral narrowing and fast frequency sweep of an interferometer-stabilized laser. *Optics Letters*, 45(1) :45–48, 2020. URL <https://doi.org/10.1364/OL.45.000045>.
- [9] S. Droste, F. Ozimek, T. Udem, K. Predehl, T. W. Hänsch, H. Schnatz, G. Grosche, and R. Holzwarth. Optical-frequency transfer over a single-span 1840 km fiber link. *Physical Review Letters*, 111(11) :110801, 2013. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.111.110801>.
- [10] V. Michaud-Belleau, J. Genest, and J.-D. Deschênes. Optimal detection scheme for shot-noise-limited phase estimation in passive classical-light interferometry. *Physical Review Applied*, 10(2) :024025, 2018. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.10.024025>.
- [11] W. Gardner and L. Franks. Characterization of cyclostationary random signal processes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 21(1) :4–14, 1975. URL <https://doi.org/10.1109/TIT.1975.1055338>.
- [12] F. Quinlan, T. M. Fortier, H. Jiang, A. Hati, C. Nelson, Y. Fu, J. C. Campbell, and S. A. Diddams. Exploiting shot noise correlations in the photodetection of ultrashort optical pulse trains. *Nature Photonics*, 7(4) :290–293, 2013. URL <https://doi.org/10.1038/nphoton.2013.33>.
- [13] J.-D. Deschênes. *Non-stationary photodetection shot noise in frequency combs : a signal processing perspective*. PhD thesis, Université Laval, 2014.
- [14] B. J. Meers and K. A. Strain. Modulation, signal, and quantum noise in interferometers. *Physical Review A*, 44(7) :4693, 1991. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.44.4693>.
- [15] T. M. Niebauer, R. Schilling, K. Danzmann, A. Rüdiger, and W. Winkler. Nonstationary shot noise and its effect on the sensitivity of interferometers. *Physical Review A*, 43(9) :5022, 1991. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.43.5022>.
- [16] V. Michaud-Belleau, H. Bergeron, P. S. Light, N. B. Hébert, J.-D. Deschênes, A. N. Luiten, and J. Genest. Passive coherent discriminator using phase diversity for the simultaneous measurement of frequency noise and intensity noise of a continuous-wave laser. *Metrologia*, 53(5) :1154, 2016. URL <https://doi.org/10.1088/0026-1394/53/5/1154>.
- [17] A. Papoulis and S. U. Pillai. *Probability, random variables, and stochastic processes*. Tata McGraw-Hill Education, 2002.
- [18] M. B. Gray, A. J. Stevenson, H.-A. Bachor, and D. E. McClelland. Harmonic demodulation of nonstationary shot noise. *Optics Letters*, 18(10) :759–761, 1993. URL <https://doi.org/10.1364/OL.18.000759>.

- [19] M. Rakhmanov. Demodulation of intensity and shot noise in the optical heterodyne detection of laser interferometers for gravitational waves. *Applied Optics*, 40(36) :6596–6605, 2001. URL <https://doi.org/10.1364/AO.40.006596>.
- [20] N. Mio and K. Tsubono. Observation of an effect due to non-stationary shot noise. *Physics Letters A*, 164(3-4) :255–258, 1992. URL [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(92\)91100-6](https://doi.org/10.1016/0375-9601(92)91100-6).
- [21] J.-D. Deschênes and J. Genest. Heterodyne beats between a continuous-wave laser and a frequency comb beyond the shot-noise limit of a single comb mode. *Physical Review A*, 87(2) :023802, 2013. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.87.023802>.
- [22] B. Sklar. *Digital communications : fundamentals and applications*. Prentice Hall PTR, 2001.
- [23] G. Y. Hu and R. F. O’Connell. Analytical inversion of symmetric tridiagonal matrices. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 29(7) :1511, 1996. URL <https://doi.org/10.1088/0305-4470/29/7/020>.
- [24] D. Fraser and J. Potter. The optimum linear smoother as a combination of two optimum linear filters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 14(4) :387–390, 1969. URL <https://doi.org/10.1109/TAC.1969.1099196>.
- [25] L. Pezzé and A. Smerzi. Mach-zehnder interferometry at the heisenberg limit with coherent and squeezed-vacuum light. *Physical Review Letters*, 100(7) :073601, 2008. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.073601>.
- [26] E. Leirset, H. E. Engan, and A. Aksnes. Heterodyne interferometer for absolute amplitude vibration measurements with femtometer sensitivity. *Optics Express*, 21(17) : 19900–19921, 2013. URL <https://doi.org/10.1364/OE.21.019900>.
- [27] V. Michaud-Belleau, M. Charlet, A. Tourigny-Plante, J.-D. Deschênes, and J. Genest. External heterodyne modulation for the suppression of low-frequency noise in quadrature interferometry. *Optics Letters*, 45(3) :670–673, 2020. URL <https://doi.org/10.1364/OL.376542>.

Chapitre 4

Backscattering in antiresonant hollow-core fibers: over 40 dB lower than in standard optical fibers

Vincent Michaud-Belleau¹, Eric Numkam Fokoua², Thomas D. Bradley², John R. Hayes², Yong Chen², Francesco Poletti², David J. Richardson², Jérôme Genest¹ et Radan Slavík²

¹Centre d'optique, photonique et laser, Université Laval, Québec, QC G1V 0A6, Canada

²Optoelectronics Research Centre, University of Southampton, Southampton, SO17 1BJ, Royaume-Uni

Publié dans *Optica*, 8(2) :216-219, 2021 ¹

URL <https://doi.org/10.1364/OPTICA.403087>.

4.1 Résumé

La rétrodiffusion élastique de la lumière dans la fibre optique est un phénomène fondamental qui détermine les performances ultimes de plusieurs systèmes fibrés tels que les gyroscopes et les liens de transfert bidirectionnel. Jusqu'à présent, les efforts pour réduire le coefficient de rétrodiffusion ont donné des résultats limités, la plus basse valeur enregistrée se situant autour de -76 dB/m dans une fibre à coeur de silice sans Ge et à 1.55 μm . Ici, nous présentons ce que nous croyons être la première mesure de la rétrodiffusion dans une fibre à coeur creux antirésonante à faible perte de propagation et montrons qu'elle est inférieure par plus de 40 dB aux valeurs rapportées dans la fibre de silice conventionnelle et dans la fibre à coeur creux à bande interdite photonique. Le niveau record de -118 dB/m mesuré avec notre réflectomètre optique dans le domaine fréquentiel est en bon accord avec des simulations dans lesquelles nous

1. Reprinted article, with permission, from Vincent Michaud-Belleau, Eric Numkam Fokoua, Thomas D. Bradley, John R. Hayes, Yong Chen, Francesco Poletti, David J. Richardson, Jérôme Genest, and Radan Slavík, *Optica*, 8(2), 216-219, 2021. © 2021 Optica Publishing Group.

supposons que la diffusion provient de la rugosité intrinsèque à la surface de la microstructure de verre. Nos résultats démontrent également qu'un instrument construit sur mesure peut localiser et quantifier les défauts dans une fibre à coeur creux, permettant sa caractérisation détaillée.

4.2 Abstract

The elastic backscattering of light in optical fiber is a fundamental phenomenon which sets the ultimate performance of several fiber systems such as gyroscopes and bidirectional transfer links. Until now, efforts to reduce the backscattering coefficient have yielded limited results, with the lowest value sitting at around -76 dB/m in Ge-free silica core fiber at 1.55 μm . Here, we present what we believe to be the first measurement of backscattering from a low-loss antiresonant hollow-core fiber and show that it is more than 40 dB below reported values in silica-core fiber and hollow-core photonic bandgap fiber. The record-low level of -118 dB/m measured with our custom-built optical frequency-domain reflectometer is in good agreement with simulations in which we assume the scattering to originate from the intrinsic surface roughness. Our demonstration also shows that a tailored instrument can localize and quantify weak faults within a hollow-core fiber, enabling its detailed characterization.

4.3 Introduction

The elastic scattering of light is the prime contributor to the transmission loss of state-of-the-art single-mode fiber (SMF) in the near-infrared and visible regions [1, 2]. Such scattering is not only undesirable because it leads to loss, but also because a fraction of the scattered light is inevitably recaptured by the fiber and guided backwards. This backscattered light is equivalent to a large number of delayed replicas of the forward-propagating signal that act as a source of noise whenever they are allowed to reach the detector, most critically when they can coherently mix with the signal [3]. This is especially problematic in systems relying on bidirectional propagation such as fiber optic gyroscopes [4], remote fiber sensors probed in reflection [5], and bidirectional fiber links used for either time and frequency transfer [3], telecommunications [6], or quantum key distribution [7], though the performance of unidirectional systems like optoelectronic oscillators can also be limited by double backscattered light that propagates with the signal [8]. Yet, backscattering can also be beneficial in certain instances, for example for distributed fiber sensing [9] or to find faults within deployed fibers [10].

Lowering the backscattering coefficient (BSC) of a standard SMF requires the diminution of either the recapture fraction η or the scattering loss α_s ($\text{BSC} = \eta\alpha_s$). The recapture fraction is determined by the acceptance angle, inversely proportional to mode field area in SMF [11], and thus can only be modestly lowered before bending loss becomes problematic. Loss caused

by Rayleigh scattering in SMF, on the other hand, correlates with the fictive temperature, a parameter quantifying the disorder of the glass network which is typically higher in fiber than in bulk [12]. Techniques to lower this temperature have been employed in the ongoing quest to minimize the transmission loss of long-haul submarine systems [1]. In the Ge-free SMFs used therein, the scattering loss is the dominant contributor to the total loss and it lies at approximately 0.1 dB/km ($\alpha_s = 2.3 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$). This is associated with a BSC of -76 dB/m assuming $\eta = 1.2 \times 10^{-3}$, about 4 dB below what is usually quoted for SMF at $1.55 \text{ }\mu\text{m}$ [13]. However, further significant reduction of α_s is unlikely since the gap in fictive temperature between fiber and bulk is now mostly closed [1, 12]. Therefore, to go beyond the limits imposed by fundamental Rayleigh scattering in SMF, light should be guided in a less scattering medium.

After its initial demonstration some 20 years ago [14], the hollow-core photonic bandgap fiber (HC-PBGF) was thus considered a promising candidate to attain lower BSC. In such fibers, the overlap of the mode field with the glass microstructure is typically 0.1 to 1% [15] which, given similar acceptance angles, should lead at least to a commensurate 20 to 30 dB reduction in volumetric Rayleigh backscattering when compared to standard SMF [16]. However, reported measurements in commercial 7-cell HC-PBGFs have shown a BSC of -60 dB/m or higher [13, 17, 18]. Such unexpectedly high BSC has been tentatively attributed to surface scattering from glass interfaces, which in those early fibers may have been oscillating along the entire length [19]. In addition, even for perfectly straight glass membranes, air-glass surfaces display intrinsic roughness which cause scattering. This is due to frozen-in surface capillary waves (SCW) that are excited by fundamental thermal noise, and are believed to set the ultimate performance limits in terms of loss and BSC [20].

In recent years, another class of hollow-core fiber (HCF), the antiresonant fiber, has been at the focus of intense research. This is due in part to the promise of reduced surface scattering loss associated with the operation of the glass membranes at antiresonance [21]. In particular, the nested antiresonant nodeless fiber (NANF) geometry fulfills this promise and currently holds the record for the lowest loss in a HCF, 0.28 dB/km [22]. The demonstration in [22] also confirms the theoretical prediction of a scattering loss below 0.1 dB/km in NANF (below the value in SMF) [21]. Although such low scattering loss implies commensurately weak backscattering, BSC characterization of NANF has not been reported so far, to our knowledge. We speculate this is because commercial instruments are not designed to measure BSCs that are orders of magnitude below that of SMF.

In this Letter, we present the first range-resolved characterization of backscattering in an antiresonant HCF, revealing a BSC of -118 dB/m which is more than 40 dB lower than that of SMF. Below, we briefly present the NANF sample as well as the custom instrument designed to measure its BSC, discuss how the results compare with the predictions of a theoretical model based on surface roughness scattering, and describe a series of tests performed to confirm the

soundness of our data analysis.

4.4 Experimental demonstration

For this demonstration, a 219-m sample of NANF manufactured at the University of Southampton was used. Short SMF-28 pigtails (≈ 24 cm) with angled physical contact connectors were spliced at both extremities of the spooled sample to facilitate its interfacing with characterization instruments and to seal its hollow core so as to prevent degradation. For each splice, a (250 ± 20) μm segment of graded-index multimode fiber was used as a mode-field adapter to decrease the loss per interconnection, which we estimated at (1.6 ± 0.2) dB. The loss of the NANF itself was measured via cutback to be 1.2 dB/km at 1.55 μm , higher than the current record based on an improved version of a similar design [22] but not problematic for the purposes of backscattering characterization. The total transmission loss of the pigtailed sample exposed to the laboratory environment was found to slowly fluctuate between 3.1 and 3.7 dB, a phenomenon that we attribute to the formation of a resonant cavity between the two air-glass splices ($\approx 3.6\%$ Fresnel reflections). We did not attempt to weaken these reflections, but this could eventually be achieved using improved interconnection techniques [23].

To perform the range-resolved backscattering measurement, we built an optical frequency-domain reflectometer (OFDR) optimized for sensitivity and dynamic range at the expense of versatility and spatial resolution (Fig. 4.1). The core of the instrument is a self-heterodyne Mach-Zehnder interferometer ("measurement interferometer") with a 27 MHz frequency shift produced through an acousto-optic modulator (AOM). A low-phase-noise and periodically chirped laser signal at 1539.8 nm, with a full sweep bandwidth $\Delta f = 335$ MHz and average chirp rate $\gamma = 93.5$ GHz/s, is used to illuminate the measurement interferometer as well as a reference interferometer. The purpose of this second interferometer (100-m polarization-maintaining SMF) is to track the chirp's deviation from linearity in order to preserve the resolution through post-processing correction [24]. To this effect, the signal produced by the three balanced photodetectors, together with the signal driving the AOM, are simultaneously digitized at 125 MS/s for 0.8 s and processed offline. Since the reference interferometer is not used to trigger the digitizer, the measurement range is determined by the sampling rate and reaches 100 km (ignoring the effects of fiber attenuation), one order of magnitude below the laser's nominal coherence length.

In order to maintain a high dynamic range in spite of the strong reflections caused by the air-glass splices, a Kaiser window with $\beta = 12$ is employed to compute the spectra. This choice yields an effective spatial resolution of $cN/(2\Delta f) = 0.9$ m in vacuum, where c is the speed of light and $N = 2$ is the window's equivalent noise bandwidth (measured in spectral bins). Moreover, the contribution of the remote splice at 219 m is carefully suppressed through polarization control to avoid the burying of the signal of interest by the associated phase

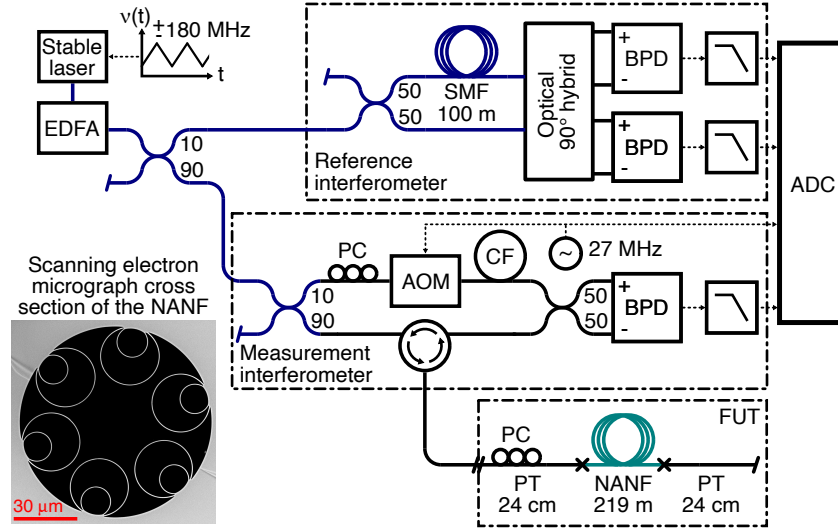


Figure 4.1 – Layout of the coherent OFDR operating at 1539.8 nm. EDFA, erbium-doped fiber amplifier; PC, polarization controller; AOM, acousto-optic modulator; CF, compensation fiber; BPD, balanced photodetector; ADC, analog-to-digital converter (digitizer); PT, pigtail; FUT, fiber under test. Solid lines represent fibers (black is standard, blue is polarization maintaining) and dashed lines represent electrical cables.

noise lobes [25]. The disadvantage of this approach is that it precludes the use of polarization diversity detection. However, it is one of the key features that enable an outstanding sensitivity of -127 dB/m in a single laser sweep, a value determined in equal parts by digitizer noise and shot noise. For a stationary scattering signal, this sensitivity can be improved by averaging sweeps before computing the spectrum [10]. More information about the instrument and fiber can be found in Supplement 1.

Figure 4.2 compares the reflectance density measured for NANF with that of a standard SMF-28 sample characterized with the same instrument. Both curves are calibrated to compensate for the insertion loss of the output coupler, circulator, and interconnections, thus showing the intrinsic backscattering of the fibers. Moreover, since OFDR relies on coherent detection, both curves correspond to the projection along a single polarization and are thus approximately 3 dB lower than the total reflectance density usually measured with an incoherent optical time domain reflectometer or an OFDR based on polarization diversity detection. For this figure, 5 sweeps were averaged to compute each normalized power spectral density (PSD), yielding an effective noise floor of $-127 - 10 \log_{10}(5) = -134$ dB/m. The $200/5 = 40$ resulting PSDs were then averaged to decrease the spectral variance. The displayed curves persist with such spectral averaging, becoming better defined, and are also repeatable over several minutes. Their uneven appearance is not due to measurement noise: it can be explained by a combination of fading noise and polarization effects in the samples [10].

For the NANF, the large peaks at 0 m and 219 m are caused by the Fresnel reflections

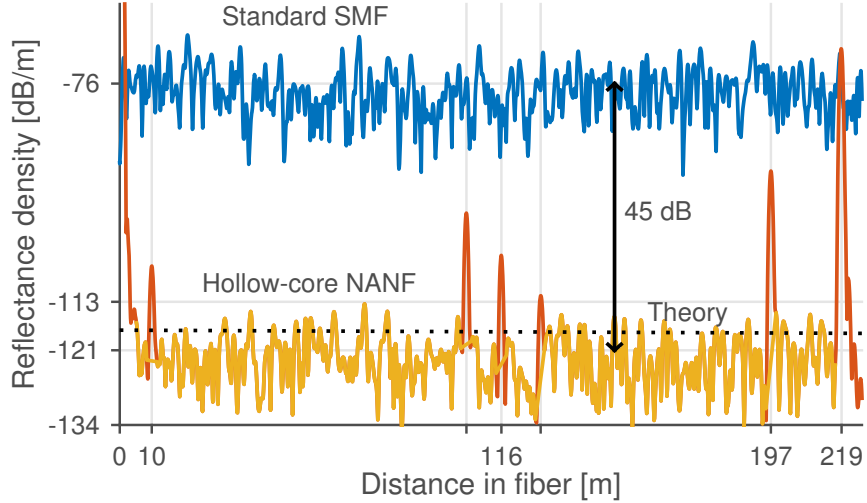


Figure 4.2 – Measured reflectance density (single-polarization, 0.9 m resolution) in NANF versus in SMF. The yellow trace excludes the peaks attributed to localized defects, the dotted black line constitutes the theoretical prediction of -118 dB/m.

at the points where the fiber is spliced to the SMF pigtails. The polarization-suppressed peak at 219 m reaches a level comparable to the backscattering in SMF, which constitutes the practical suppression limit for this pigtailed sample. Between the splices, the NANF’s reflectance density is -113 dB/m on average. However, this average is calculated by including the intermediate peaks that rise significantly above the apparent backscattering level at 10 m, 197 m, and around 116 m. As demonstrated below, these peaks consistently appear in the data and are thus attributed to localized inhomogeneities in the NANF. Without these peaks, the average reflectance density becomes -121 dB/m (yellow trace). We therefore estimate that the intrinsic total BSC of the NANF is $-121+3 = -118$ dB/m.

4.5 Discussion

To explain such a low BSC, the contributions of inhomogeneities within the glass microstructure, within the air that fills the core, and at the air-glass interfaces need to be carefully considered. First, since the NANF’s acceptance angle is very small ($\theta \approx 0.03$) and the fraction of power ξ guided in glass below 10^{-4} , the contribution of volumetric Rayleigh backscattering from silica, which is proportional to $\theta^2\xi$, is more than 55 dB lower than in SMF and can thus be neglected here [16]. Second, while the scattering loss in air close to atmospheric pressure is only 20 to 25 dB smaller than that in SMF [26], it plays no measurable role here since the thermal Doppler broadening at room temperature (≈ 500 MHz) is orders of magnitude larger than the 300 kHz measurement bandwidth. In a general context, the NANF could be evacuated to reduce the air contribution below the fundamental backscattering level measured here. This leaves surface scattering whose contribution we predict from coupled mode theory [27]

and the surface roughness statistics (the full details of the theoretical model developed for this analysis fall outside the scope of this short Letter and will thus be reported elsewhere). Based on the geometry of the NANF sample used here and on the fundamental SCW roughness measured in HC-PBGFs [20] (unfortunately, data about roughness in NANF is not available yet), our simulations predict a BSC of -115 dB/m, or -118 dB/m when measured along a single polarization, 3 dB above the value here. We consider this to constitute a reasonable agreement, supporting the conclusion that backscattering in NANF finds its origin in intrinsic surface roughness. Using the same approach with the 7-cell PBGF geometry cited above yields a BSC of -77 dB/m, approximately 40 dB higher than in NANF. This agrees with a roughly 100x larger overlap of the mode field with the interfaces (the BSC being proportional to the square of this quantity). The discrepancy between measured and modeled backscattering levels in those commercial HC-PBGFs has been noted before and assigned speculatively to the fact that the roughness on their thin glass walls (< 100 nm) may be stronger than that resulting from frozen-in SCW alone [19].

Figure 4.3 depicts the outcomes of tests that we conducted to verify the validity of our data interpretation. In (a), the sweep’s repetition rate was varied to increase the chirp rate γ without changing the spatial resolution. In the frequency domain, such modification has the effect of spreading the scattering signal over a larger bandwidth, thus inducing a relative shift with noises that originate from the instrument. The consistent spectral structure indicates that additive, phase, and intensity noises are weaker than the scattering signal over the extent of the NANF (0 m to 219 m). In (b), the data used for Fig. 4.2 was averaged in different manners, trading between temporal and spectral (PSD) averaging. The lowest points of the trace follow the predicted measurement noise floor (dotted lines at -127 , -134 , and -141 dB/m) over most of the scattering region and their level decreases with higher temporal averaging, confirming the general validity of the additive noise model. Meanwhile, the highest points of the traces stay at a constant level, establishing that the backscattering signal is repeatable as expected for scattering caused by static surface roughness. Finally, in (c), the NANF sample was illuminated from the opposite direction and the measured reflectance density was flipped in post-processing to show distance from the same splice. Although imperfect because of the movement of the pigtails and modified polarization launch conditions, there is reasonable agreement between the two traces. This corroborates our interpretation that the intermediate peaks are caused by localized faults and not by noise.

4.6 Conclusion

In conclusion, we measured the reflectance density of a nested antiresonant nodeless fiber with a 0.9 m resolution and up to -138 dB/m sensitivity and found its intrinsic backscattering coefficient to be -118 dB/m. This unprecedented value, more than 40 dB below reported figures in standard SMFs and HC-PBGFs, is likely limited by scattering from the thermally-driven

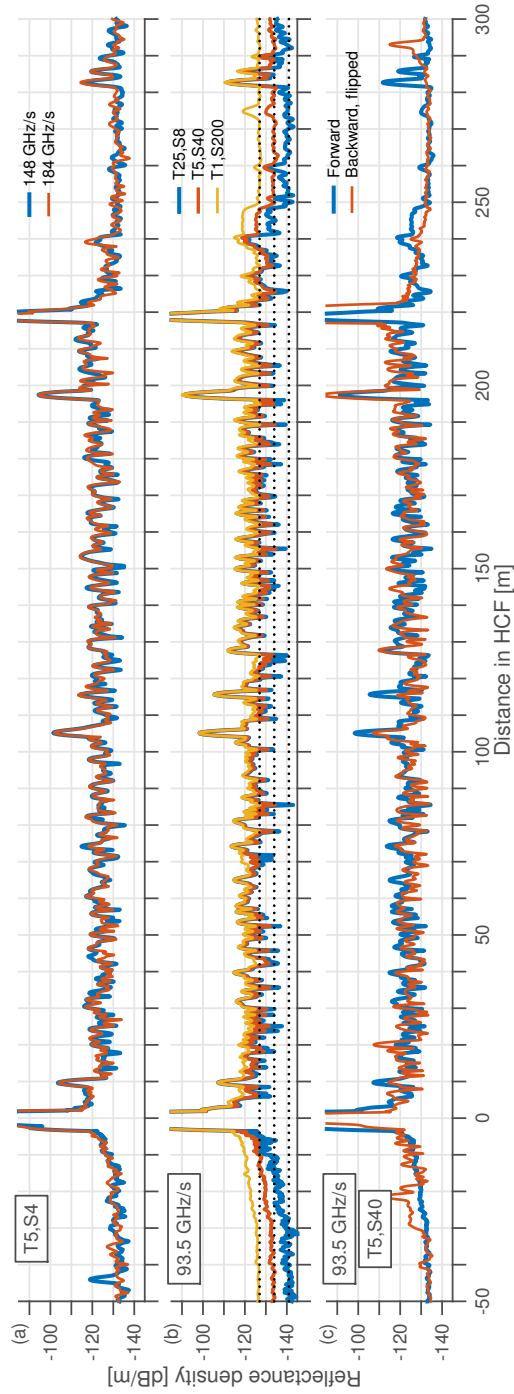


Figure 4.3 – Measured reflectance density in NANF. (a) Different chirp rates with 5 temporal averages, 4 spectral averages (T5,S4). (b) Different trades between temporal and spectral averaging for a chirp rate of 93.5 GHz/s. The dotted lines represent the predicted measurement noise floors. (c) Forward versus backward illumination, rectified to show distance from the same splice.

surface roughness of the microstructure. Together with the low transmission loss now approaching that of standard SMF [22], the polarization purity [28], and other desirable features inherent to all hollow-core fibers (low thermal sensitivity, non-linearity, magnetic susceptibility, etc. [15]), this should allow NANFs to set new performance benchmarks in applications today limited by backscattering. As a specific example, using a NANF with low-back-reflection interconnections [23] is expected to provide a significant reduction (> 40 dB in theory) of the backscattering-limited noise and bias drift in fiber-optic gyroscopes (FOGs) driven by highly-coherent lasers [4]. In addition to the reduced Kerr and Shupe effects already demonstrated in HCF-based FOGs, this could enable the improvement of the scale factor stability required for the inertial navigation of aircrafts [13]. Finally, our demonstration reveals that the partial characterization of a low-loss HCF is possible with only access to a single fiber end. Monitoring the distributed and localized inhomogeneities that backscatter light can provide the precious information required to improve NANF's fabrication and thus further reduce its loss, potentially below that of the best SMF.

4.7 Bibliographie

- [1] Y. Tamura, H. Sakuma, K. Morita, M. Suzuki, Y. Yamamoto, K. Shimada, Y. Honma, K. Sohma, T. Fujii, and T. Hasegawa. The first 0.14-dB/km loss optical fiber and its impact on submarine transmission. *Journal of Lightwave Technology*, 36(1) :44–49, 2018. URL <https://doi.org/10.1109/JLT.2018.2796647>.
- [2] R. Olshansky. Propagation in glass optical waveguides. *Reviews of Modern Physics*, 51(2) :341, 1979. URL <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.51.341>.
- [3] L. Śliwczyński, P. Krehlik, and M. Lipiński. Optical fibers in time and frequency transfer. *Measurement Science and Technology*, 21(7) :075302, 2010. URL <https://doi.org/10.1088/0957-0233/21/7/075302>.
- [4] S. W. Lloyd, M. J. F. Digonnet, and S. Fan. Modeling coherent backscattering errors in fiber optic gyroscopes for sources of arbitrary line width. *Journal of Lightwave Technology*, 31(13) :2070–2078, 2013. URL <https://doi.org/10.1109/JLT.2013.2261283>.
- [5] J. H. Chow, I. C. M. Littler, D. E. McClelland, and M. B. Gray. Laser frequency-noise-limited ultrahigh resolution remote fiber sensing. *Optics Express*, 14(11) :4617–4624, 2006. URL <https://doi.org/10.1364/OE.14.004617>.
- [6] J. Xu, M. Li, and L.-K. Chen. Rayleigh noise reduction in 10-Gb/s carrier-distributed WDM-PONs using in-band optical filtering. *Journal of Lightwave Technology*, 29(24) :3632–3639, 2011. URL <https://doi.org/10.1109/JLT.2011.2173904>.

- [7] D. Subacius, A. Zavriyev, and A. Trifonov. Backscattering limitation for fiber-optic quantum key distribution systems. *Applied Physics Letters*, 86(1) :011103, 2005. URL <https://doi.org/10.1063/1.1842862>.
- [8] J. P. Cahill, W. Zhou, and C. R. Menyuk. Additive phase noise of fiber-optic links used in photonic microwave-generation systems. *Applied Optics*, 56(3) :B18–B25, 2017. URL <https://doi.org/10.1364/AO.56.000B18>.
- [9] L. Palmieri and L. Schenato. Distributed optical fiber sensing based on Rayleigh scattering. *The Open Optics Journal*, 7(1), 2013. URL <https://doi.org/10.2174/1874328501307010104>.
- [10] J. P. Von Der Weid, R. Passy, G. Mussi, and N. Gisin. On the characterization of optical fiber network components with optical frequency domain reflectometry. *Journal of Lightwave Technology*, 15(7) :1131–1141, 1997. URL <https://doi.org/10.1109/50.596958>.
- [11] D. L. Philen, I. A. White, J. F. Kuhl, and S. C. Mettler. Single-mode fiber OTDR : Experiment and theory. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 30 (10) :1487–1496, 1982. URL <https://doi.org/10.1109/TMTT.1982.1131282>.
- [12] S. Sakaguchi and S. Todoroki. Rayleigh scattering of silica core optical fiber after heat treatment. *Applied Optics*, 37(33) :7708–7711, 1998. URL <https://doi.org/10.1364/AO.37.007708>.
- [13] S. W. Lloyd, V. Dangui, M. J. F. Digonnet, S. Fan, and G. S. Kino. Measurement of reduced backscattering noise in laser-driven fiber optic gyroscopes. *Optics Letters*, 35(2) : 121–123, 2010. URL <https://doi.org/10.1364/OL.35.000121>.
- [14] R. F. Cregan, B. J. Mangan, J. C. Knight, T. A. Birks, P. S. J. Russell, P. J. Roberts, and D. C. Allan. Single-mode photonic band gap guidance of light in air. *Science*, 285 (5433) :1537–1539, 1999. URL <https://doi.org/10.1126/science.285.5433.1537>.
- [15] F. Poletti, M. N. Petrovich, and D. J. Richardson. Hollow-core photonic bandgap fibers : technology and applications. *Nanophotonics*, 2(5-6) :315–340, 2013. URL <https://doi.org/10.1515/nanoph-2013-0042>.
- [16] M. Nakazawa. Rayleigh backscattering theory for single-mode optical fibers. *Journal of the Optical Society of America*, 73(9) :1175–1180, 1983. URL <https://doi.org/10.1364/JOSA.73.001175>.
- [17] M. Wegmuller, M. Legré, N. Gisin, T. P. Hansen, C. Jakobsen, and J. Broeng. Experimental investigation of the polarization properties of a hollow core photonic bandgap fiber for 1550 nm. *Optics Express*, 13(5) :1457–1467, 2005. URL <https://doi.org/10.1364/OPEX.13.001457>.

- [18] X. Xu, M. Yan, N. Song, C. Wu, F. Teng, and J. Jin. Measurement of backscattering in hollow core photonic bandgap fiber based on Mach–Zehnder and Michelson hybrid interferometer. *IEEE Photonics Technology Letters*, 28(24) :2858–2861, 2016. URL <https://doi.org/10.1109/LPT.2016.2623944>.
- [19] V. Dangui, M. J. F. Digonnet, and G. S. Kino. Modeling of the propagation loss and backscattering in air-core photonic-bandgap fibers. *Journal of Lightwave Technology*, 27(17) :3783–3789, 2009. URL <https://doi.org/10.1109/JLT.2008.2010876>.
- [20] P. J. Roberts, F. Couny, H. Sabert, B. J. Mangan, D. P. Williams, L. Farr, M. W. Mason, A. Tomlinson, T. A. Birks, J. C. Knight, and P. S. J. Russell. Ultimate low loss of hollow-core photonic crystal fibres. *Optics Express*, 13(1) :236–244, 2005. URL <https://doi.org/10.1364/OPEX.13.000236>.
- [21] F. Poletti. Nested antiresonant nodeless hollow core fiber. *Optics Express*, 22(20) :23807–23828, 2014. URL <https://doi.org/10.1364/OE.22.023807>.
- [22] G. T. Jasion, T. D. Bradley, K. Harrington, H. Sakr, Y. Chen, E. R. Numkam Fokoua, I. A. Davidson, A. A. Taranta, J. R. Hayes, D. J. Richardson, and F. Poletti. Hollow core NANF with 0.28 dB/km attenuation in the C and L bands. In *Optical Fiber Communication Conference*, pages Th4B–4. Optical Society of America, 2020. URL <https://doi.org/10.1364/OFC.2020.Th4B.4>.
- [23] M. Komanec, D. Suslov, S. Zvánovec, Y. Chen, T. D. Bradley, S. R. Sandoghchi, E. R. Numkam Fokoua, G. T. Jasion, M. N. Petrovich, F. Poletti, D. J. Richardson, and R. Slavík. Low-loss and low-back-reflection hollow-core to standard fiber interconnection. *IEEE Photonics Technology Letters*, 31(10) :723–726, 2019. URL <https://doi.org/10.1109/LPT.2019.2902635>.
- [24] T.-J. Ahn, J. Y. Lee, and D. Y. Kim. Suppression of nonlinear frequency sweep in an optical frequency-domain reflectometer by use of Hilbert transformation. *Applied Optics*, 44(35) :7630–7634, 2005. URL <https://doi.org/10.1364/AO.44.007630>.
- [25] S. Venkatesh and W. V. Sorin. Phase noise considerations in coherent optical FMCW reflectometry. *Journal of Lightwave Technology*, 11(10) :1694–1700, 1993. URL <https://doi.org/10.1109/50.249912>.
- [26] A. Bucholtz. Rayleigh-scattering calculations for the terrestrial atmosphere. *Applied Optics*, 34(15) :2765–2773, 1995. URL <https://doi.org/10.1364/AO.34.002765>.
- [27] D. Marcuse. *Theory of dielectric optical waveguides*. Elsevier, 2013.
- [28] A. A. Taranta, E. R. Numkam Fokoua, S. A. Mousavi, J. R. Hayes, T. D. Bradley, G. T. Jasion, and F. Poletti. Exceptional polarization purity in antiresonant hollow-core

optical fibres. *Nature Photonics*, pages 1–7, 2020. URL <https://doi.org/10.1038/s41566-020-0633-x>.

Chapitre 5

Fundamental thermal noise in antiresonant hollow-core fibers

Vincent Michaud-Belleau¹, Eric Numkam Fokoua², Peter Horak², Natalie V. Wheeler², Shuichiro Rikimi², Thomas D. Bradley³, David J. Richardson², Francesco Poletti², Jérôme Genest¹ et Radan Slavík²

¹Centre d'optique, photonique et laser, Université Laval, Québec, QC G1V 0A6, Canada

²Optoelectronics Research Centre, University of Southampton, Southampton, SO17 1BJ, Royaume-Uni

³High-Capacity Optical Transmission Laboratory, Eindhoven University of Technology, 5600 MB, Eindhoven, Pays-Bas

Publié dans *Physical Review A*, 106(2) :023501, 2022¹.

URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.106.023501>.

5.1 Résumé

Il est reconnu que les fluctuations de longueur optique induites par le bruit thermique fondamental déterminent l'ultime résolution en phase des interféromètres fibrés. Bien que ce bruit ait été étudié en détail pour les fibres optiques conventionnelles faites de verre, son impact sur les performances de fibres optiques à coeur creux n'a pas encore été évalué. Dans de telles fibres, la lumière guidée n'interagit que faiblement avec le verre dont les propriétés thermiques et thermo-optiques établissent normalement le niveau de bruit thermique, laissant croire qu'il faut s'attendre à une performance distincte de celle des fibres optiques conventionnelles. Sur la base de la comparaison de plusieurs interféromètres optimisés pour atteindre la meilleure

1. Reprinted article, with permission, from Vincent Michaud-Belleau, Eric Numkam Fokoua, Peter Horak, Natalie V. Wheeler, Shuichiro Rikimi, Thomas D. Bradley, David J. Richardson, Francesco Poletti, Jérôme Genest, and Radan Slavík, *Physical Review A*, 106(2), 023501, 2022. © 2022 by the American Physical Society.

sensibilité en phase, nous présentons des mesures de bruit thermique dans la plage de 20 à 200 kHz pour des fibres à coeur creux antirésonantes, imbriquées et sans noeud (*NANF* : *nested antiresonant nodeless fibers*) dont le coeur est rempli d'air à différentes pressions. Dans cette plage de fréquences, nos mesures s'accordent bien avec le modèle modifié de bruit thermo-conductif que nous présentons, indiquant que la contribution thermo-optique du gaz présent dans le coeur de la fibre devrait être généralement dominante, peu importe la forme exacte de la microstructure de verre de la fibre à coeur creux. Même si nous montrons qu'une fibre à coeur creux antirésonante remplie d'air à pression atmosphérique est plus bruyante à 1550 nm qu'une fibre de silice conventionnelle de longueur optique et d'aire modale équivalentes, nous démontrons également la plus faible puissance de bruit thermique par unité de longueur optique jamais mesurée dans une fibre ($\approx 1.3 \times 10^{-17}$ (rad²/Hz)/m à 30 kHz) dans une fibre à grande aire modale de type NANF, évacuée et scellée à une pression interne de 0.15 atm. Au-delà de la diminution de la pression interne, nous prévoyons que la densité de bruit thermique dans cette plage spectrale peut être réduite en remplissant le coeur creux par un gaz noble de faible polarisabilité électronique. Nos résultats indiquent que les fibres à coeur creux antirésonantes et à faibles pertes peuvent concurrencer les cavités ultra-stables aux fins de la stabilisation d'oscillateurs laser ; une fois évacuées, ces fibres devraient constituer la meilleure option pour diminuer de façon considérable le plancher de bruit fondamental dans les applications interférométriques présentement basées sur des fibres optiques conventionnelles.

5.2 Abstract

Fluctuations of the optical length induced by fundamental thermal noise are known to set the ultimate phase resolution of fiber-based interferometers. Although this noise has been studied in detail for optical fibers made of solid glass material, its impact on the performance of hollow-core optical fibers has not yet been assessed. In such fibers, the guided light interacts only weakly with the glass material whose thermal and thermo-optic properties normally determine the thermal noise level, suggesting that a difference in performance should be expected. Based on the comparison of several interferometers optimized for phase sensitivity, we present measurements of thermal noise in the 20 to 200 kHz range in hollow-core nested antiresonant nodeless fibers (NANF) with their core filled with air at different pressures. In this frequency range, our measurements are in good agreement with the adapted thermoconductive noise model we introduce, suggesting that the thermo-optic contribution from the gas that fills the core is generally dominant, regardless of the exact hollow-core fiber design. While we show that an antiresonant hollow-core fiber filled with air at atmospheric pressure is noisier at 1550 nm than a silica fiber of equal optical length and mode field area, we also demonstrate the lowest thermal noise power per unit optical length ever measured in a fiber ($\approx 1.3 \times 10^{-17}$ (rad²/Hz)/m at 30 kHz) using a large-mode-area NANF evacuated and sealed at 0.15 atm. In addition to lowering the internal pressure, we predict that the noise density in this spectral range can

be reduced by filling the core with a low-polarizability noble gas. Our results indicate that low-loss antiresonant hollow-core fibers can compete with ultrastable cavities for the purpose of laser frequency stabilization; when evacuated, such fibers should constitute the best option to significantly decrease the fundamental noise floor in interferometric applications currently based on conventional solid-core fibers.

5.3 Introduction

Optical fibers are widely used in interferometric applications thanks to their flexibility and ultra-low loss, which enable the propagation of light over several kilometers in a practical format. Yet, stabilizing the optical path length of a long fiber well within a single wavelength, a typical requirement in interferometry, poses a considerable challenge in the presence of environmental perturbations such as vibrations and temperature drifts. This challenge is especially acute in standard single-mode fiber (SMF) which displays a temperature sensitivity on the order of 10 ppm/K at 1550 nm, dominated by the thermo-optic coefficient of silica (TOC), a relatively large value which often warrants temperature stabilization at the sub-mK level [1, 2]. Even when such environmental perturbations are controlled or suppressed, early studies have shown that the optical path length stability of an SMF (related to the phase accumulated by a propagating laser field), just like the propagation time stability (related to the group index), is limited by the thermodynamic motion of the elementary charges in the medium through which light propagates [3, 4]. Such fundamental thermal noise, associated to apparent local temperature fluctuations of the fiber, depends on the thermal properties of the fiber material sampled by the optical mode and displays a variance or power which scales with the square of the fiber temperature and with the inverse of the mode volume [5]. Though this scaling with mode volume strongly favors long fibers over, say, whispering gallery mode microresonators [6] or active [7] and passive [8] fiber Bragg gratings (in which a similar fundamental noise is observed), thermal noise in SMF has nonetheless been shown to constitute an important limitation for fiber optic gyroscopes [9, 10], optical fiber links [11, 12], optoelectronic oscillators [13], and fiber references used for laser stabilization [14, 15]. This is due once again to the relatively large temperature sensitivity of standard SMF, which also describes the conversion of thermodynamic temperature fluctuations to path length fluctuations or output phase noise [16].

Fundamental thermal noise in SMF can be lowered by increasing the fiber length, which directly increases the mode volume. However, noise reduction appears challenging once the length is maximized in a given application. Increasing the mode field area also increases the mode volume, but only a modest improvement can be considered before bending loss becomes problematic [17]. Though it complicates instrument operation, lowering the fiber temperature appears as the best approach since it reduces both the strength of fundamental thermal noise and the thermal sensitivity in bare SMF [18, 19]. However, experimental evidence suggests

that temperature reduction may not work well below 150 K as the thermal properties of silica undergo significant changes [20]. Finally, although significant effort has been deployed to reduce the intrinsic low-frequency thermal sensitivity of SMF (relevant for environmental temperature drift), for example through specialized coatings and jackets [21–23], low-sensitivity fiber supports [24, 25], and dopants with negative TOC [26, 27], commensurate reduction of fundamental thermal noise in SMF has never been demonstrated. Furthermore, it is not clear whether such approaches, which focus on tuning the low frequency thermal behavior of the whole fiber to minimize the effect of environmental temperature changes, would also succeed to reduce phase noise induced by fundamental thermal noise at the higher frequencies where this contribution can be dominant.

Recently, interest in fundamental thermal noise minimization has been renewed by the emergence of new optical fibers that guide the light through a central hole, hollow-core fibers (HCF), which are now surpassing conventional solid glass-core SMF in almost all key properties. Critically, several HCF designs now display propagation loss close to or even below that of the best SMF and allow effective single-mode operation (i.e. the loss of the higher order modes is significantly higher than that of the fundamental mode), making them suitable in a host of interferometric applications [28]. Hollow-core fibers have already been shown to be less temperature-sensitive than conventional SMF [1, 2, 29, 30], a property related to the weak interaction of the mode field with the glass microstructure in addition to the relatively low TOC of the internal gas medium (which promises improvements with core evacuation [31]). Clearly, this low temperature sensitivity should translate to a weak conversion of thermodynamic temperature fluctuations to path length fluctuations, as suggested by a first experiment with short, early-design commercial HCFs at the limit of measurement noise [32]. Yet, a model of HCF fundamental thermal noise that goes beyond a simple scaling of the SMF model is still lacking, and measurements at a sufficient dynamic range to reveal its most important properties have never been performed.

In this work, we study fundamental thermal noise in the latest generation of hollow-core fibers [33], which guide light using an antiresonant reflection mechanism (or inhibited coupling [34]). We first review the model of fundamental thermal noise that is usually adequate for SMF above 1 kHz, giving simplified expressions which expose the important design parameters. We then explain how we adapt this model to the case of an antiresonant HCF, stating our main working hypotheses. With a carefully designed characterization setup supporting an order of magnitude more power than what is usually achieved, and using two long-length nested antiresonant nodeless fibers (NANFs [28], 219 m), we measure fundamental thermal noise in the 20 to 200 kHz range with large dynamic range and show that its spectrum agrees with the simple model presented here, at least at room temperature and for internal gas pressures in the 0.1 to 1 atm range. In particular, the noise reduction associated to partial core evacuation indicates that this fundamental noise, under such experimental conditions, is driven

by the thermo-optic contribution of the gas that fills the core, which constitutes a fundamental hypothesis of our model. Extrapolating our results, we finally discuss a potential approach to minimize fundamental thermal noise in HCFs beyond the demonstrated core evacuation.

5.4 Theory

5.4.1 Solid-core fiber

A fundamental result of thermodynamics [35] is that a system in thermal equilibrium with a heat reservoir, such as an optical fiber or any waveguide held at a constant temperature T , displays fluctuations of its internal energy $u(t)$, where t is the time variable. Though by definition the temperature itself does not fluctuate, it is convenient to define an “effective” or “apparent” temperature representative of the volumetric energy fluctuations, $\Delta T(t) \equiv \Delta u(t)/c_v$, where $\Delta u(t)$ denotes the fluctuations of $u(t)$ about the equilibrium value $\langle u(t) \rangle$ while c_v is the isochoric volumetric heat capacity of the system [3]. The apparent temperature fluctuations are local and can be seen to be the result of random exchanges of energy between neighboring domains of the system, which still globally obeys the law of conservation of energy [36]. From the point of view of an optical mode, the variance of the apparent temperature noise, $T_m(t)$, which is spatially averaged over the mode volume V_m , is given by the simple expression:

$$\langle \Delta T_m^2(t) \rangle = \frac{k_B T^2}{V_m c_v}, \quad (5.1)$$

where k_B is the Boltzmann constant [3]. For the fundamental mode in a fiber, it is usually adequate to define $V_m = A_m L = \pi a^2 L$, where A_m is the effective mode area [37], L is the physical fiber length, and a is the equivalent Gaussian mode radius (e^{-2}).

By solving the heat equation with a Langevin source [16], or alternatively by computing the thermal admittance function and invoking the fluctuation-dissipation theorem [38], it can be shown that the one-sided power spectral density (PSD) of the apparent temperature fluctuations takes the following general form:

$$S_{\Delta T_m}^{(1)}(f) = \langle \Delta T_m^2(t) \rangle Q(f), \quad (5.2)$$

where $Q(f)$ is a spectral shape function which depends on the thermal boundary conditions, thermal properties of the material, and mode field area, and where f is the frequency variable. For a very large, thermally uniform fiber (“infinite” boundary conditions, neglecting the potential impact of index-raising dopants over the thermal properties), $Q(f)$ has unit area and can be simplified as:

$$Q(f) = \frac{2}{\pi f_c} \operatorname{Re} \left[e^{jf/f_c} E_1(jf/f_c) \right], \quad (5.3a)$$

$$\int_0^\infty Q(f) df = 1, \quad (5.3b)$$

where $\text{Re} = [\cdot]$ denotes the real part, j is the imaginary unit, and E_1 is the exponential integral function. Though this expression is different from those found in [16, 38], it is ultimately equivalent but has the advantage of clearly separating the variance term (total power or PSD area) from the spectral shape which is only parametrized through f_c , a cutoff frequency defined as:

$$f_c = \frac{2k_t}{A_m c_v}, \quad (5.4)$$

where k_t and c_v are the thermal conductivity and heat capacity of the fiber material, respectively. In a typical SMF operated around 1550 nm, $f_c \approx 20$ kHz, giving the shape function illustrated in blue (uppermost at low frequencies) in Figure 5.1. Since $Q(f)$ has unit area, a larger cutoff frequency simply means that the noise power of Eq. 5.1 is spread over a larger bandwidth, lowering the low-frequency PSD level. In silica SMF, such an increase of the cutoff frequency can be achieved through reduction of the mode area (e.g. by decreasing the operating wavelength or decreasing the core diameter under certain conditions), as illustrated in orange (lowermost at low frequencies) in Figure 5.1 for a case where the effective mode radius is 2.45 times smaller than that of a typical SMF.

When other, more realistic thermal boundary conditions are assumed, the spectral shape function $Q(f)$ takes a different form which is less insightful and does not necessarily maintain a unit area [16]. However, Eq. 5.3a still accurately describes the spectrum of high frequency temperature fluctuations. Indeed, the cutoff frequency f_c can be seen to be a ratio of thermal diffusivity to mode area; it is associated to the averaging of temperature fluctuations, which are correlated in time and space because of thermal conduction, over the mode cross-sectional area. It is thus useful to define the frequency-dependent thermal correlation length:

$$l_t(f) = \sqrt{\frac{k_t}{2\pi c_v f}} = \frac{a}{2} (f/f_c)^{-1/2}. \quad (5.5)$$

At those frequencies for which $l_t(f)$ is a few times smaller than the cladding radius, it is appropriate to ignore the exact form of the boundary conditions and thus use the simple form of $Q(f)$, valid for an infinite cladding. In SMF, this condition is true above approximately 100 Hz.

To relate the apparent temperature fluctuations $\Delta T_m(t)$ to phase fluctuations $\phi(t)$ which can be measured interferometrically, it is usually assumed that the optical length at any instant is directly related to the apparent temperature [4, 16, 38]:

$$\phi(t) = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d(nL)}{dT} \Delta T_m(t) = \frac{2\pi n L \xi}{\lambda} \Delta T_m(t), \quad (5.6a)$$

$$\xi \equiv \alpha_L + \frac{1}{n} \frac{dn}{dT}, \quad (5.6b)$$

where n is the effective index of the fundamental guided mode, λ is the vacuum wavelength, α_L is the thermal expansion coefficient (TEC), dn/dT is the thermo-optic coefficient for the

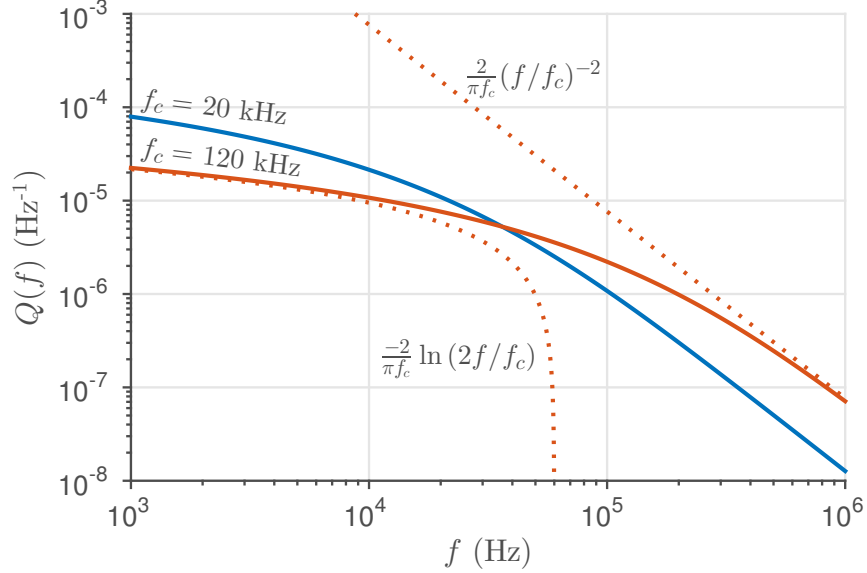


Figure 5.1 – Spectral shape function for the case of infinite boundary conditions; comparison of two cutoff frequencies. Low-frequency and high-frequency asymptotes are shown in dotted orange for $f_c = 120$ kHz.

effective index (or “effective TOC”), and ξ is the temperature sensitivity. If this relation holds, the phase fluctuations PSD is given by:

$$S_{\phi}^{(1)}(f) = \left(\frac{2\pi n L \xi}{\lambda} \right)^2 S_{\Delta T_m}^{(1)}(f), \quad (5.7)$$

which is the main result of this section. The noise described by Eqs. 5.1, 5.2, and 5.7 has been called “thermoconductive” by Foster[16] and it is qualitatively similar to the noise previously described by Wanser [4]. It is also similar to thermorefractive noise measured in microcavities [39] and dielectric mirrors [40] when the TEC is much smaller than the TOC, as is the case in fused silica. It is however distinct from thermomechanical noise driven by internal damping [38], akin to Brownian noise in ultrastable cavities [41], which is predicted to be important in the sub-kHz spectral range only [42] and whose theoretical description is not entirely supported by experimental data [43]. Since our experimental demonstration is centered on the 20 to 200 kHz range, we ignore thermomechanical noise in this paper. Note that because the temperature noise PSD is proportional to $1/L$ (Eq. 5.2), the phase noise PSD of Eq. 5.7 is proportional to L and not L^2 ; this expresses the fact that the total optical path length fluctuation is given by the incoherent sum of all optical path length fluctuations along the fiber length (i.e. any longitudinal spatial correlation is short ranged).

To model thermoconductive phase noise, we choose to use physical values representative of the material close to the mode field, that is, within a few thermal correlation lengths of the fiber axis. We thus completely ignore the potential contributions of the fiber coating and jacket. Although these do matter at low frequencies [18, 44], we heuristically argue that these should

Table 5.1 – SMF parameters used in the thermoconductive noise model [16, 45]

Symbol	Name	Value
c_v	Volumetric heat capacity ¹	$1.67 \times 10^6 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$
k_t	Thermal conductivity	$1.37 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
a	Mode field radius (e^{-2})	$5.25 \times 10^{-6} \text{ m}$
n	Effective index	1.45
dn/dT	Thermo-optic coefficient	$8.84 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$
α_L	Thermal expansion coefficient	$1.05 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$

¹ At constant volume.

not contribute to the apparent temperature noise sampled by the mode field above a few kHz. Furthermore, since our experimental demonstration is based on a polarization-maintaining single-mode fiber (PM-SMF) of PANDA configuration, we use values tabulated in [45] for the slow axis of a PANDA fiber; in addition to the dominant thermo-optic coefficient of the core and cladding material, these take into account the impact of geometry deformation and stress-optical effect over the effective index n , yielding $n^{-1}dn/dT = 6.10 \text{ ppm/K}$. The contribution of the boron stress-applying parts to the TEC is also considered, yielding $\alpha_L = 1.05 \text{ ppm/K}$ for a naked fiber and presumably also for the material close to the core. Overall, the sensitivity of the PM-SMF is thus $\xi \approx 7.15 \text{ ppm/K}$, which is comparable to the values used in standard SMF-28 for the purpose of thermoconductive noise modeling around 1550 nm [3, 16, 38, 43, 46]. All physical parameters used in this paper for SMF are summarized in Table 5.1.

5.4.2 Gas-filled hollow-core fiber

The thermoconductive noise model has been explicitly developed (by other authors) for solid-core fibers, and here we only considered the effect of the material close to the core region to describe the noise at high frequencies. In this work, we suppose that the same model still adequately describes thermal noise in gas-filled antiresonant hollow-core fibers, heuristically replacing the glass core by a gas core with suitable thermo-optic and thermal properties. To this end, we make a series of simplifying assumptions; these are later shown to adequately explain phase noise measured in antiresonant HCFs above 20 kHz. First, we consider only the fundamental mode and neglect the contribution the microstructure may have over the thermal properties. Basing the model on the properties of the gas that resides in the core cavity is especially justified in antiresonant HCF for which the fraction of power guided in glass is 10^{-4} or lower [28]. Second, we suppose that thermal expansion is negligible ($\alpha_L \approx 0$), following our reasoning that material far from the fiber axis (in this case the silica cladding, that is, the tube which supports the microstructure) should not significantly contribute to phase noise at high frequencies. This also implies we neglect the small structural deformation (microstructure, cladding, endfaces) associated to fluctuations of the gas' apparent temperature in addition to the impact of thermal boundary conditions. Third, we neglect convective effects, which should be much slower than conduction and should only manifest at low frequencies [47]. Finally, to

keep the model simple and to expose the main trends, we assume the hollow core is filled with nitrogen (N_2) at a pressure such that the Knudsen number Kn , defined as the ratio of mean free path to capillary diameter, stays below 0.01. This constitutes the condition to remain in the hydrodynamic flow regime [48]. For the HCF used in our experimental demonstration, this condition is respected for an internal pressure above 0.2 atm (20 kPa), approximately, if the capillary diameter is taken to be similar to the core diameter (35 μm). While the gas inside a typical hollow core fiber is better described as a mixture of molecules with exact partial pressures dependent on the fabrication procedure and handling history, it should be safe to assume that nitrogen is the dominant species under most conditions; the error introduced by the presence of atmospheric constituents (O_2 , CO_2 , etc.) is predicted to be relatively small since the thermal and optical properties of air at standard temperature and pressure (STP) are very similar to those of nitrogen ($c_v = 855 \text{ J}/(\text{m}^3\cdot\text{K})$ and $k_t = 0.026 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ [49], $dn/dT = 910 \text{ ppb}/\text{K}$ [50]). The same reasoning applies to argon which is often used as pressurization gas during fabrication (see Section 5.6).

Given the simplifications made here, only the thermal (c_v, k_t) and thermo-optic (dn/dT) properties of the gas that fills the hollow core are required to describe fundamental thermal noise in HCF (in antiresonant HCFs, the fundamental mode's effective index n is a few hundreds of ppm smaller than unity [51]; it is hence adequate to simply set $n = 1$ in Eq. 5.7). First, the volumetric heat capacity of diatomic molecules can be expressed as:

$$c_v = \frac{5p}{2T}, \quad (5.8)$$

where p is the pressure [52]. This evaluates to $c_v = 860 \text{ J}/(\text{m}^3\text{K})$ at STP. The thermal conductivity, on the other hand, is independent of pressure in the hydrodynamic flow regime and has a value of approximately $25.4 \text{ mW}/(\text{m}\cdot\text{K})$ in N_2 at 20°C [53]. Taking the mode area of SMF, this means that the cutoff frequency (Eq. 5.4) is 670 kHz in nitrogen gas, 35 times larger than it is in silica, spreading the total noise power over a much wider bandwidth. In our demonstration, however, the mode field radius of the HCF is 12.5 μm , much larger than in SMF, yielding $f_c \approx 120 \text{ kHz}$ as shown in orange (lowermost at low frequencies) in Figure 5.1. Finally, to estimate the thermo-optic coefficient dn/dT required to model ξ (Eq. 5.6b), we describe the index of the gas within the core n_c using the Lorentz-Lorenz equation [54]:

$$\frac{n_c^2 - 1}{n_c^2 + 2} = \frac{4\pi\alpha N}{3} \approx \frac{2}{3}(n_c - 1), \quad (5.9)$$

where α is the molecular polarizability volume (not to be confused with the TEC α_L), N is the number density, and the last approximation is valid if $n_c \approx 1$, which is the case for gases at ordinary densities. The thermo-optic coefficient of a gas obeying this equation can be found through differentiation of n_c :

$$\frac{dn_c}{dT} \approx 2\pi \left(\frac{d\alpha}{dT} N + \alpha \frac{dN}{dT} \right). \quad (5.10)$$

Table 5.2 – HCF parameters used in the thermoconductive noise model.

Symbol	Name	Value
c_v	Volumetric heat capacity ¹	$860\left(\frac{p}{p_0}\right) \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$
k_t	Thermal conductivity ²	$0.025 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
a	Mode field radius (e^{-2})	$12.5 \times 10^{-6} \text{ m}$
n	Effective index	1.00
dn/dT	Thermo-optic coefficient	$936 \times 10^{-9} \left(\frac{p}{p_0}\right) \text{ K}^{-1}$

¹ At constant volume.

² $Kn < 0.01$.

The factor dN/dT would normally be assumed to be zero in a sealed hollow-core fiber [31] since the number of gas molecules is constant and since we ignore fluctuations of the internal volume, making the number density invariant. The ideal gas law can be used to write $N = p/(k_B T)$, and the corollary is that the pressure is normally assumed to be directly proportional to temperature. However, the thermo-optic coefficient used in the noise model relates to *local* apparent temperature fluctuations. The assumption here is that if locally the temperature fluctuates, the pressure is still constant in the vicinity of the fluctuation and therefore the local density also fluctuates ($dN/dT \neq 0$) according to the gas law, leading to a phase fluctuation in the propagating light. Note that these density fluctuations should be uncorrelated along the fiber length, at least at those frequencies much larger than the ratio of acoustic velocity to fiber length, provided that the fiber mode does not fill the entirety of the hollow core such that gas molecules have the possibility of moving in and out of the guided mode. The thermo-optic coefficient should thus be computed assuming constant local pressure ($dp/dT = 0$) instead of constant volume ($p \propto T$), even if the fiber is sealed. This agrees with the models used in photothermal interferometry, which have been developed and successfully compared with experimental data over a frequency range similar to that of interest here [55–58]. Under this perspective, we can rewrite Eq. 5.10 using $dN/dT = -p/(k_B T^2)$ (constant pressure):

$$\frac{dn_c}{dT} \approx \frac{2\pi p}{k_B T} \left(\frac{d\alpha}{dT} - \frac{\alpha}{T} \right). \quad (5.11)$$

The second term within parentheses is typically much larger than the first one; for example, in N_2 at STP, $\frac{d\alpha}{dT} = 1.85 \times 10^{-36} \text{ m}^3/\text{K}$ while $\frac{\alpha}{T} = 5.95 \times 10^{-33} \text{ m}^3/\text{K}$ [59]. We can thus simplify:

$$\frac{dn_c}{dT} \approx -\frac{2\pi p\alpha}{k_B T^2}, \quad (5.12)$$

which gives $\xi \approx -936 \text{ ppb/K}$ when combining all our hypotheses, critically that $dn/dT \approx dn_c/dT$. The parameters of the HCF used in our demonstration, at a temperature $T = 20^\circ\text{C}$, are summarized in Table 5.2; this includes the pressure dependence when appropriate ($p_0 = 101.3 \text{ kPa} = 1 \text{ atm}$).

To compare the fundamental thermal noise in fibers having distinct lengths and indices, the phase PSD can be normalized by the optical length nL , yielding:

$$\frac{S_{\phi}^{(1)}(f)}{nL} = n \left(\frac{2\pi\xi}{\lambda} \right)^2 \frac{k_B T^2}{A_m c_v} Q(f). \quad (5.13)$$

Though another normalization could certainly be chosen, this one is justified by the fact that the signal of interest scales with the optical instead of physical length in most applications. Furthermore, it gives a quantity that is independent of physical length, which is not the case of the signal-to-noise ratio (SNR) which increases with it. From this normalized phase PSD, and assuming the same wavelength, mode area, and temperature, it is apparent that a HCF filled with nitrogen at STP displays a much larger temperature variance than a SMF because its heat capacity is lower by more than two orders of magnitude. This is partially compensated by a higher cutoff frequency, which spreads the noise over a larger bandwidth (through $Q(f)$), and a weaker conversion of temperature to optical length (through ξ). Finally, for equal optical lengths, the mode volume is larger in a gas than in a transparent solid since the effective index is close to unity; this explains the remaining factor n in the right-hand side of Eq. 5.13.

The SMF to HCF comparison is quite different if the HCF's pressure is assumed to be lower than 1 atm, as shown in Fig. 5.2, mostly because the detrimental impact of a reduced heat capacity is largely compensated by the higher cutoff frequency and lower TOC. Let us suppose here that we are interested in frequencies below the cutoff f_c so that Eq. 5.3a can be replaced by its low-frequency asymptote:

$$Q(f) \Big|_{f \ll f_c} \approx \frac{-2}{\pi f_c} \ln \left(\frac{2f}{f_c} \right). \quad (5.14)$$

Neglecting the weak logarithmic dependence, this expression shows that the spectral shape function at low frequencies is roughly proportional to f_c^{-1} or c_v/k_t . For pressures such that $Kn < 0.01$, the thermal conductivity is pressure-independent and the phase noise PSD at low frequencies is therefore proportional to p^2 because $\xi \propto p$, as suggested by the orange curves in Fig. 5.2. Considerable noise reduction should thus be possible with core evacuation. However, it is worth stating that other fundamental noise sources can start to dominate the spectrum at low and high frequencies if the thermoconductive noise contribution is lowered. Ultimately, a more accurate and detailed model able to address this point could be obtained through finite-element simulation [41].

5.5 Experiment

The fundamental thermal noise of several fiber samples was measured by comparing pairs of unbalanced Mach-Zehnder interferometers illuminated by the same laser signal. The advantage of this approach is that laser noise, which is usually much larger than fundamental thermal noise, is common to both interferometric phase outputs and can be canceled through

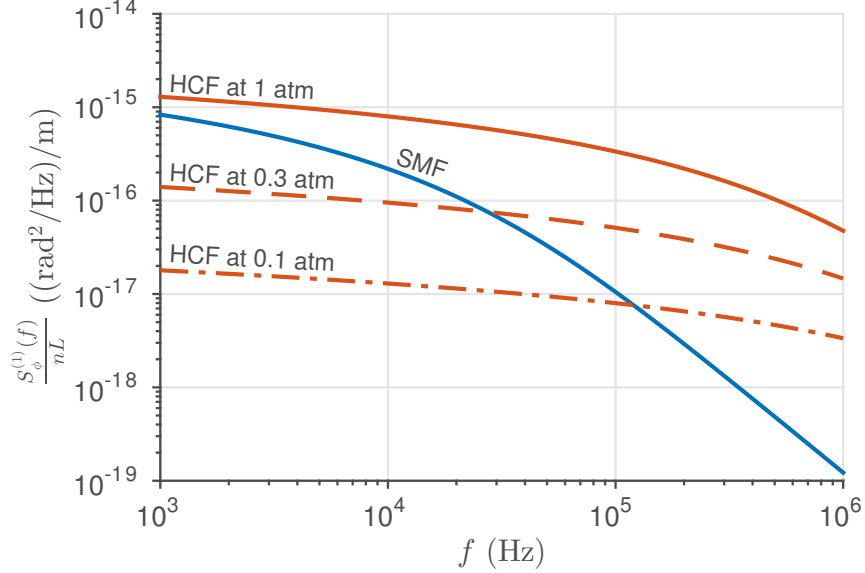


Figure 5.2 – Modeled optical-length-normalized phase PSD at $\lambda = 1539.8$ nm. Comparison between SMF and HCF filled with N_2 at three different pressures. The parameters are $T = 20^\circ\text{C}$ and $a = 5.25$ μm (SMF and HCF have the same mode field area, in contrast to the figures shown in Section 5.5).

subtraction. This subtraction can then be tuned in post-processing to account for unequal interferometric lengths and laser noise gains. Traditionally, this would instead be achieved using a balanced fiber interferometer, with laser noise rejection highly dependent on the fine adjustment of the arm lengths. Subtracting the two phase signals also suppresses environmental fluctuations that are partially correlated between the interferometers and, critically, exposes the independent thermal noise contributions that are of interest here. In this section, we first give information about the instrumentation we developed and the fiber samples we manufactured, explaining the trade-offs associated to thermoconductive noise measurement. We then briefly describe the signal processing approach before presenting the main results.

5.5.1 Instrumentation

The experimental setup in which two fiber samples are used is illustrated in Fig. 5.3. For clarity, we show the specific case of a SMF to HCF comparison, but all possible fiber combinations (SMF-SMF, HCF-HCF, SMF-HCF) are studied below. The laser is an OEwaves WGM Gen3 with 195 THz mean frequency ($\lambda = 1539.8$ nm) and 7 mW output power. It is amplified using a custom-made, polarization-maintaining erbium-doped fiber amplifier so that the optical power at the input of each interferometer is approximately 10 mW. The laser can be frequency-modulated (internally) and phase-modulated (externally, using an EOSpace PM-085-20-PFA-PFA-1550) for signal processing purposes described below.

After recombination using optical 90° hybrids (Kyliya COH24 for SMFs and Optoplex HB-

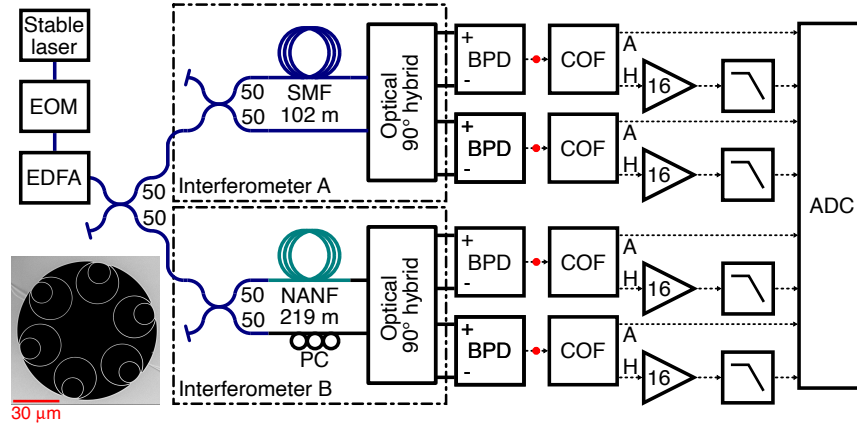


Figure 5.3 – Layout of the experimental setup showing a comparative measurement between interferometer A (in this case SMF) and B (in this case HCF or NANF). The dashed boxes can be switched for SMF to SMF comparison or HCF to HCF comparison. EOM, electro-optic phase modulator; EDFA, erbium-doped fiber amplifier; PC, polarization controller; BPD, balanced photodetector; COF, crossover filter (“A” stands for “attenuated”, “H” stand for “high-pass”); ADC, analog-to-digital converter (digitizer). Solid lines represent fibers (all fibers are polarization-maintaining except in a HCF interferometer) and dashed lines represent electrical cables. The dots between BPD and COF indicate the points where the synthesizer is connected for frequency response pre-characterization. The inset shows a scanning electron micrograph of the HCF’s cross section.

T0AFAS001-R1 for HCFs), the interferometric signals are routed to four custom-made balanced photodetectors (Thorlabs FGA01FC photodiodes) with 2000 Ω transimpedance gain, 0.8 quantum efficiency, 10 MHz bandwidth, and a 17 V saturation level sufficient to handle the maximum possible power per photodiode (5 mW). In order to maintain a high dynamic range, custom-made crossover filters (COF) are used to separate the AC and DC part of each signal. Each AC signal, carrying the phase noise information, is amplified using an EG&G 5113 preamplifier (16 V/V, 300 Hz to 1 MHz), filtered by a 500 kHz antialiasing filter (Thorlabs EF506 low-pass electrical filter), and finally digitized using a GaGe CSE8389 digitizer set in the voltage range that provides the best dynamic range (± 2 V for a noise level of approximately 2×10^{-12} V²/Hz below a 50 kHz resonance, and 5×10^{-13} V²/Hz above it). For this setup, digitizer noise is dominant over detector noise and preamplifier noise, but significantly weaker than shot noise. Each DC signal, carrying the information about the fringe position, is attenuated by 20 dB in the COF to prevent damage to the digitizer. The four AC signals and four DC signals are simultaneously sampled at a rate of 10 MS/s for a total duration of 0.4 s.

5.5.2 Fiber samples

Two PM-SMFs (Fujikura SM15-PS-U25A, PANDA, hereafter referred to as SMFs) with nominal length $L = 102$ m and mode field radius $a = 5.25$ μm were used for this demonstration (other relevant properties are shown in Table 5.1). Each fiber was spooled in a single layer on the surface of an aluminum cylinder of diameter 10.2 cm and height 7.6 cm. We did not attempt to minimize the length of the couplers' pigtails that contribute to the path imbalance, which we measured to be 3 m in total (the relevant length for fundamental thermal noise computation is 105 m while the length relevant for laser noise conversion is 102 m). Similarly, two antiresonant HCF samples (NANF) with nominal length $L = 219$ m and mode field radius $a = 12.5$ μm were used (Table 5.2). These fibers were fabricated using the same stack, fuse, and two-stage draw process reported in [33]. They were drawn to a core diameter of approximately 35 μm and average cladding membrane thickness of 550 nm and their loss was measured via cutback to be 1.3 dB/km at our operating wavelength. Note that effective single-mode propagation can be assumed for such a length of NANF [28, 33]. One HCF sample was spooled on an aluminum cylinder similar to those used for the SMFs (diameter 12.6 cm, height 12.7 cm) and the other HCF was loosely spun on a standard plastic shipping spool. The total length of the SMF pigtails contributing to the path imbalance was estimated to be 4.5 m in both cases. Additional information about these HCFs, including details about the HCF to SMF interconnections, can be found in [60].

5.5.3 Fiber length optimization

The total phase noise measured by an interferometer based on a 90° hybrid output coupler, hereafter referred to as an IQ interferometer (for “in-phase and quadrature”), which is adjusted to introduce a negligible delay in one arm and a phase delay $\tau = nL/c$ in the other arm, can be modeled as:

$$\theta(t, \tau) = \nu(t) * g(t, \tau) + \phi(t, \tau) + \epsilon(t, \tau) + \mu(t, \tau), \quad (5.15)$$

where $\nu(t)$ is the frequency noise of the laser illuminating the interferometer, $*$ is the convolution operator, $g(t, \tau) = 2\pi\Pi(t/\tau - 1/2)$ is the impulse response describing the conceptual filter that converts laser frequency into interferometric phase, with Π as the unit-width box-car function [61], $\phi(t, \tau)$ is the phase noise induced by fundamental thermal noise as defined in Section 5.4, $\epsilon(t, \tau)$ is the phase noise induced by environmental noise (vibrations, temperature drift, etc.), and $\mu(t, \tau)$ is the measurement noise contribution that is converted to phase. Figure 5.4 illustrates phase contributions that roughly replicate our experimental conditions at 20 kHz. When shot noise is dominant, the PSD of $\mu(t, \tau)$ is white with level $S_\mu^{(1)}(f) = 2h\nu_0(1 + \gamma(\tau)^{-1})/(\eta P_0)$, where h is the Planck constant, $\nu_0 = c/\lambda$ is the laser mean frequency, $\gamma(\tau)$ is the transmittance of the delay arm, η is the photodetector's quantum efficiency, and P_0 is the optical power measured at the input of the interferometer [62]. From the Fourier transform of $g(t, \tau)$, the phase noise PSD associated to converted laser fre-

quency noise can be expressed as $[2\pi\tau \cdot \text{sinc}(f\tau)]^2 S_\nu^{(1)}(f)$. The bandwidth of the laser noise contribution therefore diminishes with increasing path imbalance while its low-frequency gain increases. Furthermore, the PSD of $\epsilon(t, \tau)$ is usually proportional to τ^2 since environmental perturbations tend to affect the whole fiber in a coherent fashion. Changing the phase delay τ , i.e. changing the path imbalance or fiber length, therefore changes the PSD level of the four independent noise signals.

From Eq. 5.15 and Fig. 5.4, two simple conclusions can be drawn. Firstly, a minimum fiber length is required to bring fundamental thermal noise above shot noise, and this minimum length ultimately depends on the maximum power which can be handled by the fiber components and photodetectors (and also on the finesse if a resonator configuration is used [63]). In Fig. 5.4, given the input power and thermal noise model, this minimum length is $nL \approx 0.2$ m at 20 kHz, but it would increase to 0.9 m at 120 kHz and 6.5 m at 500 kHz. Secondly, increasing the fiber length raises laser noise and environmental noise much faster than it does fundamental thermal noise; longer unbalanced interferometers are therefore more difficult to stabilize and require strong laser noise suppression, extreme laser stability, or both. For this demonstration, we assembled 219-m HCF samples (nL) since we calculated that laser noise suppression would be sufficient (given the frequency noise of the laser we used) for such an optical length and since our goal was to expose fundamental thermal noise at high frequencies with a large dynamic range. However, and as detailed below, we found out that environmental noise, which is much more difficult to model before the fact, constitutes the limitation of our measurements below approximately 20 kHz. To expose fundamental thermal noise in this acoustic frequency range, shorter interferometers would be preferable since they are less sensitive to thermal drift and vibrations (which tend to be much stronger at low frequencies), though this comes at the expense of a reduced shot-noise-limited signal-to-noise ratio and commensurate lower measurement bandwidth. Ultimately, the fiber length that is optimal to expose fundamental thermal noise depends on the exact experimental conditions, in particular environmental fluctuations, and is necessarily frequency-dependent.

5.5.4 Signal processing

A series of pre-characterizations of the setup were first performed. Using an amplitude-modulated laser to directly illuminate each of the 8 photodiodes, the frequency responses $H_d(f)$ were measured in order to guarantee adequate bandwidth and common-mode rejection (Fig. 5.5(a)). Similarly, a synthesizer was connected at the input of the cross-over filters for the measurement of the frequency response $H_f(f)$ in both the AC and DC branches (Fig. 5.5(b)). Finally, with the setup configured as in Fig. 5.3, the laser was frequency-modulated with approximate peak-peak amplitude $\Delta\nu = 1/(500 \text{ ns}) = 2$ MHz in order to trace a complete interferometric fringe (Fig. 5.5(d)). This allowed the extraction of the IQ parameters of the optical 90° hybrids through an elliptic fit [62]. Final measurements were taken with the fre-

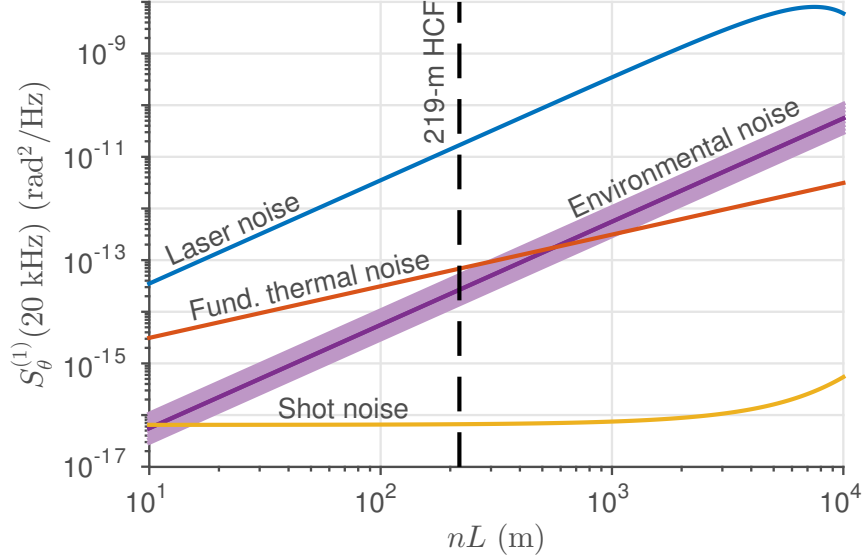


Figure 5.4 – Modeled contributions to the total phase noise PSD at 20 kHz (see Eq. 5.15 and definitions in the paragraph that follows). The laser noise curve (top) assumes $S_{\nu}^{(1)}(20 \text{ kHz}) = 0.8 \text{ Hz}^2/\text{Hz}$ and shows a cutoff due to bandwidth reduction with increase in nL , the fundamental thermal noise (mid) is based on Eq. 5.7 for an antiresonant HCF at 1 atm internal pressure, and the measurement noise curve (bottom) supposes that shot noise is dominant with $P_0 = 10 \text{ mW}$, $\eta = 0.8$, and a fiber transmission loss of 1.3 dB/km. Environmental noise (mid, shaded) is traced as a possible distribution to illustrate the typical trend with increasing fiber length; in practice, it can take vastly different values depending on the exact environmental conditions and the interferometer’s environmental sensitivity.

quency modulation turned off, and the DC and AC signals (see an example in Fig. 5.5(c)) were both digitally equalized to compensate the appropriate frequency response, low-pass filtered at 500 kHz (a frequency beyond which the frequency response inversion is difficult because of the antialiasing filter roll-off), recombined digitally, and then corrected for ellipticity. From the fully corrected composite IQ signals, the total phase noise $\theta(t)$ could be extracted unambiguously, regardless of the operating phase (fringe position) [64]. Similarly, synthetic measurement noise signals could be constructed by instead using AC noise signals acquired with the laser turned off. We found that the complete pre-characterization procedure only had to be performed every hour to maintain adequate accuracy, mostly due to the slow drifts in polarization in the HCF interferometers.

As suggested in Figure 5.4, laser noise is largely dominant in the output phase of each interferometer, even if a highly stable laser is used. To suppress as much of this noise as possible, the laser signal was phase modulated following a triangle waveform so as to create a pilot signal (in this case a square wave) in the output phase. This pilot signal was then used to estimate the difference in phase delay between both interferometers. From the complex ratio of the harmonics found in each output spectrum, a correction function of the following form

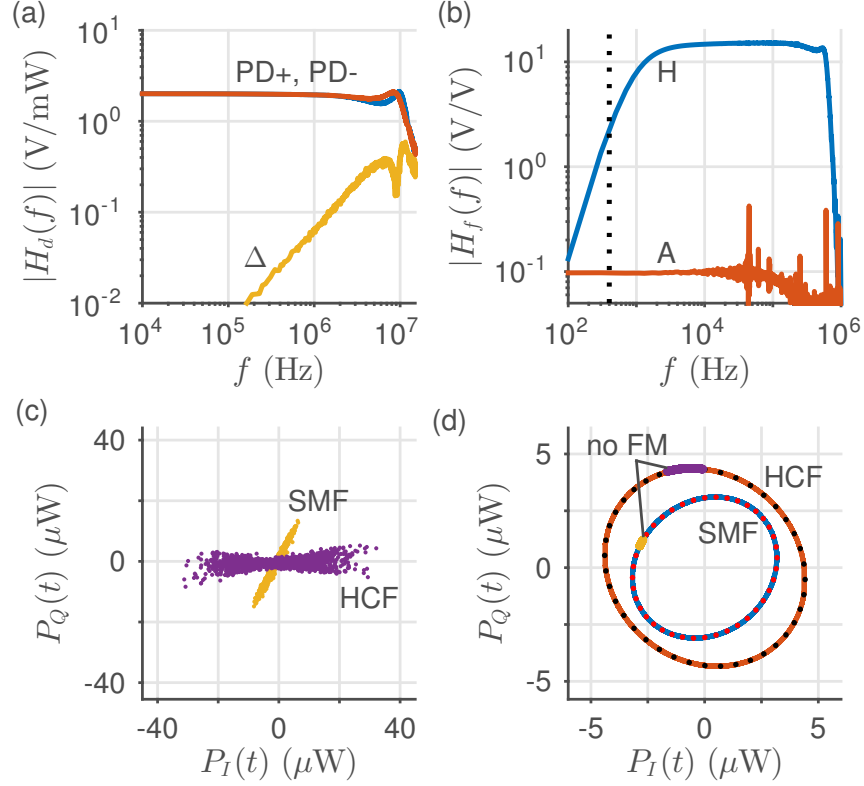


Figure 5.5 – Typical responses and signals. (a) Photodetector circuit frequency responses (modulus). “PD+” and “PD-” stand for positive and negative photodiode channels, respectively, while “ Δ ” refers to the modulus of the difference, an indicator of the common-mode rejection level. (b) Crossover filter frequency response (modulus). “A” stands for “attenuated” (DC part), “H” stands for “high-pass” (AC part). The dotted black line marks the transition frequency. (c) Corrected and calibrated AC signals for both interferometers (0.4 s duration). The larger excursions observed in HCF are due to a stronger laser noise conversion (due to the larger path imbalance) and stronger acoustic noise pickup. (d) IQ ellipses for the case illustrated in Fig. 5.3. The dotted lines are the associated elliptical fits. Also shown are the corrected and calibrated composite signals (no FM) which are the complement to those shown in (c); no laser frequency modulation (FM) is applied in these cases.

was computed:

$$H_c(f) = \frac{1 - e^{-j2\pi f\tau_A}}{1 - e^{-j2\pi f\tau_B}} \approx \frac{\tau_A}{\tau_B} e^{-j\pi f(\tau_A - \tau_B)}, \quad (5.16)$$

where τ_A (τ_B) is the phase delay in interferometer A (B) and the approximation is adequate for the conditions of interest here. Constructing a corrected phase difference of the form $\Delta\theta'(t) = \theta_A(t) - \theta_B(t) * h_c(t)$, where $h_c(t)$ is the impulse response associated to $H_c(f)$ and θ_A (θ_B) is the total phase from interferometer A (B) (see Eq.5.15), instead of $\Delta\theta(t) = \theta_A(t) - \theta_B(t)$ improves laser noise suppression; this improvement is shown in Figure 5.6(a) for the case of a SMF to SMF comparison (interferometers A and B are made of SMF), in which the delays are nearly identical ($\tau_A/\tau_B \approx 0.996$), and in Figure 5.6(c) for the case of a SMF to

HCF comparison, in which the delays are more distinct ($\tau_A/\tau_B \approx 0.705$). Obviously, such a correction scales all terms that contribute to the phase measured in interferometer B (see Eq. 5.15), in particular the fundamental thermal noise that is of interest here. However, recognizing that this noise is independent in both interferometers and assuming that it is dominant over environmental noise and measurement noise (which is the criterion for the thermal noise measurement to be valid), it is straightforward to take this scaling into account during analysis. Indeed, the PSD of the corrected phase difference simply becomes:

$$\begin{aligned} S_{\Delta\theta'}^{(1)}(f) &= S_{\phi_A}^{(1)}(f) + |H_c(f)|^2 S_{\phi_B}^{(1)}(f) \\ &\approx S_{\phi_A}^{(1)}(f) + \left(\frac{\tau_A}{\tau_B}\right)^2 S_{\phi_B}^{(1)}(f). \end{aligned} \quad (5.17)$$

The measurement noise scales in the same fashion since it is also independent in both interferometers. It is worth stating that this last equation is strictly valid only if the delay in each reference arm is null. Because of pigtailed, this is not true in practice, but small corrections can be brought to Eq. 5.17 once laser noise is canceled. From the corrected phase difference $\Delta\theta'(t)$, we finally computed phase power spectral densities using Welch's method with 80 non-overlapping segments, a Kaiser window (shape factor $\beta = 10$), and a zero-padding factor of 4 to lightly smooth the display.

5.5.5 Results

We first compared the two SMF interferometers for verification purposes. In Figure 5.7, the thermoconductive noise model (Eq. 5.17 with $\tau_A/\tau_B \approx 0.996$ and the parameters found in Table 5.1) is superimposed on the measured phase difference PSD, showing good agreement between 20 and 200 kHz. Above 200 kHz, the PSD approaches the measurement noise (MN) floor and then quickly drops off due to the digital low-pass filter. The small hump around 400 kHz is attributed to nonlinear conversion of laser relative intensity noise. At the lowest displayed frequencies, the measurement is limited by building vibration noise, which we confirmed by installing both SMF interferometers on vibration isolation platforms (Minus K, 25BM-10); deactivating the platforms led to a significant increase in the measured phase noise below 3 kHz (the curve shown here is with the platforms activated). Between 3 and 20 kHz, the measured noise is larger than the model by 1 to 2 dB. While it could be tempting to attribute this offset to inadequate modeling of the thermal boundary conditions, the impact of the cladding boundary manifests at lower frequencies in SMF and it tends to decrease the noise level, not increase it [16]. Our hypothesis is that this is again due to vibrations, though of acoustic instead of structural origin. Finally, the measurement noise, shown in orange in Fig. 5.7, appears dominated by the sum of the two shot noise contributions ($P_{0,A} = 8.9$ mW and $P_{0,B} = 9.5$ mW), in particular above the 50 kHz noise resonance where the digitizer noise level drops abruptly. This agrees with our measurement noise model.

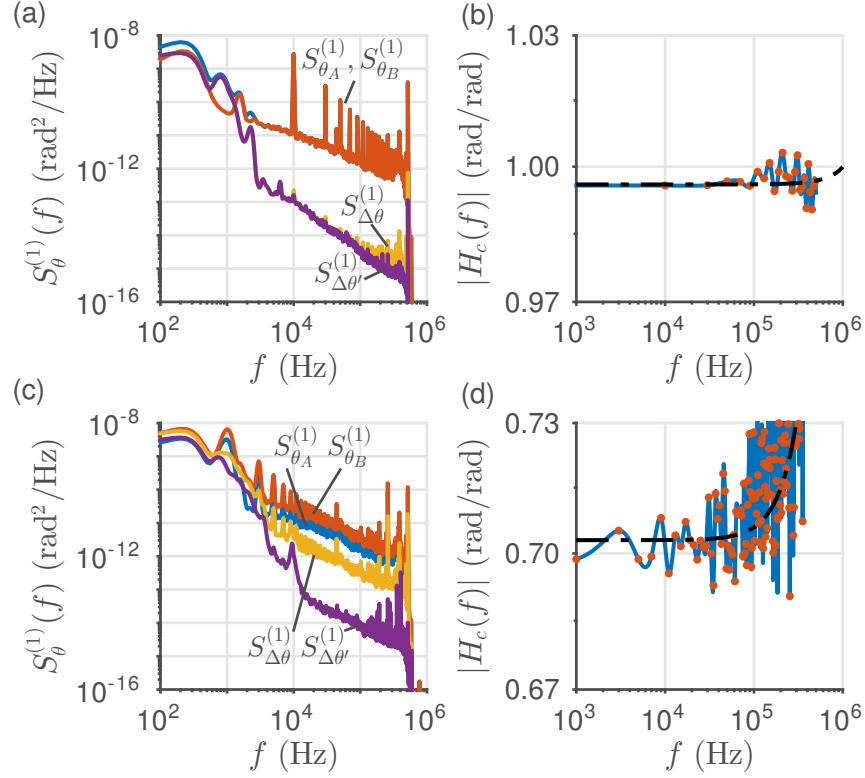


Figure 5.6 – Improved laser noise suppression using a periodic pilot signal. In (a), the two overlapped curves (top) represent the noise spectrum measured for each interferometer, with harmonics of 10 kHz clearly visible. The two curves at the bottom represent the PSD of the phase difference, without and with delay correction. A slight improvement is visible at high frequencies. The modulus of the correction function is shown in (b) along with the fit (dashed black). The signal-to-noise ratio quickly decreases above 100 kHz and is below 1 above 500 kHz (not displayed). Panels (c) and (d) show an example of the same correction for a SMF to HCF comparison. In this case the pilot signal’s frequency is 1 kHz and the suppression improvement is striking since the path imbalances are very different.

We then compared the two hollow-core fibers using the same setup (Fig. 5.8). In this case, we found a much higher vibration contribution below 20 kHz; this is not surprising given the higher intrinsic acoustic sensitivity of HCFs [65] in addition to the fact that we did not shield the HCF interferometers as much as the SMF interferometers in order to facilitate polarization tuning. Between 20 and 200 kHz, we measured a phase PSD that sits within 2 dB of our adapted thermoconductive noise model (Table 5.2), with a spectral shape clearly distinct from that in SMF. However, we found that we could significantly improve the match between measurement and model, in both shape and level, by assuming the internal pressure of both HCFs to be 0.7 atm instead of 1.0 atm. Though it is difficult to corroborate such an observation, recent investigations have shown that the pressure inside a HCF right after fabrication is significantly below 1 atm [66]. Depending on the time a hollow-core fiber is left open to the atmosphere before being sealed, and depending on its total length [48, 67], it is

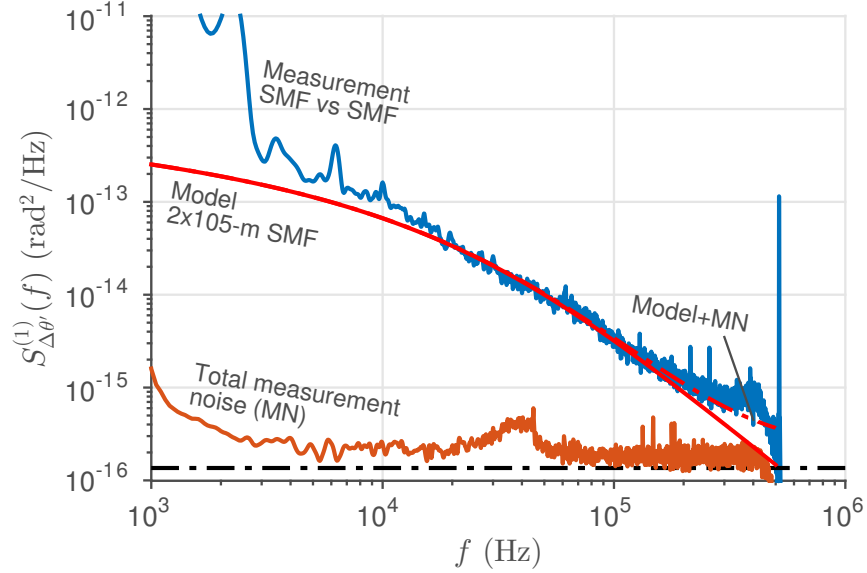


Figure 5.7 – Difference phase PSD at $\lambda = 1539.8$ nm and $T = 20^\circ\text{C}$, SMF to SMF comparison. The dash-dotted black curve is the shot noise level (8.9+9.5 mW).

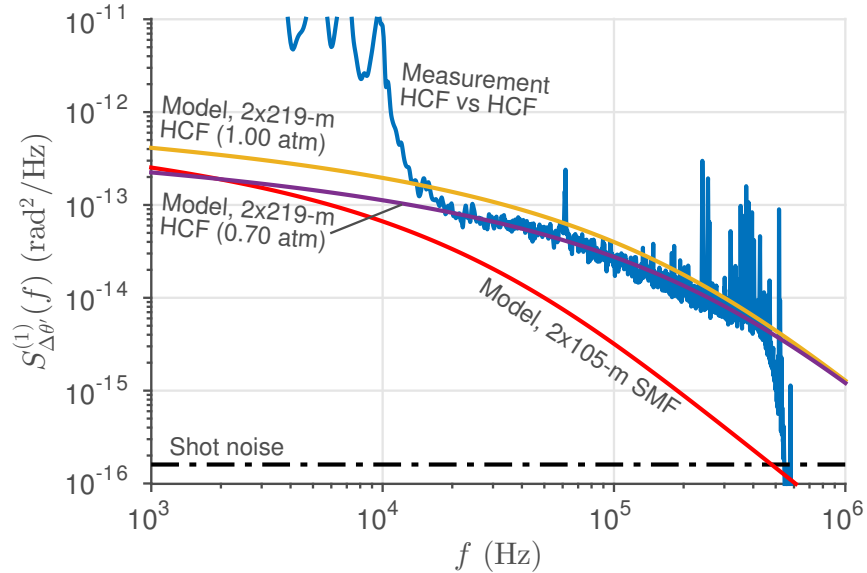


Figure 5.8 – Difference phase PSD, HCF to HCF comparison (before evacuation).

possible for the internal pressure to settle to a fraction of atmospheric pressure. While we do not know how long our HCF samples were left unsealed post-fabrication, both were cut from adjacent sections of the drawn fiber. Furthermore, we followed the same procedure to build the HCF to SMF interconnections, only breaking the seal at the moment of splicing. It therefore appears reasonable for both samples to display a similar internal pressure of approximately 0.7 atm.

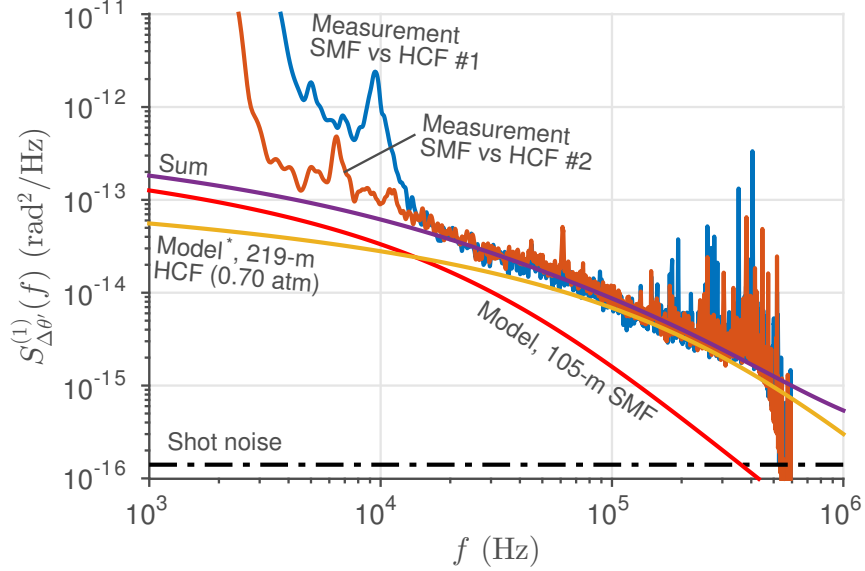


Figure 5.9 – Difference phase PSD, SMF to HCF comparison (before evacuation). In both cases, the HCF contribution (interferometer B) is scaled by $(\tau_A/\tau_B)^2 \approx 0.5$; the associated model curve (*) takes this scaling into account. The “sum” curve represents the total noise model: SMF, HCF, and measurement noise (not shown). The vibration contribution (<20 kHz) was particularly weak for “SMF vs HCF #2”, perhaps because of favorable laboratory conditions at the moment this specific measurement was taken.

To validate this first thermoconductive noise measurement in HCF, we also compared each of the HCF to the same SMF, in this case applying a strong subtraction correction to better suppress laser noise (Fig. 5.9). In both cases, we found a good agreement between measurement and model, once again assuming an internal pressure of 0.7 atm for each HCF. The three independent measurements of HCF noise are therefore broadly consistent with one another. Obviously, we cannot rule out the possibility that the internal pressure is actually 1 atm and that the noise model is inaccurate. However, tuning only the mode field radius or thermo-optic coefficient (for example) does not improve the match as well as simply reducing the internal pressure, which we take as an argument to favor the latter explanation. Moreover, the HCF samples were given several weeks to attain thermal equilibrium with the laboratory environment, and laser power absorbed within the core cannot significantly increase the gas temperature under our experimental conditions [55]; the large temperature error (larger than 60°C) which would be required to explain the observed discrepancy in Fig. 5.8 is therefore unrealistic.

We then set out to verify the central assumption of the adapted thermoconductive noise model, which is that the noise is driven by the thermo-optic contribution from the gas inside the core. Following a procedure presented in [68], we unsealed the first HCF and inserted the fiber end into a vacuum chamber so as to lower the internal gas pressure, heating the whole

219-m fiber to 70° C to accelerate the evacuation process. After two weeks, we re-spliced the connector (thus sealing the fiber) and let the fiber cool down to room temperature. During the splicing operation, the HCF was left open to the atmosphere for approximately 15 minutes, allowing some ingress of atmospheric air. The phase noise of this partially evacuated fiber, interferometrically compared to a SMF fiber, is shown in Figure 5.10 (SMF vs HCF #1). Although there is a lot of contamination by high-frequency tones in this specific case (these are also visible in the measurement noise PSD, which is not shown, suggesting that these are not due to the fiber samples themselves – these high-frequency tones appear in an intermittent fashion and are thought to couple through some of the preamplifiers), it is still clear that SMF thermal noise dominates the total phase noise between 20 and 100 kHz. Moreover, a reasonable match between measurement and model is attained by assuming that the HCF’s internal pressure is 0.30 atm (solid “sum” curve). We then repeated the procedure for the second HCF sample, leaving the open fiber end in the vacuum chamber for 6 weeks. This time, we significantly improved the splicing procedure and managed to seal the fiber within 4 minutes. This fiber’s noise PSD, still compared to that of the reference SMF, is also shown in Figure 5.10 (SMF vs HCF #2); its level is slightly below that of the first HCF and reasonably matches the thermal noise model if we assume $p = 0.15$ atm (dashed “sum” curve). Finally, we compared the HCFs to one another in order to remove the dominant SMF contribution (Fig. 5.11). Clearly, venting the HCFs lowered the phase noise PSD and slightly modified its spectral shape, as predicted by the model. Moreover, the total PSD is well represented by the two pressures guessed from the comparisons to SMF in Fig. 5.10. From numerical simulations (Fig. 5.12), these two internal pressures (0.30 and 0.15 atm) appear physically reasonable given the evacuation time and the time it took to seal the fibers once their ends were exposed to the atmosphere.

Figure 5.13 constitutes a summary of the most important experimental results of this paper, displaying phase PSDs that are normalized to the total optical length. Even though it has a larger mode area, the HCF is noisier per unit optical length than a typical SMF, at least above approximately 10 kHz and when the internal pressure is close to atmospheric. Reducing the internal pressure reduces the noise as predicted by our model, yielding a normalized phase noise level below that of SMF between 20 and 75 kHz (assuming a pressure that is the average between that of the two evacuated samples, $(0.30+0.15)/2 \approx 0.23$ atm). To the best of our knowledge, the normalized phase noise in this spectral range is the lowest ever measured in a fiber. Our model predicts that this improvement with respect to SMF should extend to lower frequencies, but our measurements are contaminated by environmental fluctuations in this spectral range, preventing a definitive conclusion. Finally, if we were able to isolate only the contribution from the better-evacuated HCF, for which we infer an internal pressure of 0.15 atm, we would expect to see that the HCF is significantly quieter than a typical SMF below 100 kHz (lowermost curve at low frequencies).

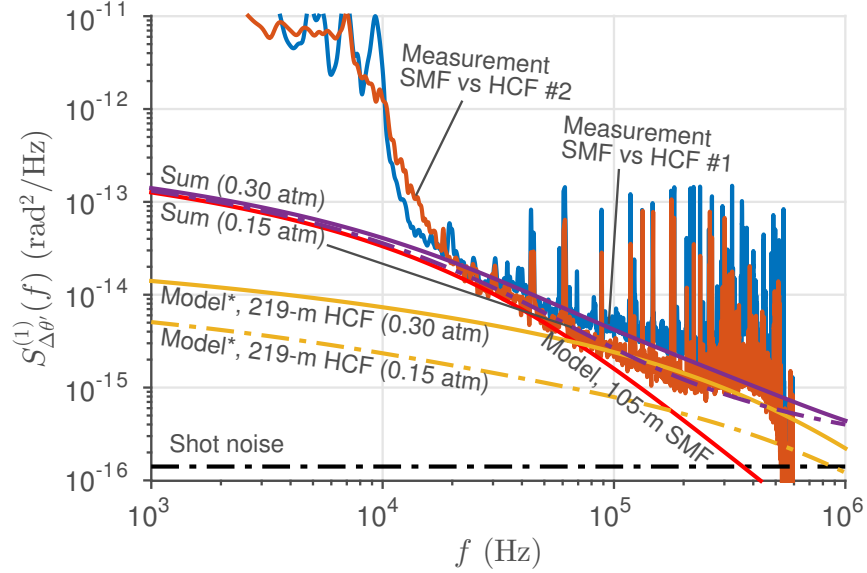


Figure 5.10 – Difference phase PSD, SMF to HCF comparison (after evacuation). In both cases, the HCF contribution (interferometer B) is scaled by $(\tau_A/\tau_B)^2 \approx 0.5$; the associated model curve (*) takes this scaling into account. The solid lines are for the first HCF, the dash-dotted lines for the second HCF (longer evacuation). The “sum” curves represents the total noise model: SMF, HCF, and measurement noise (not shown).

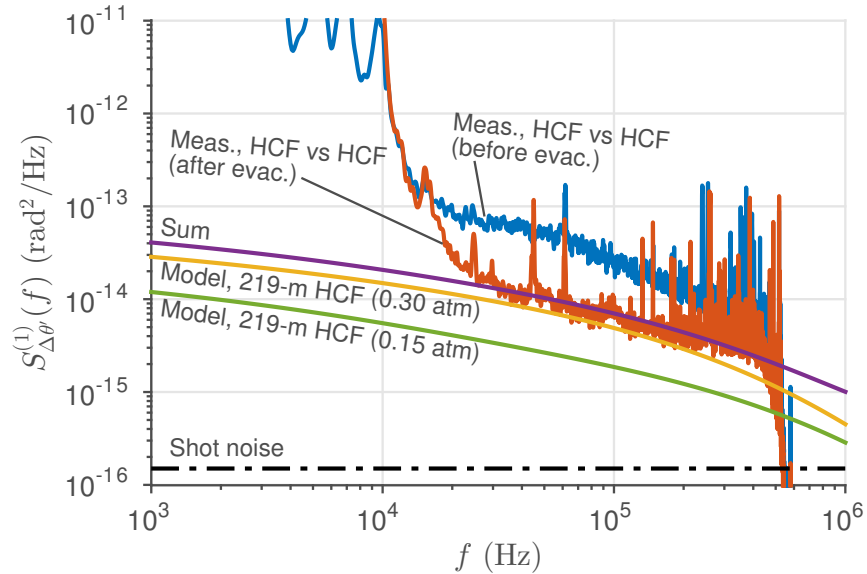


Figure 5.11 – Difference phase PSD, HCF to HCF comparison (before and after evacuation). The “sum” curve represents the total noise model: HCF, HCF, and measurement noise (not shown).

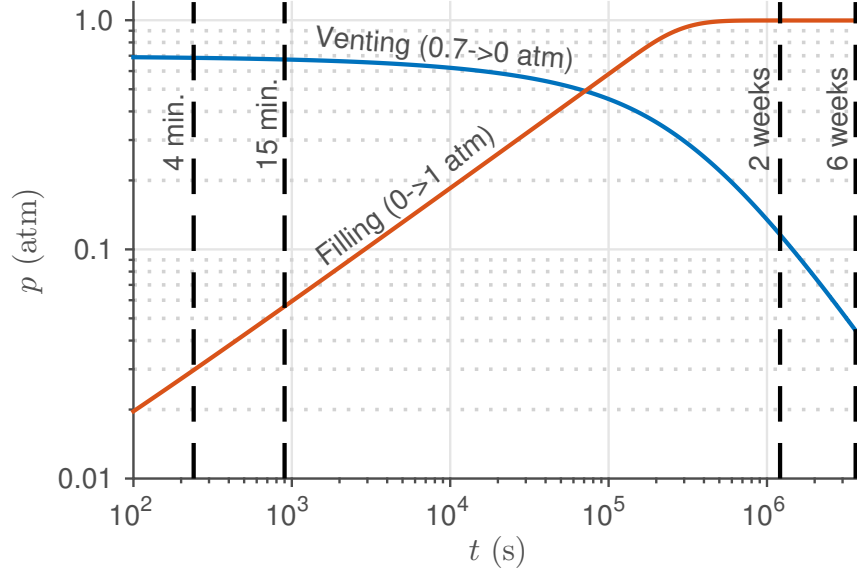


Figure 5.12 – Numerical solution to the diffusion equation in the hydrodynamic regime (Poiseuille flow) for a 219-m HCF open at a single end [48]. Only the properties of nitrogen (N_2) are considered. Venting is performed at 70°C in a fiber with an initial pressure that is spatially uniform at a level of 0.7 atm. Filling is performed at 20°C and assumes a perfectly evacuated fiber is suddenly exposed to atmospheric pressure at one open end. The displayed pressure is the spatial average over the fiber length (steady-state distribution after sealing) and the capillary diameter is assumed to be equal to the HCF’s core diameter, $d \approx 35 \mu\text{m}$. This model only provides a rough estimate of the relevant timescales since the initial filling pressure is not properly considered, since the diffusion equation becomes inaccurate as the slip-flow regime is approached below 0.2 atm (slows down processes), since the gas should be assumed to be compressible (speeds up processes), and since the core is not cylindrical like assumed here (slows down processes) [69].

5.6 Discussion

To our knowledge, measurement of fundamental thermal noise in a HCF has only been previously reported by Cranch *et al.* [32]. The authors built a balanced Mach-Zehnder interferometer with hollow-core photonic bandgap fibers (PBGF): a 10-m sample of HC1550 (NKT, $a = 4.5 \mu\text{m}$) in one arm and a 10-m sample of HC19 (NKT, $a = 6.5 \mu\text{m}$) in the other arm. In contrast to the approach used here, they held the interferometer at the quadrature point to measure the phase fluctuations. Although the measured noise spectrum in the 100 Hz to 100 kHz range changed over time, a phenomenon attributed to multipath interference due to higher-order mode propagation, the minimum noise level in the 20 to 60 kHz range was shown to be approximately 2 dB lower than the thermoconductive phase noise of a reference SMF with the same physical length L (and thus larger optical length nL), but only a few dBs above the detector noise. As stated in [32], the parameters of the reference SMF are described by Bartolo *et al.* [46]. While the minimum HCF noise measured by Cranch *et al.* is lower than

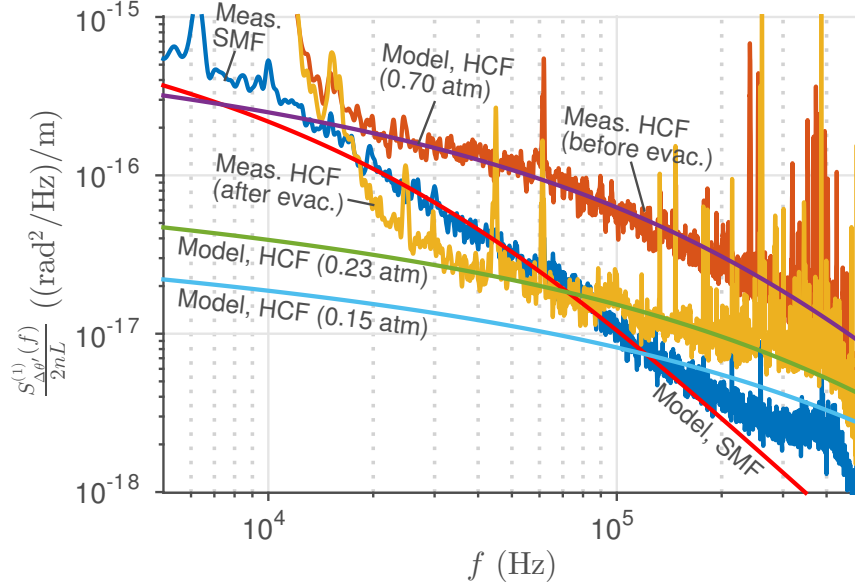


Figure 5.13 – Optical-length-normalized phase PSD. Summary of the main experimental results.

the thermal noise of their reference SMF, the difference narrows to 0.4 dB when the phase PSD is normalized by the optical length ($2 - 10 \log_{10}(1.45) = 0.4$ dB), which we consider to be the fairest basis of comparison as explained in Section 5.4. Moreover, their reference SMF has an anomalously small mode field radius $a = 2.61 \mu\text{m}$ (e^{-2}), much below the mode field radius of their two HCF samples or that of a standard SMF used in the telecommunications field. The noise they measured, as far as we can tell, is thus 3 to 5 dB above that of a standard SMF ($a = 5.25 \mu\text{m}$) of equal optical length and is comparable to the noise we measured in a large-mode-area HCF at an internal pressure of 0.7 atm (Figure 5.14). Though the PSD they measured is lower than that predicted by the model we developed here (when accounting for the mode field radii), it is likely also limited by the atmospheric air inside the HCF since there is no evidence that the HCFs were evacuated. The discrepancy between our model and their measurements could be explained by the observed multipath interference: higher order modes should sample apparent temperature fluctuations that are similar to that seen by the fundamental mode. Heuristically, it is therefore possible for the minimum noise to be smaller than that which would be found in the fundamental mode only (because of interference), preventing an adequate estimate of fundamental thermal noise. In any case, it is clear that the newer generation HCF used here does not display such multipath interference and, when held at an internal pressure of 0.23 atm, displays fundamental thermal noise that is up to 5.4 dB weaker than that of a typical SMF in the 20 to 60 kHz range. This is due in part to the large mode area in the HCF we used, but this remains true up to 40 kHz even if we force identical mode areas in SMF and HCF (3.3 dB instead of 5.4 dB weaker noise at 20 kHz).

Until now, it has been assumed that the hollow-core fiber is filled with nitrogen since it very

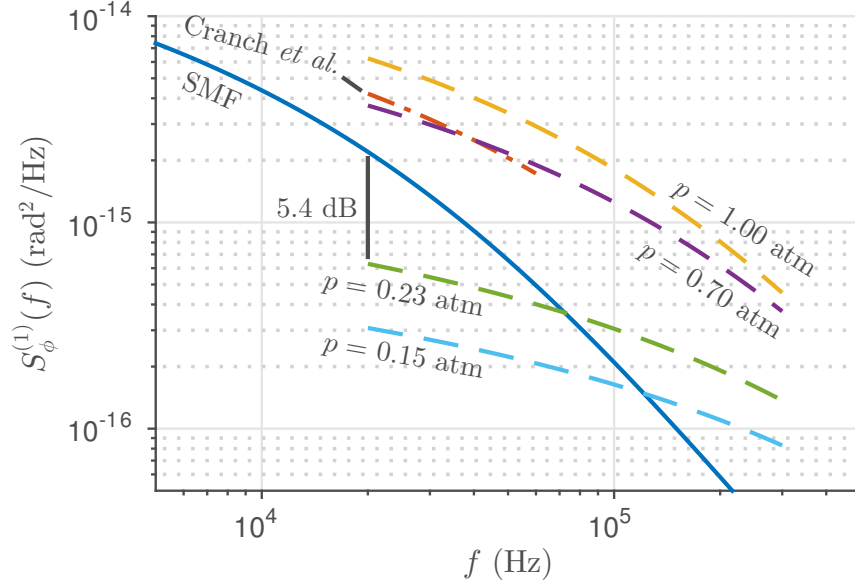


Figure 5.14 – Phase PSD at $\lambda = 1550$ nm for $nL = 20$ m. The solid blue curve is the thermoconductive noise model for a standard SMF with $a = 5.25$ μm . The HCF noise measured by Cranch *et al.* for $nL = 2 \times 10$ m is shown in dash-dotted orange; it is a few dBs below their reference curve, calculated with $nL = 29$ m and $a = 2.61$ μm , in the 20 to 60 kHz range (not shown), but a few dBs above the noise of a typical SMF of equal optical length (solid blue). The dashed yellow, purple, green, and teal curves represent the thermoconductive noise model for our large-mode-area HCF sample, normalized to the same 20-m optical length, at 1.00, 0.70, 0.23, and 0.15 atm, respectively.

well approximates the thermal and optical behavior of air while being much simpler to model. Yet, it is possible to fill a HCF with other gases than air, and the equations presented in subsection 5.4.2 show how this can yield a phase noise reduction even if the core pressure is maintained at 1 atm. From Eq. 5.12, the thermo-optic coefficient is directly proportional to the polarizability α ; in general, lighter molecules should thus produce smaller phase noise for a given pressure and temperature. Optimizing the thermal properties is somewhat more difficult since an assumption must be made about the frequency range of operation. Let us suppose once again that we are interested in frequencies below the cutoff so that $Q(f) \propto c_v/k_t$ (Eq. 5.14). From Eq. 5.13, we can then identify k_t/α^2 as a useful figure of merit for gases. This figure of merit appears to be maximized in helium [53, 59], a molecule small enough to diffuse through the silica cladding and out of the hollow-core over a reasonable timeframe [70]; this constitutes a positive side-effect since phase noise is also proportional to pressure. In theory, neon gas is also associated to a lower noise PSD than nitrogen (Fig. 5.15), while argon is only slightly better (not illustrated). Hence, filling a HCF with gaseous He or Ne appears as a promising approach to minimize phase noise and improve the fundamental length stability. Nevertheless, such predictions have to be verified experimentally since the simplifying assumptions made here may break down and since other forms of noise may become dominant

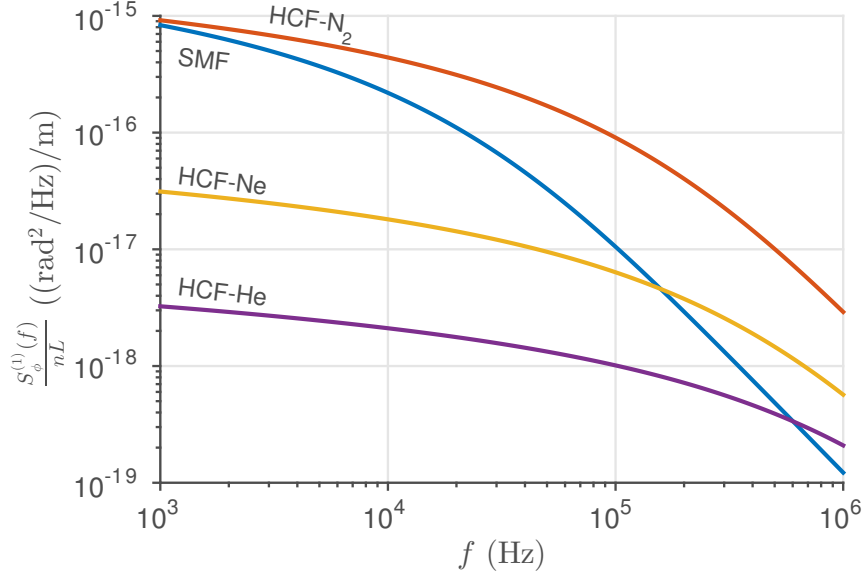


Figure 5.15 – Modeled optical-length-normalized phase PSD at $\lambda = 1539.8$ nm. Comparison between SMF and HCF filled with different species (nitrogen, N₂; neon, Ne; helium, He) at a pressure of 1 atm. A mode field radius $a = 5.25$ μm is considered for the SMF and $a = 12.5$ μm for the HCFs. The curve for helium can be considered to constitute a noise ceiling since this molecule would normally out-diffuse of the hollow-core over time, leaving a vacuum.

as thermoconductive noise is lowered below the 10^{-17} (rad²/Hz)/m mark, the lowest measured value here (see Fig. 5.13).

5.7 Conclusion

In summary, we measured fundamental thermal noise in the latest generation of antiresonant hollow-core fibers using 219-m samples and high throughput photodetectors to minimize shot noise and attain an adequate dynamic range. We found that the spectrum of this noise is distinct in both shape and level from that measured in standard solid-core silica fibers (SMF). Moreover, it is well explained by an adapted thermoconductive noise model, which only considers the thermal and thermo-optic properties of the gas trapped within the hollow core, in the 20 to 200 kHz frequency range and 0.1 to 1 atm pressure range. For equal mode field areas and optical lengths, we showed that an antiresonant HCF at atmospheric pressure displays significantly larger thermoconductive phase noise than a SMF, at least at frequencies above 1 kHz. Yet, the model we developed also indicates that this noise can be lowered by filling the core with low-polarizability gas such as neon or helium or by simply evacuating the core, a prediction supported by the experiments we performed over partially-vented HCF samples. At an internal pressure approaching 0.2 atm and around 30 kHz, our measurements reveal the lowest phase noise PSD per unit optical length ever measured in a fiber, 1.3×10^{-17} (rad²/Hz)/m.

These results should help refine the estimation of the fundamental noise floor in instruments already based on HCF, for example photothermal interferometers, but also in those instruments which can benefit from an SMF-to-HCF switch such as fiber optic gyroscopes, optical fiber links, optoelectronic oscillators, and fiber interferometers used for laser frequency stabilization. In all related applications, a large-mode-area NANF at a sub-atmospheric internal pressure may surpass standard SMF in terms of fundamental optical length stability. Though a more elaborate noise model and better low-frequency measurements are required to quantify the extent of the potential improvement, an order of magnitude gain already appears within reach in the 10 to 100 kHz range. This high stability potential comes in addition to other desirable properties of NANF such as high polarization purity [71], low nonlinearity [72], weak backscattering [60], and low thermal sensitivity [44] (which can all benefit from core evacuation) in antiresonant HCFs displaying a transmission loss competitive with SMF at 1550 nm [33] and lower than SMF below 1100 nm [73]. Kilometer-scale antiresonant hollow-core fibers, properly shielded from environmental fluctuations and illuminated by high laser power, can therefore be considered for the most demanding interferometric applications.

5.8 Bibliographie

- [1] V. Dangui, H. K. Kim, M. J. F. Digonnet, and G. S. Kino. Phase sensitivity to temperature of the fundamental mode in air-guiding photonic-bandgap fibers. *Optics Express*, 13(18) :6669–6684, 2005. URL <https://doi.org/10.1364/OPEX.13.006669>.
- [2] R. Slavík, G. Marra, E. R. Numkam Fokoua, N. Baddela, N. V. Wheeler, M. N. Petrovich, F. Poletti, and D. J. Richardson. Ultralow thermal sensitivity of phase and propagation delay in hollow core optical fibres. *Scientific Reports*, 5(1) :1–7, 2015. URL [https://doi.org/10.1038/srep15447\(2015\)](https://doi.org/10.1038/srep15447(2015)).
- [3] W. H. Glenn. Noise in interferometric optical systems : An optical Nyquist theorem. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 25(6) :1218–1224, 1989. URL <https://doi.org/10.1109/3.29251>.
- [4] K. H. Wanser. Fundamental phase noise limit in optical fibres due to temperature fluctuations. *Electronics Letters*, 28(1) :53–54, 1992. URL [10.1049/e1:19920033](https://doi.org/10.1049/e1:19920033).
- [5] S. Foster. Dynamical noise in single-mode distributed feedback fiber lasers. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 40(9) :1283–1293, 2004. URL <https://doi.org/10.1109/JQE.2004.833240>.
- [6] J. Lim, A. A. Savchenkov, E. Dale, W. Liang, D. Eliyahu, V. Ilchenko, A. B. Matsko, L. Maleki, and C. W. Wong. Chasing the thermodynamical noise limit in whispering-gallery-mode resonators for ultrastable laser frequency stabilization. *Nature Communications*, 8(1) :1–7, 2017. URL <https://doi.org/10.1038/s41467-017-00021-9>.

- [7] S. Foster, A. Tikhomirov, and M. Milnes. Fundamental thermal noise in distributed feedback fiber lasers. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 43(5) :378–384, 2007. URL <https://doi.org/10.1109/JQE.2007.894744>.
- [8] G. Gagliardi, M. Salza, S. Avino, P. Ferraro, and P. De Natale. Probing the ultimate limit of fiber-optic strain sensing. *Science*, 330(6007) :1081–1084, 2010. URL <https://doi.org/10.1126/science.1195818>.
- [9] S. Knudsen, A. B. Tveten, and A. Dandridge. Measurements of fundamental thermal induced phase fluctuations in the fiber of a sagnac interferometer. *IEEE Photonics Technology Letters*, 7(1) :90–92, 1995. URL <https://doi.org/10.1109/68.363366>.
- [10] Y. Li, Y. Cao, D. He, Y. Wu, F. Chen, C. Peng, and Z. Li. Thermal phase noise in giant interferometric fiber optic gyroscopes. *Optics Express*, 27(10) :14121–14132, 2019. URL <https://doi.org/10.1364/OE.27.014121>.
- [11] P. A. Williams, W. C. Swann, and N. R. Newbury. High-stability transfer of an optical frequency over long fiber-optic links. *Journal of the Optical Society of America B*, 25(8) : 1284–1293, 2008. URL <https://doi.org/10.1364/JOSAB.25.001284>.
- [12] F. Stefani, O. Lopez, A. Bercy, W.-K. Lee, C. Chardonnet, G. Santarelli, P.-E. Pottie, and A. Amy-Klein. Tackling the limits of optical fiber links. *Journal of the Optical Society of America B*, 32(5) :787–797, 2015. URL <https://doi.org/10.1364/JOSAB.32.000787>.
- [13] J. P. Cahill, W. Zhou, and C. R. Menyuk. Additive phase noise of fiber-optic links used in photonic microwave-generation systems. *Applied Optics*, 56(3) :B18–B25, 2017. URL <https://doi.org/10.1364/AO.56.000B18>.
- [14] F. Kéfélian, H. Jiang, P. Lemonde, and G. Santarelli. Ultralow-frequency-noise stabilization of a laser by locking to an optical fiber-delay line. *Optics Letters*, 34(7) :914–916, 2009. URL <https://doi.org/10.1364/OL.34.000914>.
- [15] J. Dong, Y. Hu, J. Huang, M. Ye, Q. Qu, T. Li, and L. Liu. Subhertz linewidth laser by locking to a fiber delay line. *Applied Optics*, 54(5) :1152–1156, 2015. URL <https://doi.org/10.1364/AO.54.001152>.
- [16] S. Foster. Low-frequency thermal noise in optical fiber cavities. *Physical Review A*, 86(4) :043801, 2012. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.86.043801>.
- [17] W. B. Gardner. Microbending loss in optical fibers. *The Bell System Technical Journal*, 54(2) :457–465, 1975. URL <https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1975.tb02848.x>.
- [18] W. Zhu, E. R. Numkam Fokoua, A. A. Taranta, Y. Chen, T. D. Bradley, M. N. Petrovich, F. Poletti, M. Zhao, D. J. Richardson, and R. Slavík. The thermal phase sensitivity of both coated and uncoated standard and hollow core fibers down to cryogenic temperatures.

- Journal of Lightwave Technology*, 38(8) :2477–2484, 2020. URL <https://doi.org/10.1109/JLT.2019.2960437>.
- [19] B. Merkel, D. Repp, and A. Reiserer. Laser stabilization to a cryogenic fiber ring resonator. *Optics Letters*, 46(2) :444–447, 2021. URL <https://doi.org/10.1364/OL.413847>.
- [20] S. Foster, G. A. Cranch, and A. Tikhomirov. Experimental evidence for the thermal origin of 1/f frequency noise in erbium-doped fiber lasers. *Physical Review A*, 79(5) : 053802, 2009. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.79.053802>.
- [21] R. Kashyap, S. Hornung, M. H. Reeve, and S. A. Cassidy. Temperature desensitisation of delay in optical fibres for sensor applications. *Electronics Letters*, 19(24) :1039–1040, 1983. URL <https://doi.org/10.1049/el:19830705>.
- [22] T. Iwashima, A. Inoue, M. Shigematsu, M. Nishimura, and Y. Hattori. Temperature compensation technique for fibre Bragg gratings using liquid crystalline polymer tubes. *Electronics Letters*, 33(5) :417–419, 1997. URL <https://doi.org/10.1049/el:19970289>.
- [23] M. Bousonville, M. K. Bock, M. Felber, T. Ladwig, T. Lamb, H. Schlarb, S. Schulz, C. Sydlo, S. Hunziker, P. Kownacki, and S. Jablonski. New phase stable optical fiber. In *Proceedings of the Beam Instrumentation Workshop*, pages 101–103, 2012.
- [24] D. L. Weidman, G. H. Beall, K. C. Chyung, G. L. Francis, R. A. Modavis, and R. M. Morena. A novel negative expansion substrate material for athermalizing fiber Bragg gratings. In *Proceedings of European Conference on Optical Communication*, volume 1, pages 61–64. IEEE, 1996.
- [25] M. Ding, E. R. Numkam Fokoua, T. D. Bradley, F. Poletti, D. J. Richardson, and R. Slavík. Hollow core fiber temperature sensitivity reduction via winding on a thermally-insensitive coil. In *CLEO : Science and Innovations*, pages STu1Q–7. Optical Society of America, 2021. URL https://doi.org/10.1364/CLEO_SI.2021.STu1Q.7.
- [26] K. Shima, K. Himeno, T. Sakai, S. Okude, A. Wada, and R. Yamauchi. A novel temperature-insensitive long-period fiber grating using a boron-codoped-germanosilicate-core fiber. In *Proceedings of Optical Fiber Communication Conference*, pages 347–348. IEEE, 1997. URL <https://doi.org/10.1109/OFC.1997.719952>.
- [27] Z. Feng, V. Michaud-Belleau, J. K. Sahu, J. Nilsson, C. A. Codemard, X. Zhang, J. Genest, D. J. Richardson, and R. Slavík. Fiber interferometry with low temperature sensitivity. In *2020 IEEE Photonics Conference (IPC)*, pages 1–2. IEEE, 2020. URL <https://doi.org/10.1109/IPC47351.2020.9252524>.
- [28] F. Poletti. Nested antiresonant nodeless hollow core fiber. *Optics Express*, 22(20) :23807–23828, 2014. URL <https://doi.org/10.1364/OE.22.023807>.

- [29] G. Beck, L. Bigot, G. Bouwmans, A. Kudlinski, J.-P. Vilcot, and M. Douay. Benefits of photonic bandgap fibers for the thermal stabilization of optoelectronic oscillators. *IEEE Photonics Journal*, 4(3) :789–794, 2012. URL <https://doi.org/10.1109/JPHOT.2012.2195778>.
- [30] S. Meiselman and G. A. Cranch. Optical phase response to temperature in a hollow-core photonic crystal fiber. *Optics Express*, 25(22) :27581–27594, 2017. URL <https://doi.org/10.1364/OE.25.027581>.
- [31] R. Slavík, E. R. Numkam Fokoua, M. Bukshtab, Y. Chen, T. D. Bradley, S. R. Sandoghchi, M. N. Petrovich, F. Poletti, and D. J. Richardson. Demonstration of opposing thermal sensitivities in hollow-core fibers with open and sealed ends. *Optics Letters*, 44(17) :4367–4370, 2019. URL <https://doi.org/10.1364/OL.44.004367>.
- [32] G. A. Cranch and G. A. Miller. Coherent light transmission properties of commercial photonic crystal hollow core optical fiber. *Applied Optics*, 54(31) :F8–F16, 2015. URL <https://doi.org/10.1364/AO.54.0000F8>.
- [33] G. T. Jasion, T. D. Bradley, K. Harrington, H. Sakr, Y. Chen, E. R. Numkam Fokoua, I. A. Davidson, A. A. Taranta, J. R. Hayes, D. J. Richardson, and F. Poletti. Hollow core NANF with 0.28 dB/km attenuation in the C and L bands. In *Optical Fiber Communication Conference*, pages Th4B–4. Optical Society of America, 2020. URL <https://doi.org/10.1364/OFC.2020.Th4B.4>.
- [34] W. Ding, Y.-Y. Wang, S.-F. Gao, M.-L. Wang, and P. Wang. Recent progress in low-loss hollow-core anti-resonant fibers and their applications. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, 26(4) :1–12, 2019. URL <https://doi.org/10.1109/JSTQE.2019.2957445>.
- [35] H. B. Callen and R. F. Greene. On a theorem of irreversible thermodynamics. *Physical Review*, 86(5) :702, 1952. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRev.86.702>.
- [36] S. Foster. Fundamental limits on 1/f frequency noise in rare-earth-metal-doped fiber lasers due to spontaneous emission. *Physical Review A*, 78(1) :013820, 2008. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.78.013820>.
- [37] Govind Agrawal. *Nonlinear Fiber Optics*. Elsevier, 2012.
- [38] L. Duan. General treatment of the thermal noises in optical fibers. *Physical Review A*, 86(2) :023817, 2012. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.86.023817>.
- [39] M. L. Gorodetsky and I. S. Grudinin. Fundamental thermal fluctuations in microspheres. *Journal of the Optical Society of America B*, 21(4) :697–705, 2004. URL <https://doi.org/10.1364/JOSAB.21.000697>.

- [40] V. B. Braginsky, M. L. Gorodetsky, and S. P. Vyatchanin. Thermo-refractive noise in gravitational wave antennae. *Physics Letters A*, 271(5-6) :303–307, 2000. URL [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(00\)00389-3](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(00)00389-3).
- [41] T. Kessler, T. Legero, and U. Sterr. Thermal noise in optical cavities revisited. *Journal of the Optical Society of America B*, 29(1) :178–184, 2012. URL <https://doi.org/10.1364/JOSAB.29.000178>.
- [42] L. Duan. Thermal noise-limited fiber-optic sensing at infrasonic frequencies. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 51(2) :1–6, 2014. URL <https://doi.org/10.1109/JQE.2014.2384914>.
- [43] J. Dong, J. Huang, T. Li, and L. Liu. Observation of fundamental thermal noise in optical fibers down to infrasonic frequencies. *Applied Physics Letters*, 108(2) :021108, 2016. URL <https://doi.org/10.1063/1.4939918>.
- [44] B. Shi, H. Sakr, J. R. Hayes, X. Wei, E. R. Numkam Fokoua, M. Ding, Z. Feng, G. Marra, F. Poletti, D. J. Richardson, and R. Slavík. Thinly coated hollow core fiber for improved thermal phase-stability performance. *Optics Letters*, 46(20) :5177–5180, 2021. URL <https://doi.org/10.1364/OL.438302>.
- [45] J. Song, K. Sun, S. Li, and W. Cai. Phase sensitivity to temperature of the guiding mode in polarization-maintaining photonic crystal fiber. *Applied Optics*, 54(24) :7330–7334, 2015. URL <https://doi.org/10.1364/AO.54.007330>.
- [46] R. E. Bartolo, A. B. Tveten, and A. Dandridge. Thermal phase noise measurements in optical fiber interferometers. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 48(5) :720–727, 2012. URL <https://doi.org/10.1109/JQE.2012.2190717>.
- [47] Y. Lin, W. Jin, F. Yang, J. Ma, C. Wang, H. L. Ho, and Y. Liu. Pulsed photothermal interferometry for spectroscopic gas detection with hollow-core optical fibre. *Scientific Reports*, 6(1) :1–12, 2016. URL <https://doi.org/10.1038/srep39410>.
- [48] J. Henningsen and J. Hald. Dynamics of gas flow in hollow core photonic bandgap fibers. *Applied Optics*, 47(15) :2790–2797, 2008. URL <https://doi.org/10.1364/AO.47.002790>.
- [49] T. L. Bergman, A. S. Lavine, F. P. Incropera, and D. P. DeWitt. *Introduction to heat transfer*. John Wiley & Sons, 2011.
- [50] B. Edlén. The refractive index of air. *Metrologia*, 2(2) :71, 1966. URL <https://doi.org/10.1088/0026-1394/2/2/002>.

- [51] M. Zeisberger and M. A. Schmidt. Analytic model for the complex effective index of the leaky modes of tube-type anti-resonant hollow core fibers. *Scientific Reports*, 7(1) :1–13, 2017. URL <https://doi.org/10.1038/s41598-018-19722-2>.
- [52] S. J. Blundell and K. M. Blundell. *Concepts in thermal physics*. Oxford University Press on Demand, 2010.
- [53] J. W. Haarman. Thermal conductivity measurements of He, Ne, Ar, Kr, N₂ and CO₂ with a transient hot wire method. In *AIP Conference Proceedings*, volume 11, pages 193–202. American Institute of Physics, 1973. URL <https://doi.org/10.1063/1.2948425>.
- [54] H. H. Uhlig and F. G. Keyes. The dependence of the dielectric constants of gases on temperature and density. *The Journal of Chemical Physics*, 1(2) :155–159, 1933. URL <https://doi.org/10.1063/1.3247827>.
- [55] C. C. Davis and S. J. Petuchowski. Phase fluctuation optical heterodyne spectroscopy of gases. *Applied Optics*, 20(14) :2539–2554, 1981. URL <https://doi.org/10.1364/AO.20.002539>.
- [56] J. R. Barker and T. Rothem. Theory of the time-dependent-thermal-lensing (TDTL) technique as used in energy-transfer experiments. *Chemical Physics*, 68(3) :331–339, 1982. URL [https://doi.org/10.1016/0301-0104\(82\)87040-7](https://doi.org/10.1016/0301-0104(82)87040-7).
- [57] W. Jin, Y. Cao, F. Yang, and H. L. Ho. Ultra-sensitive all-fibre photothermal spectroscopy with large dynamic range. *Nature Communications*, 6(1) :1–8, 2015. URL <https://doi.org/10.1038/ncomms7767>.
- [58] K. Krzempek. A review of photothermal detection techniques for gas sensing applications. *Applied Sciences*, 9(14) :2826, 2019. URL <https://doi.org/10.3390/app9142826>.
- [59] M. A. Buldakov, I. I. Matrosov, and V. N. Cherepanov. Temperature dependence of polarizability of diatomic homonuclear molecules. *Optics and Spectroscopy*, 89(1) :37–41, 2000. URL <https://doi.org/10.1134/BF03355985>.
- [60] V. Michaud-Belleau, E. R. Numkam Fokoua, T. D. Bradley, J. R. Hayes, Y. Chen, F. Polletti, D. J. Richardson, J. Genest, and R. Slavík. Backscattering in antiresonant hollow-core fibers : over 40 dB lower than in standard optical fibers. *Optica*, 8(2) :216–219, 2021. URL <https://doi.org/10.1364/OPTICA.403087>.
- [61] V. Michaud-Belleau, M. Charlet, A. Tourigny-Plante, J.-D. Deschênes, and J. Genest. External heterodyne modulation for the suppression of low-frequency noise in quadrature interferometry. *Optics Letters*, 45(3) :670–673, 2020. URL <https://doi.org/10.1364/OL.376542>.

- [62] V. Michaud-Belleau, J. Genest, and J.-D. Deschênes. Optimal detection scheme for shot-noise-limited phase estimation in passive classical-light interferometry. *Physical Review Applied*, 10(2) :024025, 2018. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.10.024025>.
- [63] G. Skolianos, A. Arora, M. Bernier, and M. J. F. Dignonnet. Photonics sensing at the thermodynamic limit. *Optics Letters*, 42(10) :2018–2021, 2017. URL <https://doi.org/10.1364/OL.42.002018>.
- [64] V. Michaud-Belleau, H. Bergeron, P. S. Light, N. B. Hébert, J.-D. Deschênes, A. N. Luiten, and J. Genest. Passive coherent discriminator using phase diversity for the simultaneous measurement of frequency noise and intensity noise of a continuous-wave laser. *Metrologia*, 53(5) :1154, 2016. URL <https://doi.org/10.1088/0026-1394/53/5/1154>.
- [65] M. Pang, H. F. Xuan, J. Ju, and W. Jin. Influence of strain and pressure to the effective refractive index of the fundamental mode of hollow-core photonic bandgap fibers. *Optics Express*, 18(13) :14041–14055, 2010. URL <https://doi.org/10.1364/OE.18.014041>.
- [66] S. Rikimi, Y. Chen, T. W. Kelly, I. A. Davidson, G. T Jasion, M. C. Partridge, K. Harrington, T. D. Bradley, A. A. Taranta, F. Poletti, D. J. Richardson, and N. V. Wheeler. Internal gas composition and pressure in as-drawn hollow core optical fibers. *Journal of Lightwave Technology*, 2022. URL <https://doi.org/10.1109/JLT.2022.3164810>.
- [67] I. Dicaire, J.-C. Beugnot, and L. Thévenaz. Analytical modeling of the gas-filling dynamics in photonic crystal fibers. *Applied optics*, 49(24) :4604–4609, 2010. URL <https://doi.org/10.1364/AO.49.004604>.
- [68] E. A. Curtis, T. D. Bradley, G. P. Barwood, C. S. Edwards, N. V. Wheeler, R. Phelan, D. J. Richardson, M. N. Petrovich, and P. Gill. Laser frequency stabilization and spectroscopy at 2051 nm using a compact CO₂-filled Kagome hollow core fiber gas-cell system. *Optics Express*, 26(22) :28621–28633, 2018. URL <https://doi.org/10.1364/OE.26.028621>.
- [69] P. Bojęś, P. Jaworski, K. Krzempek, Z. Malecha, F. Yu, D. Wu, P. Koziół, G. Dudzik, M. Liao, and K. Abramski. Experimental and numerical analysis of gas flow in nodeless antiresonant hollow-core fibers for optimization of laser gas spectroscopy sensors. *Optics & Laser Technology*, 152 :108157, 2022. URL <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2022.108157>.
- [70] F. Benabid, P. S. Light, and F. Couny. Low insertion-loss (1.8 dB) and vacuum-pressure all-fiber gas cell based on hollow-core PCF. In *The European Conference on Lasers and Electro-Optics*, page CH_3. Optical Society of America, 2007.

- [71] A. A. Taranta, E. R. Numkam Fokoua, S. A. Mousavi, J. R. Hayes, T. D. Bradley, G. T. Jasion, and F. Poletti. Exceptional polarization purity in antiresonant hollow-core optical fibres. *Nature Photonics*, 14(8) :504–510, 2020. URL <https://doi.org/10.1038/s41566-020-0633-x>.
- [72] S. A. Mousavi, H. C. H. Mulvad, N. V. Wheeler, P. Horak, J. R. Hayes, Y. Chen, T. D. Bradley, S.-U. Alam, S. R. Sandoghchi, E. N. Numkam Fokoua, D. J. Richardson, and F. Poletti. Nonlinear dynamic of picosecond pulse propagation in atmospheric air-filled hollow core fibers. *Optics Express*, 26(7) :8866–8882, 2018. URL <https://doi.org/10.1364/OE.26.008866>.
- [73] H. Sakr, Y. Chen, G. T. Jasion, T. D. Bradley, J. R. Hayes, H. C. H. Mulvad, I. A. Davidson, E. R. Numkam Fokoua, and F. Poletti. Hollow core optical fibres with comparable attenuation to silica fibres between 600 and 1100 nm. *Nature Communications*, 11(1) : 1–10, 2020. URL <https://doi.org/10.1038/s41467-020-19910-7>.

Conclusion

L'objectif central de cette thèse était l'exploration d'approches prometteuses en vue d'améliorer la performance de lignes à délai fibrées pour la stabilisation laser. Une telle amélioration implique essentiellement la minimisation des bruits de la mesure interférométrique : bruit environnemental, bruit de photodétection (le thème des trois premières publications) et bruit thermodynamique (le thème des deux dernières publications).

Les fondements théoriques de la stabilisation laser ont été présentés en détail dans l'introduction. On y a donné une définition mathématique du signal d'un oscillateur laser, reconnaissant que le bruit de fréquence (ou de façon équivalente le bruit de phase) constitue normalement la quantité qui doit être minimisée pour stabiliser le laser. Cette minimisation peut être accomplie de différentes manières, la plus pratique et flexible étant la rétroaction électronique basée sur le signal de discrimination fourni par une référence externe. On a aussi montré que la performance d'un discriminateur ou d'une référence, présumant un ajustement adéquat du régulateur, est essentiellement donnée par le rapport entre la densité spectrale de puissance du bruit de mesure total et le module au carré du gain de discrimination. Sous ce point de vue, on a ensuite comparé diverses méthodes de discrimination : battement hétérodyne avec un laser de référence, opération à flanc de frange d'une ligne à délai, d'un résonateur et d'une transition atomique ou moléculaire, détection Pound-Drever-Hall pour un discriminateur quelconque ainsi que des méthodes alternatives applicables à l'interféromètre à deux ports.

On a illustré que l'asservissement à une référence microscopique offre généralement la meilleure performance pour les longs temps d'intégration dans la mesure où la fréquence de la transition d'intérêt tombe dans la plage d'accord du laser à asservir. Cependant, les effets de pompage optique limitent le rapport signal-sur-bruit de photodétection, entraînant une forte pénalité pour les courts temps d'intégration. Dans ce régime, il est plutôt préférable d'utiliser une référence géométrique comme une ligne à délai ou un résonateur dont le comportement demeure linéaire pour les hautes puissances optiques et qui peut en principe être construite ou ajustée pour stabiliser un laser de fréquence porteuse arbitraire. La ligne à délai est normalement plus simple à construire et opérer, supporte une opération robuste à n'importe quel point d'opération et peut offrir un gain de discrimination élevé lorsqu'une fibre à faibles pertes est utilisée. En contrepartie, le résonateur permet d'écraser le bruit de photodétection par un

facteur proportionnel à la finesse et peut donc être plus court que la ligne à délai à bruit de photodétection égal, ce qui alloue une plus grande bande d'asservissement. Aussi, son implémentation se porte naturellement à la propagation dans un espace évacué qui est idéale pour minimiser certains bruits d'origine environnementale et thermodynamique.

On a décrit, de façon qualitative et quantitative, tous les bruits de mesure pertinents dans le contexte de l'asservissement à une ligne à délai faite de fibre de silice conventionnelle, expliquant comment la longueur de la fibre détermine le régime d'opération et dans quelles conditions un plancher fondamental est atteint. On a aussi présenté l'état actuel de l'art en stabilisation laser, confirmant que le bruit thermodynamique accumulé dans une fibre de silice est tout simplement trop élevé pour faire compétition aux meilleures cavités en espace libre. On a tout de même décrit des voies d'amélioration possibles pour les interféromètres fibrés, notamment l'opération à des températures cryogéniques et l'utilisation de fibres optiques à coeur creux qui offrent des avantages similaires à un espaceur évacué tout en permettant le guidage sur d'extrêmes distances : relativement grande aire modale, plus grande flexibilité dans le choix du verre constituant la fibre, et propagation dans un espace qui peut être évacué.

Au chapitre 1, on a montré que la mesure indépendante de tous les signaux produits par un interféromètre passif (sans modulation) à deux ports ou à quatre ports (IQ) permet la construction d'un estimateur optimal de la phase interférométrique, c'est-à-dire dont la performance s'approche le plus de la limite fondamentale de bruit de grenaille. Le bénéfice de cette approche qui requiert un traitement de signal supplémentaire est apparent lorsque la visibilité interférométrique est élevée et lorsque les autres bruits de photodétection sont relativement faibles. Par ailleurs, l'estimateur peut être ajusté pour supprimer la contamination croisée par le bruit d'amplitude laser à tout point d'opération.

Au chapitre 2, on a montré que le signal photodéteecté peut être décalé en fréquence par modulation serrodyne appliquée à une des entrées d'un interféromètres. Cette approche procure des avantages similaires à la détection auto-hétérodyne en termes de minimisation de l'effet des bruits de photodétection non-stationnaires normalement observés aux basses fréquences. Toutefois, la nouvelle méthode n'implique pas d'insérer un modulateur dans un bras de l'interféromètre, bras qui constitue souvent un point d'entrée efficace pour les bruits indésirés. La valeur du décalage en fréquence devient cependant dépendante du délai interférométrique et un coupleur hybride à 90° doit être utilisé pour maximiser le bénéfice de la méthode.

Au chapitre 3, on a étendu les idées du chapitre 1 au cas d'un interféromètre auto-hétérodyne. On a montré que le plancher de sensibilité en phase est typiquement plus élevé que celui atteint avec un interféromètre passif équivalent. Cette pénalité, qui est due à la nature cyclostationnaire souvent ignorée du bruit de grenaille, peut être asymptotiquement annulée à condition que la forme d'onde de démodulation soit bien ajustée et que tous les signaux soient mesurés de façon indépendante. On a formalisé comment calculer la forme d'onde de démodulation

optimale et proposé des alternatives simples mais un peu moins performantes. Encore une fois, cette méthode est surtout avantageuse pour un interféromètre qui opère déjà à proximité de la limite de bruit de grenaille et lorsque la visibilité interférométrique est élevée. Mais ces conditions sont de toute façon désirables dans le contexte de la stabilisation laser.

Au chapitre 4, on a présenté les résultats de caractérisation d'une fibre de type NANF à l'aide un OFDR construit sur mesure. Ces résultats montrent que le coefficient de rétrodiffusion fondamental de la fibre à coeur creux est de -118 dB/m, c'est-à-dire plus de 40 dB sous celui d'une fibre de silice conventionnelle, et constitue vraisemblablement la plus faible valeur jamais mesurée dans une fibre. Ce résultat est important pour les applications où un laser stable mais accordable en fréquence est requis (OFDR, LADAR) : un interféromètre de référence construit avec une fibre de type NANF devrait produire des franges spectrales beaucoup plus uniformes (en raison de la faible dispersion) et plus lisses (en raison du faible coefficient de rétrodiffusion) qu'un interféromètre construit avec de la fibre conventionnelle, minimisant la distorsion du glissement en fréquence du laser asservi.

Au chapitre 5, on a présenté les premières mesures de bruit thermoconductif dans une fibre à coeur creux antirésonante. Pour une fibre remplie d'air à pression atmosphérique et pour une fréquence de l'ordre de 10 à 100 kHz, ce bruit est plus fort que dans une fibre de silice conventionnelle équivalente (même longueur optique et aire modale). Ce rapport change lorsqu'une fibre creuse de grande aire modale est évacuée et scellée à une pression inférieure à la pression atmosphérique. Ainsi, une DSP de bruit thermoconductif 5 dB plus faible à 20 kHz que celle d'une fibre SMF-28e a pu être mesurée avec une fibre de type NANF scellée à une pression interne de 0.2 atm. Par ailleurs, le modèle théorique développé dans l'article suggère que le bruit peut être diminué davantage par une meilleure évacuation de la fibre ou si son coeur est rempli d'un gaz noble. Cette première démonstration est importante, car elle établit que des conditions existent pour lesquelles les fibres à coeur creux sont meilleures que des fibres conventionnelles du point de vue de la limite de bruit thermodynamique.

Les principaux résultats de cette thèse sont pertinents non seulement pour la génération de signaux laser plus cohérents, mais aussi dans le grand nombre d'applications basées sur l'interférométrie optique. La construction d'estimateurs optimaux est applicable dans de nombreux contextes et il serait intéressant de vérifier s'il y a un bénéfice à utiliser une approche d'optimisation similaire lorsqu'un état comprimé (*squeezed state*) de la lumière est utilisé pour éclairer un interféromètre. Pour ce qui est des fibres à coeur creux, elles peuvent clairement avoir un brillant avenir en métrologie. Il reste toutefois à vérifier si le bruit *thermomécanique* aux basses fréquences est plus faible que dans une fibre de silice et à mettre en lumière les bruits fondamentaux qui dominent lorsque le coeur creux est complètement évacué. En absence de mauvaise surprise, de longues fibres antirésonantes évacuées, bien isolées de leur environnement et peut-être même maintenues à des températures cryogéniques pourraient potentiellement constituer des références externes idéales pour la stabilisation laser.

Annexe A

Backscattering in antiresonant hollow-core fibers : over 40 dB lower than in standard optical fibers - Supplement

Vincent Michaud-Belleau¹, Eric Numkam Fokoua², Thomas D. Bradley², John R. Hayes², Yong Chen², Francesco Poletti², David J. Richardson², Jérôme Genest¹ et Radan Slavik²

¹Centre d'optique, photonique et laser, Université Laval, Québec, QC G1V 0A6, Canada

²Optoelectronics Research Centre, University of Southampton, Southampton, SO17 1BJ, Royaume-Uni

Publié dans *Optica*, 8(2) :216-219, 2021.

URL <https://doi.org/10.1364/OPTICA.403087>.

A.1 Résumé

Ce document fournit de l'information supplémentaire pour l'article « *Backscattering in antiresonant hollow-core fibers : over 40 dB lower than in standard optical fibers* », <https://doi.org/10.1364/OPTICA.403087> (présenté au Chapitre 4). Ici, nous décrivons l'instrument OFDR plus en détail, justifiant certains des choix de conception et décrivant ses modules les plus importants, et donnons des informations sur l'échantillon de fibre à coeur creux antirésonante (NANF). Nous décrivons également les méthodes employées pour corriger et calibrer les données brutes et expliquons comment la sensibilité de détection est calculée et optimisée.

A.2 Abstract

This document provides supplementary information to "Backscattering in antiresonant hollow-core fibers: over 40 dB lower than in standard optical fibers", <https://doi.org/10.1364/OPTICA.403087> (presented in Chapter 4). Here, we present the OFDR instrument in further detail, justifying some of the design choices and describing its most important modules, and give information about the NANF sample. We also outline the steps taken to correct and calibrate the raw data and explain how the detection sensitivity is calculated and optimized.

A.3 Instrument

Figure A.1 depicts the instrument in a format that is different from that shown in the Letter. The stable laser is an OEwaves WGM Gen3 with 195 THz mean frequency (1539.8 nm) and 7 mW output power. To produce an approximately linear chirp through modulation, a triangular waveform is chosen instead of a sawtooth waveform; this avoids exciting the high-frequency resonances measured in the laser's FM response. The reference interferometer (shown in the Letter) is based on the Mach-Zehnder configuration with balanced quadrature detection [1] (Kylia COH24 optical 90° hybrid). It is characterized by a $\tau_{ref} = 494.95$ ns differential delay (≈ 100 m, Fujikura SM15-PS-U25A fiber) which was measured with a commercial OFDR instrument. The Mach-Zehnder format minimizes the contamination by Rayleigh scattering produced within the reference interferometer while quadrature detection simplifies the measurement of the chirp polarity given the triangular modulation waveform. The 27 MHz frequency shift is produced by a Gooch & Housego R26027-2-1-1.55-LTD-FO-FC/APC AOM with a 3 dB insertion loss. Frequency-shifting is necessary to suppress offending self-mixing terms and excess low-frequency digitizer noise, but it also mitigates the impact of the undesirable relative intensity noise (RIN) of the laser as well as that of the crosstalk between the acquisition channels. The balanced photodetector is a Thorlabs PDB430C with a 5.00 V/mA transimpedance gain, a 0.8 quantum efficiency, a 350 MHz bandwidth, and a 7 pW/Hz^{1/2} noise-equivalent power (NEP). All signals are sampled at 125 MS/s with a GaGe CSE8389 14-bit digitizer (10.6 ENOB in operation) after appropriate anti-aliasing filtering with Mini-Circuits BLP-1.9+ or BLP-50+ low pass filters. For convenience, an inline PC (Thorlabs, CPC250) is used on the already bare input pigtail, but other positions would have been possible.

A.4 NANF sample

The fiber used in the experiments was fabricated using the same stack, fuse, and two-stage draw process reported in [2]. It was drawn to a core diameter of approximately 35 μm and an average cladding membrane thickness of approximately 550 nm. To measure the NANF's loss, we butt coupled an endlessly single-mode photonic crystal fiber (with a closely matched

mode field diameter) to its input and performed a cutback transmission measurement from 570 m to 10 m. Figure A.2(a) depicts the measured attenuation between 1400 and 1700 nm, showing 1.2 dB/km near 1550 nm and 1.3 dB/km at the operating wavelength of our OFDR (1539.8 nm). We note that, because of the short cutback length, the loss of the fundamental mode may yet be lower than these measured values. As described in [2], the loss of the fiber has contributions from leakage, microbending, and surface scattering (the loss peaks around 1450 nm are due to water vapor absorption in the air core). Leakage loss is dominant in NANF, but only scattering contributes to the BSC. Therefore, unlike in SMF and HC-PBGF for which scattering loss is typically dominant, the loss in NANF is not directly proportional to the BSC. The total transmission loss of the 219-m pigtailed NANF sample, dominated by loss at the interconnections (see main text), was also measured from 1510 to 1590 nm (Fig. A.2(b)).

A.5 Correction and calibration

For the specific case of a single static reflection occurring within the NANF sample (reflectivity ρ , delay τ with respect to the signal in the reference arm) and for a single infinite sweep of the laser, the voltage signal produced by the measurement interferometer can be expressed as:

$$V(t) = V_0 \rho \cos [2\pi\gamma\tau t + \theta_{las}(t, \tau) + \theta_{aom}(t) + \theta_0] + n(t), \quad (\text{A.1a})$$

$$V_0 = 2GRk_c \sqrt{k_s P_{fut} P_{LO}}, \quad (\text{A.1b})$$

where $\theta_{las}(t, \tau)$ is the phase error due to a combination of laser phase noise and chirp non-linearity, both scaling with τ (more rigorously, they are filtered by a τ -dependent impulse response [3]), $\theta_{aom}(t)$ is the phase signal introduced by the AOM, a phase ramp with slope

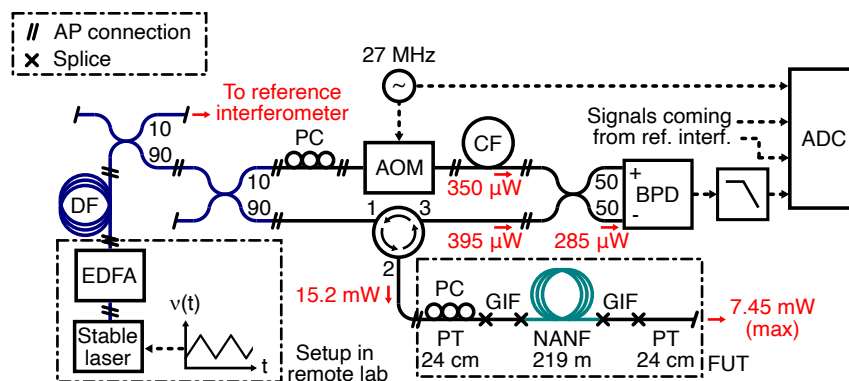


Figure A.1 – Partial layout of the OFDR. EDFA, erbium-doped fiber amplifier; DF, delay fiber; PC, polarization controller; AOM, acousto-optic modulator; CF, compensation fiber; BPD, balanced photodetector; ADC, analog-to-digital converter (digitizer); PT, pigtail; GIF, graded-index fiber; FUT, fiber under test. Solid lines represent fibers (black is standard, blue is polarization maintaining) and dashed lines represent electrical cables.

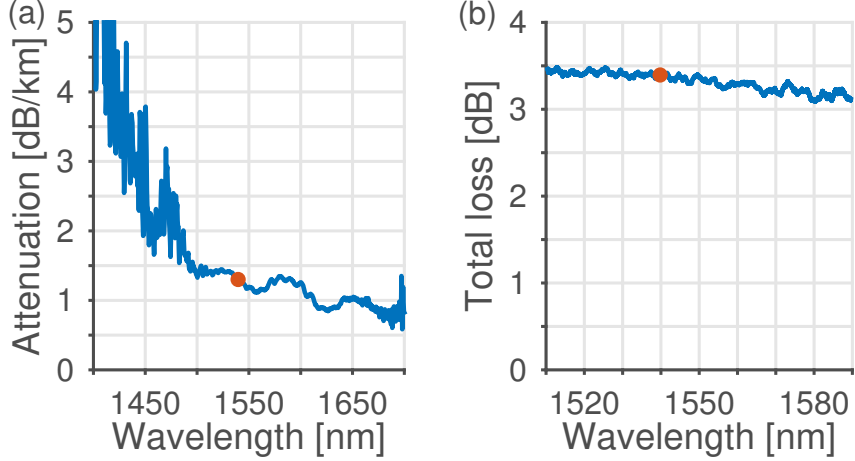


Figure A.2 – Loss characterization of the NANF (version used for this demonstration). (a) Spectral attenuation of the fiber, measured via cutback from 570 to 10 m. (b) Total transmission loss of the 219-m pigtailed sample, measured using an amplified spontaneous emission source and optical spectrum analyzer.

Table A.1 – Parameters used to normalize the photovoltage and compute the shot-noise-limited sensitivity.

Parameter	Description	Value	Units
γ	Average chirp rate	93.5	GHz/s
G	Transimpedance gain	5.00	V/mA
\mathcal{R}	Responsivity	1.00	A/W
k_c	Coupler calibration factor	0.78	-
k_s	Sample calibration factor	0.38	-
P_{fut}	Power sent to FUT	15.2	mW
P_{LO}	Power in reference arm	350	μ W
ν_0	Laser frequency	195	THz
P_s	Power in sample arm	395	μ W
η_q	Quantum efficiency	0.80	-
n	Group index	1.00	-

$2\pi f_{aom}$ contaminated by phase noise from the driving synthesizer, θ_0 is a phase offset, and $n(t)$ is the additive measurement noise. The calibration factor k_c accounts for excess loss in the 3-dB output coupler as well as for a small attenuation that is voluntary applied to attain an optimal power balance at the photodetector. Similarly, the calibration factor k_s accounts for the 1.1 dB loss of the circulator (return path from pigtail 2 to 3) and for the 1.6 dB loss of the interconnection between the NANF and its input SMF pigtail. Other parameters are defined in Table A.1 along with the numerical values used in this work.

To properly estimate the values of ρ and τ of a single reflection, several corrections are applied in post-processing. First, from an estimate of $\theta_{aom}(t)$ obtained through the simultaneous acquisition of the signal driving the AOM, a phase correction is applied on a sampled version of

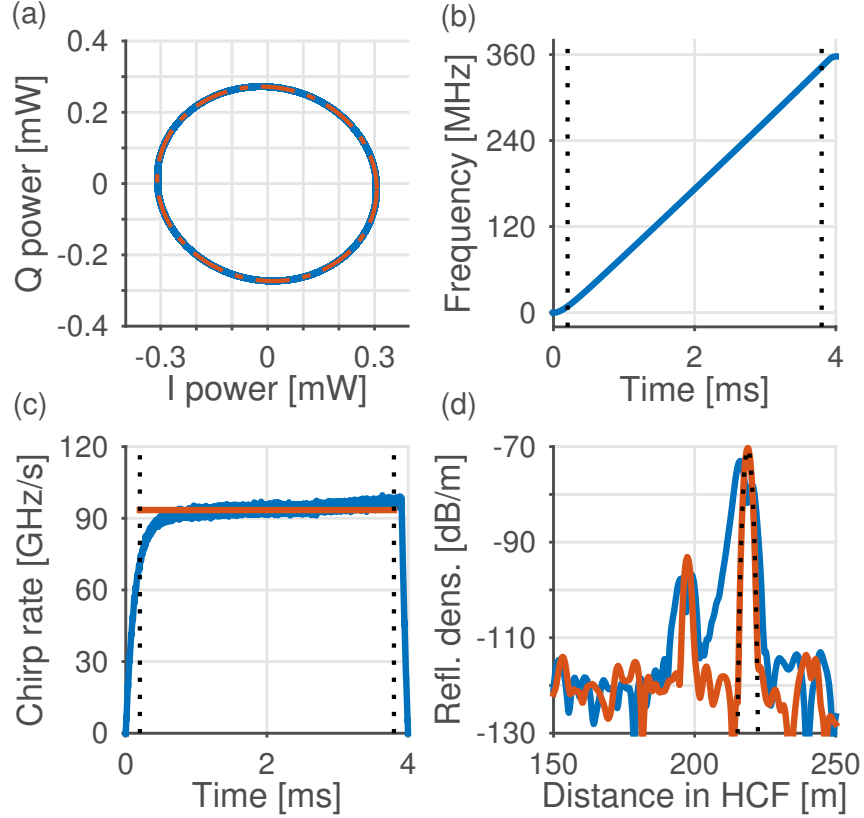


Figure A.3 – Resampling operation. (a) IQ signal produced by the reference interferometer. The blue curve is the data, the dashed orange curve is the elliptical fit. (b) Frequency signal extracted from the interferometric phase (low-frequency conversion gain $2\pi\tau_{ref}$). The dotted black lines delineate the segment kept for spectral analysis. (c) Instantaneous chirp rate. The blue curve is the derivative of the curve in (b), the orange curve is its resampled version. (d) Comparison of the reflectance density obtained with (orange) and without (blue) resampling of the measurement interferometer’s signal for a single laser sweep. The dotted black line represents the transform of the Kaiser window ($\beta = 12$) used for spectral analysis, illustrating that the resampled signal is transform-limited.

the signal defined in Eq. A.1a (also compensating for the delay caused by the acoustic wave propagation in the AOM, measured to be $1.46 \mu\text{s}$). This shifts the signal to baseband and removes the phase noise introduced by the synthesizer, but it also adds some noise because the estimation of $\theta_{aom}(t)$ is performed with a finite signal-to-noise ratio. Then, a resampling operation is implemented using information extracted from the reference interferometer (Fig. A.3). This suppresses the phase error $\theta_{las}(t, \tau)$, though the cancellation is only complete for $\tau = \tau_{ref}$ [3]. Finally, the phase-corrected and resampled signal is normalized by V_0 (Eq. A.1b); this number is computed from calibration data taken right after the digitization of $V(t)$ (Eq. A.1a).

All those operations yield a signal approaching the ideal form of $\rho \cos(2\pi\gamma\tau t + \theta_0)$, though

in practice it is sampled, corrupted by noise, and only available over a finite duration T determined by the sweep bandwidth Δf ($T = \Delta f/\gamma$). The tools of spectral analysis can then be deployed to estimate ρ and τ with the usual trade-off between resolution and dynamic range. The case of a distributed reflection along the fiber (backscattering) is treated in the same way and with the same calibration values, though the spectral analysis is adapted to perform the estimation of a PSD instead of the Fourier series appropriate for discrete reflections. This PSD can then be converted to the desired reflectance density using the conversion factor $2n\gamma/c$ in Hz/m (the same factor is used to convert the frequency axis to a range axis [4]), using the value of γ extracted from the reference interferometer data. Barring contamination by discrete reflections or measurement noise, the level of this reflectance density is a property of the fiber and does not depend on the instrument's settings.

Since 200 laser sweeps are recorded when the memory of the digitizer is filled, it is worth stating that the phase correction and the V_0 normalization are performed over the full signal while the resampling is done sweep by sweep, taking the switching polarity of the chirp into account. After the resampling, temporal averaging and spectral averaging (of PSDs) can be traded as desired since the scattering signal is repeatable from sweep to sweep when it originates from static surface roughness.

A.6 Sensitivity

The additive measurement noise $n(t)$ in Eq. A.1a is a sum of several zero-mean contributors and can be described through its one-sided PSD, $S_n^{(1)}(f)$. Since the phase correction and the resampling operation have negligible impact over broadband white noise, and since all the relevant contributors to $n(t)$ are approximately white around $f_{aom} = 27$ MHz, it is appropriate to base the following calculations on the PSD level at this frequency. Considering the normalization by V_0 and the conversion from a frequency density to a spatial density, the measurement noise is described by the following uniform single-sweep sensitivity or noise-equivalent reflectance density (in m^{-1}):

$$R_n = \frac{2S_n^{(1)}(f_{aom})}{V_0^2} \frac{2n\gamma}{c}, \quad (\text{A.2})$$

where the factor of 2 in the first term accounts for the effect of the cosine in Eq. A.1a. For example, the shot noise contribution (in units of V^2/Hz) can be calculated as [5]:

$$S_{n,sn}^{(1)}(f_{aom}) = (GR)^2 \frac{2h\nu_0 k_c (P_s + P_{LO})}{\eta_q}, \quad (\text{A.3})$$

where P_s is the power measured in the sample arm when the polarization controllers are adjusted to minimize the contribution of the remote splice at 219 m. From the values found in Table A.1, the shot-noise-limited sensitivity can be evaluated to be -133 dB/m. Similarly, a detector-noise-limited sensitivity of -139 dB/m can be computed from the given NEP. Other

contributors to the sensitivity include the digitizer noise, laser RIN coupling through the first splice reflection, and noises introduced by the phase correction and resampling operation.

Equation A.2 illustrates that the sensitivity can be improved (that the noise floor can be lowered) by decreasing the chirp rate γ . This explains why our instrument is operated at a relatively low chirp rate with respect to a typical OFDR. Although it would be possible to further decrease γ , we found that the laser phase noise couples efficiently through the signal that does two round-trips in the fiber (three reflections at the interconnections, remote-local-remote, for a total delay $\tau_3 \approx 2.9 \mu\text{s}$). This signal is roughly 10 dB stronger than the signal coming from the remote splice (one reflection) which is better polarization-cancelled. Considering that the phase noise gain scales with the delay [4], this signifies that the phase noise around the parasitic tone at 438 m is approximately 16 dB stronger than that of the tone around 219 m, and its impact has to be mitigated through adjustment of the chirp rate. We found that $\gamma \approx 80\text{-}500 \text{ GHz/s}$ was an appropriate range of operation to avoid significant phase noise contamination: from Fig. A.4(a), the most quiet spectral range is between 120 kHz and 1.45 MHz, so we impose $\gamma\tau_3 < 1.45 \text{ MHz}$ to bring the high-frequency tones at a negative range, and $\gamma\tau_3/2 > 120 \text{ kHz}$ to bring the low-frequency noise beyond the end of the backscattering range (Fig A.4(b-c)).

In a similar manner, an inspection of Eq. A.3 can justify our choice of input coupling ratio: to operate the photodetector close to saturation, the product $P_s P_{LO}$ must be kept constant. Given this constraint, the shot noise contribution is minimized when $P_s = P_{LO}$, a condition that we have tried to reach first by using a 90:10 input coupler, but also by using a custom-made EDFA to adjust the overall power (this EDFA is installed in another lab to minimize the pick-up of its acoustic noise). Amplification to 20 mW is sufficient with this NANF sample, though this leads to a higher RIN and a penalty in sensitivity compared to the case in which the laser would have sufficient output power [5]. Finally, the fine tuning of the balancing was done by inserting a fixed attenuator at the end of the compensation fiber (not shown in Fig A.1). This compensation fiber is used so that the condition $\tau = 0$ occurs approximately at the input splice of the FUT, nulling as much of the associated phase noise as possible.

Figure A.4(d) shows the reflectance density of a 200-m sample of SMF-28 terminated by angled physical contact (APC) connectors. For this verification measurement, the OFDR instrument was slightly modified: an optical 90° hybrid was used instead of the usual AOM. The signal observed between -200 and 0 m is the partially suppressed (by roughly 37 dB) negative copy of the scattering signal between 0 and 200 m, a consequence of the imperfections of the optical hybrid. This constitutes another reason why the AOM was used for the purpose of NANF characterization. The cutoff seen around 650 m, on the other hand, is due to a digital filter which is not apparent in the NANF measurements because of its lower effective index. Weak reflections from the APC connectors are visible at 0 and 200 m, as expected, while the measurement noise floor sits at approximately -125 dB/m (single-sweep sensitivity

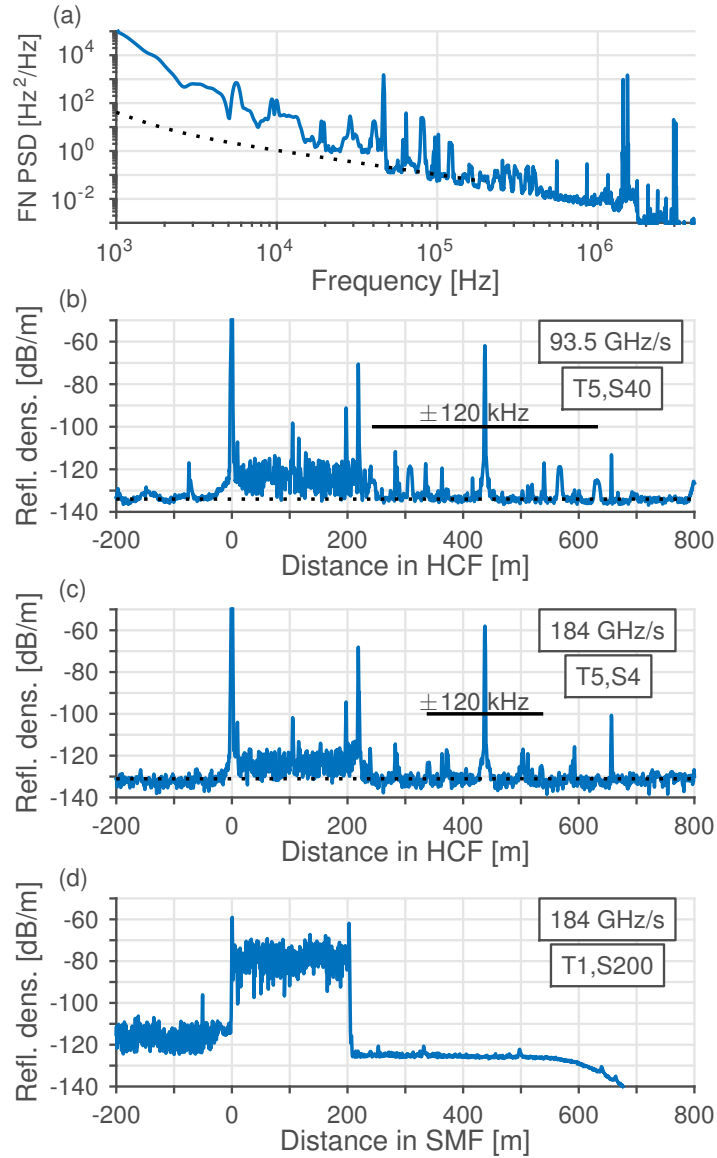


Figure A.4 – (a) One-sided frequency noise (FN) PSD of the laser in operation. The dotted black line is representative of the PSD when the laser is not modulated; the low-frequency excess noise and the tones between 40 and 120 kHz are produced by the driving synthesizer (a low pass filter with cutoff frequency 100 kHz is used at the modulation input to attenuate this noise). (b) Measured reflectance density in NANF, extended beyond the scattering range to show the signal at 438 m caused by the triple reflection along with the associated sidebands. The solid black line delimits the region where laser noise contamination due to this triple reflection is most problematic. The dotted black line is the noise floor. (c) Same for a higher chirp rate, showing the compression of the laser noise sidebands but higher additive noise floor. (d) Reflectance density of a 200-m SMF sample terminated by APC connectors, measured with a slightly modified OFDR instrument.

at $\gamma = 184$ GHz/s). This is slightly different from the -124 dB/m single-sweep sensitivity

measured for NANF at $\gamma = 184$ GHz/s, a reasonable discrepancy given the higher refractive index in SMF, lower return power due to interconnections (lower shot noise and RIN), as well as the slightly modified optical setup (no loss from the AOM, no phase correction). Yet, this measurement shows that the custom-built OFDR instrument, though highly optimized for the characterization of this specific NANF sample, still maintains an outstanding sensitivity for other fiber samples.

A.7 Bibliographie

- [1] V. Michaud-Belleau, H. Bergeron, P. S. Light, N. B. Hébert, J.-D. Deschênes, A. N. Luiten, and J. Genest. Passive coherent discriminator using phase diversity for the simultaneous measurement of frequency noise and intensity noise of a continuous-wave laser. *Metrologia*, 53(5) :1154, 2016. URL <https://doi.org/10.1088/0026-1394/53/5/1154>.
- [2] G. T. Jasion, T. D. Bradley, K. Harrington, H. Sakr, Y. Chen, E. R. Numkam Fokoua, I. A. Davidson, A. A. Taranta, J. R. Hayes, D. J. Richardson, and F. Poletti. Hollow core NANF with 0.28 dB/km attenuation in the C and L bands. In *Optical Fiber Communication Conference*, pages Th4B–4. Optical Society of America, 2020. URL <https://doi.org/10.1364/OFC.2020.Th4B.4>.
- [3] X. Fan, Y. Koshikiya, and F. Ito. Phase-noise-compensated optical frequency domain reflectometry with measurement range beyond laser coherence length realized using concatenative reference method. *Optics Letters*, 32(22) :3227–3229, 2007. URL <https://doi.org/10.1364/OL.32.003227>.
- [4] S. Venkatesh and W. V. Sorin. Phase noise considerations in coherent optical FMCW reflectometry. *Journal of Lightwave Technology*, 11(10) :1694–1700, 1993. URL <https://doi.org/10.1109/50.249912>.
- [5] R. Hui and M. O’Sullivan. *Fiber optic measurement techniques*. Academic Press, 2009.

Annexe B

Description statistique du signal de l'oscillateur laser

Cette annexe a pour but de compléter la description mathématique du champ laser qui a été amorcée au chapitre d'introduction. On rappelle que ce champ est modélisé comme :

$$E(t) = E_0 [1 + \epsilon(t)] \cos [2\pi\nu_0 t + \phi_0 + \phi(t)], \quad (\text{B.1})$$

où E_0 est l'amplitude moyenne du champ électrique, $\epsilon(t)$ est le bruit d'amplitude relative à moyenne nulle, ν_0 est la fréquence porteuse ou moyenne, ϕ_0 est un biais de phase quelconque et $\phi(t)$ est le bruit de phase à dérivée moyenne nulle. Bien qu'une description basée sur les DSP de $\epsilon(t)$ et $\phi(t)$ soit généralement suffisante, en pratique on travaille également avec l'autocorrélation du champ, le temps et la longueur de cohérence, ainsi que la DSP du champ.

B.1 Cas général

La fonction d'autocorrélation d'un signal quelconque $q(t)$ est une statistique de second ordre définie comme [1] :

$$R_q(t_1, t_2) \equiv \langle q(t_1)q(t_2) \rangle, \quad (\text{B.2})$$

où $\langle \cdot \rangle$ est l'espérance mathématique. Dans le cas du champ laser modélisé à l'équation (B.1), et supposant l'indépendance statistique des processus $\epsilon(t)$ et $\phi(t)$ ¹ ainsi qu'un biais de phase ϕ_0 qui est uniformément distribué sur 2π , la fonction d'autocorrélation prend la forme suivante :

$$R_E(t_1, t_2) = \frac{E_0^2}{2} [1 + R_\epsilon(t_1, t_2)] \cos [2\pi\nu_0(t_1 - t_2)] \langle \cos [\phi(t_1) - \phi(t_2)] \rangle. \quad (\text{B.3})$$

Pour simplifier davantage cette expression, les hypothèses raisonnables suivantes peuvent être faites : le bruit d'amplitude est un processus gaussien stationnaire et le bruit de phase est un

1. Cette hypothèse n'est pas toujours adéquate ; par exemple, les lasers à semi-conducteurs présentent un fort couplage amplitude-phase puisque l'indice de réfraction, qui détermine partiellement la longueur optique de la cavité, dépend de la densité de porteurs qui est couplée à la puissance instantanée [2]. Un traitement plus élaboré est requis dans ce cas.

processus gaussien à incréments stationnaires, avec $\phi(t_1) - \phi(t_2)$ redéfini comme un nouveau processus $\Phi(t_1 - t_2)$ ne dépendant que de l'incrément de temps [3] (ceci revient ultimement à dire que le bruit de *fréquence* est stationnaire et gaussien). Ainsi, avec $\tau \equiv t_1 - t_2$, le champ électrique devient lui-même stationnaire et peut être représenté par :

$$R_E(\tau) = \frac{E_0^2}{2} [1 + R_\epsilon(\tau)] \cos(2\pi\nu_0\tau) e^{-\sigma^2(\tau)/2}, \quad (\text{B.4a})$$

$$\sigma^2(\tau) \equiv \langle \Phi^2(\tau) \rangle, \quad (\text{B.4b})$$

où on a utilisé la fonction génératrice de moments d'une gaussienne pour simplifier $\langle \cos \Phi(\tau) \rangle = \exp[-\langle \Phi^2(\tau) \rangle / 2]$. En général, le terme $e^{-\sigma^2(\tau)/2}$ définit l'essentiel de l'enveloppe lente de la fonction d'autocorrélation et le terme $R_\epsilon(\tau)$ y ajoute une faible correction. Le temps de cohérence T_c est défini par convention comme étant égal à la largeur équivalente en puissance de l'enveloppe d'autocorrélation [4] :

$$T_c \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[e^{-\sigma^2(\tau)/2}]^2}{[e^{-\sigma^2(0)/2}]^2} d\tau = 2 \int_0^{\infty} e^{-\sigma^2(\tau)} d\tau. \quad (\text{B.5})$$

Alternativement, le temps de cohérence est parfois défini comme le délai τ auquel l'enveloppe vaut une certaine fraction (e.g. e^{-1} ou $1/2$) de sa valeur maximale trouvée à $\tau = 0$. Si un interféromètre à deux ports est utilisé pour analyser le champ laser, le temps de cohérence correspond également au délai différentiel pour lequel la visibilité des franges commence à se dégrader de façon considérable. La longueur de cohérence, quant à elle, correspond simplement au temps de cohérence multiplié par la vitesse de la lumière, et potentiellement réduit par l'indice de réfraction du milieu de propagation.

Par le théorème de Wiener-Khintchine [1], le spectre du champ électrique de l'oscillateur laser, qui constitue lui-même un processus stationnaire suivant les hypothèses faites jusqu'à présent, peut être décrit par une DSP qui est la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation :

$$S_E^{(2)}(f) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} R_E(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau, \quad (\text{B.6})$$

où l'exposant (2) fait référence à une DSP bilatérale (c'est-à-dire qui est définie pour $-\infty < f < \infty$). De façon générale, le spectre du champ d'un oscillateur laser est une distribution centrée autour de $f = \nu_0$, ce qui est mis en évidence par la modulation de l'enveloppe lente par $\cos(2\pi\nu_0\tau)$ à l'équation (B.4a) qui donne lieu à un décalage en fréquence du spectre de l'enveloppe :

$$S_E^{(2)}(f) = \frac{E_0^2}{4} [L(f - \nu_0) + L(f + \nu_0)], \quad (\text{B.7a})$$

$$L(f) \equiv [\delta(f) + S_\epsilon^{(2)}(f)] * \Lambda(f), \quad (\text{B.7b})$$

$$\Lambda(f) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2(\tau)/2} e^{-j2\pi f\tau} d\tau, \quad (\text{B.7c})$$

où $\delta(f)$ est une impulsion (Dirac), $*$ est l'opérateur de convolution et $S_\epsilon^{(2)}(f) \leftrightarrow R_\epsilon(\tau)$ (relation de Fourier). La forme de raie, c'est-à-dire la forme du spectre autour de $f = \nu_0$ telle que représentée par la fonction $L(f)$, dépend donc des propriétés de $\epsilon(t)$ et $\phi(t)$; comme le bruit d'amplitude relative est faible dans un laser typique en raison de la saturation du gain [5, 6], c'est le terme de phase $\Lambda(f)$ qui détermine normalement la forme de $L(f)$ aux basses fréquences. La largeur de raie, c'est-à-dire la pleine largeur à mi-hauteur de $L(f)$, peut donc être calculée avec une bonne justesse à partir de $\Lambda(f)$ seulement; cette largeur est d'ailleurs une quantité souvent utilisée en pratique pour qualifier la stabilité d'un laser d'une façon très synthétique, mais nécessairement incomplète. Finalement, puisque la fréquence porteuse est de l'ordre de 100 THz dans un laser monofréquence et que les termes $\Lambda(f)$ et $S_\epsilon^{(2)}(f)$ affichent une puissance concentrée, tout au plus, dans une bande de quelques GHz [3], il est presque toujours adéquat de négliger la contribution centrée à $f = -\nu_0$ et d'approximer $S_E^{(2)}(f) \approx \frac{E_0^2}{4} L(f - \nu_0)$ pour la DSP bilatérale, ou $S_E^{(1)}(f) \approx \frac{E_0^2}{2} L(f - \nu_0)$ pour la DSP unilatérale.

B.2 Exemple 1 : marche aléatoire de phase

Les quantités mathématiques définies à la sous-section précédente prennent des formes particulièrement simples dans le cas où le bruit est une marche aléatoire gaussienne, c'est-à-dire :

$$\langle \phi(t) \rangle = 0, \quad (\text{B.8a})$$

$$R_\phi(t_1, t_2) = \langle \phi(t_1)\phi(t_2) \rangle = \alpha_\phi \min(t_1, t_2) \neq R_\phi(t_1 - t_2). \quad (\text{B.8b})$$

Comme indiqué par la dernière inégalité, ce processus de phase n'est pas stationnaire. Il est toutefois à incréments stationnaires :

$$\langle [\phi(t_1) - \phi(t_2)]^2 \rangle = R_\phi(t_1, t_1) + R_\phi(t_2, t_2) - 2R_\phi(t_1, t_2) = \alpha_\phi |t_1 - t_2| = \alpha_\phi |\tau|. \quad (\text{B.9})$$

Pour exprimer la constante de diffusion α_ϕ d'une manière plus facile à interpréter, on peut reconnaître que le bruit de fréquence $\nu(t)$ associé à cette marche aléatoire de phase, par la relation de dérivation $\nu(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt}$, est blanc et stationnaire :

$$\frac{d^2 [\min(t_1, t_2)]}{dt_1 dt_2} = \frac{d}{dt_2} [1 - u(t_1 - t_2)] = \delta(t_1 - t_2), \quad (\text{B.10a})$$

$$R_\nu(\tau) = \frac{\alpha_\phi}{(2\pi)^2} \delta(\tau) \leftrightarrow S_\nu^{(2)}(f) = \frac{\alpha_\phi}{(2\pi)^2} \equiv \frac{h_\nu}{2}, \quad (\text{B.10b})$$

où $u(t)$ est une fonction échelon (Heaviside) et h_ν est le niveau de la DSP unilatérale de bruit de fréquence blanc (en Hz^2/Hz). En utilisant la relation de Fourier $d/dt \leftrightarrow j2\pi f$, on peut aussi écrire $S_\phi^{(1)}(f) = S_\nu^{(1)}(f)/f^2 = h_\nu/f^2$, une fonction divergente à l'origine et qui décrit un bruit «rouge» de phase associé au bruit blanc de fréquence.

Enfin, considérant un bruit d'amplitude relative blanc avec $S_\epsilon^{(1)}(f) = h_\epsilon$, on peut calculer les quantités suivantes pour la marche aléatoire de phase :

$$\sigma^2(\tau) = \alpha_\phi |\tau| = 2\pi^2 h_\nu |\tau|, \quad (\text{B.11a})$$

$$T_c = \frac{1}{\pi^2 h_\nu}, \quad (\text{B.11b})$$

$$R_E(\tau) = \frac{E_0^2}{2} \left[1 + \frac{h_\epsilon}{2} \delta(t) \right] \cos(2\pi\nu_0\tau) e^{-\pi^2 h_\nu |\tau|}, \quad (\text{B.11c})$$

$$\Lambda(f) = \frac{2\pi^2 h_\nu}{(\pi^2 h_\nu)^2 + (2\pi f)^2} = \frac{2T_c}{1 + (2\pi f T_c)^2}, \quad (\text{B.11d})$$

$$L(f) = \frac{2\pi^2 h_\nu}{(\pi^2 h_\nu)^2 + (2\pi f)^2} + h_\epsilon/2, \quad (\text{B.11e})$$

$$S_E^{(2)}(f) = \frac{E_0^2}{4} \left\{ \frac{2\pi^2 h_\nu}{(\pi^2 h_\nu)^2 + [2\pi(f - \nu_0)]^2} + \frac{2\pi^2 h_\nu}{(\pi^2 h_\nu)^2 + [2\pi(f + \nu_0)]^2} + h_\epsilon \right\}, \quad (\text{B.11f})$$

où on utilise le fait que $e^{-\sigma^2(0)/2} = 1$, et donc que l'aire sous la courbe de $\Lambda(f)$ est unitaire (Eq. (B.7c)), pour simplifier la convolution de $\Lambda(f)$ et d'une constante. À partir des expressions précédentes, on peut également établir que la forme de raie est approximativement lorentzienne pour un faible bruit d'amplitude ainsi qu'une large fréquence porteuse et que la largeur de raie (pleine largeur à mi-hauteur) est $\Delta\nu \approx \pi h_\nu$. Ainsi, et sans surprise, le niveau de la DSP de bruit de fréquence blanc fixe la plupart des quantités utilisées pour qualifier la stabilité ou la cohérence du champ laser soumis à une marche aléatoire de phase ou un bruit blanc de fréquence, à tout le moins lorsque le bruit d'amplitude est de la forme présumée ici (il y a des exceptions, par exemple lorsqu'une cavité externe est utilisée pour stabiliser le laser [7], lorsque les modes secondaires de la cavité laser sont d'amplitude non-négligeable [8] ou en présence de fortes oscillations de relaxation [3, 9]). Il est à noter qu'un bruit d'amplitude blanc n'est pas nécessairement réaliste ; un bruit affichant une DSP de même niveau, mais à bande limitée sous la fréquence porteuse, donnerait lieu à une contribution deux fois plus faible à la DSP du champ à l'équation (B.11f).

B.3 Exemple 2 : bruit de fréquence blanc à bande limitée

Un autre exemple instructif est celui où le bruit de fréquence blanc est à bande limitée, ce qu'on peut conceptualiser par l'addition d'une étape de filtrage passe-bas de la phase. Pour garder le traitement simple, on peut considérer un filtre de premier ordre à phase minimale, avec fonction de transfert $H_{LP}(f) = (1 + jf/f_c)^{-1}$ où f_c est la fréquence de coupure à -3 dB. Un tel filtrage de la phase est représentatif de l'impact de la transmission du champ laser à travers une cavité Fabry-Perot à résonance, par exemple [10]. Puisque la propriété d'incrément stationnaires n'est pas modifiée par un filtrage passe-bas, on peut mettre en évidence la relation

générale suivante en calculant la transformée de Fourier de l'équation (B.9)² :

$$\begin{aligned}\sigma^2(\tau) &= \langle \Phi^2(\tau) \rangle = 2R_\phi(0) - 2R_\phi(\tau) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} S_\phi^{(2)}(f) [1 - \cos(2\pi f\tau)] df, \\ &= (2\pi\tau)^2 \int_0^{\infty} S_\nu^{(1)}(f) \text{sinc}^2(f\tau) df.\end{aligned}\quad (\text{B.12})$$

Avec $S_\nu^{(1)}(f) \equiv h_\nu |H_{LP}(f)|^2$ pour le bruit de fréquence blanc à bande limitée, on obtient :

$$\sigma^2(\tau) = 2\pi^2 h_\nu |\tau| - \frac{\pi h_\nu}{f_c} \left(1 - e^{-2\pi f_c |\tau|}\right). \quad (\text{B.13})$$

Bien qu'il soit généralement considéré que la forme de raie associée à un tel processus de phase n'admet pas de forme analytique fermée [11–14], le spectre $\Lambda(f)$ peut être évalué par intégration par parties récursive et s'exprime comme³ :

$$\begin{aligned}\Lambda(f) &= \frac{e^{\Delta\nu_0/2f_c}}{\pi f_c} \text{Re} \left\{ \left(\frac{\Delta\nu_0}{2f_c} \right)^{-(\Delta\nu_0/2+jf)/f_c} \times \right. \\ &\quad \left. \left[\Gamma \left(\frac{\Delta\nu_0}{2} + jf \right) - \Gamma \left(\frac{\Delta\nu_0}{2} + jf, \frac{\Delta\nu_0}{2f_c} \right) \right] \right\},\end{aligned}\quad (\text{B.14})$$

où $\Delta\nu_0 \equiv \pi h_\nu$ est la largeur de raie associée au bruit de fréquence blanc avant filtrage passe-bas de la phase, $\Gamma(q)$ est la fonction gamma et $\Gamma(q, r)$ est la fonction gamma incomplète :

$$\Gamma(q) \equiv \int_0^{\infty} s^{(q-1)} e^{-s} ds, \quad (\text{B.15a})$$

$$\Gamma(q, r) \equiv \int_r^{\infty} s^{(q-1)} e^{-s} ds. \quad (\text{B.15b})$$

Par un processus similaire, le temps de cohérence peut être écrit comme :

$$T_c = \frac{e^{\Delta\nu_0/f_c}}{\pi f_c} \left(\frac{\Delta\nu_0}{f_c} \right)^{-\Delta\nu_0/f_c} \left[\Gamma \left(\frac{\Delta\nu_0}{f_c} \right) - \Gamma \left(\frac{\Delta\nu_0}{f_c}, \frac{\Delta\nu_0}{f_c} \right) \right]. \quad (\text{B.16})$$

À proximité du centre de la raie, l'équation (B.14) est bien approximée par une gaussienne, ce qui peut être mis en évidence en faisant le développement en série de $e^{-2\pi f_c |\tau|}$ jusqu'au troisième terme à l'équation (B.13), donnant :

$$\sigma^2(\tau)|_{f_c \rightarrow 0} \approx 2\pi^3 f_c h_\nu \tau^2, \quad (\text{B.17a})$$

$$T_c|_{f_c \rightarrow 0} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi f_c \Delta\nu_0}}, \quad (\text{B.17b})$$

$$\Lambda(f)|_{f_c \rightarrow 0} \approx \frac{e^{-f^2/f_c \Delta\nu_0}}{\sqrt{\pi f_c \Delta\nu_0}}, \quad (\text{B.17c})$$

2. L'intégrale finale diverge lorsque le bruit de phase associé n'est pas à incréments stationnaires.

3. Le développement complet implique l'utilisation d'identités de série associées à la définition de la fonction gamma.

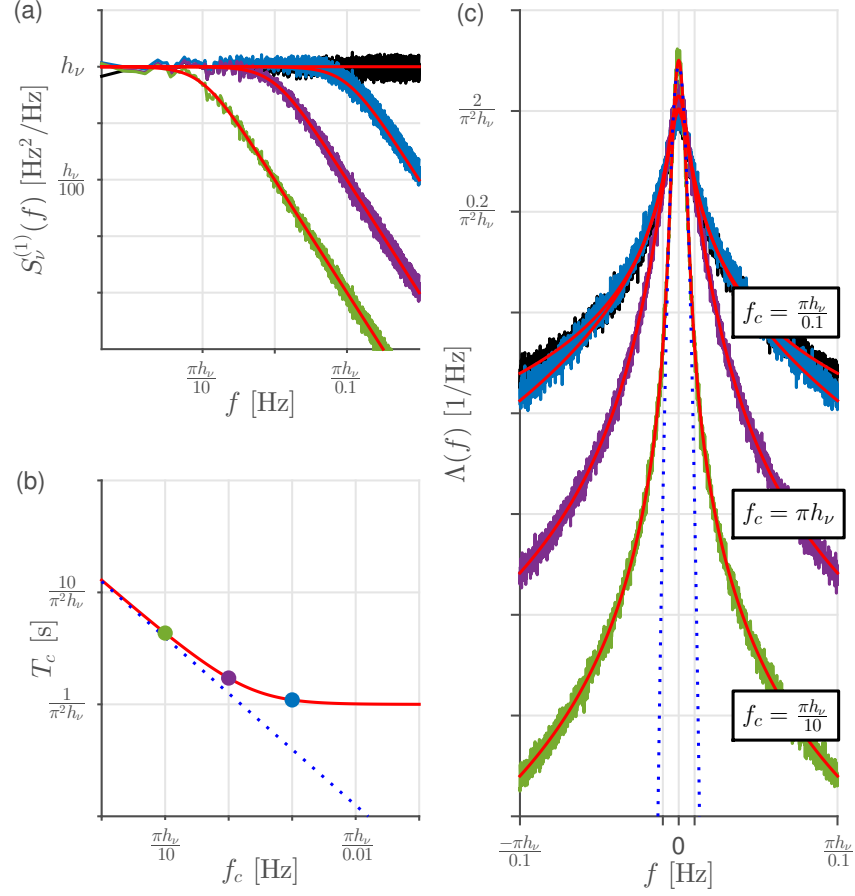


FIGURE B.1 – Simulation : forme de raie associée à un bruit de fréquence blanc limité en fréquence par un filtre passe-bas de premier ordre ; comparaison de trois fréquences de coupure f_c . (a) DSP du bruit de fréquence. Les courbes de couleur sont les simulations et les courbes rouges sont les cibles. (b) Temps de cohérence en fonction de la fréquence de coupure. Une large fréquence de coupure ne change que la structure des ailes de la raie et n’affecte donc pas le temps de cohérence. Pour les faibles fréquences de coupure, le temps de cohérence varie en $f_c^{-1/2}$ (Eq. (B.17b), pointillés bleus). (c) Formes de raie simulées comparées aux courbes théoriques (rouge). Pour les petites fréquences de coupure, le centre de la raie est bien représenté par une gaussienne (pointillés bleus).

dont la largeur est $\Delta\nu \approx 2\sqrt{\ln(2)f_c\Delta\nu_0}$ (Figure B.1). Dans la limite où $f_c \rightarrow 0$, le processus ressemble de plus en plus à une marche aléatoire de fréquence ($S_\nu^{(1)}(f) \propto f^{-2}$), un processus non stationnaire. Pour ce genre de processus, on trouve généralement que la forme de raie est gaussienne avec une largeur à mi-hauteur qui est formellement infinie, mais qui prend des valeurs finies pour un temps d’observation fini (ce qui est, évidemment, toujours le cas en pratique). De façon heuristique, on peut relier le temps d’observation à une fréquence de coupure effective afin de prédire la largeur de raie observée en pratique [13]. La même chose peut être faite pour le bruit de scintillement de fréquence (*flicker*, $S_\nu^{(1)}(f) \propto f^{-1}$) [15, 16].

B.4 Exemple 3 : bruit de fréquence blanc réduit par asservissement

Dans le cas spécifique où le laser est stabilisé par asservissement de type proportionnel-intégral à une référence externe (raie atomique ou moléculaire, interféromètre, résonateur, ou un autre laser plus stable), on peut modéliser son bruit de fréquence de la manière suivante :

$$S_\nu^{(1)}(f) = h_\nu \left[\frac{1}{A_L} + |H_{HP}(f)|^2 \right], \quad (\text{B.18a})$$

$$H_{HP}(f) = \frac{jf/f_c}{1 + jf/f_c}, \quad (\text{B.18b})$$

où $H_{HP}(f)$ est la fonction de transfert d'un filtre passe-haut à phase minimale et où le paramètre A_L détermine l'écart entre le niveau blanc initial et le plancher de bruit blanc aux basses fréquences. Un tel plancher peut être associé à l'instabilité intrinsèque de la référence externe ou peut être causé par le bruit de mesure dans un système d'asservissement moins idéal. À l'aide de l'équation (B.12), on peut évaluer la variance associée à cette DSP de bruit de fréquence :

$$\sigma^2(\tau) = \frac{2\pi^2 h_\nu |\tau|}{A_L} + \frac{\pi h_\nu}{f_c} \left(1 - e^{-2\pi f_c |\tau|} \right). \quad (\text{B.19})$$

Encore par intégration par parties récursive, on obtient un temps de cohérence donné par :

$$T_c = \frac{e^{-\Delta\nu_0/f_c}}{\pi f_c} \left(\frac{-\Delta\nu_0}{f_c} \right)^{-\Delta\nu_0/A_L f_c} \left[\Gamma \left(\frac{\Delta\nu_0}{A_L f_c} \right) - \Gamma \left(\frac{\Delta\nu_0}{A_L f_c}, \frac{-\Delta\nu_0}{f_c} \right) \right], \quad (\text{B.20})$$

ainsi qu'une forme de raie donnée par :

$$\Lambda(f) = \frac{e^{-\Delta\nu_0/2f_c}}{\pi f_c} \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{-\Delta\nu_0}{2f_c} \right)^{-(\Delta\nu_0/2A_L + jf)/f_c} \times \left[\Gamma \left(\frac{\Delta\nu_0}{2A_L} + jf \right) - \Gamma \left(\frac{\Delta\nu_0}{2A_L} + jf, \frac{-\Delta\nu_0}{2f_c} \right) \right] \right\}. \quad (\text{B.21})$$

Ces deux dernières équations sont surtout utiles pour prédire la bande d'asservissement qui est nécessaire pour que le temps de cohérence et la largeur de raie soient déterminés par les propriétés de la référence externe (ou le bruit de mesure dans un cas moins idéal) plutôt que par les propriétés de la cavité laser. Sans surprise, on trouve par simulation qu'il faut respecter la condition $f_c > 10\Delta\nu_0$ pour maximiser l'effet de l'asservissement, et $f_c > \Delta\nu_0/10$ pour en tirer un quelconque bénéfice (Figure B.2). Cette dernière limite s'accorde approximativement avec celle trouvée dans [12]. Ce phénomène est une des raisons ayant motivé le développement de la stabilisation par rétroaction optique dans les lasers à semi-conducteurs [17]; en effet, comme la largeur de raie native $\Delta\nu_0$ est de l'ordre de 100 MHz dans ce type de laser, une bande d'asservissement de l'ordre de 100 à 1000 MHz est requise pour affiner la raie, mais une telle bande est pratiquement impossible à atteindre par des moyens électroniques.

Il faut toutefois insister sur le fait que l'approche présentée ici considère la largeur à mi-hauteur de la raie laser comme la métrique importante ; réduire le bruit de fréquence dans une certaine bande, même si la largeur de raie s'en trouve peu affectée, est souvent satisfaisant en pratique [18]. Dans les autres cas, le concept de ligne de séparation β a été développé pour facilement identifier les zones de la DSP de bruit de fréquence qui ont un effet sur la largeur de raie, peu importe la forme spectrale considérée [12]. Du point de vue de la DSP du bruit de fréquence unilatérale, cette ligne de séparation s'exprime comme $\beta(f) = 8 \ln(2) f / \pi^2$, et la largeur de raie prédite comme étant proportionnelle à l'aire sous la courbe des segments de la DSP qui sont supérieurs à cette ligne :

$$A_\beta = \int_{1/T_{obs}}^{\infty} u [S_\nu^1(f) - \beta(f)] S_\nu^1(f) df, \quad (\text{B.22a})$$

$$\Delta\nu_\beta = \sqrt{8 \ln(2) A_\beta}, \quad (\text{B.22b})$$

où T_{obs} est le temps d'observation qui définit la borne inférieure ; celle-ci peut être remplacée par 0 dans les cas où le processus de fréquence n'est pas divergent. Comme attendu, $\Delta\nu_\beta = \pi h_\nu = \Delta\nu$ dans le cas d'un bruit de fréquence blanc avec $T_{obs} \rightarrow \infty$.

B.5 Exemple 4 : marche aléatoire de phase différenciée

Finalement, il est pertinent de s'intéresser au cas où le signal de phase peut être représenté par une marche aléatoire à laquelle on soustrait la même marche aléatoire retardée d'un temps T (avec $T \geq 0$), c'est-à-dire :

$$\phi(t) \equiv \psi(t) - \psi(t - T), \quad (\text{B.23a})$$

$$S_\psi^{(1)}(f) \equiv h_\nu / f^2. \quad (\text{B.23b})$$

Un tel processus est représentatif de la phase du signal de battement produit lorsqu'un oscillateur laser illumine un interféromètre à deux ports⁴ [15, 19, 20] ainsi que le signal de phase produit par chaque événement réflectif positionné à un délai T dans un système OFDR [21–23]. Toujours à l'aide de l'équation (B.12), et utilisant $S_\nu^{(1)}(f) = 4h_\nu \sin^2(\pi f T)$ on évalue :

$$\sigma^2(\tau) = 4\pi^2 h_\nu \min(|\tau|, T). \quad (\text{B.24})$$

Le temps de cohérence associé à ce processus de phase est infini sauf pour le cas $T \rightarrow \infty$. On peut néanmoins calculer la forme de raie générale suivante via la transformée de Fourier de $e^{-\sigma^2(\tau)/2}$:

$$\begin{aligned} \Lambda(f) &= \left\{ 1 - e^{-2\pi^2 h_\nu T} [\cos(2\pi f T) + 2\pi^2 h_\nu T \operatorname{sinc}(2f T)] \right\} \frac{4\pi^2 h_\nu}{(2\pi^2 h_\nu)^2 + (2\pi f)^2} \\ &+ e^{-2\pi^2 h_\nu T} \delta(f). \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

4. Ceci est strictement vrai uniquement lorsque la fréquence moyenne du terme de battement est non-nulle, ce qui est garanti par l'insertion d'un modulateur-acousto optique dans un des bras ; autrement, un traitement plus élaboré est nécessaire.

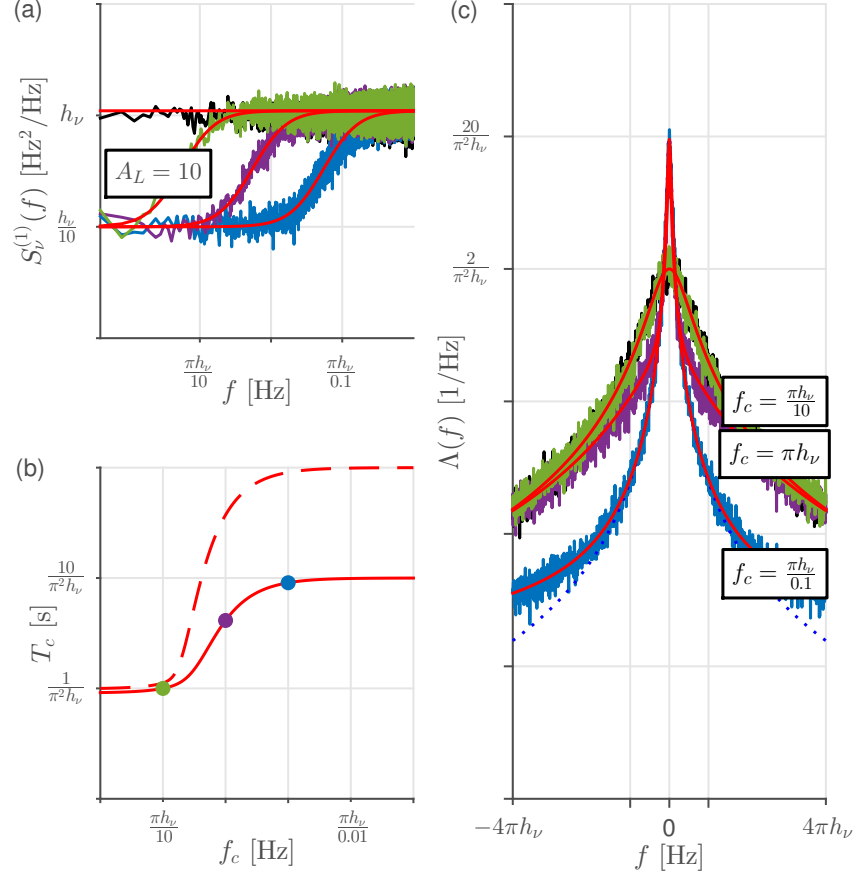


FIGURE B.2 – Simulation : forme de raie associée à un bruit de fréquence blanc qui est réduit d'un facteur $A_L = 10$ par asservissement ; comparaison de trois fréquences de coupure f_c du filtre passe-haut qui contrôle la bande d'asservissement. (a) DSP du bruit de fréquence. Les courbes de couleur sont les simulations et les courbes rouges sont les cibles. (b) Temps de cohérence en fonction de la fréquence de coupure. La courbe tiretée illustre le cas alternatif où $A_L = 100$. (c) Formes de raie simulées comparées aux courbes théoriques (rouge). Pour les grandes fréquences de coupure, la raie se rapproche de la forme lorentzienne associée au niveau de bruit de fréquence aux basses fréquences (pointillés bleus).

Cette forme de raie tend vers une lorentzienne de pleine largeur à mi-hauteur $\Delta\nu = 2\pi h_\nu$, soit le double de celle du champ initial, dans le cas où le délai T est largement supérieur au temps de cohérence initial $T_{c,0} = (\pi^2 h_\nu)^{-1}$. Autrement, l'impulsion spectrale domine le centre du spectre et la corrélation entre les deux copies du champ ne peut être ignorée pour bien décrire la forme des ailes. En excluant l'impulsion spectrale, il est intéressant de remarquer que la valeur maximale de la fonction $\Lambda(f)$ est :

$$\Lambda(0^+) = \left[1 - e^{-2T/T_{c,0}} \left(1 + \frac{2T}{T_{c,0}} \right) \right] T_{c,0}, \quad (\text{B.26})$$

qui tend vers $2T^2/T_{c,0}$ pour les faibles valeurs de $T/T_{c,0}$ et $T_{c,0}$ autrement. Dans un système OFDR employant un laser avec bruit de fréquence blanc, les ailes associées à un fort événement

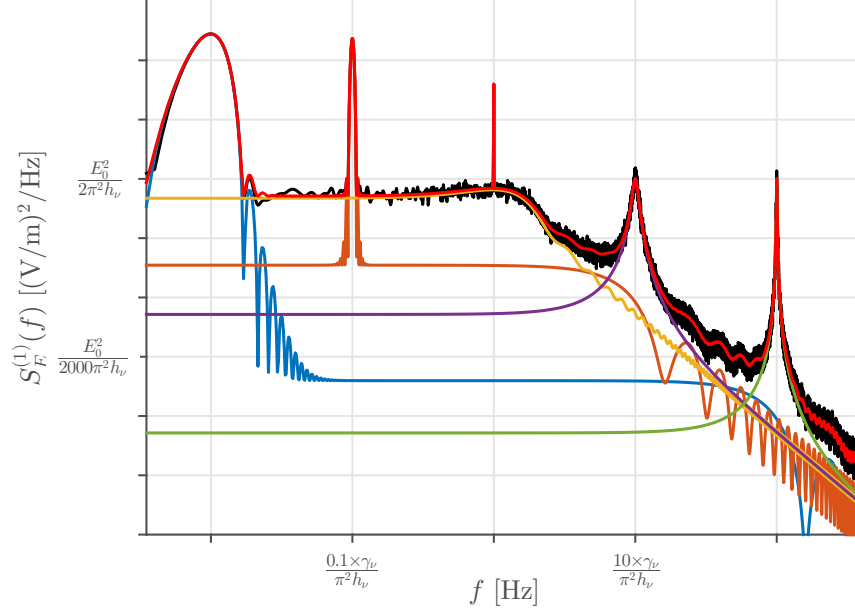


FIGURE B.3 – Simulation : forme de raie associée à un bruit de fréquence blanc différencié, cas d’un système OFDR avec taux de glissement en fréquence γ_ν (en Hz/s) et plusieurs éléments réflectifs d’amplitude unitaire localisés à des délais T et donnant lieu à des réponses centrées à $f = \gamma_\nu T$. Pour chacun des cinq événements réflectifs, on trace la courbe théorique en couleur ; la courbe rouge représente la DSP totale qui est comparée aux résultats de la simulation, en noir. La forme de raie dépend fortement du délai T pour $T \ll (\pi^2 h_\nu)^{-1}$, avec une structure centrale fortement localisée dont la forme exacte dépend de la fonction d’apodisation (Hann a été choisie ici pour appliquer la méthode de Welch) ainsi que du temps de mesure (l’impulsion spectrale de l’équation (B.25) est convoluée avec la transformée de la fenêtre effective de mesure) et des ailes qui oscillent sur une large bande ; la forme de raie se stabilise à une lorentzienne de largeur $2\pi h_\nu$ pour $T \gg (\pi^2 h_\nu)^{-1}$. Ici, les ailes du troisième événement limitent la plage dynamique aux basses fréquences.

réflectif pour $T/T_{c,0} \ll 1$ peuvent dominer l’ensemble du spectre du signal de battement et masquer la contribution de faibles réflexions, tel qu’illustré à la figure B.3 ; cet effet est minimisé par l’utilisation d’un laser très stable (grand $T_{c,0}$) [24].

B.6 Phase stationnaire et expansion de Middleton

Bien que certains exemples admettant une description analytique de la forme de raie aient été fournis ci-haut, une telle description n’est pas possible en général. Dans le cas d’un processus stationnaire en phase⁵, il est toutefois possible de faire un développement en série mettant en évidence les contributions qui dominent la forme de raie [25, 26] ; le fait de considérer

5. Un bruit de phase stationnaire peut souvent être observé dans la plage spectrale sous la fréquence de gain unitaire d’un asservissement laser, lorsque la boucle agit comme un dérivateur et que la contribution du bruit de mesure est faible. Toutefois, un bruit de phase purement stationnaire, sur une large bande, est rarement observé dans le signal d’un oscillateur laser.

uniquement ces contributions dominantes simplifie la modélisation. En effet, en partant des équations (B.7c) et (B.12), on peut écrire :

$$\Lambda(f) = e^{-R_\phi(0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{R_\phi(\tau)} e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \quad (\text{B.27})$$

En définissant $R_\phi(0) \equiv V_\phi$, la variance du processus de phase stationnaire, et en faisant l'expansion en série de $e^{R_\phi(\tau)}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \Lambda(f) &= e^{-V_\phi} \left[\delta(f) + S_\phi^{(2)}(f) + \frac{S_\phi^{(2)}(f) * S_\phi^{(2)}(f)}{2} + \frac{S_\phi^{(2)}(f) * S_\phi^{(2)}(f) * S_\phi^{(2)}(f)}{6} + \dots \right], \\ &= e^{-V_\phi} \left\{ \delta(f) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[S_\phi^{(2)}(f)]^{*k}}{k!} \right\} \equiv e^{-V_\phi} [\delta(f) + P(f)], \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

où l'opérateur \cdot^{*k} représente une autoconvolution répétée $k - 1$ fois et $P(f)$ décrit le piédestal de la raie. Cette équation correspond à l'expansion de Middleton [27]. Par exemple, dans le cas d'un faible bruit de phase stationnaire ($V_\phi \ll 1$) mais de forme spectrale arbitraire, on peut conserver uniquement le premier contribuant au piédestal et faire l'approximation :

$$\Lambda(f) \approx e^{-V_\phi} [\delta(f) + S_\phi^{(2)}(f)]. \quad (\text{B.29})$$

La raie apparaît dans ce cas comme une forte porteuse d'aire e^{-V_ϕ} centrée à ν_0 et entourée d'un piédestal qui est une copie de la PSD du bruit de phase. Si on augmente la valeur de la variance V_ϕ , la porteuse s'atténue et on doit considérer davantage de termes pour bien décrire le piédestal. Cependant, ce ne sont pas nécessairement les premiers termes de la série qui doivent être conservés. En effet, le k -ième terme du piédestal affiche une aire sous la courbe donnée par :

$$A_k = e^{-V_\phi} \frac{(V_\phi)^k}{k!}, \quad (\text{B.30})$$

correspondant à une distribution de Poisson avec une espérance de V_ϕ et une variance de V_ϕ . Cette distribution est bien représentée par une gaussienne pour $V_\phi > 10$, approximativement. De façon heuristique, dans le cas d'un bruit de phase qui ne peut pas être supposé faible, il apparaît adéquat de conserver uniquement les termes les plus significatifs autour de la valeur moyenne V_ϕ , disons les termes pour lesquels k est situé dans une plage $V_\phi \pm b\sqrt{V_\phi}$ (forçant la borne inférieure à $k = 1$ si cette dernière expression la donne négative ou nulle), où b détermine le degré d'approximation et peut être de l'ordre de 2 à 4 par exemple. Selon le théorème central limite [1], l'autoconvolution de plusieurs termes (pour k élevé dans l'équation (B.28)) donnera rapidement des contributions de forme gaussienne; on s'attend donc à un spectre donné par la somme de contributions gaussiennes, somme qui demeure bien représentée par une unique fonction gaussienne. Ultimement, le théorème de Woodward affirme que cette fonction gaussienne composite est égale à la fonction de densité de probabilité du bruit de fréquence [28]. Un exemple synthétisant le développement de cette section est présenté à la figure B.4.

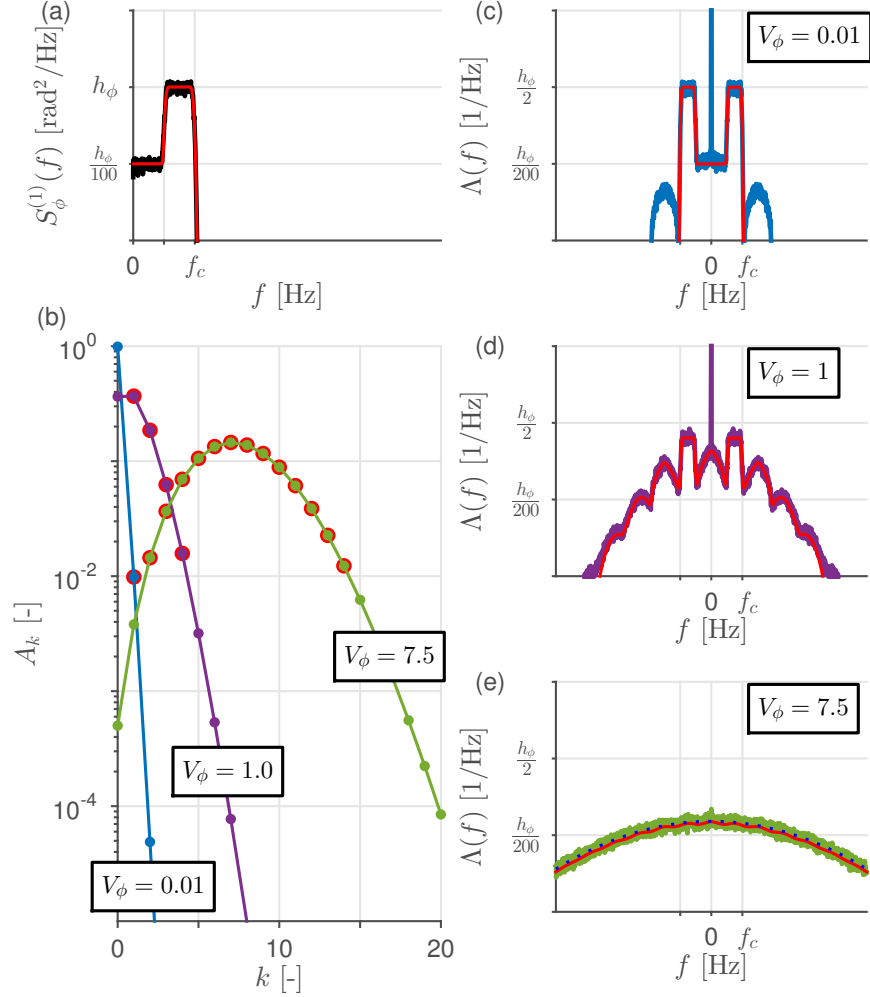


FIGURE B.4 – Simulation : forme de raie associée à un processus de phase stationnaire et à bande limitée pour trois variances. (a) DSP de phase montrant un faible niveau blanc jusqu'à $f_c/2$, puis un niveau blanc 100 fois plus élevé jusqu'à f_c . Le niveau h_ϕ est arbitraire pour ce graphique, mais le produit $h_\phi f_c/2$ est approximativement égal à la variance V_ϕ . La courbe noire est la simulation et la courbe rouge est la cible. (b) Contribution relative des termes de l'expansion de Middleton pour une variance V_ϕ (aire sous la courbe de la DSP) de 0.01, 1.0 et 7.5. Seuls les points en rouge, respectant $b = 2$, sont utilisés pour modéliser la forme de raie. (c,d,e) Formes de raie simulées comparées au modèle basé sur les termes les plus significatifs de l'expansion (rouge, piédestal uniquement). Pour les grandes variances, la forme de raie tend vers une gaussienne et la porteuse disparaît, peu importe la forme spectrale de la DSP de phase. En (e), on montre aussi la fonction de densité de probabilité du bruit de fréquence en pointillés bleus (théorème de Woodward).

B.7 Variance Allan

Une autre quantité souvent utilisée en pratique pour qualifier la stabilité d'un oscillateur laser est la variance Allan [29]. Même si celle-ci est souvent définie par sa version échantillonnale (c'est-à-dire sa mise en oeuvre pratique en présence d'échantillons de bruit de phase ou de

fréquence), on adopte ici une définition plus générale qui se porte mieux à des prédictions théoriques. La variance Allan $\sigma_y^2(\tau)$ peut être définie comme la variance d'un processus de fréquence normalisé par la fréquence porteuse et puis filtré :

$$\sigma_y^2(\tau) = \left\langle \left[\frac{\nu(t)}{\nu_0} * h_A(t, \tau) \right]^2 \right\rangle, \quad (\text{B.31a})$$

$$h_A(t, \tau) \equiv \frac{u(t) - u(t - \tau)}{\tau} * \frac{\delta(t) - \delta(t - \tau)}{\sqrt{2}}. \quad (\text{B.31b})$$

Autrement dit, le bruit de fréquence normalisé $y \equiv \nu(t)/\nu_0$ est moyenné sur un temps τ (moyenne mobile) et puis différencié à une copie du même processus retardé de τ ; la variance Allan est une fonction donnant la variance du processus résultant en fonction de la valeur de τ . En utilisant les propriétés mentionnées dans les sections précédentes de cette annexe, on peut réécrire :

$$\sigma_y^2(\tau) = \int_0^\infty S_\nu^{(1)}(f) \frac{2 \sin^4(\pi f \tau)}{\nu_0^2 (\pi f \tau)^2} df = 2(\pi \tau)^2 \int_0^\infty S_y^{(1)}(f) f^2 \text{sinc}^4(f \tau) df, \quad (\text{B.32})$$

où $S_y^{(1)}(f) \equiv S_\nu^{(1)}(f)/\nu_0^2$. Au-delà de la normalisation par ν_0^2 , cette équation est somme toute comparable à l'équation (B.12). Toutefois, la variance Allan pondère les basses fréquences à la baisse et converge donc dans une plus large gamme de scénarios. Par exemple, pour un bruit blanc de fréquence $S_\nu^{(1)}(f) \equiv h_\nu$, la variance Allan est $\sigma_y^2(\tau) = h_\nu/(2\nu_0^2\tau)$; pour une marche aléatoire de fréquence $S_\nu^{(1)}(f) \equiv h_\nu/f^2$ (pour laquelle $\sigma^2(\tau)$ à l'équation (B.12) ne converge pas), la variance Allan est $\sigma_y^2(\tau) = 2\pi^2 h_\nu \tau / (3\nu_0^2)$; finalement, le cas d'un scintillement de fréquence $S_\nu^{(1)}(f) \equiv h_\nu/f$, forme spectrale d'un des principaux bruits fondamentaux dans les discriminateurs de fréquence, donne une variance Allan constante de niveau $\sigma_y^2(\tau) = 2 \ln(2) h_\nu / \nu_0^2$.

Tout comme le temps de cohérence et la largeur de raie, la variance Allan est une quantité utile pour présenter certaines propriétés du signal d'un oscillateur de façon synthétique et sa large adoption par la communauté peut être reliée en partie aux instruments de mesure qui étaient disponibles il y a 50 ans [30]. Cependant, la variance Allan peut masquer, ou ne pas mettre en évidence, certaines propriétés qui seraient autrement bien visibles dans la DSP du bruit de fréquence ou, encore mieux, dans des échantillons de réalisations du processus même [31, 32].

Il est bon de mentionner qu'une version modifiée de la variance Allan a été développée pour mieux distinguer certains processus donnant lieu, autrement, aux mêmes pentes en fonction de τ . La variance Allan modifiée implique simplement un moyennage supplémentaire :

$$\text{mod } \sigma_y^2(\tau) = \left\langle \left[\frac{\nu(t)}{\nu_0} * h_M(t, \tau) \right]^2 \right\rangle, \quad (\text{B.33a})$$

$$h_M(t, \tau) \equiv \frac{u(t) - u(t - \tau)}{\tau} * \frac{\delta(t) - \delta(t - \tau)}{\sqrt{2}} * \frac{u(t) - u(t - \tau)}{\tau}, \quad (\text{B.33b})$$

$$\text{mod } \sigma_y^2(\tau) = 2(\pi \tau)^2 \int_0^\infty S_y^{(1)}(f) f^2 \text{sinc}^6(f \tau) df. \quad (\text{B.33c})$$

La pondération des basses fréquences est donc similaire ; seul le comportement passe-bas à proximité de $f = 1/\tau$ est affecté par le moyennage supplémentaire, ce qui a un impact significatif uniquement pour les processus rapides.

B.8 Bibliographie

- [1] A. Leon-Garcia. *Probability, statistics, and random processes for electrical engineering*. Pearson/Prentice Hall, 2008.
- [2] C. Henry. Theory of the linewidth of semiconductor lasers. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 18(2) :259–264, 1982. URL <https://doi.org/10.1109/JQE.1982.1071522>.
- [3] C. Henry. Phase noise in semiconductor lasers. *Journal of Lightwave Technology*, 4(3) : 298–311, 1986. URL <https://doi.org/10.1109/JLT.1986.1074721>.
- [4] B. E. A. Saleh and M. C. Teich. *Fundamentals of photonics*. John Wiley & Sons, 2019.
- [5] A. E. Siegman. *Lasers*. University Science Books, 1986.
- [6] R. Paschotta, H. R. Telle, and U. Keller. Noise of solid-state lasers. In *Solid-State Lasers and Applications*, pages 473–510. CRC press, 2017.
- [7] M. Ahmed and M. Yamada. Field fluctuations and spectral line shape in semiconductor lasers subjected to optical feedback. *Journal of Applied Physics*, 95(12) :7573–7583, 2004. URL <https://doi.org/10.1063/1.1738525>.
- [8] G. Gray and R. Roy. Noise in nearly-single-mode semiconductor lasers. *Physical Review A*, 40(5) :2452, 1989. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.40.2452>.
- [9] M. P. Van Exter, W. A. Hamel, J. P. Woerdman, and B. R. P. Zeijlmans. Spectral signature of relaxation oscillations in semiconductor lasers. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 28(6) :1470–1478, 1992. URL <https://doi.org/10.1109/3.135299>.
- [10] U. Sterr, T. Legero, T. Kessler, H. Schnatz, G. Grosche, O. Terra, and F. Riehle. Ultra-stable lasers: new developments and applications. In *Time and Frequency Metrology II*, volume 7431, pages 33–46. SPIE, 2009. URL <https://doi.org/10.1117/12.825217>.
- [11] B. Fermigier and M. Têtu. Frequency noise, Allan variance and lineshape of semiconductor laser. In *Proceedings - SPIE The International Society For Optical Engineering*, pages 164–172. SPIE, 1998. URL <https://doi.org/10.1117/12.326631>.
- [12] G. Di Domenico, S. Schilt, and P. Thomann. Simple approach to the relation between laser frequency noise and laser line shape. *Applied Optics*, 49(25) :4801–4807, 2010. URL <https://doi.org/10.1364/AO.49.004801>.

- [13] S. Schilt, L. Tombez, G. Di Domenico, and D. Hofstetter. Frequency noise and linewidth of mid-infrared continuous-wave quantum cascade lasers: An overview. *The Wonders of Nanotechnology: Quantum and Optoelectronic Devices and Applications (chapter 12)*, pages 261–287, 2013.
- [14] U. Keller. *Ultrafast lasers. A comprehensive introduction to fundamental principles with practical applications*. Springer, 2021.
- [15] L. B. Mercer. $1/f$ frequency noise effects on self-heterodyne linewidth measurements. *Journal of Lightwave Technology*, 9(4) :485–493, 1991. URL <https://doi.org/10.1109/50.76663>.
- [16] G. M. Stéphan, T. T. Tam, S. Blin, P. Besnard, and M. Têtu. Laser line shape and spectral density of frequency noise. *Physical Review A*, 71(4) :043809, 2005. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.71.043809>.
- [17] M. Ohtsu. Frequency stabilization in semiconductor lasers. *Optical and Quantum Electronics*, 20(4) :283–300, 1988. URL <https://doi.org/10.1007/BF00620246>.
- [18] N. Bucalovic, V. Dolgovskiy, C. Schori, P. Thomann, G. Di Domenico, and S. Schilt. Experimental validation of a simple approximation to determine the linewidth of a laser from its frequency noise spectrum. *Applied Optics*, 51(20) :4582–4588, 2012. URL <https://doi.org/10.1364/AO.51.004582>.
- [19] L. Richter, H. Mandelberg, M. Kruger, and P. McGrath. Linewidth determination from self-heterodyne measurements with subcoherence delay times. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 22(11) :2070–2074, 1986. URL <https://doi.org/10.1109/JQE.1986.1072909>.
- [20] P. Horak and W. H. Loh. On the delayed self-heterodyne interferometric technique for determining the linewidth of fiber lasers. *Optics Express*, 14(9) :3923–3928, 2006. URL <https://doi.org/10.1364/OE.14.003923>.
- [21] S. Venkatesh and W. V. Sorin. Phase noise considerations in coherent optical FMCW reflectometry. *Journal of Lightwave Technology*, 11(10) :1694–1700, 1993. URL <https://doi.org/10.1109/50.249912>.
- [22] J. P. Von Der Weid, R. Passy, G. Mussi, and N. Gisin. On the characterization of optical fiber network components with optical frequency domain reflectometry. *Journal of Lightwave Technology*, 15(7) :1131–1141, 1997. URL <https://doi.org/10.1109/50.596958>.

- [23] C. J. Karlsson and F. A. Olsson. Linearization of the frequency sweep of a frequency-modulated continuous-wave semiconductor laser radar and the resulting ranging performance. *Applied Optics*, 38(15) :3376–3386, 1999. URL <https://doi.org/10.1364/AO.38.003376>.
- [24] M. Harris, G. N. Pearson, J. M. Vaughan, D. Letalick, and C. Karlsson. The role of laser coherence length in continuous-wave coherent laser radar. *Journal of Modern Optics*, 45(8) :1567–1581, 1998. URL <https://doi.org/10.1080/09500349808230653>.
- [25] A. Godone, S. Micalizio, and F. Levi. RF spectrum of a carrier with a random phase modulation of arbitrary slope. *Metrologia*, 45(3) :313, 2008. URL <https://doi.org/10.1088/0026-1394/45/3/008>.
- [26] P. Brochard, T. Südmeyer, and S. Schilt. Power spectrum computation for an arbitrary phase noise using Middleton’s convolution series: implementation guideline and experimental illustration. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 64(11) :1766–1775, 2017. URL <https://doi.org/10.1109/TUFFC.2017.2747620>.
- [27] D. Middleton. The distribution of energy in randomly modulated waves. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 42(330) :689–707, 1951. URL <https://doi.org/10.1080/14786445108561298>.
- [28] D. S. Elliott, R. Roy, and S. J. Smith. Extracavity laser band-shape and bandwidth modification. *Physical Review A*, 26(1) :12, 1982. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.26.12>.
- [29] J. Rutman. Characterization of phase and frequency instabilities in precision frequency sources: Fifteen years of progress. *Proceedings of the IEEE*, 66(9) :1048–1075, 1978. URL <https://doi.org/10.1109/PROC.1978.11080>.
- [30] F. Riehle. *Frequency standards: basics and applications*. John Wiley & Sons, 2006.
- [31] E. Rubiola. *Phase noise and frequency stability in oscillators*. Cambridge University Press, 2008.
- [32] D. G. Matei, T. Legero, S. Häfner, C. Grebing, R. Weyrich, W. Zhang, L. Sonderhouse, J. M. Robinson, J. Ye, F. Riehle, and U. Sterr. 1.5 μm lasers with sub-10 mHz linewidth. *Physical Review Letters*, 118(26) :263202, 2017. URL <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.263202>.

Annexe C

Réponse d'un discriminateur interrogé par méthode Pound-Drever-Hall

Cette annexe a pour but d'aller au-delà de la présentation standard de la méthode Pound-Drever-Hall (PDH) qui considère un champ laser parfaitement monochromatique, c'est-à-dire sans bruit d'amplitude et de phase, et qui se rend normalement à une description du signal d'erreur moyen. Ici, on pousse le formalisme de l'analyse à petit signal afin de développer les fonctions de transfert ou réponses en fréquence pour le bruit d'amplitude et le bruit de phase du laser, et ce, considérant un discriminateur en fréquence quelconque qui présente une symétrie hermitienne autour du point d'asservissement.

Partant de l'équation (42) sans négliger les bruits laser et posant $\phi_m = 0$ par simplicité :

$$E_{in}(t) = E_0 [1 + \epsilon(t)] \cos [2\pi\nu_0 t + \phi_0 + \phi(t) + m_i \sin (2\pi f_m t)]. \quad (C.1)$$

Dans le régime de faible modulation ($m_i \ll 1$), on peut utiliser quelques identités trigonométriques pour décomposer le signal modulé en phase en ses trois principales composantes :

$$\begin{aligned} E_{in}(t) &\approx E_0 [1 + \epsilon(t)] \cos [2\pi\nu_0 t + \phi_0 + \phi(t)] \\ &+ \frac{m_i E_0}{2} [1 + \epsilon(t)] \cos [2\pi(\nu_0 + f_m)t + \phi_0 + \phi(t)] \\ &- \frac{m_i E_0}{2} [1 + \epsilon(t)] \cos [2\pi(\nu_0 - f_m)t + \phi_0 + \phi(t)]. \end{aligned} \quad (C.2)$$

On applique ensuite le filtre direct et le filtre de conversion (Eqs. (16a) et (16b)) à chacun des termes de l'équation précédente, de façon indépendante :

$$\begin{aligned} E_{out}(t) &= E_0 |H_E(\nu_0)| [1 + \epsilon_f(t, \nu_0)] \cos [2\pi\nu_0 t + \phi_0 + \phi_f(t, \nu_0) + \angle H_E(\nu_0)] \\ &+ \frac{m_i E_0}{2} |H_E(\nu_0 + f_m)| [1 + \epsilon_f(t, \nu_0 + f_m)] \\ &\times \cos [2\pi(\nu_0 + f_m)t + \phi_0 + \phi_f(t, \nu_0 + f_m) + \angle H_E(\nu_0 + f_m)] \\ &- \frac{m_i E_0}{2} |H_E(\nu_0 - f_m)| [1 + \epsilon_f(t, \nu_0 - f_m)] \\ &\times \cos [2\pi(\nu_0 - f_m)t + \phi_0 + \phi_f(t, \nu_0 - f_m) + \angle H_E(\nu_0 - f_m)]. \end{aligned} \quad (C.3)$$

La détection de ce champ avec un photodétecteur donne trois termes à DC, 4 termes (2 paires identiques) à f_m , et 2 termes (1 paire identique) à $2f_m$. Les trois termes à DC peuvent être utiles pour prédire la plage dynamique requise au niveau du photodétecteur ou le niveau de bruit de grenaille moyen (partie stationnaire) :

$$P_{out,DC} = P_0 \left[|H_E(\nu_0)|^2 + \frac{m_i^2}{4} |H_E(\nu_0 + f_m)|^2 + \frac{m_i^2}{4} |H_E(\nu_0 - f_m)|^2 \right]. \quad (C.4)$$

Toutefois, seuls les termes à f_m survivent à la démodulation subséquente. Ces termes sont :

$$\begin{aligned} P_{out,f_m}(t) &\approx m_i P_0 |H_E(\nu_0) H_E(\nu_0 + f_m)| [1 + \epsilon_f(t, \nu_0) + \epsilon_f(t, \nu_0 + f_m)] & (C.5) \\ &\times \cos [2\pi f_m t + \phi_f(t, \nu_0 + f_m) - \phi_f(t, \nu_0) + \angle H_E(\nu_0 + f_m) - \angle H_E(\nu_0)] \\ &- m_i P_0 |H_E(\nu_0) H_E(\nu_0 - f_m)| [1 + \epsilon_f(t, \nu_0) + \epsilon_f(t, \nu_0 - f_m)] \\ &\times \cos [2\pi f_m t - \phi_f(t, \nu_0 - f_m) + \phi_f(t, \nu_0) - \angle H_E(\nu_0 - f_m) + \angle H_E(\nu_0)]. \end{aligned}$$

Suivant l'hypothèse de départ, on démodule le signal photodéfecté en multipliant par la forme d'onde $A_d \sin(2\pi f_m t + \phi_d)$ puis on filtre passe-bas pour éliminer tout le contenu spectral au-delà de $f_m/2$. Supposant que les bruits du laser sont déjà à bande limitée et ne sont pas affectés par ce filtre, il reste donc :

$$\begin{aligned} V_{out}(t) &= \frac{-m_i P_0 A_d}{2} |H_E(\nu_0) H_E(\nu_0 + f_m)| [1 + \epsilon_f(t, \nu_0) + \epsilon_f(t, \nu_0 + f_m)] & (C.6) \\ &\times \sin [\phi_f(t, \nu_0 + f_m) - \phi_f(t, \nu_0) + \angle H_E(\nu_0 + f_m) - \angle H_E(\nu_0) + \Delta\phi] \\ &+ \frac{m_i P_0 A_d}{2} |H_E(\nu_0) H_E(\nu_0 - f_m)| [1 + \epsilon_f(t, \nu_0) + \epsilon_f(t, \nu_0 - f_m)] \\ &\times \sin [-\phi_f(t, \nu_0 - f_m) + \phi_f(t, \nu_0) - \angle H_E(\nu_0 - f_m) + \angle H_E(\nu_0) + \Delta\phi], \end{aligned}$$

où $\Delta\phi \equiv \phi_m - \phi_d = -\phi_d$ puisque ϕ_m a été forcé à 0 au début du développement. Dans le cas spécifique où la fréquence du laser coïncide avec un creux de la fonction de transfert du discriminateur (le creux d'une frange ou d'une raie, par exemple)¹ à $\nu_r = k/T$, où k est un entier, on peut utiliser les propriétés suivantes pour simplifier l'équation (C.6) (symétrie hermitienne) :

$$H_E(\nu_r + f_m) = H_E^*(\nu_r - f_m), \quad (C.7a)$$

$$\angle H_E(\nu_r) = 0. \quad (C.7b)$$

Ainsi, on peut réécrire le signal de tension pour une opération au creux de la fonction de transfert, $V_{out,opt}(t)$:

$$\begin{aligned} V_{out,opt}(t) &= \frac{m_i P_0 A_d}{2} |H_E(\nu_r) H_E(\nu_r + f_m)| & (C.8) \\ &\times \{- [1 + \epsilon_f(t, \nu_r) + \epsilon_f(t, \nu_r + f_m)] \\ &\times \sin [\phi_f(t, \nu_r + f_m) - \phi_f(t, \nu_r) + \angle H_E(\nu_r + f_m) + \Delta\phi] \\ &+ [1 + \epsilon_f(t, \nu_r) + \epsilon_f(t, \nu_r - f_m)] \\ &\times \sin [-\phi_f(t, \nu_r - f_m) + \phi_f(t, \nu_r) + \angle H_E(\nu_r + f_m) + \Delta\phi]\}. \end{aligned}$$

1. Cette condition est respectée lorsque la boucle d'asservissement est fermée et constitue donc une hypothèse raisonnable en chemin vers une description des filtres de discrimination.

On aimerait ultimement décomposer ce signal en trois termes, c'est-à-dire le niveau DC ou moyen, le bruit d'amplitude filtré, et le bruit de phase filtré :

$$V_{out,opt}(t) \equiv \widetilde{V_{out,opt}}(t) + \epsilon(t) * h_{\epsilon V,opt}(t) + \phi(t) * h_{\phi V,opt}(t). \quad (C.9)$$

En reconnaissant que les deux termes de l'équation (C.8) sont de la forme $[1+\alpha(t)] \sin[\psi(t) + \theta]$, et supposant encore une fois que les bruits d'amplitude et de phase sont faibles, on peut linéariser et approximer la forme comme $\psi(t) \cos \theta + [1 + \alpha(t)] \sin \theta$. Sans surprise vu l'hypothèse d'opération à un creux de la fonction de transfert du discriminateur, on trouve donc une valeur moyenne nulle, $\widetilde{V_{out,opt}}(t) = 0$ (pas en raison du $\sin \theta$, qui n'est pas nécessairement nul, mais plutôt en raison de la soustraction de termes similaires). Il reste donc :

$$\begin{aligned} V_{out,opt}(t) &\approx \frac{m_i P_0 A_d}{2} |H_E(\nu_r) H_E(\nu_r + f_m)| \\ &\times \{[-\epsilon_f(t, \nu_r + f_m) + \epsilon_f(t, \nu_r - f_m)] \sin[\angle H_E(\nu_r + f_m) + \Delta\phi] \\ &+ [2\phi_f(t, \nu_r) - \phi_f(t, \nu_r + f_m) - \phi_f(t, \nu_r - f_m)] \cos[\angle H_E(\nu_r + f_m) + \Delta\phi]\}. \end{aligned} \quad (C.10)$$

Pour simplifier davantage, on rappelle que :

$$\epsilon_f(t, \nu_0) = \epsilon(t) * h_{E,d}(t, \nu_0) + \phi(t) * h_{E,c}(t, \nu_0), \quad (C.11a)$$

$$\phi_f(t, \nu_0) = -\epsilon(t) * h_{E,c}(t, \nu_0) + \phi(t) * h_{E,d}(t, \nu_0). \quad (C.11b)$$

Toujours pour une opération au creux de la fonction de transfert du discriminateur (avec $\angle H_E(\nu_r) = 0$ dans les équations (16a) et (16b)), on peut exposer les symétries suivantes :

$$h_{E,d}(t, \nu_r + f_m) = h_{E,d}(t, \nu_r - f_m), \quad (C.12a)$$

$$h_{E,c}(t, \nu_r + f_m) = -h_{E,c}(t, \nu_r - f_m). \quad (C.12b)$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} V_{out,opt}(t) &\approx m_i P_0 A_d |H_E(\nu_r) H_E(\nu_r + f_m)| \\ &\times \{[-\phi(t) * h_{E,c}(t, \nu_r + f_m)] \sin[\angle H_E(\nu_r + f_m) + \Delta\phi] \\ &+ \{\phi(t) * [h_{E,d}(t, \nu_r) - h_{E,d}(t, \nu_r + f_m)] - \epsilon(t) * h_{E,c}(t, \nu_r)\} \\ &\times \cos[\angle H_E(\nu_r + f_m) + \Delta\phi]\}. \end{aligned} \quad (C.13)$$

Comme le filtre de conversion $h_{E,c}(t, \nu_0)$ est nul exactement au creux de la fonction de transfert du discriminateur (à $\nu_0 = \nu_r$), il reste uniquement des termes de bruit de phase filtré, avec une réponse globale $h_{\phi V}(t)$ s'exprimant comme :

$$\begin{aligned} h_{\phi V,opt}(t) &= K_V \{[h_{E,d}(t, \nu_r) - h_{E,d}(t, \nu_r + f_m)] \cos[\angle H_E(\nu_r + f_m) + \Delta\phi] \\ &- h_{E,c}(t, \nu_r + f_m) \sin[\angle H_E(\nu_r + f_m) + \Delta\phi]\}. \end{aligned} \quad (C.14)$$

avec $K_V = m_i P_0 A_d |H_E(\nu_r) H_E(\nu_r + f_m)|$ (dans le régime de forte modulation, la principale différence est qu'on doit remplacer m_i par $2J_0(m_i)J_1(m_i)$, où J_z est la fonction de Bessel de

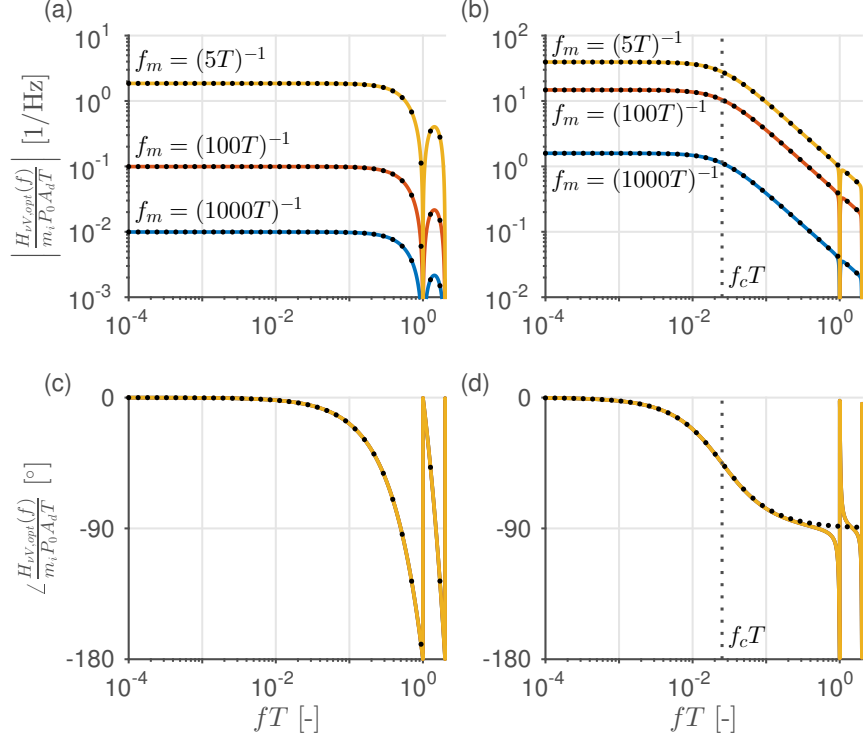


FIGURE C.1 – Fonction de transfert du discriminateur interrogé par méthode PDH : comparaison de la ligne à délai et du résonateur ($\mathcal{F} = 20$, $\gamma = K$) pour différentes fréquences de modulation. Module de la fonction de transfert pour la ligne à délai (a) et le résonateur (b). Phase de la fonction de transfert pour la ligne à délai (c) et le résonateur (d). Les courbes pointillées en noir représentent les équations (C.16) et (C.17) pour $f_m T = \{\frac{1}{1000}, \frac{1}{100}, \frac{1}{5}\}$.

première espèce d'ordre z , expression qui vaut 0.678 au maximum pour $m_i = 1.08$). Comme les deux filtres sont normalement de nature passe-haut premier ordre, cette réponse peut être plus naturellement interprétée comme celle d'un discriminateur de fréquence (en ce sens que la fonction de transfert pour le bruit de fréquence est normalement plate, ou de pente nulle, aux basses fréquences) :

$$\begin{aligned}
 H_{\nu V, opt}(f) &= \frac{K_V}{jf} \{ [H_{E,d}(f, \nu_r) - H_{E,d}(f, \nu_r + f_m)] \cos[\angle H_E(\nu_r + f_m) + \Delta\phi] \\
 &\quad - H_{E,c}(f, \nu_r + f_m) \sin[\angle H_E(\nu_r + f_m) + \Delta\phi] \}, \quad (C.15)
 \end{aligned}$$

ce qui constitue l'aboutissement du développement mathématique de cette annexe. Comme attendu pour le cas d'une opération du laser au creux de la fonction de transfert du discriminateur, le signal de tension est nul en moyenne, le bruit d'amplitude du laser n'a aucune contribution et les fluctuations du signal sont représentatives du bruit de fréquence du laser. Ces conclusions seraient différentes à d'autres points d'opération ($\nu_0 \neq \nu_r$), et le formalisme présenté ici pourrait être utilisé pour décrire la valeur moyenne et tous les filtres de discrimination, si désiré.

Il est d'intérêt de comparer le gain de discrimination en fréquence qui peut être atteint pour une ligne à délai et pour un résonateur, en présument le même espace spectral libre (même valeur de T). Dans le cas d'un interféromètre à ligne à délai idéal et pour $\Delta\phi$ ajustée afin de maximiser la pente du signal d'erreur, on peut montrer que :

$$\frac{H_{\nu V, opt}(f)}{m_i P_0 A_d} = (\pi T) \sin(\pi f_m T) \operatorname{sinc}(fT) e^{-j\pi f T}, \quad (\text{C.16})$$

soit simplement la pente de discrimination maximale multipliée par la fonction de transfert en fréquence normalisée. Dans le cas d'un résonateur et en faisant les mêmes hypothèses, on trouve plutôt :

$$\frac{H_{\nu V, opt}(f)}{m_i P_0 A_d} \approx \frac{G}{1 + jf/f_c}, \quad (\text{C.17a})$$

$$G \equiv \frac{\Gamma}{f_c} \frac{(f_m/f_c)^2}{1 + (f_m/f_c)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\Gamma - 2}{f_m/f_c}\right)^2}, \quad (\text{C.17b})$$

où f_c est la mi-largeur à mi-hauteur d'une raie et Γ est sa profondeur en champ, telles que définies aux équations (29) et (30). Le gain basse fréquence est maximisé quand $f_m \gg f_c$ et converge alors vers Γ/f_c . Contrairement au cas du résonateur opéré à flanc de frange pour lequel le gain au désaccord optimal était proportionnel à $\Gamma(2 - \Gamma)/f_c$, la dernière optimisation implique ici $K = \gamma$, c'est-à-dire un couplage critique et une raie parfaitement sombre (le meilleur couplage est $K = \sqrt{\gamma}$ pour $f_m \ll f_c$, comme pour l'opération à flanc de frange). Ainsi, on peut écrire $\Gamma = 1$ pour $f_m \gg f_c$ et le gain optimal devient $G_\gamma = 1/f_c = 2T\mathcal{F}$. Comme le gain maximum pour la ligne à délai est πT (pour $f_m = 1/(2T)$), le nombre effectif de tours est $2\mathcal{F}/\pi$, à comparer avec le facteur $2\mathcal{F}/(\sqrt{3}\pi)$ trouvé pour l'opération à flanc de frange. Ce facteur peut aussi être vu comme le rapport des courbures au creux de la résonance ($\propto P_0(f/f_c)^2$) et de la frange ($\propto P_0(\pi f T)^2$). On note que ce rapport est valide lorsque les deux systèmes PDH sont opérés dans les conditions optimales.

Comme commentaire final, il est aussi pertinent de calculer le niveau de bruit de grenaille obtenu pour les deux discriminateurs. Pour bien considérer le caractère cyclostationnaire de ce bruit dans le contexte de la méthode PDH, on fait appel à l'équation (3.13) qui implique de modéliser l'enveloppe de variance, le gain à petit signal et la forme d'onde de démodulation. Pour la ligne à délai, dans la mesure où l'interféromètre produit une frange parfaitement sombre et que le laser est stationné au creux de cette frange, on peut écrire :

$$\begin{aligned} P_{out}(t) &= n(t) + \frac{P_0}{2} [1 + \epsilon(t) + \epsilon(t - T)] \{1 - \cos[\theta(t) + \theta_m(t)]\} \\ &= n(t) + P_0 [1 + \epsilon(t) + \epsilon(t - T)] \sin^2 \left[\frac{\theta(t) + \theta_m(t)}{2} \right] \\ &\approx n(t) + \frac{P_0}{4} [\theta_m^2(t) + 2\theta_m(t)\theta(t)], \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

où $n(t)$ inclut uniquement la contribution du bruit de grenaille et où on linéarise la fonction sinus en supposant que $\theta_m(t) \ll 1$ et $\theta(t) \ll \theta_m(t)$. Ces signaux de phase correspondent à la

phase de modulation et à la phase associée au bruit de fréquence du laser (le «signal» dans le contexte de l'asservissement), respectivement, c'est-à-dire :

$$\theta(t) \equiv \phi(t) * [\delta(t) - \delta(t - T)] = \phi(t) - \phi(t - T), \quad (\text{C.19})$$

et :

$$\begin{aligned} \theta_m(t) &\equiv [m_i \sin(2\pi f_m t)] * [\delta(t) - \delta(t - T)] \\ &= 2m_i \sin(\pi f_m T) \sin(2\pi f_m t + \pi/2 - \pi f_m T) \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Le gain pour le signal $\theta(t)$ est approximativement $(P_0/2)\theta_m(t)$. L'enveloppe de variance est $(h\nu_0/\eta)(P_0\theta_m^2(t)/4)$. La forme d'onde de démodulation habituelle est une sinusoïde, et la forme qui maximise la conversion du signal est $d(t) = A_d \sin(2\pi f_m t + \pi/2 - \pi f_m T) \propto \theta_m(t)$ (cette approche constitue une autre façon de calculer le déphasage optimal pour la ligne à délai). Ainsi, la DSP de bruit de phase associée au bruit de grenaille est :

$$S_{m\theta}^{(2)}(f) = \frac{h\nu_0}{\eta P_0} \frac{\overline{\theta_m^2(t)d^2(t)}}{[\overline{\theta_m(t)d(t)}]^2} = \frac{h\nu_0}{\eta P_0} \frac{\overline{\theta_m^4(t)}}{[\overline{\theta_m^2(t)}]^2} = \frac{3}{2} \frac{h\nu_0}{\eta P_0}, \quad |f| \lesssim f_m, \quad (\text{C.21})$$

où le trait au-dessus d'un signal indique la valeur moyenne sur une période. En convertissant en une DSP unilatérale et en divisant par le module au carré de la fonction de transfert de conversion entre la différence de bruit de phase $\theta(t) = \phi(t) - \phi(t - T)$ et le bruit de fréquence $\nu(t)$, soit $H_{\nu\theta}(f) = (2\pi T) \text{sinc}(fT)e^{-j\pi fT}$, on obtient :

$$S_{\nu'}^{(1)}(f) = \frac{3}{2} \frac{h\nu_0}{2\pi^2 \eta P_0 T^2} = \frac{3}{2} \Psi, \quad f \lesssim f_m, f \ll f_L. \quad (\text{C.22})$$

Ce niveau de DSP de bruit de fréquence est un facteur 3/2 plus élevé que ce qui aurait été trouvé si le bruit de grenaille avait été considéré comme stationnaire (supposant une enveloppe de variance $(h\nu_0/\eta)(P_0\overline{\theta_m^2(t)}/4)$). On pourrait atteindre ou se rapprocher de la limite absolue, Ψ , en utilisant une paire de formes d'onde de modulation et démodulation différente de la paire sinus-sinus constituant le choix habituel pour la méthode PDH. Un traitement presque identique peut être fait pour le résonateur en remplaçant la courbure au creux de la frange de l'interféromètre, $2P_0\pi^2 T^2$, par celle au creux de la raie du résonateur en régime de couplage critique, $2P_0/f_c^2$. Au final, on trouve que la DSP de bruit de fréquence du laser asservi est un facteur $(2\mathcal{F}/\pi)^2$ plus faible que celle de la ligne à délai (sous f_c), mais un facteur 3/2 plus élevée que ce qu'elle pourrait être avec un système optimisé afin de mieux tenir compte de la cyclostationnarité du bruit de grenaille dans le contexte de la méthode PDH.