



MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

Trabajo de grado:

ESTUDIO DE LAS TRANSFORMADAS INTEGRALES COMO MÉTODO DE RESOLUCIÓN
DE ECUACIONES DIFERENCIALES FRACCIONARIAS Y SUS APLICACIONES.

Autor: Javier Alexander Tenorio Quiñones

Director: Dr. Alex R. Sepúlveda C.

Co-Director: Ph.D José Rodrigo González

Trabajo presentado como requisito para optar al título de
MAGISTER EN MATEMÁTICAS

Enero del 2023

Resumen

En este trabajo se estudió las transformadas integrales de Laplace, Fourier y Mellin como método de resolución de ecuaciones diferenciales fraccionarias. Las técnicas implementadas tienen como bases las definiciones dadas en 2.13, 5 y 2.2.7 mediante las cuales fue posible extender las transformadas integrales definidas en el análisis clásicos a su versión fraccionaria. Mediante las transformadas integrales fue posible extender problemas de condición inicial primeramente definidos para ordenes de derivación e integración enteros a ordenes arbitrarios. Éste hecho resulta de gran interés ya permite obtener una perspectiva global de la evolución de las soluciones hasta alcanzar los valores dados en el análisis clásicos.

PALABRAS CLAVES: Función gamma, función de Mittag-Leffler, integral de Riemann-Liouville, derivada de Riemann-Liouville, derivada de Caputo, transformada de Laplace, transformada de Fourier y transformada de Mellin.

Abstract

In this work we studied the integral transformations of Laplace, Fourier and Mellin as a method of solving fractional differential equations. The implemented techniques are based on the definitions given in 2.13, 5 and 2.2.7, by which it was possible to extend the integral transformations defined in the classical analysis to their fractional version. Through integral transformations it was possible to extend initial condition problems initially defined for integer derivation and integration orders to arbitrary orders. This fact is of great interest since it allows to obtain a global perspective of the evolution of the solutions until reaching the values given in the classical analysis.

KEYWORDS: Gamma function, Mittag-Leffler function, Riemann-Liouville integral, Riemann-Liouville derivative, Caputo derivative, Laplace transform, Fourier transform, and Mellin transform.

Agradecimientos

Resulta conmovedor y muy gratificante saber que tuve la oportunidad de contar con el apoyo de diversas personas durante la elaboración de este proyecto, personas que llegan en forma de directores, codirectores, profesores, amigos y familiares. Agradezco profundamente a mi director Alex Sepulveda y codirector José Rodrigo González por dirigirme y permitirme adquirir este nuevo conocimiento. A mis compañeros de clases y amigos gracias por su apoyo y respaldo durante todo el proceso. Agradezco a la maestría en matemáticas por contar con excelentes docentes altamente capacitados para instruir profesionales hasta alcanzar un gran nivel de formación. Gracias a mi familia por el apoyo incondicional y por impulsarme a seguir adelante.

Índice general

1. Introducción	7
1.1. Planteamiento del problema	8
1.2. Justificación	8
1.3. Objetivos	9
1.3.1. General	9
1.3.2. Específicos	9
1.4. Marco teórico y Antecedentes	9
1.5. Metodología	11
2. Generalidades del Cálculo Fraccionario	12
2.1. Conceptos previos	12
2.1.1. El Factorial	12
2.1.2. Función Gamma	13
2.1.3. Función Beta	14
2.1.4. Función de Mittag-Leffler	15
2.2. Integral y derivada Fraccionaria	18
2.2.1. Funciones Medibles	19
2.2.2. Integral Fraccionaria	19
2.2.3. Integral de Riemann-Liouville	22
2.2.4. Integral de Riemann-Liouville en el semieje \mathbb{R}^+	27
2.2.5. Derivada de Riemann-Liouville	28

2.2.6.	Derivada de Riemann-Liouville en el semieje \mathbb{R}^+	35
2.2.7.	Derivada de Caputo	36
2.2.8.	Ecuación Diferencial Ordinaria Fraccionaria	40
3.	Transformadas de Laplace, Fourier, Mellin y su relación con el análisis fraccionario.	47
3.0.1.	Transformada de Laplace.	47
3.0.2.	Transformada de Mellin	56
3.0.3.	Transformada de Fourier	63
4.	Aplicaciones de los operadores fraccionarios	68
4.0.1.	Reacción Química	68
4.0.2.	Velocidad de Reacción	69
4.0.3.	Ecuaciones, ordenes y constantes de velocidad	70
4.0.4.	Ecuaciones químicas de primer orden	70
4.0.5.	Tiempo de vida media	71
4.0.6.	Ecuaciones químicas de segundo orden	73
4.0.7.	Ley de la Dinámica	75
4.0.8.	Ecuación de Calor	79
4.0.9.	Ecuación de Black-Scholes	80
5.	Conclusiones	83
5.1.	Sugerencias y recomendaciones	84

Capítulo 1

Introducción

En el planteamiento del problema de este trabajo de grado se explica la importancia de los operadores fraccionarios, esto debido a la no localidad en sus definiciones lo cual convierten a dichos operadores en herramientas poderosas en el análisis del comportamiento de las funciones, atribuyendo a las ecuaciones diferenciales fraccionarias una representación más concordante en la explicación de fenómenos del entorno. Esta investigación se justifica tomando como base las múltiples definiciones de derivadas e integrales fraccionarias que hay hasta la fecha y por ende se hace necesario realizar estudios de las transformadas de Laplace, Fourier y Mellin para dar soluciones a dichas ecuaciones; soluciones expresadas de forma analítica o mediante algoritmos de aproximación. Específicamente se busca comprender que el análisis fraccionario es una generalización del análisis clásicos, entender la teoría de transformadas integrales, resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias y aplicar la teoría de los operadores fraccionarios a diversas áreas del conocimiento. Inicialmente se retoman conceptos generales del cálculo fraccionario como lo son el factorial, función gamma, función beta y función de Mittag-Leffler. Luego se procede a definir los operadores fracciones relacionados a la deriva e integral de Riemann-Liouville y Caputo. En concordancia con los objetivos de la investigación se procede a hallar las transformadas de Laplace, Fourier y Mellin de los operadores de Riemann-Liouville y Caputo. Finaliza esta investigación aplicando la teoría desarrollada a situaciones problemas de la continuidad descritas mediante ecuaciones diferenciales fraccionarias o clásicas como la cinética química, segunda ley de Newton, ecuación de calor unidimensional y ecuación de Black Scholes.

1.1. Planteamiento del problema

Es sabido, que por la naturaleza no local de los operadores fraccionarios las ecuaciones diferenciales fraccionarias permiten describir de manera más real diversos fenómenos en muchas áreas del conocimiento actual y han mostrado versatilidad en nuevas aplicaciones. Esta característica lleva intrínseco un alto costo en la resolución de los modelos, por más simple que parezcan. Un método que ha mostrado su eficiencia y eficacia es el de las transformadas integrales que se ha mantenido en constante investigación y desarrollo en tanto a mejoras o a nuevas aplicaciones.

A groso modo la idea de utilizar una transformada integral como la de Laplace, Fourier y Mellin consiste en aplicarlas al modelo de estudio junto a sus propiedades con el objetivo de convertirlo en un problema más simple que una vez resuelto requiere la inversión de las transformadas con tal de conseguir la solución del problema original.

1.2. Justificación

Dada la diversidad de generalizaciones de integrales y derivadas fraccionarias y dada la forma especial que adopta cada uno de ellos al considerar condiciones iniciales o de borde es requerido estudiar diversas transformadas integrales que se adapten de la mejor manera para resolver el problema de interés, esto lleva a considerar para nuestro estudio las transformadas de Laplace, Fourier y Mellin. De particular importancia es el hecho de determinar las transformadas inversas que muchas veces no pueden ser expresadas de forma explícitas y requieren una aproximación numérica. En este contexto, son de relevancia los algoritmos de inversión numérica de las transformadas integrales.

Dicho lo anterior estaremos interesados en estudiar y profundizar el método de transformadas integrales a la resolución de ecuaciones diferenciales fraccionarias desde los puntos de vista analítico y numérico. Enfatizamos que este problema de investigación es no trivial pues conlleva un estudio concienzudo de los conceptos, propiedades, técnicas y herramientas computacionales asociadas y recientemente desarrolladas.

1.3. Objetivos

1.3.1. General

Estudiar el método de transformadas integrales como herramienta efectiva para la resolución de modelos diferenciales fraccionarios aplicados a diversas áreas del conocimiento en distintos contextos de derivada fraccionaria.

1.3.2. Específicos

1. Realizar un estudio comparativo entre el análisis fraccionario y el análisis clásico y su aporte problemas teóricos y aplicados.
2. Utilizar la teoría de transformadas integrales en la resolución de problemas en el contexto del análisis fraccionario.
3. Aplicar las técnicas analíticas y numéricas para invertir ciertas transformadas integrales.
4. Resolver distintos tipo de ecuaciones diferenciales fraccionarias mediante la utilización de las transformadas integrales.
5. Aplicar las teorías de ecuaciones diferenciales fraccionarias y transformadas integrales a la resolución de problemas en contexto aplicado a diversas áreas del conocimiento.

1.4. Marco teórico y Antecedentes

Pocos son los hechos en la historia de la matemática en los cuales se sabe su inicio con exactitud. Tal caso es el del origen del hoy llamado cálculo fraccionario o más correctamente cálculo generalizado el que, según se tiene antecedentes [3, 23] , se inicia en una carta entre W. Leibniz y G. de L'Hôpital el 30 de septiembre de 1695 donde discutían el significado de la derivada de orden $\frac{1}{2}$. De esa época a nuestros días muchos matemáticos distinguidos han contribuido a su desarrollo y formalización. Por mencionar algunos de ellos y sus hitos importantes podemos nombrar, por ejemplo a Lacroix, que en 1819 menciona por primera vez la derivada de orden arbitrario. Más tarde, Euler y Fourier trataron el tema sin considerar aplicaciones. En 1823, Abel lo aplicó a la ecuación integral asociada al problema de las isócronas. Esto motivó a Liouville, en 1832, al primer gran intento de una definición formal y consistente de la derivada fraccionaria. En 1847 Riemann escribió un artículo modificando la definición de Liouville del operador fraccionario que se conoce hoy como la Integral

de Riemann-Liouville. En 1868 Letnikov escribió el artículo “Theory of differentiation of fractional order”. Entre 1695 y 1974 otros matemáticos contribuyeron al avance del cálculo fraccionario: Lagrange, Laplace, de Morgan, Heaveside, Riesz, Weyl. En 1974 aparece el primer texto dedicado al cálculo fraccionario: K. B. Oldham y J. Spanier, “The Fractional Calculus”, Academic Press, 1974.

Hoy en día existe bastante bibliografía sobre el cálculo fraccionario, citamos, por ejemplo, a Baleanu y colaboradores [2]. Diethelm [8]. Trujillo y colaboradores [16]. Li y Zeng [17], Ortigueira [19], Miller y Ross [20], Podlubny [21]. Samko y colaboradores [22] entre otros autores. El cálculo de orden fraccionario resulta ser complejo desde el punto de vista matemático y hoy existe muchísimo interés en desarrollar tanto su análisis teórico, como numérico debido a que recientemente se ha probado su importancia en el ámbito de las ciencias e ingeniería. De hecho éstas aparecen en numerosas aplicaciones de visco-elasticidad, electromagnetismo, biología, hidrología, fenómenos de difusión, economía entre otras (ver, por ejemplo, [1,9,10,11,19,24,26] y sus referencias).

Dada la complejidad y diversidad de las definiciones de integral y derivada fraccionaria aparecen múltiples tipos de ecuaciones diferenciales, integrales e integro-diferenciales. Esto conlleva la evidente dificultad para solucionar modelos de este tipo. Un método que ha mostrado mucha eficiencia en la resolución de estos tipos de modelos es el de las transformadas integrales. En este trabajo de grado pretendemos estudiar formalmente las transformadas de Laplace, Fourier y Mellin, siendo esta última mucho menos conocida que las dos anteriores, en el contexto del análisis fraccionario. Si bien la idea de usar transformadas integrales es bastante antigua y ya ampliamente probada en el ámbito de las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, en el contexto de las ecuaciones diferenciales fraccionarias es relativamente nueva y continúa siendo materia de amplias investigaciones a nivel mundial.

Butera y Di Paola en [4] y [5] aplican la transformada de Mellin para resolver un modelo diferencial fraccionario multi-orden y un sistema de ecuaciones diferenciales fraccionario acoplado. Campos y Huet en [6] consideran el problema de invertir la transformada de Laplace al estudiar la ecuación de difusión fraccionaria. Capelas de Oliveira y colaboradores en [7] muestran resultados sobre cálculo fraccionario utilizando la transformada de Laplace en modelos de relajación de funciones. Katugampola en [12] aplica la transformada de Mellin para estudiar la generalización de derivada e integral fraccionaria de Riemann-Liouville y Hadamard. Kaur y colaboradores en [13] obtienen una nueva expresión analítica para la derivada fraccionaria de Riez en el dominio de la transformada de Fourier. Kexue y Jigen en [14] determinan condiciones para garantizar la existencia de soluciones de una ecuación diferencial fraccionaria con coeficientes constantes mediante el uso de transformada de Laplace. Kumara y colaboradores en [15] estudian un modelo de difusión fraccionaria y su solución mediante la transformada de Laplace. Mohamed y Elzaki [18] aplican una nueva transformada

denominada de Elzaki para aproximar la solución de una ecuación diferencial fraccionaria parcial no lineal. Shenga y colaboradores en [25] aplican algoritmos de inversión numérica de la transformada de Laplace para resolver cierto tipo de ecuaciones diferenciales fraccionarias.

De lo anteriormente expuesto se desprende que el estudio de las transformadas integrales en el contexto del análisis fraccionario es un tópico de relevancia y actualidad para la comunidad científica. Este hecho da valor al estudio que se pretende desarrollar en esta tesis.

1.5. Metodología

Para el logro del objetivo general y los específicos realizamos las siguientes actividades:

1. Investigación en libros y artículos los conceptos fundamentales de cálculo fraccionario referentes a las distintas generalizaciones de integral y derivada, sus condiciones de existencia, propiedades y características propias.
2. Estudio en libros y artículos los conceptos y teoremas relativos a ecuaciones diferenciales e integro-diferenciales fraccionarias. Condiciones de existencia y unicidad de soluciones.
3. Estudio de manera general el concepto de transformada integral, sus condiciones de existencia y propiedades, puntualizando en las transformadas de Laplace, Fourier y Mellin. Inversión analítica y numérica de las transformadas integrales, condiciones de inversión y métodos.
4. Investigación en libros y artículos la forma de implementar la resolución de ecuaciones diferenciales e integro-diferenciales fraccionarias mediante transformadas integrales, sus condiciones de aplicabilidad, últimos resultados científicos y algoritmos numéricos.
5. Aplicación las distintas estrategias analíticas y numéricas de las transformadas integrales a la resolución de algunos modelos diferenciales e integro-diferenciales fraccionarios.

Capítulo 2

Generalidades del Cálculo Fraccionario

2.1. Conceptos previos

Es de gran relevancia hacer énfasis en los conceptos de factorial, Función Gamma de Euler, Función Beta de Euler y la Función de Mittag-Leffler para poder profundizar en el estudio de los operadores diferenciales e integrales fraccionarios.

2.1.1. El Factorial

Se define el factorial de x , donde $x \in \mathbb{N}$ como:

$$x! = x(x-1)(x-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Proposición 1.

1. $x! = x(x-1)!$; $x > 1$.
2. $x! = y! \Leftrightarrow x = y \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$.
3. $xx! = (x+1)! - x!$.
4. $\frac{x!}{(x-1)!} = x, \quad x > 1$.

Nótese que el factorial definido de esta manera no admite el valor de $x = 0$, ya que parece generar ambigüedad en la definición, pero con la ayuda de la función Gamma definida en (1) se determinará que es posible definir $0!$ sin ningún inconveniente.

2.1.2. Función Gamma

Definición 1 (Gamma de Euler).

Sea Γ una función de variable compleja la cual converge para $z \in \mathbb{C}$; donde $\text{Re}(z) > 0$. La función Gamma de Euler se define como:

$$\Gamma : \begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \end{array} \quad (2.1)$$

Es fácil comprobar mediante integración por partes que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. En efecto,

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt \\ &= -e^{-t} t^z \Big|_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= z\Gamma(z). \end{aligned}$$

Realizando integración por partes de manera iterada se establece las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \Gamma(z+2) &= (z+1)\Gamma(z+1) = (z+1)z\Gamma(z) \\ \Gamma(z+3) &= (z+2)(z+1)z\Gamma(z) \\ &\vdots \\ \Gamma(z+n) &= (z+n-1)(z+n-2)\cdots z\Gamma(z) \\ \Gamma(z+n) &= (z)_n \Gamma(z), \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde $(z)_n$ es el símbolo de Pochhammer, el cual se define de la siguiente manera:

$$(z)_n = \begin{cases} (z+n-1)(z+n-2)\cdots z = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}, & n > 0 \\ 0! = 1 & n = 0 \end{cases} = \frac{(z+n-1)!}{(z-1)!} \quad (2.3)$$

Por lo tanto:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n}, \quad \text{Re}(z) > -n; \quad n \in \mathbb{N}; \quad z \notin \mathbb{Z}^- = \{0, -1, -2, -3, \dots\} \quad (2.4)$$

Por las ecuaciones (2.3) y (2.4) se tiene que:

$$\Gamma(n+1) = (1)_n = n!. \quad (2.5)$$

Así $\forall x \in \mathbb{Z}^+$, donde $x = \operatorname{Re}(z)$, es posible establecer el factorial en términos de la función Gamma como:

$$\Gamma(x + 1) = x! = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt. \quad (2.6)$$

Este importante resultado permite considerar a la Función Gamma como la generalización del factorial ya que extiende el factorial a valores complejos lo cual trae consigo significativas implicaciones.

Proposición 2.

1. $\Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ ($z \notin \mathbb{Z}_0; 0 < \operatorname{Re}(z) < 1$); $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
2. $\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)$ ($z \in \mathbb{C}$).

2.1.3. Función Beta

Definición 2 (Beta de Euler).

Sean $z, w \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(z) > 0$ y $\operatorname{Re}(w) > 0$. La función Beta de Euler se define como:

$$\beta : \begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \beta(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1 - t)^{w-1} dt. \end{array} \quad (2.7)$$

Proposición 3.

1. $\beta(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z + w)}$.
2. $\beta(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} \theta)^{2p-1} (\operatorname{cos} \theta)^{2q-1} d\theta$, $p, q \in \mathbb{R}^+$.

2.1.4. Función de Mittag-Leffler

Definición 3. Sean $\alpha, z \in \mathbb{C}$ tales que $Re(\alpha) > 0$ y $Re(z) > 0$. La función de Mittag-Leffler de parámetro α se define como:

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}. \quad (2.8)$$

Nótese que :

$$E_\alpha(z) = \begin{cases} \frac{1}{1-z} & \text{si } \alpha = 0 \\ e^z & \text{si } \alpha = 1 \\ \cos(\sqrt{z}) & \text{si } \alpha = 2. \end{cases}$$

Ver gráfica (2.1) para mayor claridad sobre la convergencia de las anteriores funciones.

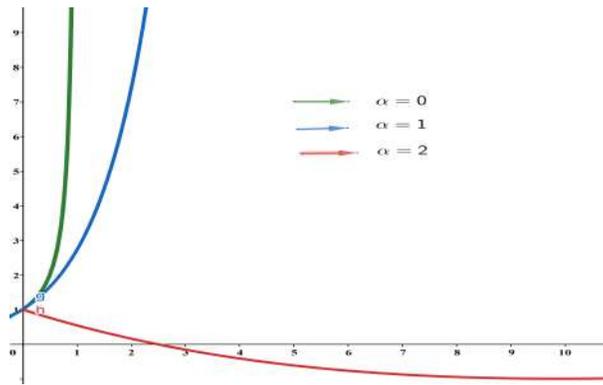


Figura 2.1: Gráfica de $E_\alpha(z)$ para $\alpha = 0, 1, 2$.

En la gráfica (2.1) se puede apreciar la importancia de la función Mittag-Leffler de un parámetro α . Considerando $R(z)$ en el intervalo $0 \leq Re(z) \leq \infty$, donde $Im(z) = 0$ se puede apreciar diferentes casos de convergencia de la función Mittag-Leffler si se consideran valores apropiados de α como se muestra en la gráfica. Las funciones obtenidas en este caso particular para valores de $\alpha = 0, 1, 2$ son la función racional, exponencial y trigonométrica respectivamente, este hecho no es para nada trivial ya que existen pocos casos de funciones que sean capaz de generar una variedad de otros casos de funciones como lo logra la función de Mittag-Leffler.

La función de Mittag-Leffler cobra gran relevancia en el análisis fraccionario como se podrá evidenciar mas adelante. Esta función es fundamental para alcanzar los objetivos de esta investigación, y en general, resulta indispensable en el desarrollo formal del análisis fraccionario. La razón de su papel protagónico dentro de esta línea de investigación es similar al que tiene la función exponencial $f(t) = e^{at}$ para las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Parciales. La

versatilidad y presencia de la función Mittag-Leffler dentro del análisis fraccionario la convierte en una herramienta indispensable para avanzar en dicha línea de investigación; de ahí el interés por estudiar esta función y buscar una formulación más compacta y global como se muestra a continuación.

R. P. Agarwal ² introduce una generalización de la función de Mittag-Leffler, que considera dos parámetros $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ con $\text{Re}(\alpha) > 0$, denotada por $E_{\alpha, \beta}(z)$, definida como:

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}. \quad (2.9)$$

donde $z \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(z) > 0$.

Nótese que :

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \begin{cases} E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} & \text{si } \beta = 1 \\ \frac{e^z - 1}{z} & \text{si } \alpha = 1, \beta = 2 \\ \frac{\text{senh}(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} & \text{si } \alpha = 2, \beta = 2. \end{cases}$$

Para mayor comprensión del comportamiento de las anteriores funciones observe la gráfica (2.2)

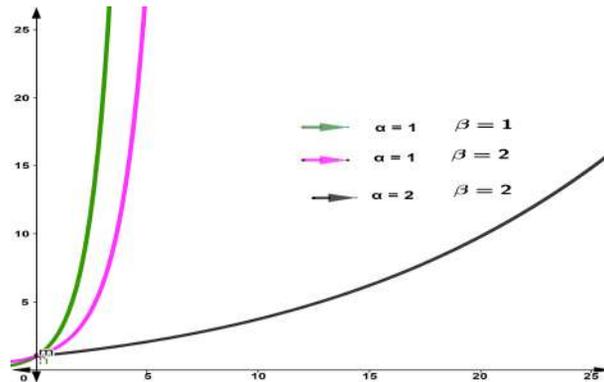


Figura 2.2: Gráfica de $E_{\alpha, \beta}$ para $1 \leq \alpha, \beta \leq 2$

En la gráfica (2.2) se puede apreciar la importancia de la función Mittag-Leffler de dos parámetros α, β . Considerando $R(z)$ en el intervalo $0 \leq \text{Re}(z) \leq \infty$, donde $\text{Im}(z) = 0$, se puede apreciar diferentes casos de convergencia de la función Mittag-Leffler si se consideran valores apropiados de α y β como se muestra en la gráfica. Las funciones obtenidas para el caso de dos parámetros van desde la función Mittag-Leffler de un parámetro hasta una gama de funciones logarítmicas, exponenciales, trigonométricas y combinaciones de ellas.

A continuación se muestra algunas identidades:

1. $E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z}$.

$$2. E_{2,2}(z) = \frac{\sinh\sqrt{z}}{\sqrt{z}}.$$

Verifiquemos la identidad 1. Partiendo de la definición de la función de Mittag-Leffler:

$$\begin{aligned} E_{1,2}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)}, \text{ con } p = k + 1 \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{z^{p-1}}{\Gamma(p+1)} \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{z^{p-1}}{p!} \\ &= \frac{1}{z} \left[\left(1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{z^p}{p!} \right) - 1 \right] \\ &= \frac{1}{z} \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^p}{p!} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{z} (e^z - 1) \\ &= \frac{e^z - 1}{z}. \end{aligned}$$

Finalizando la prueba. \square

Verifiquemos la identidad 2.

Evaluando los valores de α y β en la definición de la función de Mittag-Leffler :

$$\begin{aligned} E_{2,2}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(2k+2)} \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{z^{\frac{p-1}{2}}}{p!} \\ &= \frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{z^{\frac{p}{2}}}{p!}. \end{aligned}$$

Recuperando la variable k , dado que $p = 2k + 1$ se tiene:

$$\begin{aligned} E_{2,2}(z) &= \frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{\frac{2k+1}{2}}}{(2k+1)!} \\ &= \frac{\sinh(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}. \end{aligned}$$

Finalizando la prueba. \square

Proposición 4. Sean $\alpha, \beta, z \in \mathbb{C}$ con $\text{Re}(\alpha) > 0$ y $m \in \mathbb{N}$, entonces:

$$E_{\alpha, \beta}^{(m)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!z^k}{k!\Gamma(\alpha k + \alpha m + \beta)}.$$

Demostremos la veracidad de la proposición anterior.

Partiendo de la función Mittag-Leffler de dos parámetros definida en (2.9) y teniendo en cuenta la convergencia uniforme de dicha función, se tiene que:

$$\begin{aligned} E_{\alpha, \beta}^{(m)}(z) &= \frac{d^m}{dz^m} (E_{\alpha, \beta}(z)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{d^m}{dz^m} (z^k) \\ &= \sum_{k=m}^{\infty} \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)z^{k-m}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \\ &= \sum_{k=m}^{\infty} \frac{k(k-1)\dots(k-m+1)(k-m)!z^{k-m}}{(k-m)!\Gamma(\alpha k + \beta)}. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $k \rightarrow k + m$ nos queda:

$$E_{\alpha, \beta}^{(m)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!z^k}{k!\Gamma(\alpha k + \alpha m + \beta)}.$$

Que corresponde con lo que se quería demostrar. \square

2.2. Integral y derivada Fraccionaria

Para adentrarnos en la definición de la Integral y Derivada Fraccionaria, es necesario hacer énfasis en el dominio de definición de las mismas, por tal motivo es de gran relevancia conocer el espacio en el que viven estas funciones y la localidad de los operadores fraccionarios. En concordancia con los objetivos planteados se hará énfasis particularmente en las integrales y derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville y Caputo, a modo de invitación al lector se hará mención de las derivadas de Grünwald-Letnikov y Weyl para ampliar el conocimiento respecto a las diferentes definiciones que se conocen de Derivas e Integrales Fraccionarias.

2.2.1. Funciones Medibles

Durante el desarrollo de este capítulo se asumirá que $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$ fijos, que definen un intervalo $[a, b]$ o (a, b) de \mathbb{R} según se disponga. Además, si $p \in [0, \infty)$ denotaremos por $L^p[a, b]$ al conjunto:

$$L^p[a, b] = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \text{ medible tal que } \int_a^b |f(t)|^p dt < \infty \right\};$$

dotado de la norma:

$$\|f\|_{L^p[a, b]} = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Asimismo, se define el espacio L^∞ como el espacio de las funciones medibles f que verifican:

$L^\infty[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ donde } f \text{ es medible tal que } \exists C > 0 : |f(t)| < C\}$, dotado de la norma :

$$\|f\|_{L^\infty[a, b]} = \inf\{C > 0 \text{ tal que } |f(t)| < C\}.$$

2.2.2. Integral Fraccionaria

Derivada Iterada

Si a una función $f(x)$ se le aplica n-veces la operación composición de funciones sobre sí misma, se tiene :

$$\begin{aligned} n = 0 &\rightarrow f^0(x) = x, \\ n = 1 &\rightarrow f^1(x) = f(x), \\ n = 2 &\rightarrow f^2(x) = f(x) \circ f(x) = f(f(x)), \\ &\vdots \\ n = m &\rightarrow f^m(x) = f(x) \circ f(x) \circ \cdots \circ f(x) = f(f(\cdots f(x))). \end{aligned} \tag{2.10}$$

De igual manera como se construyó la n-ésima composición de una función sobre si misma, se puede establecer la derivada iterada.

$$\begin{aligned}
n = 0 &\rightarrow D^0 f(x) = \frac{d^0}{dx^0} f(x) = f(x), \\
n = 1 &\rightarrow D^1 f(x) = \frac{d^1}{dx^1} f(x) = \frac{d}{dx} f(x), \\
n = 2 &\rightarrow D^2 f(x) = D[Df(x)] = \frac{d}{dx} \left[\frac{d}{dx} f(x) \right] = \frac{d^2}{dx^2} f(x), \\
&\vdots \\
n = m &\rightarrow D^m f(x) = D[D \cdots [Df(x)]] = \frac{d}{dx} \left[\frac{d}{dx} \cdots \left[\frac{d}{dx} f(x) \right] \right] = \frac{d^m}{dx^m} f(x).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Integral Iterada.

Tomando como referencia el planteamiento de la n-ésima composición de una función y la derivada iterada, también es posible construir la integral iterada de una función. Cabe aclarar que la integral iterada de una función $f(x)$, con $x > 0$, cuyo dominio de definición de f esta dado por el intervalo $[0, x]$ consiste en aplicar reiteradas veces la integral sobre la misma función

Dada una función f , la integral definida de f , denotada por D^{-1} o $I^1(f(x))$ esta dada por:

$$\begin{aligned}
n = 1 &\rightarrow D^{-1} = I^1(f(x)) = \int_0^x f(t) dt, \\
n = 2 &\rightarrow D^{-2} = I^2(f(x)) = \int_0^x I^1(f(x)) dt = \int_0^x \int_0^x f(t) dt dt \\
n = 3 &\rightarrow D^{-3} = I^3(f(x)) = \int_0^x \left[\int_0^x I^2(f(x)) dt \right] dt = \int_0^x \left[\int_0^x \left[\int_0^x f(t) dt \right] dt \right] dt \\
&\vdots \\
n = m &\rightarrow D^{-m} = I^m(f(x)) = \int_0^x \left[\int_0^x I^{m-1}(f(x)) dt \right] dt = \int_0^x \left[\cdots \left[\int_0^x \left[\int_0^x f(t) dt \right] dt \right] \right] dt.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

El resultado obtenido en (2.12) se puede expresar a través de la formula repetida de la integral. Tomando como punto de partida el problema del análisis clásico de la Fórmula de Cauchy para la integral iterada en la cual se tiene que:

$$\int_{x_0}^x dt \int_{x_0}^x dt \cdots \int_{x_0}^x dt \int_{x_0}^x f(t) dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{(n-1)} f(t) dt.$$

Demostración.

□

Aplicando inducción completa. Para $n = 2$ tenemos:

$$\int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x f(x) dx = \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x f(t) dt = \int_D \int f(t) dx dt.$$

Cambiando el orden de integración obtenemos:

$$\int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{x_0}^x dt \int_t^x f(t) dx = \int_{x_0}^x f(t) dt \int_t^x dx = \int_{x_0}^x (x - t) f(t) dt.$$

Luego, para $n = 2$ la fórmula es válida. Supongamos que vale para $n - 1$ y demostraremos para n . Sea:

$$\underbrace{\int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x dx \dots \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x f(t) dt}_{n-1} = \frac{1}{(n-2)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-2} f(t) dt.$$

Integramos una vez más respecto de x , y obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x dx \dots \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x f(t) dt &= \frac{1}{(n-2)!} \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x (x-t)^{n-2} f(t) dt \\ &= \frac{1}{(n-2)!} \iint_D (x-t)^{n-2} f(t) dx dt \\ &= \frac{1}{(n-2)!} \int_{x_0}^x f(t) dt \int_t^x (x-t)^{n-2} dx \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f(t) dt. \end{aligned}$$

Es decir, la fórmula es válida también para n . Por lo tanto, el teorema queda demostrado. □

Por la definición (2.12) el resultado anterior se puede expresar como:

$$I^n(f(x)) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f(t) dt.$$

El resultado anterior denota la n -ésima integral de una función f , donde $n \in \mathbb{N}$. Esta definición no es general para todo tipo de funciones, lo cual sugiere condiciones necesarias de existencia para f . Al aparecer el factor Γ en la definición, es tentador preguntarse, ¿existirán integrales de orden fraccionario?, la pregunta no resulta ni en lo mínimo absurda, ya que como se analizó en la sección del factorial es posible extenderlo para $n \in \{\mathbb{R} - \mathbb{Z}^-\}$. La respuesta a la pregunta ha sido respondida bajo la definición de Integral Fraccionaria de Riemann-Liouville como se muestra a continuación.

2.2.3. Integral de Riemann-Liouville

Definición 4. Sean $f \in L^1[a, b]$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(\alpha) > 0$. Las integrales de Riemann-Liouville de orden α de la función f , denotadas por $\mathcal{I}_{a^+,t}^\alpha[f(t)]$ y $\mathcal{I}_{b^-,t}^\alpha[f(t)]$, se definen como:

$$\mathcal{I}_{a^+,t}^\alpha[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds, \quad t > a \quad (2.13)$$

y

$$\mathcal{I}_{b^-,t}^\alpha[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b \frac{f(s)}{(s-t)^{1-\alpha}} ds, \quad t < b, \quad (2.14)$$

denominadas integral izquierda y derecha respectivamente.

En adelante se trabajará con la integral fraccionaria izquierda de Riemann-Liouville, ya que la integral fraccionaria derecha de Riemann-Liouville se comporta de manera similar y por tal razón se hará uso únicamente de dicha integral a menos que se indique lo contrario.

A continuación se muestran algunos resultados obtenidos al aplicar la integral fraccionaria de Riemann-Liouville a algunas funciones:

Proposición 5. Sean $f \in L^1[a, b]$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(\alpha) > 0$. La integral fraccionaria de Riemann-Liouville para las siguientes funciones está dada por:

Propiedad	Función $f(t)$	Integral Fraccionaria $\mathcal{I}_{a^+,t}^\alpha[f(t)], t > 0, \alpha \in \mathbb{C}$
1	λ	$\frac{\lambda(t-a)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}, \quad t > a$
2	$(t-a)^\eta$	$\frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\eta+\alpha+1)}(t-a)^{\eta+\alpha}, \quad t > a$
3	$e^{\lambda t}$	$t^\alpha E_{1,\alpha+1}(\lambda t), \quad \lambda > 0, \alpha > 0$
4	$\sin(\lambda t)$	$\lambda t^{\alpha+1} E_{2,\alpha+2}(-\lambda^2 t^2), \quad \lambda > 0, \alpha > -1$
5	$\cos(\lambda t)$	$t^\alpha E_{2,\alpha+1}(-\lambda^2 t^2), \quad \lambda > 0, \alpha > -1$

Prueba de la Propiedad 2. Aplicando la directamente la expresión (2.13) tenemos:

$$\mathcal{I}_{a^+,t}^\alpha [(t-a)^\eta] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{(s-a)^\eta}{(t-s)^{1-\alpha}} ds.$$

Considerando el cambio de variable $u = s - a$ y ordenando adecuadamente tenemos:

$$\mathcal{I}_{a^+,t}^\alpha [(t-a)^\eta] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t-a} u^\eta (t-a)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{u}{t-a}\right)^{\alpha-1} du.$$

Nuevamente, haciendo el cambio de variables $v = \frac{u}{t-a}$ y ordenando obtenemos:

$$\mathcal{I}_{a^+,t}^\alpha [(t-a)^\eta] = \frac{(t-a)^{\eta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 v^\eta (1-v)^{\alpha-1} dv.$$

Notando que la integral anterior corresponde a $B(\eta + 1, \alpha)$ que en virtud de la propiedad 1 de la Proposición (3) puede ser escrita como $B(\eta + 1, \alpha) = \frac{\Gamma(\eta+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\eta+\alpha+1)}$.

Así:

$$\mathcal{I}_{a^+,t}^\alpha [(t-a)^\eta] = \frac{(t-a)^{\eta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\eta+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\eta+\alpha+1)}.$$

Simplificando se obtiene:

$$\mathcal{I}_{a^+,t}^\alpha [(t-a)^\eta] = \frac{\Gamma(\eta+1)(t-a)^{\eta+\alpha}}{\Gamma(\eta+\alpha+1)}.$$

Corresponde con lo que se quería mostrar. \square

En la gráfica (2.3) se muestra la familia de curvas generadas para valores de $0 \leq \alpha \leq 1$, para casos particulares de la integral de $(t-a)^\eta$.

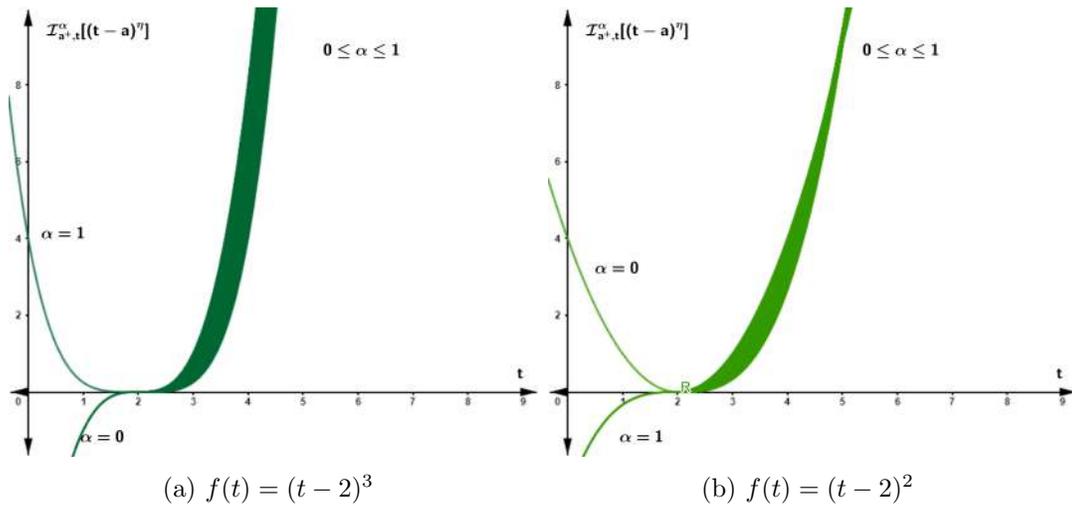


Figura 2.3: $\mathcal{I}_{a^+,t}^\alpha [(t-a)^\eta]$, $\eta = 3, 2$; $a = 2$

La gráfica 2.3a representa la integral fraccionaria de la función polinomial $f(t) = (t-2)^3$, donde $0 \leq \alpha \leq 1$. Nótese que todas las funciones para las cuales $0 \leq \alpha \leq 1$ va acercándose a la primitiva de f comparten la misma raíz, adicionalmente estas funciones intermedias presentan la misma concavidad y su geometría es similar, completamente homogéneas en cuanto a su estructura. La gráfica 2.3b que determina la familia de curvas de la función $f(t) = (t-2)^2$ presenta un comportamiento similar al descrito en 2.3a.

Prueba de la Propiedad 3.

Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(\alpha) > 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\mathcal{I}_{0^+,t}^\alpha [e^{\lambda t}] = t^\alpha E_{1,\alpha+1}(\lambda t).$$

Aplicaremos la definición de integral de Riemann-Loiuville izquierda (2) al desarrollo Taylor de $e^{\lambda t}$. Según ello tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{0^+,t}^\alpha [e^{\lambda t}] &= \mathcal{I}_{0^+,t}^\alpha \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \mathcal{I}_{0^+,t}^\alpha [t^k]. \end{aligned}$$

De acuerdo a la Propiedad 2 de la Proposición 5 tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{0^+,t}^\alpha [e^{\lambda t}] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)} t^{k+\alpha} \\ &= t^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{\Gamma(k+\alpha+1)} \\ &= t^\alpha E_{1,\alpha+1}(\lambda t). \end{aligned}$$

Corresponde con lo que se quería mostrar. \square

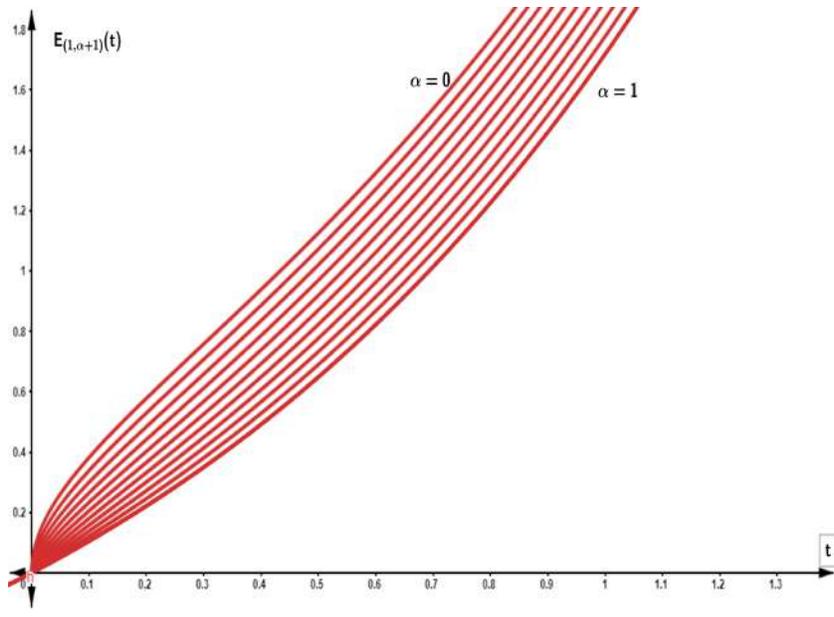


Figura 2.4: Gráfica de $t^\alpha E_{1,\alpha+1}(\lambda t)$ para $0,5 \leq \alpha \leq 1$, $1,5 \leq \beta \leq 2$, $\lambda = 1$

En la gráfica (2.4) se muestra la familia de curvas generadas por valores de $0 \leq \alpha \leq 1$ de la integral fraccionaria de la función exponencial. A través de la gráfica es posible verificar que la familia de funciones obtenidas a partir de la integral fraccionaria de la función exponencial no presentan propiedades similares como en el caso de las funciones polinomiales abordadas en (2.3). Estas funciones presentan una geometría heterogénea en los intervalos para los cuales $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ a medida que α tiende a 1.

Prueba de la Propiedad 4.

Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $Re(\alpha) > 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\mathcal{I}_{0^+,t}^\alpha[\text{sen}(\lambda t)] = \lambda t^{\alpha+1} E_{2,\alpha+2}(-\lambda^2 t^2).$$

Recordemos que $\text{sen}(\lambda t) = \frac{1}{2i} (e^{\lambda ti} - e^{-\lambda ti})$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{0^+,t}^\alpha[\text{sen}(\lambda t)] &= \frac{1}{2i} \mathcal{I}_{0^+,t}^\alpha [e^{\lambda ti} - e^{-\lambda ti}] \\ &= \frac{1}{2i} (\mathcal{I}_{0^+,t}^\alpha [e^{\lambda ti}] - \mathcal{I}_{0^+,t}^\alpha [e^{-\lambda ti}]). \end{aligned}$$

Aplicando el resultado de la Propiedad 3 tenemos:

$$\mathcal{I}_{0^+,t}^\alpha[\text{sen}(\lambda t)] = \frac{t^\alpha}{2i} (E_{1,\alpha+1}(\lambda ti) - E_{1,\alpha+1}(-\lambda ti)).$$

De acuerdo a la definición (2.9) obtenemos finalmente:

$$\mathcal{I}_{0^+,t}^\alpha[\text{sen}(\lambda t)] = \lambda t^{\alpha+1} E_{2,\alpha+2}(-\lambda^2 t^2).$$

Corresponde con lo que se quería mostrar. \square

Observe el comportamiento de la función seno y sus variantes dadas por los ordenes de integración arbitrarios de α en la gráfica (2.5). Nótese que una curva sinusoidal asociada a cierto valor de α , presenta una variación en su periodo y amplitud con respecto al orden de integración que se considere. La uniformidad de las funciones para este caso particular es bastante sorprendente, ya que estas función muestra un comportamiento estructural muy similar.

Proposición 6.

Sean $f, g \in L^1(a, b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tales que $Re(\alpha) > 0$, $Re(\beta) > 0$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Entonces para $a < t < b$ se cumple que:

1. $\mathcal{I}_{a^+,t}^\alpha[\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda \mathcal{I}_{a^+,t}^\alpha[f(t)] + \mu \mathcal{I}_{a^+,t}^\alpha[g(t)]$.
2. $(\mathcal{I}_{a^+,t}^\alpha \mathcal{I}_{a^+,t}^\beta)[f(t)] = (\mathcal{I}_{a^+,t}^\beta \mathcal{I}_{a^+,t}^\alpha)[f(t)] = \mathcal{I}_{a^+,t}^{\alpha+\beta}[f(t)]$.
3. $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \mathcal{I}_{a^+,t}^\alpha[f(t)] = f(t)$.

De manera específica, las propiedades de la proposición (6) indican:

1. La propiedad 1 establece que la integral fraccionaria cumple la linealidad de funciones.
2. La propiedad 2 indica que la integral fraccionaria es conmutativa.

3. La propiedad 3 establece la convergencia de la integral fraccionaria de una función a dicha función si el orden de integración es cercano a cero.

Alex Sepúlveda [26] en su texto “Apuntes del análisis fraccionario” realiza las demostraciones de la gran mayoría de las propiedades enunciadas anteriormente.

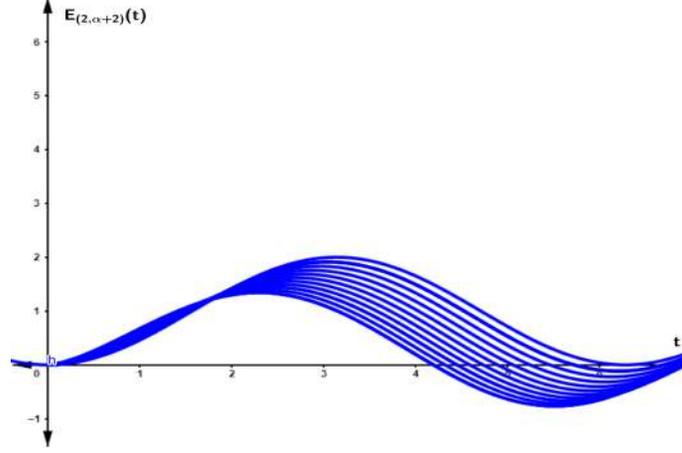


Figura 2.5: Gráfica de $t^{\alpha+1}E_{2,\alpha+2}(\lambda t^2)$ para $0,5 \leq \alpha \leq 1$, $2,5 \leq \beta \leq 3$, $\lambda = 1$

Prueba de la Proposición 2.

Respecto a la segunda propiedad tenemos:

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{I}_{a^+,t}^\alpha \mathcal{I}_{a^+,t}^\beta\right)[f(t)] &= \mathcal{I}_{a^+,t}^\alpha \left[\mathcal{I}_{a^+,t}^\beta[f(t)]\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\mathcal{I}_{a^+,s}^\beta[f(s)]}{(t-s)^{1-\alpha}} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \frac{ds}{(t-s)^{1-\alpha}} \int_a^s \frac{f(\tau)}{(s-\tau)^{1-\beta}} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_a^s \frac{f(\tau)}{(t-s)^{1-\alpha}(s-\tau)^{1-\beta}} d\tau ds.
\end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Fubini para cambiar de orden de integración podemos escribir:

$$\left(\mathcal{I}_{a^+,t}^\alpha \mathcal{I}_{a^+,t}^\beta\right)(f(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_t^t \frac{f(\tau)}{(t-s)^{1-\alpha}(s-\tau)^{1-\beta}} ds d\tau.$$

Haciendo el cambio de variable $s = \tau + u(t - \tau)$ la expresión anterior se transforma en:

$$\left(\mathcal{I}_{a^+,t}^\alpha \mathcal{I}_{a^+,t}^\beta\right)[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \left(\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\alpha-1} du\right) \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha-\beta}} d\tau.$$

Notando que la integral interior es $B(\beta, \alpha)$, aplicando la propiedad 1 de la Proposición 4 y simplificando obtenemos:

$$\left(\mathcal{I}_{a^+,t}^\alpha \mathcal{I}_{a^+,t}^\beta\right)[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha-\beta}} d\tau = \mathcal{I}_{a^+,t}^{\alpha+\beta}[f(t)].$$

Concluyendo la demostración de este ítem. \square

2.2.4. Integral de Riemann-Liouville en el semieje \mathbb{R}^+

A continuación se presenta una definición de la integral de Riemann-Liouville en el Semieje \mathbb{R}^+ . Para ver la demostración y profundizar en esta definición se recomienda estudiar el libro de Samko ([22], Sección 5).

$$(I_{0+}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(s) ds}{(t-s)^{1-\alpha}} \quad (x > 0; \operatorname{Re}(\alpha) > 0)$$

y

$$(I_{-}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^{\infty} \frac{f(s) ds}{(s-t)^{1-\alpha}} \quad (x > 0; \operatorname{Re}(\alpha) > 0).$$

A partir de los resultados anteriores es posible construir derivadas fraccionarias en el semieje de \mathbb{R}^+ . Ambas definiciones serán de gran relevancia en el estudio particular de la Transformada de Mellin que se analizará en el capítulo posterior.

Observación 1. *Retomando el concepto de integral iterada denotada en el numeral (2.12), es posible expresar la integral de la siguiente manera:*

$\mathcal{I}^{-\alpha}[f(x)] = \mathcal{D}^{\alpha}[f(x)]$. *Dado que la derivada es el operador inverso de la integral y retomando el análisis previo realizado en el numeral (2.11) sobre la derivada iterada, es claro que la integral escrita de esta manera esta denotando realmente una derivada.*

Por la propiedad 2 de la proposición 4 se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\alpha}[f(x)] &= \mathcal{D}^n (\mathcal{I}^{n-\alpha}[f(x)]) \\ &= \frac{d^n}{dt^n} (\mathcal{I}^{n-\alpha}[f(x)]) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha+1-n}} dt. \end{aligned}$$

Este resultado se entiende como la derivada fraccionaria de orden α de una función f . La derivada fraccionaria expresada de esta manera no es del todo correcta, teniendo presente la convergencia de la integral de Riemann-Liouville se debe establecer condiciones para α de tal manera que se garantice dicha convergencia. Además que para ciertos valores de $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ la función $\Gamma(n-\alpha)$ no está definida, de ahí la necesidad de establecer una definición mas apropiada de la derivada fraccionaria.

2.2.5. Derivada de Riemann-Liouville

Definición 5. Sean $f \in L^1[a, b]$, $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(\alpha) \geq 0$. Las Derivadas de Riemann-Liouville de la función f , denotadas por $\mathcal{D}_{a^+,t}^\alpha[f(t)]$ y $\mathcal{D}_{b^-,t}^\alpha[f(t)]$, se definen como:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{a^+,t}^\alpha[f(t)] &= \frac{d^n}{dt^n} \left(\mathcal{I}_{a^+,t}^{n-\alpha}[f(t)] \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha+1-n}} ds, \quad t > a\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{b^-,t}^\alpha[f(t)] &:= (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \left(\mathcal{I}_{b^-,t}^{n-\alpha}[f(t)] \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b \frac{f(s)}{(s-t)^{\alpha+1-n}} ds, \quad t < b.\end{aligned}$$

donde $n := \begin{cases} [\text{Re}(\alpha)] + 1 & \text{si } \alpha \notin \mathbb{N} \\ \alpha & \text{si } \alpha \in \mathbb{N} \end{cases}$ y $[\cdot]$ denota la función parte entera.

Estas derivadas se denominan izquierda y derecha respectivamente. Observemos que dado un $n \in \mathbb{N}$ los posibles valores para α satisfacen que $\text{Re}(\alpha) \in (n-1, n)$. Este hecho permite establecer que para un valor de $n \in \mathbb{N}$ se puede determinar derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville de orden $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(\alpha) \in (n-1, n)$.

En adelante se trabajará con la derivada fraccionaria izquierda de Riemann-Liouville, debido que la derivada fraccionaria derecha de Riemann-Liouville se comporta de manera similar y por tal razón se hará uso únicamente de dicha derivada a menos que se indique lo contrario.

A continuación se muestran algunos resultados obtenidos al aplicar la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville a algunas funciones:

Proposición 7. Sean $f \in L^1[a, b]$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(\alpha) > 0$. La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville para las siguientes funciones está dada por:

Propiedad	Función $f(t)$	Derivada Fraccionaria $\mathcal{D}_{a^+,t}^\alpha[f(t)], t > 0, \alpha \in \mathbb{R}$
1	λ	$\frac{\lambda(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad t > a$
2	$(t-a)^\eta$	$\frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\eta-\alpha+1)}(t-a)^{\eta-\alpha}, \quad t > a$
3	$e^{\lambda t}$	$t^{-\alpha} E_{1,1-\alpha}(\lambda t), \quad \lambda > 0, \quad \alpha > 0.$
4	$\sin(\lambda t)$	$\lambda t^{1-\alpha} E_{2,2-\alpha}(-\lambda^2 t^2), \quad \lambda > 0, \quad \alpha > -1$
5	$\cos(\lambda t)$	$t^{-\alpha} E_{2,1-\alpha}(-\lambda^2 t^2), \quad \lambda > 0, \quad \alpha > -1$

Prueba de la Propiedad 1.

Sea $\alpha \in (0, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\mathcal{D}_{a^+,t}^\alpha[\lambda] = \frac{\lambda(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Partiendo de la definición de derivada fraccionaria y simplificando se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a^+,t}^\alpha[\lambda] &= \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{\lambda}{(t-s)^\alpha} ds \\ &= -\frac{\lambda}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left(\frac{(t-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) \Big|_a^t \\ &= \frac{\lambda(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \end{aligned}$$

Lo cual concuerda con lo que se quería demostrar. \square

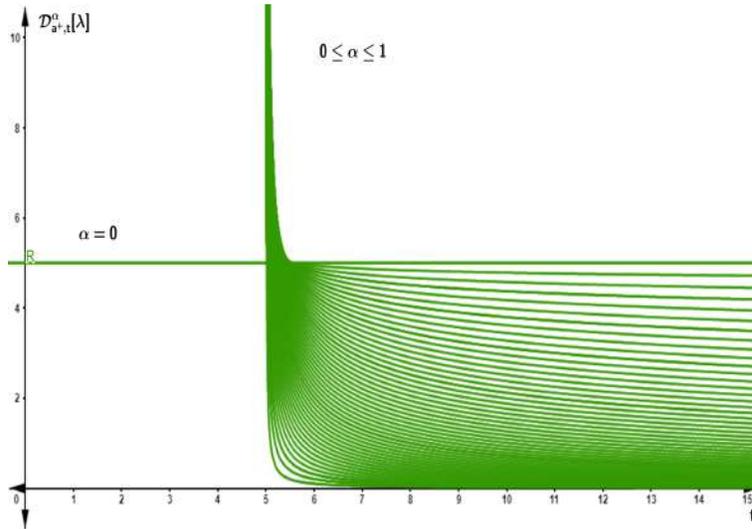


Figura 2.6: Gráfica de $\mathcal{D}_{a^+,t}^\alpha[\lambda]$ para $0 \leq \alpha \leq 1$, $\lambda = 5$, $a = 5$.

La gráfica (2.6) muestra la familia de funciones obtenidas al derivar una constante para valores arbitrarios $0 < \alpha < 1$. Resulta curioso que todas las funciones en el intervalo donde se define α convergen asintóticamente, excepto para $\alpha = 0$ que sufre un cambio abrupto respecto a las otras funciones. Nótese además que no existe la función asociada a $\alpha = 1$, es decir, no es posible recuperar el resultado obtenido en el cálculo clásico para el cual la derivada de cualquier constante es nula. Este hecho resulta sumamente importante ya que genera la interrogante, ¿esta bien definida la derivada fraccionaria de Riemann–Liouville?, ¿acaso la veracidad de los operadores fraccionario no está fundamentada en que es una generalización del cálculo clásico y por ende hereda todas sus propiedades?. Al parecer, es necesario trabajar sobre una definición de derivada

fraccionaria que satisfaga todas las propiedades clásicas, esto debido a que se podrían presentar ciertas inconsistencias más adelante en problemas donde haya que aplicar el operador diferencial de Riemann–Liouville.

Prueba de la Propiedad 3.

Sea $\lambda > 0, \alpha > 0$. Entonces:

$$\mathcal{D}_{a^+,t}^\alpha [e^{\lambda t}] = t^{-\alpha} E_{1,1-\alpha}(\lambda t).$$

Aplicaremos la definición de derivada de Riemann–Liouville izquierda al desarrollo de Taylor de $e^{\lambda t}$. Por consiguiente tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{0^+,t}^\alpha [e^{\lambda t}] &= \frac{d^n}{dt^n} (\mathcal{I}_{0^+,t}^{n-\alpha} [e^{\lambda t}]) \\ &= \frac{d^n}{dt^n} \left(\mathcal{I}_{0^+,t}^{n-\alpha} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \right] \right) \\ &= \frac{d^n}{dt^n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \mathcal{I}_{0^+,t}^{n-\alpha} [t^k] \right). \end{aligned}$$

De acuerdo a la propiedad 2 de la Proposición (7) tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{0^+,t}^\alpha [e^{\lambda t}] &= \frac{d^n}{dt^n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+n-\alpha+1)} t^{n-\alpha+k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(k+n-\alpha+1)} \frac{d^n}{dt^n} (t^{n-\alpha+k}) \\ &= t^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{\Gamma(k+1-\alpha)} \\ &= t^{-\alpha} E_{1,1-\alpha}(\lambda t). \end{aligned}$$

Llegando a lo que se quería mostrar. \square

Probemos la Propiedad 5.

Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\mathcal{D}_{0^+,t}^\alpha [\cos(\lambda t)] = t^{-\alpha} E_{2,1-\alpha}(-\lambda^2 t^2).$$

Escribiendo la función $\cos(\lambda t)$ en término de funciones exponenciales tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{0^+,t}^\alpha [\cos(\lambda t)] &= \frac{1}{2} \mathcal{D}_{0^+,t}^\alpha [e^{\lambda t i} + e^{-\lambda t i}] \\ &= \frac{1}{2} (\mathcal{D}_{0^+,t}^\alpha [e^{\lambda t i}] + \mathcal{D}_{0^+,t}^\alpha [e^{-\lambda t i}]). \end{aligned}$$

Aplicando la Propiedad 3 de la Proposición (7) tenemos:

$$\mathcal{D}_{0^+,t}^\alpha[\cos(\lambda t)] = \frac{t^{-\alpha}}{2} (E_{1,1-\alpha}(\lambda t i) + E_{1,1-\alpha}(-\lambda t i)).$$

De acuerdo a la propiedad 1 de la Proposición 6 obtenemos finalmente:

$$\mathcal{D}_{0^+,t}^\alpha[\cos(\lambda t)] = t^{-\alpha} E_{2,1-\alpha}(-\lambda^2 t^2).$$

Finalizando la demostración. \square

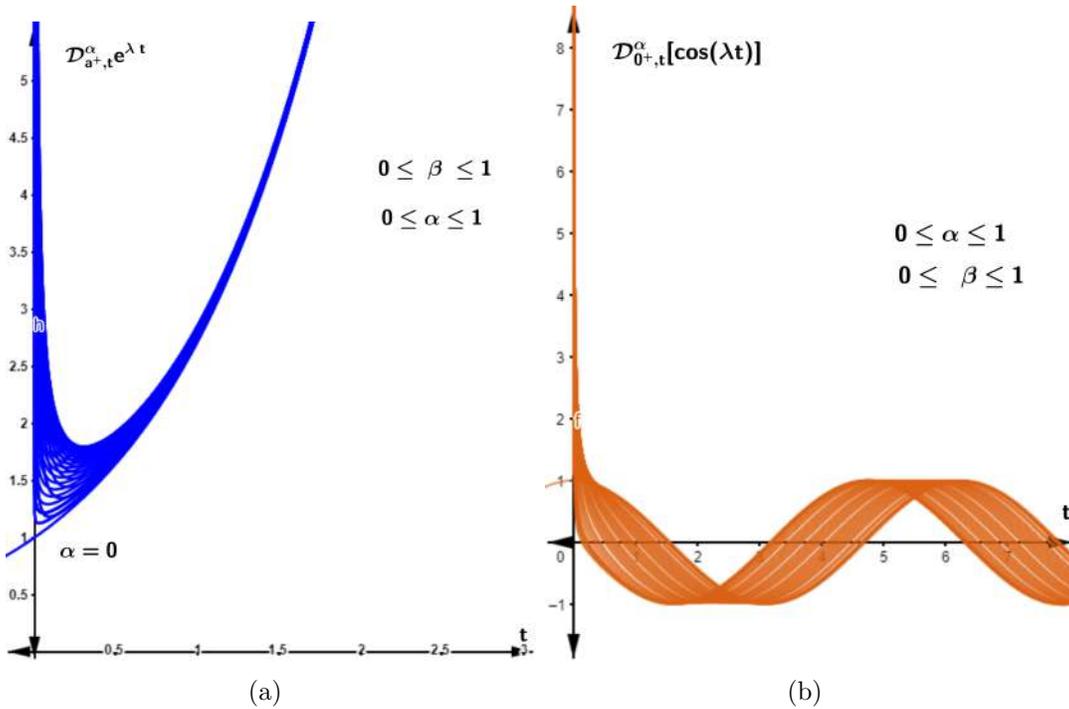


Figura 2.7: Derivada Fraccionaria para $f(t) = e^{\lambda t}$, $g(t) = \cos(\lambda t)$ respectivamente.

Se observa en la gráfica (2.7a) el comportamiento de la función exponencial al ser derivada en ordenes fraccionarios. La gráfica muestra un comportamiento asintótico con el eje y de la familia de funciones asociadas a $0 < \alpha < 1$, lo cual no es bueno del todo ya que en general la función exponencial se caracteriza por cumplir múltiples propiedades la convierten en una de las funciones mas importante del análisis matemático. La concavidad hacia arriba de dichas y su comportamiento asintótico cuando $t \rightarrow 0$ parece indicar que estas funciones no son buenas aproximaciones de la función exponencial ya que contrastan en gran manera con las propiedades propias de la función exponencial. La gráfica (2.7b) nos muestra el comportamiento asintótico de la función coseno cuando $t \rightarrow 0$, en términos generales la familia de curvas obtenidas presentan homogeneidad con respecto a la función clásica, tienen la misma amplitud, frecuencia y un periodo casi similar

lo cual es bueno para esta investigación ya que al igual que la integración fraccionaria para funciones sinusoidales sus variantes son buenas aproximaciones heredando completamente todas las propiedades de la versión clásica.

A partir de la definición de Derivada Fraccionaria de Riemann-Liouville se obtienen los siguientes resultados que resultan de suma importancia para acentuar las bases de dicho operador.

Proposición 8. Sean $f, g \in L^1(a, b), \alpha \in \mathbb{C}$ tal que $Re(\alpha) > 0$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Entonces, para $t \in (a, b)$ se cumple que:

1. $\mathcal{D}_{a^+,t}^\alpha[\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda \mathcal{D}_{a^+,t}^\alpha[f(t)] + \mu \mathcal{D}_{a^+,t}^\alpha[g(t)]$.
2. $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \mathcal{D}_{a^+,t}^\alpha[f(t)] = f(t)$.
3. $(\mathcal{D}_{a^+,t}^\alpha \mathcal{I}_{a^+,t}^\alpha)[f(t)] = f(t)$.
4. $(\mathcal{I}_{a^+,t}^\alpha \mathcal{D}_{a^+,t}^\alpha)[f(t)] = f(t) - \sum_{k=1}^n \frac{(t-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} \mathcal{D}_{a^+,t}^{\alpha-k}[f(t)]|_{t=a}$.

Una interpretación de las propiedades anteriores es:

1. La primera propiedad dice relación con la linealidad del operador derivada de Riemann-Liouville.
2. La segunda permite definir el operador identidad considerando $\alpha = 0$, el que satisface $\mathcal{D}_{a^+,t}^0[f(t)] = f(t)$.
3. La tercera indica que el operador derivada de Riemann-Liouville es inverso izquierdo del operador integral de Riemann-Liouville.
4. Queda de manifiesto en la cuarta propiedad que el operador integral de Riemann-Liouville no es el inverso izquierdo del operador derivada de Riemann-Liouville. Las propiedades anteriores también son válidas para la derivada fraccionaria derecha de Riemann-Liouville.

Verifiquemos la veracidad de la siguiente propiedad $(\mathcal{D}_{a^+,t}^\alpha \mathcal{I}_{a^+,t}^\alpha)[f(t)] = f(t)$

Por definición (5) se tiene que:

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{D}_{a^+,t}^\alpha \mathcal{I}_{a^+,t}^\alpha)[f(t)] &= \frac{d^n}{dt^n} \left(\mathcal{I}_{a^+,t}^{n-\alpha} [\mathcal{I}_{a^+,t}^\alpha[f(t)]] \right) \\
 &= \frac{d^n}{dt^n} (\mathcal{I}_{a^+,t}^n[f(t)]) \\
 &= f(t).
 \end{aligned}$$

Llegando a lo que se quería demostrar. \square

Proposición 9. Sean $f \in L^1(a, b)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ Si $\alpha \leq \beta$.

1. Si $\alpha \leq \beta$, entonces $\left(\mathcal{D}_{a^+,t}^\alpha \mathcal{I}_{a^+,t}^\beta\right) [f(t)] = \mathcal{I}_{a^+,t}^{\beta-\alpha}[f(t)]$

2. Si $\beta \leq \alpha$, entonces $\left(\mathcal{D}_{a^+,t}^\alpha \mathcal{I}_{a^+,t}^\beta\right) [f(t)] = \mathcal{D}_{a^+,t}^{\alpha-\beta}[f(t)]$

3. Sean $m, n \in \mathbb{N}$, $m-1 < \alpha < m$; $n-1 < \beta < n$. Si existen $\mathcal{D}_{a^+,t}^{\alpha+\beta}[f(t)]$, $\left(\mathcal{D}_{a^+,t}^\alpha \mathcal{D}_{a^+,t}^\beta\right) [f(t)]$ $\mathcal{D}_{b^-,t}^{\alpha+\beta}[f(t)]$ y $\left(\mathcal{D}_{b^-,t}^\alpha \mathcal{D}_{b^-,t}^\beta\right) [f(t)]$. entonces:

$$\left(\mathcal{D}_{a^+,t}^\alpha \mathcal{D}_{a^+,t}^\beta\right) [f(t)] = \mathcal{D}_{a^+,t}^{\alpha+\beta}[f(t)] - \sum_{k=1}^n \mathcal{D}_{a^+,t}^{\beta-k}[f(t)] \Big|_{t=a} \frac{(t-a)^{-\alpha-k}}{\Gamma(1-\alpha-k)},$$

y

$$\left(\mathcal{D}_{b^-,t}^\alpha \mathcal{D}_{b^-,t}^\beta\right) [f(t)] = \mathcal{D}_{b^-,t}^{\alpha+\beta}[f(t)] - \sum_{k=1}^n \mathcal{D}_{b^-,t}^{\beta-k}[f(t)] \Big|_{t=b} \frac{(b-t)^{-\alpha-k}}{\Gamma(1-\alpha-k)}.$$

Probemos que la propiedad 1 es verdadera.

Sea $\alpha \leq \beta$, entonces :

$$\left(\mathcal{D}_{a^+,t}^\alpha \mathcal{I}_{a^+,t}^\beta\right) [f(t)] = \mathcal{I}_{a^+,t}^{\beta-\alpha}[f(t)]$$

Por definición:

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{D}_{a^+,t}^\alpha \mathcal{I}_{a^+,t}^\beta\right)[f(t)] &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{\mathcal{I}_{a^+,t}^\beta[f(t)]}{(t-s)^{\alpha+1-n}} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{ds}{(t-s)^{\alpha+1-n}} \int_a^s \frac{f(\tau)}{(s-\tau)^{1-\beta}} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \int_a^s \frac{f(\tau)}{(t-s)^{\alpha+1-n}(s-\tau)^{1-\beta}} d\tau ds.
\end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Fubini para cambiar de orden de integración podemos escribir:

$$\left(\mathcal{D}_{a^+,t}^\alpha \mathcal{I}_{a^+,t}^\beta\right)[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \int_\tau^t \frac{f(\tau)}{(t-s)^{\alpha+1-n}(s-\tau)^{1-\beta}} ds d\tau.$$

Haciendo el cambio de variable $s = \tau + u(t - \tau)$ la expresión anterior se transforma en:

$$\left(\mathcal{D}_{a^+,t}^\alpha \mathcal{I}_{a^+,t}^\beta\right)[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \left(\int_0^1 u^{\beta-1} (1-u)^{n-\alpha-1} du \right) \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-\beta-n+1}} d\tau.$$

Notando que la integral interior es $B(\beta, n - \alpha)$, aplicando la propiedad 1 de la Proposición (3) y simplificando obtenemos:

$$\left(\mathcal{D}_{a^+,t}^\alpha \mathcal{I}_{a^+,t}^\beta\right)[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\beta - \alpha + n)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-\beta-n+1}} d\tau = \mathcal{I}_{a^+,t}^{\beta-\alpha}[f(t)].$$

concluyendo la demostración de este ítem. \square

Las propiedades de la proposición (9) suelen conocerse como propiedades de semi grupos. La propiedad 1 establece que siempre que el orden de la derivada sea menor que el orden de la integral entonces la función a determinar dependerá de la integral. En el caso en que el orden de la derivada sea mayor que el orden de la integral entonces la función a determinar dependerá de derivada. Es fácil verificar que la propiedad 3 es un caso particular y solo se cumple bajo las condiciones planteadas. Verifiquemos este caso a través de la siguiente prueba:

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{D}_{0^+,t}^{1/2} \mathcal{D}_{0^+,t}^{3/2}\right)[t] &= \mathcal{D}_{0^+,t}^{1/2} \left[\mathcal{D}_{0^+,1}^{3/2}[t] \right] = t^{-1}. \\
\mathcal{D}_{0^+,t}^{1/2+3/2}[t] &= \mathcal{D}_{0^+,t}^2[t] = 0.
\end{aligned}$$

Además se observa que $\left(\mathcal{D}_{0^+,t}^{3/2} \mathcal{D}_{0^+,t}^{1/2}\right)[t] = \mathcal{D}_{0^+,t}^{3/2} \left[\mathcal{D}_{0^+,t}^{1/2}[t] \right]$ no está definido.

Proposición 10. Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(\alpha) > 0$ y $m \in \mathbb{N}$. Si las derivadas fraccionarias $\mathcal{D}_{a^+,t}^\alpha[f(t)]$, $\mathcal{D}_{a^+,t}^{\alpha+m}[f(t)]$, $\mathcal{D}_{b^-,t}^\alpha[f(t)]$ y $\mathcal{D}_{b^-,t}^{\alpha+m}[f(t)]$, entonces:

$$\frac{d^m}{dt^m} \left(\mathcal{D}_{a^+,t}^\alpha[f(t)] \right) = \mathcal{D}_{a^+,t}^{\alpha+m}[f(t)],$$

y

$$\frac{d^m}{dt^m} (\mathcal{D}_{b^-,t}^\alpha [f(t)]) = \mathcal{D}_{b^-,t}^{\alpha+m} [f(t)].$$

Hasta el momento no se han presentado condiciones suficientes para garantizar la existencia de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville. Es necesario recurrir a conceptos fundamentales como las “Funciones Absolutamente Continuas” para responder a esa inquietud.

Definición 6. *Función Absolutamente Continua*

Una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ se dice absolutamente continua en $[a, b]$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para toda familia finita de intervalos $[a_k, b_k] \subset [a, b], k = 1, 2, \dots, n$ que verifique $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$ se cumple que $\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon$. Lo que denotaremos por $f \in AC[a, b]$. Se puede verificar en Kilbas [16] que “el espacio de las funciones absolutamente continuas coincide con el espacio de primitivas de funciones Lebesgue integrables”(p.2):

$$f \in AC[a, b] \iff f(t) = c + \int_a^t \varphi(u)du, \quad \varphi \in L^1.$$

Denotaremos por $AC^n[a, b]$ al conjunto:

$$AC^n[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \mid f^{(n-1)}(t) \in AC[a, b].\}$$

Teorema 1. *El espacio $AC^n[a, b]$ está formado exclusivamente por las funciones que se pueden representar de la forma:*

$$f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} \varphi(s)ds + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (t-a)^k.$$

donde $\varphi \in L^1[a, b]$ y c_k con $k = 0, 1, \dots, n-1$ son constantes.

En particular, si escogemos $\varphi(s) = f^{(n)}(s)$ entonces $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ con $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Ver demostración en Kilbas ([16], lema 1).

2.2.6. Derivada de Riemann-Liouville en el semieje \mathbb{R}^+

A continuación se presenta una definición de la Derivada de Riemann-Liouville en el semieje \mathbb{R}^+ . Para mayor información y profundización en esta definición se recomienda estudiar el libro de Samko ([22], Sección 5).

$$(D_{0+}^\alpha y)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{0+}^{n-\alpha} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_0^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}$$

y

$$(D_-^\alpha y)(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_-^{n-\alpha} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^\infty \frac{y(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}},$$

con $n = [\text{Re}(\alpha)] + 1$, $\text{Re}(\alpha) \geq 0$, $x > 0$.

La anterior definición será de gran utilidad en el estudio de la Transformada de Mellin de la Derivada Fraccionaria y a partir de dicho resultado extender dicho estudio a las ecuaciones diferenciales fraccionarias.

El Problema de Riemann-Liouville y la solución de Caputo.

Históricamente se entiende que la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville hizo grandes contribuciones a la satisfactoria formalización del análisis fraccionario, estas contribuciones han tenido cabida en diversas áreas de las matemáticas y cuyo mayor campo de acción ha sido su implementación como herramienta necesaria para el desarrollo de la matemática formal axiomática. Curiosamente la gran utilidad que presenta las definiciones de integral y derivada fraccionarias de Riemann-Liouville en el accionar netamente matemático ha contrastado con su uso en aplicaciones de problemas cotidianos a través de ecuaciones diferenciales fraccionarias, ya que en el estudio de dichas ecuaciones surgieron inconvenientes en la interpretación de las condiciones iniciales fraccionarias bajo las perspectivas de estas definiciones.

El físico matemático italiano Michele Caputo dio una nueva definición de derivada de orden fraccionario que permitía interpretar físicamente las condiciones iniciales de los cada vez más frecuentes problemas aplicados que se estaban estudiando. La definición de Caputo de Derivada Fraccionaria simplifica la complejidad interpretativa que supone la Derivada de Riemann-Liouville, ya que las condiciones iniciales que exige la definición de Caputo son de orden entero, lo cual retoma de forma directa el desarrollo formal realizado históricamente.

En el libro A. Kilbas, H. M. Srivastava [16] se indaga sobre las interpretaciones de las derivadas fraccionarias a profundidad.

2.2.7. Derivada de Caputo

Definición 7. Sean $f \in AC[a, b]$, $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(\alpha) \geq 0$ y $n := \begin{cases} [\text{Re}(\alpha)] + 1 & \text{si } \alpha \notin \mathbb{N} \\ \alpha & \text{si } \alpha \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Las Derivadas :

$$D_{a^+,t}^\alpha f(t) := \mathcal{I}_{a^+,t}^{n-\alpha} [f^{(n)}(t)] \\ = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha+1-n}} ds, \quad t > a$$

y

$$D_{b^-,t}^\alpha f(t) := (-1)^n \mathcal{I}_{b^-,t}^{n-\alpha} [f^{(n)}(t)] \\ = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b \frac{f^{(n)}(s)}{(s-t)^{\alpha+1-n}} ds, \quad t < b,$$

donde $f^{(n)}(s)$ denota la n -ésima derivada ordinaria de f respecto a la variables; estas derivadas de Caputo se denominan izquierda y derecha respectivamente.

De la misma manera que en el caso de la Derivada e Integral Fraccionaria de Riemann-Liouville, en adelante se tomara en consideración la Derivada Fraccionaria Izquierda de Caputo; debido que la Definición de la Derivada Izquierda de Caputo presenta problemas de comprensión los cuales generan ambigüedad.

Proposición 11. *Sea f tal como se establece en la definición (2.2.7). La Derivada fraccionaria de Caputo para las siguientes funciones está dada por:*

Propiedad	Función $f(t)$	Derivada Fraccionaria $D_{a^+,t}^\alpha[f(t)]$, $t > 0$, $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$
1	λ	0 , $t > a$, $\alpha > 0$
2	$(t-a)^k$	0 , si $[\operatorname{Re}(\alpha)] + 1 > k$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$
3	$(t-a)^\eta$	$\frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\eta-\alpha+1)}(t-a)^{\eta-\alpha}$, $t > a, \eta \notin \mathbb{N}$
4	$e^{\lambda t}$	$\lambda^n t^{n-\alpha} E_{1,n-\alpha+1}(\lambda t)$, $\lambda > 0$
5	$\sin(\lambda t)$	$(\lambda i)^{n+1} t^{n-\alpha+1} E_{2,n-\alpha+3}(-\lambda^2 t^2)$, $\lambda > 0$
6	$\cos(\lambda t)$	$(\lambda i)^n t^{n-\alpha} E_{2,n-\alpha+1}(-\lambda^2 t^2)$, $\lambda > 0$

Demostremos la veracidad de la Propiedad 2.

Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $[\operatorname{Re}(\alpha)] + 1 > k$, donde $k \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$D_{a^+,t}^\alpha [(t-a)^k] = 0.$$

Por definición:

$$D_{a^+,t}^\alpha f(t) = \mathcal{I}_{a^+,t}^{n-\alpha} [f^{(n)}(t)],$$

por hipótesis $[\operatorname{Re}(\alpha)] + 1 > k$, de esta manera sea $n = k + 1$.

Luego:

$$D_{a^+,t}^\alpha f(t) = \mathcal{I}_{a^+,t}^{k+1-\alpha} [f^{(k+1)}(t)],$$

pero $f(t) = (t - a)^k \rightarrow f^{(k+1)}(t) = 0$,

entonces :

$$D_{a^+,t}^\alpha [(t - a)^k] = \mathcal{I}_{a^+,t}^{k+1-\alpha} [0]$$

$$D_{a^+,t}^\alpha [(t - a)^k] = 0.$$

Con lo cual finaliza la demostración. \square

Verifiquemos la Propiedad 4.

Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(\alpha) > 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$D_{a^+,t}^\alpha [e^{\lambda t}] = \lambda^n t^{n-\alpha} E_{1,n-\alpha+1}(\lambda t).$$

Consideremos $f(t) = e^{\lambda t}$, donde $f^{(n)}(t) = \lambda^n e^{\lambda t}$.

De la definición (2.2.7) se tiene: $D_{a^+,t}^\alpha [f(t)] = \mathcal{I}_{a^+,t}^{n-\alpha} [f^{(n)}(t)]$.

Luego se tiene:

$$D_{a^+,t}^\alpha [\lambda^n e^{\lambda t}] = \mathcal{I}_{a^+,t}^{n-\alpha} [\lambda^n e^{\lambda t}].$$

Por la definición de la integral Fraccionaria definida en (2.13) se obtiene el siguiente resultado dado en términos de la función Mittag-Leffler.

$$D_{a^+,t}^\alpha [e^{\lambda t}] = \lambda^n t^{n-\alpha} E_{1,n-\alpha+1}(\lambda t).$$

Resultado que coincide con lo que se quería demostrar. \square

Demostremos la Propiedad 6.

Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(\alpha) > 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$D_{0^+,t}^\alpha [\cos(\lambda t)] = (\lambda i)^n t^{n-\alpha} E_{2,n-\alpha+1}(-\lambda^2 t^2).$$

Solución. Como hemos hecho antes, escribiremos el $\cos(\lambda t)$ en término de exponenciales. Tenemos:

$$\begin{aligned} D_{0^+,t}^\alpha [\cos(\lambda t)] &= \frac{1}{2} D_{0^+,t} [e^{\lambda t i} + e^{-\lambda t i}] \\ &= \frac{1}{2} (D_{0^+,t} [e^{\lambda t i}] + D_{0^+,t} [e^{-\lambda t i}]). \end{aligned}$$

Aplicando el resultado de la demostración anterior tenemos:

$$D_{0+,t}^\alpha[\cos(\lambda t)] = \frac{(\lambda i)^n t^{n-\alpha}}{2} (E_{1,n-\alpha+1}(\lambda t i) + E_{1,n-\alpha+1}(-\lambda t i)).$$

De acuerdo a la definición 2.9 e imponiendo condiciones de convergencia para las series dadas obtenemos finalmente:

$$D_{0+,t}^\alpha[\cos(\lambda t)] = (\lambda i)^n t^{n-\alpha} E_{2,n-\alpha+1}(-\lambda^2 t^2). \square$$

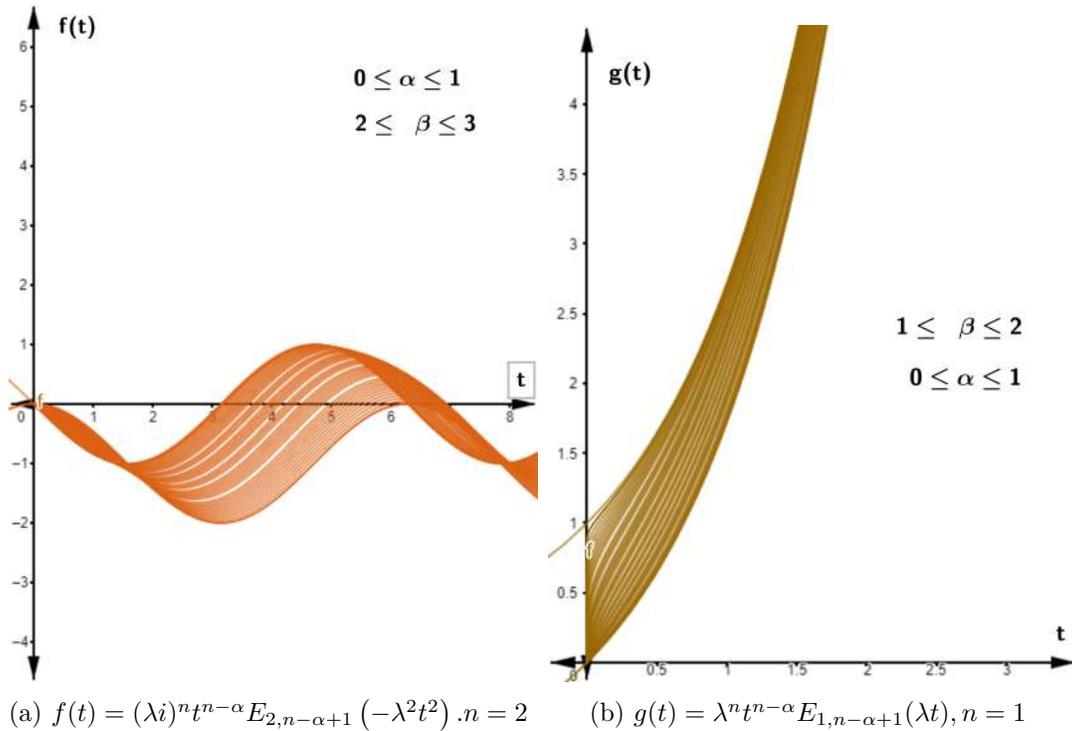


Figura 2.8: Derivadas de Caputo de la Función exponencial y Seno.

Observando la gráfica (2.8) podemos inferir que a diferencia de la derivada de Riemann–Liouville, la derivada de Caputo no presenta comportamiento asintótico al considerar $0 < \alpha < 1$ en la función exponencial y seno. Este comportamiento analítico es mas acorde con los resultados dados en el cálculo clásico, aunque la derivada de Riemann–Liouville es mas precisa en homogeneidad que derivada de Caputo lo cual sugiere que se debe emplear cada una de las definiciones según convenga y dependiendo del tipo de función.

Resulta bastante útil esta nueva definición de Derivada Fraccionaria, ya que retoma varios aspectos del cálculo clásico como es el caso de que las derivadas de las constantes son nulas y las condiciones iniciales para las Ecuaciones Diferenciales son de orden entero; aspecto que no ocurre con la definición de Riemann-Liouville.

Resulta bastante curioso el hecho de que $D_{a+,t}^\alpha[(t-a)^k] = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Proposición 12. Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que:

$$\operatorname{Re}(\alpha) > 0, \quad n = \begin{cases} [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1 & \text{si } \alpha \notin \mathbb{N} \\ \alpha & \text{si } \alpha \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

y $f \in \mathcal{C}[a, b]$.

1. Si $\operatorname{Re}(\alpha) \notin \mathbb{N}$ O $\alpha \in \mathbb{N}$, entonces:

$$(D_{a^+,t}^\alpha \mathcal{I}_{a^+,t}^\alpha) [f(t)] = f(t).$$

2. Si $\operatorname{Re}(\alpha) \in \mathbb{N}$ e $\operatorname{Im}(\alpha) \neq 0$, entonces:

$$(D_{a^+,t}^\alpha \mathcal{I}_{a^+,t}^\alpha) [f(t)] = f(t) - \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \mathcal{I}_{a^+,t}^{\alpha+1-n} [f(t)] \Big|_{t=a} (t - a)^{n-\alpha}.$$

3. Si $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ y $f \in \mathcal{C}^n[a, b]$, entonces:

$$(\mathcal{I}_{a^+,t}^\alpha D_{a^+,t}^\alpha) [f(t)] = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t - a)^k.$$

$$D_{a^+,t}^\alpha [f(t)] = \mathcal{D}_{a^+,t}^\alpha [f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (t - a)^{k-\alpha}, \quad t > a.$$

Ver demostración en (3.11).

2.2.8. Ecuación Diferencial Ordinaria Fraccionaria

Definición 8. *EDOF lineal*

Sean \mathbb{C} tal que $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ y $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq 2$. Una ecuación diferencial ordinaria fraccionaria lineal de orden α es una relación de la forma:

$${}_a D_t^\alpha [x(t)] + a_0(t)x(t) + \sum_{k=1}^{m-1} a_k(t) {}_a D_t^{\alpha_k} [x(t)] = f(t). \quad (2.15)$$

donde $x(t)$ es una función de variable compleja en un dominio real, además se tiene $a_k(t)$ para $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$ y $f(t)$ son funciones conocidas, ${}_a D_t^{\alpha_k}$ para $k = 1, 2, \dots, m-1$ son operadores diferenciales fraccionarios tales que $0 < \operatorname{Re}(\alpha_1) < \operatorname{Re}(\alpha_2) < \dots < \operatorname{Re}(\alpha_{m-1}) < \operatorname{Re}(\alpha)$.

Si las funciones $a_k(t)$ para $k = 0, 1, 2, \dots, m - 1$ son todas constantes la EDOF (Ecuaciones Diferencial Ordinaria Fraccionaria) lineal se dice con coeficientes constantes, por el contrario, si al menos uno de ellos es variable la EDOF se dice con coeficientes variables. Si $f(t) = 0$ la EDOF lineal se dice homogénea, en caso contrario se dice no homogénea.

Al igual que en el caso clásico, una EDOF con un conjunto de condiciones iniciales se dice un problema de valor inicial o problema de Cauchy.

Para el caso de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville un problema de Cauchy toma la siguiente forma:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{a^+,t}^\alpha[x(t)] = f(t, x(t), \mathcal{D}_{a^+,t}^{\alpha_1}[x(t)], \mathcal{D}_{a^+,t}^{\alpha_2}[x(t)], \dots, \mathcal{D}_{a^+,t}^{\alpha_{m-1}}[x(t)]) \\ \mathcal{D}_{a^+,t}^{\alpha-k}[x(t)]\Big|_{t=a} = y_k, \quad y_k \in \mathbb{C}, k = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (2.16)$$

Si consideramos derivadas fraccionarias de Caputo el problema de Cauchy toma la siguiente forma:

$$\begin{cases} D_{a^+,t}^\alpha[x(t)] = f(t, x(t), D_{a^+,t}^{\alpha_1}[x(t)], D_{a^+,t}^{\alpha_2}[x(t)], \dots, D_{a^+,t}^{\alpha_{m-1}}[x(t)]) \\ x^{(k)}(a) = y_k, \quad y_k \in \mathbb{C}, k = 0, 1, \dots, n - 1, \end{cases}$$

donde $n = \begin{cases} [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1 & \text{si } \alpha \notin \mathbb{N} \\ \alpha & \text{si } \alpha \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Notemos que en este caso las condiciones iniciales están dadas en términos de derivadas ordinarias, lo que facilita el hecho de interpretarlas físicamente.

Para estudiar condiciones de existencia y unicidad de soluciones consideremos $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ y definamos el espacio:

$$\mathbf{L}^\alpha(a, b) = \{f \in L^1(a, b) \mid \mathcal{D}_{a^+,t}^\alpha[f(t)] \in L^1(a, b)\}.$$

Definición 9. *Función Lipschitziana*

Sean $I \subset \mathbb{R}, \Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ y $f(t, x_0, x_1, \dots, x_{m-1}) \in I \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, se dice que f es Lipschitziana en las variables x_0, x_1, \dots, x_{m-1} si existe una constante $K \in \mathbb{R}^+$ tal que para todo $(x_0, x_1, \dots, x_{m-1}), (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{m-1}) \in \Omega$ se cumple que:

$$\|f(t, x_0, x_1, \dots, x_{m-1}) - f(t, \bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{m-1})\| \leq \sum_{j=0}^{m-1} K \|x_j - \bar{x}_j\|.$$

Teorema 2. *Caso general con derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville.*

Si $f(t, x_0, x_1, \dots, x_{m-1}) \in L^1(a, b)$ para todo $(x_0, x_1, \dots, x_{m-1}) \in \mathbb{R}^m$ y es lipschitziana en las variables x_0, x_1, \dots, x_{m-1} , entonces el problema de Cauchy (2.16) admite una única solución $x(t) \in \mathbf{L}^\alpha(a, b)$.

Es de suma importancia esclarecer como interactúan los operadores y objetos fraccionarios establecidos anteriormente; esto con el fin de facilitar el aprendizaje del lector en su búsqueda del entendimiento de esta línea del análisis. A continuación se plantean algunos ejemplos para afianzar las definiciones planteadas en esta investigación.

Ejemplo 1.

Se procede a resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{0^+,t}^{1/2}[x(t)] = t^2, & t > 0 \\ \mathcal{I}_{0^+,t}^{1/2}[x(t)]\Big|_{t=0} = 1. \end{cases}$$

Solución. Como $\alpha = \frac{1}{2}$ tenemos que $n = 1$. Luego, aplicando la integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden $\alpha = \frac{1}{2}$ entonces:

$$\mathcal{I}_{0^+,t}^{1/2} \left[\mathcal{D}_{0^+,t}^{1/2}[x(t)] \right] = \mathcal{I}_{0^+,t}^{1/2} [t^2].$$

Aplicando la propiedad 4 de la Proposición (8) y la propiedad 2 de la Proposición (5) con $\eta = 2$ tenemos:

$$x(t) - \sum_{k=1}^1 \frac{t^{1/2-k}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right)} \mathcal{D}_{0^+,t}^{1/2-k}[x(t)]\Big|_{t=0} = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} t^{5/2},$$

es decir:

$$x(t) - \frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}} \mathcal{D}_{0^+,t}^{-1/2}[x(t)]\Big|_{t=0} = \frac{16\sqrt{\pi}}{15} t^{5/2},$$

pero $\mathcal{D}_{0^+,t}^{-1/2}[x(t)]\Big|_{t=0} = \mathcal{I}_{0^+,t}^{1/2}[x(t)]\Big|_{t=0} = 1$. Por tanto:

$$x(t) = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{t} + \frac{16}{15} t^2 \right).$$

Ejemplo 2.

Se procede a resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{0^+,t}^{\alpha}[x(t)] = t + e^t \\ \mathcal{I}_{0^+,t}^{1/100}[x(t)]\Big|_{t=0} = 1. \end{cases}$$

Solución:

Procedemos de manera similar al ejemplo anterior. Como $\alpha = \frac{99}{100}$ tenemos que $n = 1$. Luego, aplicando la integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden $\alpha = \frac{99}{100}$ entonces:

$$\mathcal{I}_{0^+,t}^{\frac{99}{100}} \left[\mathcal{D}_{0^+,t}^{\frac{99}{100}} [x(t)] \right] = \mathcal{I}_{0^+,t}^{\frac{99}{100}} [t] + \mathcal{I}_{0^+,t}^{\frac{99}{100}} [e^t],$$

aplicando la propiedad 4 de la proposición (8) y las propiedades 2 y 3 de la proposición (5) con $\eta = 1$ se tiene:

$$x(t) - \sum_{k=1}^1 \frac{t^{\frac{99}{100}-k}}{\Gamma\left(\frac{199}{100}-k\right)} \mathcal{D}_{0^+,t}^{\frac{99}{100}-k} [x(t)] \Big|_{t=0} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{299}{100}\right)} t^{\frac{199}{100}} + t^{\frac{99}{100}} E_{1,\frac{199}{100}}(t),$$

es decir:

$$x(t) - \frac{t^{-\frac{1}{100}}}{\Gamma\left(\frac{99}{100}\right)} \mathcal{D}_{0^+,t}^{-\frac{1}{100}} [x(t)] \Big|_{t=0} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{299}{100}\right)} t^{\frac{199}{100}} + t^{\frac{99}{100}} E_{1,\frac{199}{100}}(t),$$

como : $\mathcal{D}_{0^+,t}^{-\frac{1}{100}} [x(t)]_{t=0} = \mathcal{I}_{0^+,t}^{1/100} [x(t)]_{t=0} = 1,$ por lo tanto:

$$x(t) = \frac{t^{-\frac{1}{100}}}{\Gamma\left(\frac{99}{100}\right)} + \frac{1}{\Gamma\left(\frac{299}{100}\right)} t^{\frac{199}{100}} + t^{\frac{99}{100}} E_{1,\frac{199}{100}}(t).$$

Nótese que los valores $\frac{1}{100}$, $\frac{99}{100}$, $\frac{199}{100}$, $\frac{299}{100}$ se aproximan respectivamente a los valores enteros.

Teniendo en cuenta lo mencionado en el párrafo anterior en $x(t)$ se verifica que la función $f(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + e^t$ es la que resulta al considerar los valores enteros 0, 1, 2, 3. Entonces se puede concluir que $x(t) \approx f(t)$. Si se hubiera considerado $\alpha = \frac{999}{1000}$, donde $n = 1$ y $\eta = 1$ tal como en el caso anterior, entonces se obtendría la solución $x_0(t)$ y se verificaría que $x(t) \approx x_0(t) \approx f(t)$. Este hecho es de suma importancia en el análisis de funciones; esto debido que es común trabajar con funciones que presenta problemas de diferenciabilidad en un punto, en este sentido las funciones fraccionarias para valores de α cercanos al orden de diferenciación establecido resultan apropiadas; ya que es posible escoger una aproximación de la función original tan cerca como se desee.

La gráfica (2.9) corresponde a la solución de la ecuación diferencial fraccionaria $\mathcal{D}_{0^+,t}^\alpha [x(t)] = t + e^t$, puede verse que dicha gráfica es muy similar a la analizada en (2.7) ya que la función exponencial tiene gran influencia sobre la geometría de la función. También puede apreciarse que dichas funciones tienen un comportamiento asintótico en el eje y y esto se debe a que la transformada de Laplace que se empleo es la que corresponde a la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville y por tanto se heredan sus propiedades como se indicó en (2.7).

Observación 2.

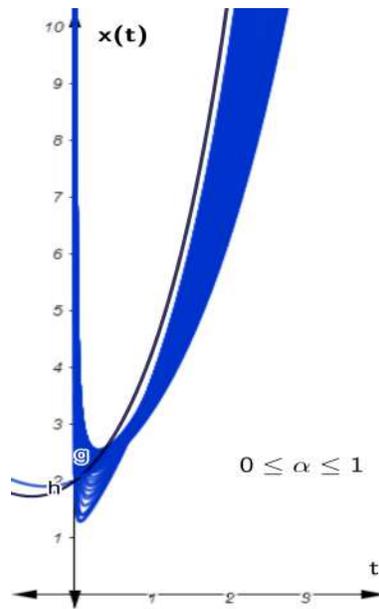


Figura 2.9: Gráfica de $\mathcal{D}_{0^+,t}^\alpha[x(t)] = t + e^t, t > 0$

Como se puede notar en los ejemplos realizados, las condiciones iniciales para problemas de valor inicial son de orden fraccionario siempre que se emplee la Derivada de Riemann-Liouville. Para fines investigativos y de manera coherente a los avances teóricos, experimentales y aplicativos que históricamente han generado desarrollo en la ciencia, no resulta práctico emplear este tipo de herramientas matemáticas debido que no hay una interpretación clara y específica de lo que significa una condición inicial fraccionaria. Hasta la fecha se han realizados aportes a la interpretación física del análisis fraccionario; tal es el caso de Podlubny [21] quien presenta algunas posibles interpretaciones donde es posible aplicar el análisis fraccionario.

Resulta muy útil emplear la definición de Derivada de Caputo ya que a diferencia de la definición de Riemann-Liouville esta si esta definida en términos de condiciones iniciales de orden entero. Abordar las ecuaciones diferenciales de orden α con condiciones iniciales enteras resulta una nueva área de investigación con un interesante porvenir.

Ejemplo 3.

A continuación se resuelve el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{0^+,t}^\alpha[x(t)] = c \\ x(0) = d. \end{cases}$$

En este caso, se tomara $0 \leq \alpha \leq 1$ entonces $n = 1$.

$$\mathcal{I}_{0^+,t}^\alpha [\mathcal{D}_{0^+,t}^\alpha[x(t)]] = \mathcal{I}_{0^+,t}^\alpha [c].$$

Nótese que a diferencia de los ejemplos anteriores, se ha empleado la notación $D_{0^+,t}^\alpha[x(t)]$ que hace referencia a la derivada de Caputo, por lo tanto se debe considerar la propiedad 3 de la Proposición (12) y la propiedad 1 de la de la Proposición (5).

$$x(t) - \sum_{k=0}^0 \frac{x^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)} t^k = \frac{ct^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Es decir:

$$x(t) - x^{(0)}(0) = \frac{ct^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

pero $x^{(0)}(0) = x(0) = d$, por lo tanto se tiene que:

$$x(t) = \frac{ct^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + d. \tag{2.17}$$

Este resultado será analizado mas adelante ya que guarda una estrecha relación con dos conceptos importantes como lo son la función exponencial y el volumen de una hiper esfera.

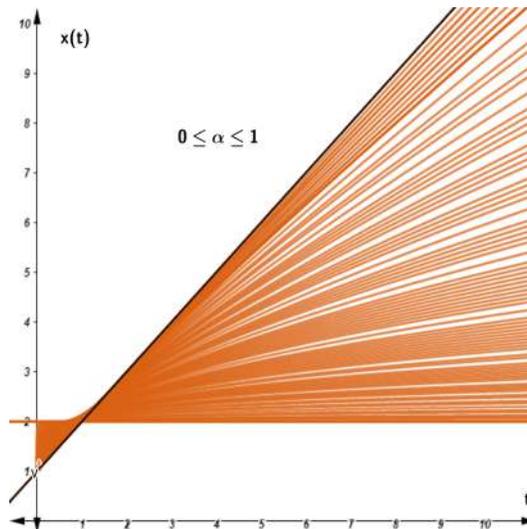


Figura 2.10: Gráfica de $D_{0^+,t}^\alpha[x(t)] = c, c = 1, d = 1$

La expresión (2.17) denota la familia de curvas que se aproximan a la recta $x(t) = ct + d$ a medida que α se aproxima a 1. Este hecho se puede apreciar gráficamente en (2.10) donde es clara la convergencia de las funciones generadas por $0 < \alpha < 1$ y cada vez mas próximas a ecuación de la recta a medida que α tiende a 1.

En adelante será de interés hallar la solución general a la ecuación:

$${}_a D_t^\alpha [x(t)] + a_0(t)x(t) + \sum_{k=1}^{m-1} a_k(t) {}_a D_t^{\alpha_k} [x(t)] = f(t),$$

para ello será necesario estudiar la forma fraccionaria de las Transformadas de Laplace, Fourier y Mellin.

Cabe resaltar que el objetivo de estudiar las Integrales y Derivadas Fraccionarias de Riemann-Liouville y Caputo a partir de los operadores de Laplace, Fourier y Mellin radica en el hecho de poder realizar las respectivas Transformadas directas e Inversas de las Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias que se planteen. En vista de las múltiples formas en que pueden aparecer los problemas que involucran Ecuaciones Diferenciales se precisara en algunos casos particulares como lo son: Ecuaciones diferenciales ordinarias fraccionarias, ecuaciones diferenciales de Cauchy-Euler y Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales fraccionarias. Habiendo especificado lo anterior se procederá hacer uso de los operadores antes mencionados según corresponda todo con el objetivo de conocer manera detallada la utilidad práctica del cálculo fraccionario.

Capítulo 3

Transformadas de Laplace, Fourier, Mellin y su relación con el análisis fraccionario.

3.0.1. Transformada de Laplace.

Definición 10. Sea $f(t) \in E$ el espacio vectorial de las funciones continuas a trozos y de orden exponencial (implica, dada una función $f(t)$ continua a trozos existen las constantes K y ω tales que $\forall t$ la función f está acotada en la forma $|f(t)| \leq Ke^{\omega t}$).

Se define la Transformada de Laplace $\mathcal{L}[\cdot]$ de la función $f(t) \in E$ como la transformación integral

$$\mathcal{L}[f(t)] \equiv F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad s \in \mathbb{C}. \quad (3.1)$$

Si la integral (3.1) es convergente en cierto $s_0 \in \mathbb{C}$, entonces converge absolutamente para todo $s \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(s) > \text{Re}(s_0)$. El ínfimo, σ_f , para los cuales (3.1) converge se llama abscisa de convergencia.

A partir de la definición de la Transformada de Laplace es posible obtener los siguientes resultados.

Proposición 13. Sea $f(t)$ definida como en (3.1), entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

Función $f(t)$	Transformada de Laplace $\mathcal{L}[f(t)]$	$, s \in \mathbb{C}$
k	$\frac{k}{s}$,	$s > 0$
t^η	$\frac{\Gamma(\eta+1)}{s^{\eta+1}}$	$s > 0 \quad \eta \geq -1 \in \mathbb{R}$
e^{kt}	$\frac{1}{s-k}$,	$s > a$
$\sin(kt)$	$\frac{k}{s^2+k^2}$,	$s > 0$
$\cos(kt)$	$\frac{s}{s^2+k^2}$,	$s > 0$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$,	$s > a$
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$,	$s > a$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$,	$s > a$

Definición 11. La transformada inversa de Laplace está dada por:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s)e^{st} ds.$$

donde la curva $\gamma = \text{Re}(s) > \sigma_f$, es decir, se encuentra en el semiplano derecho de la convergencia absoluta de (3.1).

Proposición 14. Sean $m \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(\alpha) > 0$. Entonces, para todo $t > 0$ se satisface:

$$\mathcal{L} \left[t^{\alpha m + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(m)}(\lambda t^\alpha) \right] (s) = \frac{m! s^{\alpha - \beta}}{(s^\alpha - \lambda)^{m+1}}, \quad \text{Re}(s) > |\lambda|^{1/\alpha}, \quad (3.2)$$

donde $E_{\alpha, \beta}^{(m)}(z)$ denota la m -ésima derivada ordinaria de $E_{\alpha, \beta}(z)$. Por tanto:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{m! s^{\alpha - \beta}}{(s^\alpha - \lambda)^{m+1}} \right] (t) = t^{\alpha m + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(m)}(\lambda t^\alpha). \quad (3.3)$$

La expresión anterior resulta ser una de las mas importantes en el estudio del análisis fraccionario. Es muy frecuente encontrar la expresión del lado derecho de (3.3) en la resolución de ecuaciones diferenciales mediante Transformadas de Laplace. Este hecho posiblemente haya inspirado a Gösta Mittag-Leffler a buscar una solución, o quizás su hallazgo se da por pura coincidencia. El matemático Ravi P. Agarwal contempló la idea de definir a la función de Mittag-Leffler para dos parámetros α, β lo cual permite extender a dicha función a una familia de funciones mas grande. La idea de definir la función de Mittag-Leffler en dos parámetros resulta fundamental tanto para el análisis fraccionario como en el análisis clásico, esto debido que cualquier función que sea escrito en términos de la función exponencial también se puede reescribir en términos de la función Mittag-Leffler. De acuerdo a la proposición (3.3) la transformada inversa de Laplace de cualquier función que contemplan en su dominio temporal: $\text{sen}(kt)$, $\text{cos}(kt)$, e^{kt} se pueden expresar

en términos de la función Mittag-Leffler. En ese sentido la función de Mittag-Leffler resulta ser una herramienta fundamental en la resolución, construcción y desarrollo del cálculo fraccionario.

La demostración de la proposición (3.3) se presenta a continuación, esta demostración es sumamente instructiva ya que en ella se retoma la utilidad aplicativa de los conceptos fraccionarios desarrollados en el capítulo dos, toma sentido la necesidad de redefinir la Transformada de Laplace a su versión fraccionaria y se evoca el concepto de convergencia de una serie; concepto necesario para que la función de Mittag-Leffler tome sentido y relevancia.

Demostración.

En efecto, de acuerdo a la Proposición 4 tenemos:

$$E_{\alpha,\beta}^{(m)}(\lambda t^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} \frac{\lambda^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \alpha m + \beta)}.$$

Por tanto:

$$\mathcal{L} \left[t^{\alpha m + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(m)}(\lambda t^\alpha) \right] (s) = \mathcal{L} \left[t^{\alpha m + \beta - 1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} \frac{\lambda^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \alpha m + \beta)} \right] (s),$$

por la convergencia uniforme de la serie que define la función de Mittag-Leffler y la linealidad de la transformada de Laplace podemos escribir:

$$\mathcal{L} \left[t^{\alpha m + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(m)}(\lambda t^\alpha) \right] (s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)! \cdot \lambda^k}{k! \Gamma(\alpha k + \alpha m + \beta)} \mathcal{L} \left[t^{\alpha k + \alpha m + \beta - 1} \right] (s).$$

Dado que $\mathcal{L} [t^\eta] (s) = \frac{\Gamma(\eta + 1)}{s^{\eta+1}}$, tomando $\eta = \alpha m + \beta - 1$, reemplazando y simplificando en la suma anterior se tiene:

$$\mathcal{L} \left[t^{\alpha m + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(m)}(\lambda t^\alpha) \right] (s) = s^{-\alpha m - \beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} \left(\frac{\lambda}{s^\alpha} \right)^k, \quad (3.4)$$

reordenando la serie anterior tenemos el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} \left(\frac{\lambda}{s^\alpha} \right)^k &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+m)(k+m-1) \cdot \dots \cdot (k+1) \left(\frac{\lambda}{s^\alpha} \right)^k \\ &= \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)(k-2) \cdot \dots \cdot (k-m+1) \left(\frac{\lambda}{s^\alpha} \right)^{k-m} \\ &= \frac{d^m}{dz^m} \sum_{k=0}^{\infty} z^k. \end{aligned}$$

Donde $z = \frac{\lambda}{s^\alpha}$. Además, notemos que esta última serie corresponde a una de tipo geométrica, por tanto, si $\text{Re}(s) > |\lambda|^{1/\alpha}$ tenemos:

$$\frac{d^m}{dz^m} \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{m!}{(1-z)^{m+1}},$$

es decir:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} \left(\frac{\lambda}{s^\alpha}\right)^k = \frac{m!}{\left(1 - \frac{\lambda}{s^\alpha}\right)^{m+1}}.$$

Reemplazando esto último en (3.4) y ordenando concluimos:

$$\mathcal{L} \left[t^{\alpha m + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(m)}(\lambda t^\alpha) \right] (s) = \frac{m! s^{\alpha - \beta}}{(s^\alpha - \lambda)^{m+1}}.$$

Nótese que se puede obtener de forma directa el resultado para la transformada de Laplace inversa. Así concluye la demostración. \square

Alex Sepúlveda ([26], (p.39)) en sus “Apuntes de análisis fraccionario” realiza un desarrollo a detalle de casos relacionados con la propiedad (3.3), también expone casos donde relaciona dicha propiedad con la transformada inversa de Laplace.

Recordemos que la transformada de Laplace satisface para la integral definida y la n -ésima derivada las siguientes relaciones:

Proposición 15.

$$\mathcal{L} [f^{(n)}(t)] (s) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0). \quad (3.5)$$

$$\mathcal{L} \left[\int_a^t f(u) du \right] (s) = \frac{F(s)}{s} - \frac{1}{s} \int_0^a f(u) du. \quad (3.6)$$

Prueba de (3.5).

Mediante integración por partes, con $u = e^{-st}$ y $dv = f'(t)dt$. Para $k > 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^k e^{-st} f'(t) dt &= [e^{-st} f(t)]_0^k - \int_0^k -s e^{-st} f(t) dt \\ &= e^{-sk} f(k) - f(0) + s \int_0^k e^{-st} f(t) dt. \end{aligned}$$

Considerando el límite a medida que $k \rightarrow \infty$ y asumiendo que $e^{-sk} f(k) \rightarrow 0$ para obtener:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'](s) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[e^{-sk} f(k) - f(0) + s \int_0^k e^{-st} f(t) dt \right] \\ &= -f(0) + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = -f(0) + sF(s).\end{aligned}$$

Si f tiene una discontinuidad de salto en 0, es posible corregir el resultado anterior, entonces:

$$\mathcal{L}[f'](s) = sF(s) - f(0+),$$

donde:

$$f(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t).$$

Consideremos que se cumple para $n - 1$ por principio de inducción. Verifiquemos que se cumple para n considerando a f, f', \dots, f^{n-1} continuas en $[0, 1]$, y $f^{(n)}$ es continua a pedazos en $[0, k]$ para todo k positivo. También que $\lim_{k \rightarrow \infty} e^{-sk} f^{(h)}(k) = 0$ para $s > 0$ y para $j = 1, 2, \dots, n - 1$. Luego:

$$\begin{aligned}[f^{(n)}](s) &= s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \\ &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0).\end{aligned}$$

Terminando la demostración . \square

Demostremos (3.6)

Consideremos la expresión (3.5), además retomemos dicha expresión para $n = 1$, entonces:

$$\mathcal{L}[f'] = s\mathcal{Q}[f] - f(0).$$

Supongamos que $f(t)$ está definida por una integral, es decir:

$$f(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau.$$

Ahora $f(0) = 0$, suponiendo la continuidad de g , tal que $f'(t) = g(t)$. Entonces:

$$\mathcal{L}[f'] = \mathcal{L}[g] = s\mathcal{L}\left[\int_0^t g(\tau) d\tau\right],$$

lo cual implica:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t g(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[g],$$

Llegando a lo que se quería demostrar. \square

Nuestro objetivo será definir las relaciones fraccionarias equivalentes a las anteriores para resolver el problema (2.15). También sera de gran ayuda contar la Transformada de la convolución de funciones ya que es común hacer uso de ella.

Definición 12. La función $h : \mathcal{C}(I) \times \mathcal{C}(I) \rightarrow \mathcal{C}(I)$, donde \mathcal{C} es el conjunto de funciones continuas en el intervalo $I = [0, +\infty[$ dada por:

$$h(t) = (f \star g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau,$$

se conoce como la convolución de f y g , tal que $f, g \in L^1[0, \infty)$.

Proposición 16. Sean las funciones $f, g : I \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f, g \in L^1[0, \infty)$ y existen sus respectivas transformadas de Laplace denotadas por $F(s)$ y $G(s)$. Entonces:

$$\mathcal{L}[(f \star g)(t)](s) = F(s) \cdot G(s),$$

equivalentemente:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s) \cdot G(s)](t) = (f \star g)(t).$$

La demostración de esta importante proposición la puede ver con mayor detalle en Peter V. O'Neill ([29], p.29).

A continuación se presenta la función $\mathcal{T}^\alpha(t)$, resulta de interés estudiar su comportamiento y en particular su transformada de Laplace para luego usarla como herramienta en la búsqueda transformadas de las definiciones Derivada Fraccionaria e Integral Fraccionaria. Entonces, denotamos a $\mathcal{T}^\alpha(t)$ a la función definida como:

$$\mathcal{T}^\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad t \geq 0.$$

Se procede a hallar la Transformada de Laplace de \mathcal{T} haciendo el cambio de variable $v = st$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\mathcal{T}^\alpha(t)] &= \frac{s^{\alpha-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du \\ &= \frac{s^{\alpha-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \Gamma(\alpha) \\ &= \frac{1}{s^{\alpha+1}}, \end{aligned}$$

luego:

$$\mathcal{L} [\mathcal{T}^\alpha(t)] = \frac{1}{s^\alpha}. \quad (3.7)$$

Proposición 17. Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(\alpha) > 0$ y $f \in L^1(a, b)$ tales que existen $\mathcal{I}_{0^+,t}^\alpha[f(t)]$, $\mathcal{D}_{0^+,t}^\alpha[f(t)]$ y $D_{0^+,t}^\alpha[f(t)]$.

Entonces:

$$\mathcal{L} [\mathcal{I}_{0^+,t}^\alpha[f(t)]] = \frac{F(s)}{s^\alpha}. \quad (3.8)$$

$$\mathcal{L} [\mathcal{D}_{0^+,t}^\alpha[f(t)]] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \mathcal{D}_{0^+,t}^{\alpha-k-1}[f(t)] \Big|_{t=0}. \quad (3.9)$$

$$\mathcal{L} [D_{0^+,t}^\alpha[f(t)]] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad (3.10)$$

donde $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$ y $n = \begin{cases} [\text{Re}(\alpha)] + 1 & \text{si } \alpha \notin \mathbb{N} \\ \alpha & \text{si } \alpha \in \mathbb{N} \end{cases}$

Prueba de (3.8).

Aplicando la definición de convolución en la integral fraccionaria y considerando (3.7) se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [\mathcal{I}_{0^+,t}^\alpha[f(t)]] &= \mathcal{L} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \right] \\ &= \mathcal{L} [T^\alpha(t) * f(t)] \\ &= \frac{F(s)}{s^\alpha}. \end{aligned}$$

Llegando a lo que se quería demostrar. \square

Prueba de (3.9).

Partiendo de la definición de derivada fraccionaria:

$$\mathcal{L} [\mathcal{D}_{0^+,t}^\alpha[f(t)]] = \mathcal{L} \left[\frac{d^n}{dt^n} \left(I_{0^+,t}^{n-\alpha}[f(t)] \right) \right].$$

Aplicando directamente la definición de Transformada de Laplace para la n-ésima deriva de una función se puede escribir la expresión anterior como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} [\mathcal{D}_{0^+,t}^\alpha[f(t)]] &= s^n \mathcal{L} [I_{0^+,t}^{n-\alpha}[f(t)]] - \sum_{k=0}^{n-1} S^{n-k-1} \frac{d^k}{dt^k} \left(\left(I_{0^+,t}^{n-\alpha}[f(0)] \right) \right) \\
&= s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} S^{n-k-1} \frac{d^{k-n}}{dt^{k-n}} \left(\frac{d^n}{dt^n} \left(I_{0^+,t}^{n-\alpha}[f(0)] \right) \right) \\
&= s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} S^{n-k-1} \frac{d^{k-n}}{dt^{k-n}} \left(D_{0^+,t}^\alpha[f(0)] \right).
\end{aligned}$$

Tomando $n = 2k + 1$ y aplicando la Proposición 7 se tiene que:

$$\mathcal{L} [\mathcal{D}_{0^+,t}^\alpha[f(t)]] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \mathcal{D}_{0^+,t}^{\alpha-k-1}[f(0)].$$

Completando la demostración. \square

Prueba de (3.10).

Consideremos la definición de derivada fraccionaria de Caputo, la convolución de la integral fraccionaria y el resultado obtenido en (3.7), entonces:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} [\mathcal{D}_{0^+,t}^\alpha[f(t)]] &= \mathcal{L} [I_{0^+,t}^{n-\alpha} [f^{(n)}(t)]] \\
&= \mathcal{L} [\mathcal{T}^{n-\alpha}(t) * f^{(n)}(t)] \\
&= \frac{1}{s^{n-\alpha}} \left[s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)} \right] \\
&= s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0).
\end{aligned}$$

Finalizando la demostración. \square

Las expresiones anteriores son las equivalentes a la versión clásica de la Transformada de Laplace de la integral y la derivada. La expresión (3.8) es la Transformada de Laplace de la integral Fraccionaria de Riemann-Liouville. La expresión (3.9) es la Transformada de Laplace de la Derivada Fraccionaria de Riemann-Liouville. La expresión (3.10) es la Transformada de Laplace de la Derivada Fraccionaria de Caputo.

Los resultados obtenidos en esta sección para la Transformada de Laplace de la derivada y la integral fraccionaria de Riemann-Liouville y la derivada Fraccionaria de Caputo son fundamentales para el desarrollo de esta investigación, y así poder aplicarlas en contextos mas generales como se verá en el capítulo 4. A continuación se muestran algunos ejemplos de su uso como herramienta en la resolución de ecuaciones diferenciales fraccionarias.

Ejemplo 4.

Con $\alpha \in (1, 2)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua.

$$\begin{aligned}D_{0^+,t}^\alpha[x(t)] &= \lambda x(t) + f(t), \quad t > 0, \\x(0) &= \xi_0, \\x'(0) &= \xi_1.\end{aligned}$$

La solución del problema de valor inicial está dada por:

$$\mathcal{L} [D_{0^+,t}^\alpha[x(t)]] = \mathcal{L} [\lambda x(t) + f(t)].$$

Dado que $\alpha \in (1, 2]$, entonces $n = 2$. Aplicando (3.10) y teniendo en cuenta que el operador de Laplace satisface la propiedad de linealidad se tiene:

$$s^\alpha X(s) - \sum_{k=0}^1 s^{\alpha-k-1} x^{(k)}(0) = \lambda X(s) + F(s),$$

evaluando las condiciones iniciales dadas:

$$s^\alpha X(s) - \varepsilon_0 s^{\alpha-1} - \varepsilon_1 s^{\alpha-2} = \lambda X(s) + F(s);$$

es decir:

$$X(s) = \varepsilon_0 \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - \lambda} + \varepsilon_1 \frac{s^{\alpha-2}}{s^\alpha - \lambda} + \frac{F(s)}{s^\alpha - \lambda}.$$

Luego, se procede a aplicar la transformada fraccionaria de Laplace inversa. Por la proposición (3.3) que permite obtener la transformada inversa de una función términos de la función Mittag-Leffler.

$$X(t) = \varepsilon_0 E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha) + \varepsilon_1 t E_{\alpha,2}(\lambda t^\alpha) + E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha) * f(t),$$

equivalentemente:

$$X(t) = \varepsilon_0 E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha) + \varepsilon_1 t E_{\alpha,2}(\lambda t^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[\lambda(t-s)^\alpha] f(s) ds.$$

Ejemplo 5.

Partiendo del resultado obtenido para la Transformada de Laplace de la Derivada Fraccionaria de Caputo, es posible demostrar que esta derivada se puede expresar en términos de la derivada de Riemman-Liouville tal como se muestra a continuación.

Tomemos en consideración la propiedad definida en (3.10) que establece:

$$\mathcal{L} [D_{0^+,t}^\alpha[f(t)]] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0).$$

Aplicando la transformada inversa y teniendo en cuenta que se cumple la propiedad de linealidad entre la integral y la serie:

$$D_{0^+,t}^\alpha[f(t)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{F(s)}{s^{-\alpha}} \right] - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \mathcal{L}^{-1} [s^{\alpha-k-1}].$$

Por la propiedad 2 de la proposición (17) y la propiedad (3.8) se obtiene:

$$D_{0^+,t}^\alpha[f(t)] = I_{0^+,t}^{-\alpha}[f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha} f^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)}.$$

pero,

$$I_{0^+,t}^{-\alpha}[f(t)] = \mathcal{D}_{0^+,t}^\alpha[f(t)].$$

Por lo tanto:

$$D_{0^+,t}^\alpha[f(t)] = \mathcal{D}_{0^+,t}^\alpha[f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0). \quad (3.11)$$

Esta propiedad nos indica que las Derivadas de Riemman-Liouville Y Caputo solo coinciden cuando $f^{(k)}(0) = 0$, donde $k \in \mathbb{Z}_0^+$.

En el caso de las transformadas de Fourier y Mellin se busca exactamente lo mismo que se planteó en esta sección; una definición de las transformadas respectivas para las integrales y derivadas fraccionarias que sean consideradas.

3.0.2. Transformada de Mellin

Definición 13. La Transformada de Mellin de una función $g(t)$ de una variable real $t \in \mathbb{R}^+$ esta definida por:

$$(\mathcal{M}g)(m) = \mathcal{M}[g(t)](m) = G(m) = \int_0^\infty t^{m-1} g(t) dt \quad (m \in \mathbb{C}). \quad (3.12)$$

Y la Transformada Inversa esta dada para $t \in \mathbb{R}^+$ por la ecuación :

$$(\mathcal{M}^{-1}g)(t) = \mathcal{M}^{-1}[G(m)](t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} t^{-m} G(m) dm \quad (\gamma = \text{Re}(m)). \quad (3.13)$$

A partir de la definición de la Transformada de Mellin se hace necesario establecer los siguientes resultados.

Proposición 18. *Sea $f(t)$ una función que satisface las condiciones de existencia de la transformada de Mellin, entonces se cumplen las siguientes proposiciones*

Función $f(t)$	Transformada de Mellin $\mathcal{M}[f(t)](m)$	$, m \in \mathbb{C}$
$H(t - a)$	$-\frac{a^m}{m}$,	$a > 0, z < 0$
$t^n H(t - a)$	$-\frac{a^{n+m}}{n+m}$,	$a > 0, R[m+n] < 0$
e^{-at}	$a^{-m}\Gamma(m)$,	$R[a], R[m] > 0$
e^{-t^2}	$\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}m\right)$,	$R[m] > 0$
$\sin(t)$	$\sin\left(\frac{\pi m}{2}\right)\Gamma(m)$,	$m > 0$
$\cos(t)$	$\cos\left(\frac{\pi m}{2}\right)\Gamma(m)$,	$m > 0$
$\frac{1}{m+1}$	$\pi \csc(\pi m)$,	$m > 0$
$\frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right)$	$F(1-m)$,	$m \neq 0$

Dada una función polinomial de la forma $f(t) = t^\eta$ dónde $\eta \in \mathbb{Z}^+$, de manera general no existe una transformada de Mellin asociada a dicha familia de funciones. Pero es posible hacer una reedificación en el dominio de dichas funcione de la siguiente manera.

$$f(t) = \begin{cases} t^\eta, & t < 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases} \quad g(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ t^\beta, & t > 1 \end{cases}$$

Cuya Transformada es:

$$F(m) = \frac{1}{m+\eta}, R(m) > -\eta; G(m) = \frac{1}{m+\beta}, R(m) > -\beta,$$

respectivamente.

Definición 14. *El operador de convolución de Mellin de dos funciones $h(t)$ y $\varphi(t)$, dado en \mathbb{R}^+ , esta definido para $x \in \mathbb{R}^+$ por la integral*

$$g * \varphi = (\varphi * g)(x) = \int_0^x g\left(\frac{x}{t}\right) \varphi(t) \frac{dt}{t},$$

la Transformada de la Convolución de Mellin esta dada por :

$$(\mathcal{M}(g * \varphi))(m) = (\mathcal{M}g)(m)(\mathcal{M}\varphi)(m). \quad (3.14)$$

Proposición 19.

Sea n y k enteros positivo. Suponga que $f^{(n-1)}$ es continua y $f^{(n)}$ es continua a pedazos en cada intervalo $[0, t]$. Considere que: $\int_{-\infty}^{\infty} |f^{(n-1)}(t)| dt$ converge. Considere además que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f^{(k)}(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f^{(k)}(t) = 0,$$

entonces:

1. $\mathcal{M}[t^n f(t)](m) = F(m+n)$.
2. $\mathcal{M}[\mathcal{I}_{0^+,t}^n[f(t)]] = (-1)^n \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m+n)} F(m+n)$.
3. $\mathcal{M}[f^{(n)}(t)](m) = (-1)^n \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m-n)} F(m-n)$.

Con el fin de afianzar los conceptos desarrollados en esta sección a continuación se verificaran las propiedades 2 y 3 de la proposición anterior.

Prueba de la propiedad 1.

Partiendo de la definición de Transformada de Mellin se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[t^n f(t)](m) &= \int_0^{\infty} t^{m-1} t^n f(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} t^{m+n-1} f(t) dt \\ &= F(m+n). \end{aligned}$$

Finalizando la demostración. \square

Probemos la propiedad 3.

Apliquemos inducción para verificar que se cumple el resultado para $n = k$. Entonces.

$$\mathcal{M}[f^{(k)}(t)](m) = (-1)^k \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m-k)} F(m-k). \quad (\text{i})$$

Ahora verifiquemos que también se cumple para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[f^{(k+1)}(t)](m) &= \int_0^{\infty} t^{m-1} f^{(k+1)}(t) dt \\ &= -(m-1) \int_0^{\infty} t^{m-2} f^{(k)}(t) dt \\ &= -(m-1) \mathcal{M}[f^{(k)}(t)](m-1). \quad (\text{ii}) \end{aligned}$$

A partir de (i) se tiene :

$$\mathcal{M} [f^{(k)}(t)]_{(m-1)} = (-1)^k \frac{\Gamma(m-1)}{\Gamma(m-(k+1))} F(m-(k+1)).$$

Reemplazando en (ii) se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} [f^{(k+1)}(t)]_{(m)} &= (-1)^{k+1} \frac{(m-1)\Gamma(m-1)}{\Gamma(m-(k+1))} F(m-(k+1)) \\ &= (-1)^{k+1} \frac{[(m)]}{\Gamma(m-(k+1))} F(m-(k+1)). \end{aligned}$$

Con lo cual queda demostrado. \square

Observación 3.

Nótese que:

$$(I_-^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^\infty \frac{f(s)}{(s-t)^{1-\alpha}} ds$$

y

$$(D_-^\alpha y)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \int_t^\infty \frac{f(s)ds}{(s-t)^{\alpha-n+1}},$$

son las denominadas Integral y Derivada Fraccionarias Derecha de Liouville en el Semi-Eje de \mathbb{R}^+ definida en (2.2.4) y (2.2.6) respectivamente. Esta definición a diferencia de la Integral y Derivada Fraccionaria de Liouville en el plano completo guardan una estrecha relación con la Transformada de Mellin. Bajo esta nueva construcción de integral y Derivada resulta práctico hallar la transformada de Mellin asociada a la integral y derivada de orden α de forma directa, solo basta con considerar las propiedades de la definición (3.0.2) y establecer algunas condiciones para garantizar la existencia de la Transformada de Mellin como se muestra a continuación.

Definición 15. Consideremos el espacio L^p , espacio ponderado de potencia. Denotaremos a dicho espacio como $X_c^p(a, b)$, $c \in \mathbb{R}; 1 \leq p \leq \infty$, consiste en los valores complejos de las funciones medibles de Lebesgue f valoradas en (a, b) para las cuales $\|f\|_{X_c^p} < \infty$, con:

$$\|f\|_{X_c^p} = \left(\int_a^b |t^c f(t)|^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} \quad 1 \leq p < \infty$$

Lema 1.

Sean $Re(\alpha) > 0$, $m \in \mathbb{C}$ y $f(x) \in X_{m+\alpha}^1(\mathbb{R}^+)$. Si $Re(m) > 0$, entonces:

$$\mathcal{M} [\mathcal{I}_-^\alpha[f(t)]] (m) = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m+\alpha)} (\mathcal{M}f)(m+\alpha) \quad Re(m) > 0.$$

Lema 2.

Sea $Re(\alpha) > 0$, $n = [Re(\alpha)] + 1$, $m \in \mathbb{C}$ y $f(t) \in X_{m-\alpha}^1(\mathbb{R}^+)$.

Si $Re(m) > 0$ y las condiciones:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [x^{m-k-1} (I_-^{n-\alpha} y)(t)] = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [t^{s-k-1} (I_-^{n-\alpha} y)(t)] = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

son válidos, entonces:

$$\mathcal{M} [\mathcal{D}_-^\alpha[f(t)]] (m) = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m-\alpha)} (\mathcal{M}y)(m-\alpha) \quad Re(m) > 0.$$

Se recomienda Ver la demostración de los lemas anteriores en Kilbas([16], p.85-86). En dicho texto se estudia a profundidad elementos importantes relacionados con la estructura de la transformada de Mellin como herramienta clave para resolver problemas de derivadas e integrales fraccionarias.

Observación 4.

Consideremos la siguiente Ecuación Diferencial Fraccionaria :

$$t^{\alpha+k} (\mathcal{D}_-^{\alpha+k} X)(t) = f(t),$$

donde $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0, 1)$ y $\mathcal{M}[f(t)]$ existe para $t > 0$. Nótese que esta expresión es el caso general de la ecuación diferencial de Cauchy-Euler extendida a ordenes de diferenciación Fraccionarios para determinados valores de k . Resulta interesante hallar su Transformada de Mellin.

Consideremos la propiedad 1 de (3.0.2) y el Lema (3.0.2)

$$\begin{aligned} \mathcal{M} [t^{\alpha+k} \mathcal{D}_-^{\alpha+k}[f(t)]] (m) &= \mathcal{M} [\mathcal{D}_-^{\alpha+k}[f(t)]] (m + (\alpha + k)) \\ &= \frac{\Gamma(m + (\alpha + k))}{\Gamma(m + (\alpha + k) - (\alpha + k))} F(m + (\alpha + k)) \Big|_{m-(\alpha+k)} \\ &= \frac{\Gamma(m + (\alpha + k))}{\Gamma(m)} F(m), \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\mathcal{M} [t^{\alpha+k} \mathcal{D}_-^{\alpha+k} [f(t)]] (m) = \frac{\Gamma(m + (\alpha + k))}{\Gamma(m)} F(m). \quad (3.15)$$

Ahora consideremos todas las EDF generadas por los posibles valores de k , donde $k = 1, 2, 3, 4, \dots, n$. Entonces se obtiene:

$$\sum_{k=0}^n B_k t^{\alpha+k} (D_-^{\alpha+k} y) (t) = f(t) \quad (t > 0; \quad \alpha > 0), \quad (3.16)$$

con $B_k \in \mathbb{R}$ constante y la Derivada Fraccionaria Derecha de Liouville en el Semi-Eje .

Es claro que (3.16) es una generalización de la ecuaciones diferenciales de Cauchy-Euler que contempla órdenes de derivación arbitrarios, es en este tipo de ecuaciones que la Transformada de Mellin adquiere gran utilidad práctica, mas allá de ser utilizada como herramienta para resolver problemas algebraicos que resultan complejos, también es posible usarla para resolver ecuaciones diferenciales del tipo Cauchy-Euler. Se hace énfasis en el caso particular de Cauchy-Euler ya que para otros casos como ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes y ecuaciones diferenciales con coeficientes variables donde el grado del polinomio no coincide con el orden de derivación siempre se obtendrá una traslación en el dominio de Mellin (Como se puede verificar en (3.0.2) y (3.0.2)), lo cual no resulta apropiado a la hora de aplicar la Transformada inversa de Mellin.

Considere el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = a f(x, t) + b x \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) + c x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t) \\ f(x, t_0) = g(x). \end{cases} \quad (3.17)$$

El problema anterior corresponde a una Ecuación Diferencial Parcial de coeficientes variables. El lado derecho de dicha ecuación esta relacionado con las Ecuaciones Diferenciales de Cauchy-Euler, como se mencionó anteriormente, a este tipo de ecuaciones resulta útil aplicarles Transformadas de Mellin para hallar su solución. Ahora, retomemos este problema en su versión Fraccionaria y así hallar soluciones de ordenes arbitrarios α .

En adelante para los problemas que involucren EDP's Fraccionarias se considerará la siguiente notación:

$$\mathcal{D}_-^{\alpha+k} [f(t)] = \mathcal{D}_{-,z}^{\alpha+k} [f(w, z)]. \quad (3.18)$$

La Expresión (3.18) indica sobre cual variable actúa la derivada fraccionaria; en dicho caso la derivada se aplica sobre la variable z .

Ejemplo 6.

Consideremos (3.16), con $k = 0, 1$. Así :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{-,t}^\alpha [f(x, t)] = af(x, t) + bx^\alpha \mathcal{D}_{-,x}^\alpha [f(x, t)] + cx^{\alpha+1} \mathcal{D}_{-,x}^{\alpha+1} [f(x, t)] \\ f(x, t_0) = g(x). \end{cases} \quad (3.19)$$

Para proceder a hallar la solución asociada al problema, se establece x como la variable principal sobre la cual se desea aplicar la Transformada de Mellin Fraccionaria.

Luego:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} [\mathcal{D}_{-,t}^\alpha [f(x, t)]] &= a\mathcal{M} [f(x, t)] + b\mathcal{M} [x^\alpha \mathcal{D}_{-,x}^\alpha [f(x, t)]] + c\mathcal{M} [x^{\alpha+1} \mathcal{D}_{-,x}^{\alpha+1} [f(x, t)]] \\ \mathcal{D}_{-,t}^\alpha [F(m, t)] &= aF(m, t) + b \frac{\Gamma(m + \alpha)}{\Gamma(m)} F(m, t) + c \frac{\Gamma(m + \alpha + 1)}{\Gamma(m)} F(m, t) \\ \mathcal{D}_{-,t}^\alpha [F(m, t)] &= \underbrace{\left(a + b \frac{\Gamma(m + \alpha)}{\Gamma(m)} + c \frac{\Gamma(m + \alpha + 1)}{\Gamma(m)} \right)}_{K(m)} F(m, t). \end{aligned}$$

Esta última expresión corresponde a una ED Fraccionaria Ordinaria, ya que la derivada resultante actúa sobre la variable t . Asumimos que m es constante, además conviene realizar el siguiente cambio de variable.

$$k(m) = a + b \frac{\Gamma(m + \alpha)}{\Gamma(m)} + c \frac{\Gamma(m + \alpha + 1)}{\Gamma(m)},$$

entonces:

$$\mathcal{D}_{-,t}^\alpha [F(m, t)] = kF(m, t), \quad 0 < t < T.$$

En general la ecuación anterior es de la forma (4.7) y su solución de la forma (4.8). Por ende:

$$F(m, t) = r(m) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k(t - T)^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}. \quad (3.20)$$

Ahora procedemos a encontrar la Transformada de la condición inicial:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} [f(x, t_0)] &= \mathcal{M} [g(x)] \\ F(m, t_0) &= G(m) = r(m). \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de $r(m)$ en (3.20) y aplicando transformada inversa de Mellin se tiene:

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} x^{-m} G(m) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k(t-T)^{\alpha})^n}{\Gamma(\alpha n + 1)} dm.$$

El operador de Mellin es lineal respecto a la serie, por lo tanto la solución esta dada por:

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-T)^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n + 1)} \int_{-\infty}^{\infty} x^{-m} G(m) k^n dm.$$

3.0.3. Transformada de Fourier

Definición 16. Suponga que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ converge. Entonces la transformada de Fourier de f se define como la función

$$\mathfrak{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (3.21)$$

En ocasiones resulta incomodo usar el símbolo $\mathfrak{F}[f(t)]$ para realizar cálculos, entonces se sugiere usar la transformada de Fourier de f como \hat{f} . De la siguiente manera:

$$\mathfrak{F}[f](\omega) = \hat{f}(\omega).$$

A partir de la definición de la Transformada de Fourier es posible obtener los siguientes resultados.

Proposición 20. Sea $f(t)$ una función convergente que satisface las condiciones de existencia para la Transformada de Fourier. Entonces las siguientes proposiciones se cumplen.

Función $f(t)$	Transformada de Fourier $\mathfrak{F}[f(t)]$, $w \in \mathbb{C}$
$\begin{cases} k & , -a \leq t < a \\ 0 & t < -a, t \geq a \end{cases}$	$\frac{2k}{\omega} \text{sen}(a\omega)$, $k > 0 \quad a > 0$
$e^{- a t}$	$\frac{2a}{w^2 + a^2}$, $w > a \quad a > 0$
$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{i} [\delta(w - \omega_0) - \delta(w + \omega_0)]$, $\omega_0 \in \mathbb{R}$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi [\delta(w - \omega_0) + \delta(w + \omega_0)]$, $\omega_0 \in \mathbb{R}$
$H(t)e^{-at}$	$\frac{1}{(a+iw)}$, $a > 0$
$f(t - t_0)$	$e^{-i\omega t_0} \hat{f}(\omega)$, $t_0 \in \mathbb{R}$
$e^{i\omega f}$	$\hat{f}(\omega - \omega_0)$, $\omega \in \mathbb{R}$
$f(at)$	$\frac{1}{ a } \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$, $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$
$t^n f(t)$	$i^n \frac{d^n}{d\omega^n} \hat{f}(\omega)$, $n \in \mathbb{Z}$

Los resultados descritos en la Proposición (20) son de gran relevancia en el análisis clásicos, en particular, en el análisis de Fourier. Para fines prácticos no profundizaremos en poner de evidencia

como se obtienen esos resultados ya que nuestro objetivo es mostrar como se reinterpretan desde el punto de vista fraccionario. Se puede ver la demostración de estos resultados con detenimiento en Peter V. O'Neill([29], p.112-120).

Definición 17. Si f es continua, y f' es continua a pedazos en todo el intervalo $[-L, L]$, entonces la Transformada Inversa de Fourier está dada por:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (3.22)$$

Proposición 21.

1. Sea n un entero positivo. Suponga que $f^{(n-1)}$ es continua y $f^{(n)}$ es continua a pedazos en cada intervalo $[-L, L]$. Considere que $\int_{-\infty}^{\infty} |f^{(n-1)}(t)| dt$ converge. Asuma:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f^{(k)}(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f^{(k)}(t) = 0,$$

para $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Entonces:

$$\mathfrak{F} [f^{(n)}(t)] (\omega) = (i\omega)^n \hat{f}(\omega).$$

2. Sea f continua a pedazos en todo intervalo $[-L, L]$. Suponga que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ converge. Admita que $f(0) = 0$. Entonces :

$$\mathfrak{F} \left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right] (\omega) = \frac{1}{i\omega} \hat{f}(\omega).$$

Demostremos la veracidad de 1.

Consideremos la primera derivada y aplicando integración por partes, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} [f'] (\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= [f(t) e^{-i\omega t}]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (-i\omega) e^{-i\omega t} dt. \end{aligned}$$

Se sabe que $e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i \sin(\omega t)$ es de módulo 1, y por hipótesis,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\mathfrak{F} [f^{(n)}(t)] (\omega) = i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = i\omega \hat{f}(\omega).$$

Equivalente a lo que se quería demostrar. \square

Demostremos que se cumple para 2.

Consideremos una función g de la siguiente manera:

$$g(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau.$$

Entonces $g'(t) = f(t)$ para cualquier t en donde f es continua, y $g(t) \rightarrow 0$ a medida que $t \rightarrow -\infty$.

Concretamente podemos decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) d\tau = \hat{f}(0) = 0.$$

Ahora consideremos el primer ítem de la Proposición (21), entonces:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \mathfrak{F}[f(t)](\omega) = \mathfrak{F}[g'(t)](\omega) \\ &= i\omega \mathfrak{F}[g(t)](\omega) = i\omega \mathfrak{F}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right](\omega). \end{aligned}$$

Finalizando la demostración. \square

Se hará énfasis particular al estudio de la proposición anterior en su versión fraccionaria, de esta manera se logrará establecer el caso general para la transformada de la derivada e integral fraccionaria de Fourier.

Definición 18. Sean f y g funciones definidas en la recta real. Entonces f tiene una convolución con g si $\int_a^b f(t)dt$ y $\int_a^b g(t)dt$ existen para todo intervalo $[a, b]$. Para todo número real t la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t - \tau)g(\tau)| d\tau,$$

es convergente. En este caso, la convolución $f * g$ de f con g es la función dada por:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau) d\tau.$$

Definición 19. Suponga que f y g son acotadas y continuas en la recta real y que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$ y $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|dt$ convergen. Entonces:

Convolución en el Tiempo.

$$\widehat{f * g}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega), \quad \text{su versión inversa: } \mathfrak{F}^{-1}[\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)](t) = f * g(t).$$

Convolución en la Frecuencia.

$$\widehat{f(t)g(t)}(\omega) = \frac{1}{2\pi}(\hat{f} * \hat{g})(\omega), \quad \text{su versión inversa: } \mathfrak{F}^{-1}[\hat{f}(\omega) * \hat{g}(\omega)](t) = 2\pi f(t)g(t).$$

Sea la función $T_{(t)}^\alpha$, como en el caso (3.8), se quiere conocer la Transformada de Fourier para esta función. La función $T_{(t)}^\alpha$ resulta de gran utilidad para hallar las transformadas de Fourier de la integral y derivada fraccionaria tal como se especifica mas adelante.

Se define :

$$T_{(t)}^\alpha = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad t \geq 0. \quad (3.23)$$

Mediante la sustitución $u = i\omega t$ se tiene que:

$$\mathfrak{F} [T^\alpha(t)] = \frac{1}{(i\omega)^\alpha}. \quad (3.24)$$

Para garantizar la existencia de las Transformadas de Fourier de los operadores Integral y Derivada Fraccionaria será necesario construir un espacio que los contenga.

Definición 20. *Dado el espacio*

$$\Psi = \{ \psi : \psi \in \mathcal{S}, \psi^{(k)}(0) = 0, k = 0, 1, 2, \dots \},$$

el conjunto de funciones de \mathcal{S} cuya transformada de Fourier pertenece al espacio Ψ se llama espacio de Lizorkin y se define como:

$$\Phi = \{ \varphi : \varphi \in \mathcal{S}, (\mathcal{F}\varphi) \in \Psi \}.$$

Proposición 22. *Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(\alpha) > 0$ y $f \in \mathcal{S}$, tales que existen $\mathcal{I}_{0+,t}^\alpha[f(t)]$, $\mathcal{D}_{0+,t}^\alpha[f(t)]$ y $D_{0+,t}^\alpha[f(t)]$. Entonces:*

$$\mathfrak{F} [\mathcal{I}_{0+,t}^\alpha[f(t)]] = \frac{\hat{f}(w)}{(i\omega)^\alpha}, \quad (3.25)$$

$$\mathfrak{F} [\mathcal{D}_{0+,t}^\alpha[f(t)]] = (i\omega)^\alpha \hat{f}(w), \quad (3.26)$$

$$\mathfrak{F} [D_{0+,t}^\alpha[f(t)]] = (i\omega)^\alpha \hat{f}(w), \quad (3.27)$$

donde $f(w)$ es la transformada de Fourier de $f(t)$ y $n = \begin{cases} [\text{Re}(\alpha)] + 1 & \text{si } \alpha \notin \mathbb{N} \\ \alpha & \text{si } \alpha \in \mathbb{N} \end{cases}$

Demostremos la veracidad de (3.25).

Por definición de integral Fraccionaria (2.13):

$$I_{0^+,t}^\alpha[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds,$$

además, considerando a:

$$I_{0^+,t}^\alpha[f(t)] = T^\alpha(t) * f(t),$$

y aplicando de forma directa la transformada de la convolución y luego (3.24) se obtiene:

$$\mathfrak{F} [I_{0^+,t}^\alpha[f(t)]] = \frac{\hat{f}(w)}{(i\omega)^\alpha}.$$

Equivalente a lo que se quería probar. \square

Demostremos (3.26) .

Por definición de Derivada de Riemann-Liouville y aplicando Transformada de Fourier se tiene:

$$\mathfrak{F} [\mathcal{D}_{0^+,t}^\alpha[f(t)]] = \mathfrak{F} \left[\frac{d^n}{dt^n} \left(I_{0^+,t}^{n-\alpha}[f(t)] \right) \right].$$

Aplicando la propiedad de la Transformada de Fourier para la n-ésima derivada de una función:

$$\mathfrak{F} [\mathcal{D}_{0^+,t}^\alpha[f(t)]] = (i\omega)^n \mathfrak{F} \left[I_{0^+,t}^{n-\alpha}[f(t)] \right].$$

Por la transformada de la convolución y (3.24) se obtiene:

$$\mathfrak{F} [\mathcal{D}_{0^+,t}^\alpha[f(t)]] = (i\omega)^\alpha \hat{f}(w).$$

Concluyendo la demostración. \square

Nótese que las transformadas de Fourier para la α -ésima derivada de R-L y Caputo son iguales.

Observación 5.

Obsérvese que, cuando se toma el extremo inferior $a = -\infty$ y se exige que $f(x)$ con todas sus derivadas sean nulas para $x \rightarrow -\infty$; entonces, acorde a la relación (3.11), las dos definiciones de derivada fraccionaria de Riemann-Liouville y de Caputo coinciden al igual que sus transformadas de Fourier.

Capítulo 4

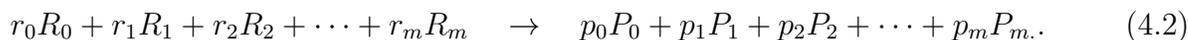
Aplicaciones de los operadores fraccionarios

4.0.1. Reacción Química

Una reacción química, también llamada cambio químico o fenómeno químico, es todo proceso termodinámico en el cual dos o más especies químicas o sustancias (llamadas reactivos), se transforman, cambiando su estructura molecular y sus enlaces, en otras sustancias llamadas productos. Las reacciones químicas suelen denotarse por una ecuación estequiométrica de la forma:



También,



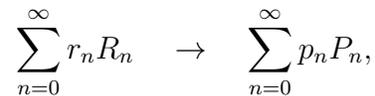
1. Las especies R_n representan el número de reactivos ; con $n = 1, 2, 3, \dots, m - 1$.
2. Las especies P_n representan el número de productos ; con $n = 1, 2, 3, \dots, m - 1$.
3. Los coeficientes $-r_n$ y p_n son los números estequiométricos ; con $n = 1, 2, 3, \dots, m - 1$.

Así, podemos entender una ecuación estequiométrica de r_1 moléculas de R_1 que reaccionan con r_2 moléculas de R_2 para generar p_1 moléculas de P_1 y p_2 moléculas de P_2 , etc.

4.0.2. Velocidad de Reacción

En química es de gran importancia conocer la velocidad de reacción de una especie o sustancia, ya que brinda información de la concentración molar de un componente R o P en un momento determinado. Dado que la velocidad de reacción es una ecuación diferencial, el objetivo de este capítulo es escribir dichas ecuaciones para ordenes arbitrarios α y aplicar los operadores integro-diferenciales estudiados en el capítulo 3 con el fin brindar solución a las ecuaciones y mostrar la gran utilidad del análisis fraccionario en la modelización de problemas de distintas áreas de la ciencia, en particular, en la cinética química.

Definición 21. *Consideremos una reacción de la forma:*



de manera que en un determinado momento la concentración molar de un componente J es $[J]$. Entonces la velocidad de reacción de las especies esta dada por :

$$v = \frac{1}{v_j} \frac{d[J]}{dt}, \quad v_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, m-1. \quad (4.3)$$

Particularmente, si $v_j \in \mathbb{R}^-$ entonces $v_j = -r_n$ y así, la velocidad de reacción estará en función de la velocidad de consumo instantánea de uno de los reactivos a un determinado tiempo. Es decir :

$$v = -\frac{d[R_n]}{dt}.$$

Si $v_j \in \mathbb{R}^+$ entonces $v_j = p_n$ y así, la velocidad de reacción estará en función de la velocidad de formación instantánea de uno de los productos a un determinado tiempo. Es decir :

$$v = \frac{d[P_n]}{dt}.$$

Por lo tanto la ecuación (4.3) de la velocidad de reacción queda expresada de la siguiente manera.

$$v = -\frac{1}{r_n} \frac{d[R_n]}{dt} = \frac{1}{p_n} \frac{d[P_n]}{dt}. \quad (4.4)$$

Las velocidades de reacción dependen de la composición y de la temperatura de la mezcla reaccionante, además la velocidad de reacción es siempre positiva.

4.0.3. Ecuaciones, ordenes y constantes de velocidad

Con gran frecuencia, se observa que la velocidad de reacción es proporcional a la concentración de reactivos elevados a una potencia.

$$v = \lambda[R_1]^a[R_2]^b \cdots [R_n]^m. \quad (4.5)$$

Donde λ , se conoce como la constante de velocidad de la reacción, es independiente de las concentraciones pero depende de la temperatura.

Los exponentes a , b y n , se conocen como el orden de la especie. La suma $a + b + \cdots + n$ es el orden total de la reacción. Para mayor profundidad sobre este tema ver P.W Atkins[29].

Por la ecuación (4.4) y (4.5) se tiene que:

$$\begin{aligned} v &= -\frac{d[R_n]}{dt} \\ &= \frac{d[P_n]}{dt} \\ &= \lambda[R_1]^a[R_2]^b \cdots [R_n]^m. \end{aligned}$$

De manera mas precisa, una ecuación de velocidad es una ecuación que expresa la velocidad de reacción en función de las concentraciones de todas las especies presentes en la ecuación química global a un determinado tiempo:

$$v = f([R_1], [R_2], \cdots, [R_n]).$$

4.0.4. Ecuaciones químicas de primer orden

Las ecuaciones de primer orden que describen la desaparición de un reactivo en cada instante de tiempo serán objeto de estudio en esta sección, el objetivo es dar una interpretación analítica de la velocidad de reacción de una especie de primer orden para ordenes arbitrarios α y las posibles implicaciones que puede tener en la práctica experimental.

Experimentalmente se observa que una ecuación estequiométrica de la forma $A \rightarrow P$, está asociada a una velocidad de reacción:

$$\begin{cases} \frac{d[A]}{dt} = -\lambda[A] \\ [A] = [A]_0. \end{cases}$$

Cuya solución esta dada por:

$$\ln \left(\frac{[A]}{[A]_0} \right) = -\lambda t; \quad [A] = [A]_0 e^{-\lambda t}. \quad (4.6)$$

4.0.5. Tiempo de vida media

El tiempo de vida media es el tiempo necesario para que la concentración de un reactivo se reduzca a la mitad de su valor inicial. El tiempo necesario para que $[A]$ disminuya desde $[A]_0$ a $\frac{1}{2}[A]_0$ en una reacción de primer orden viene dado por la Ec,10b :

$$\lambda t_{1/2} = -\ln \left(\frac{\frac{1}{2}[A]_0}{[A]_0} \right) = -\ln \frac{1}{2} = \ln 2,$$

por tanto,

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Dado que λ es una constante que depende de la temperatura de la reacción tenemos que el tiempo de vida media es constantes para reacciones de primer orden. Este hecho sera analizado para el caso Fraccionario que se presentará más adelante.

Escribiendo el problema de valor inicial para un orden arbitrario $\alpha \in (0, 1)$ y $t \in (0, t_1)$, se tiene:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{a^+,t}^\alpha [A] = -\lambda [A] \\ [A] = [A]_0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Para resolver el problema de valor inicial para ordenes de derivación arbitrarios, se hará uso de la transformada de Laplace de la α -ésima deriva de Caputo.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{ \mathcal{D}_{a^+,t}^\alpha [A] \} &= -\lambda \mathcal{L} \{ [A] \} \\ s^\alpha [A(s)] - s^{\alpha-1} [A(0)] &= -\lambda [A(s)] \\ [A(s)](s^\alpha + \lambda) &= [A]_0 s^{\alpha-1} \\ [A(s)] &= \frac{[A]_0 s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda}. \end{aligned}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace en ambos miembros de la igualdad se tiene:

$$[A(t)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{[A]_0 s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda} \right].$$

La transformada inversa de la expresión anterior se puede obtener en términos de la ecuación (3.3) conocida como Mittag-Leffler.

$$\begin{aligned}
[A(t)] &= [A]_0 E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha), \\
[A(t)] &= [A]_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n + 1)},
\end{aligned}
\tag{4.8}$$

nótese que si $\alpha = 1$, entonces :

$$\begin{aligned}
[A(t)] &= [A]_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t)^n}{\Gamma(n + 1)} \\
&= [A]_0 e^{-\lambda t}.
\end{aligned}$$

Lo cual coincide con el resultado clásico obtenido en (4.6).

El Tiempo de Vida Media fraccionario de una Reacción de Primer Orden está dado por:

$$t_{1/2} = \left(\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\lambda} L_n(2) \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Nótese que el Tiempo de Vida Media para el caso Fraccionario está completamente definido en función de α . Este resultado implica que el tiempo de vida media de una reacción varía para ordenes arbitrarios de derivación.

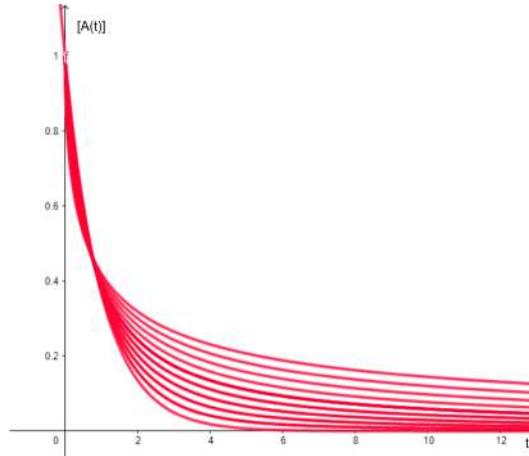


Figura 4.1: Gráfica de $[A]_0 E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha)$, $\lambda = 1$

La gráfica (4.1) muestra la desaparición de un reactivo R_i en un determinado intervalo de tiempo. Resulta muy interesante el hecho de que los reactivos reaccionan a gran velocidad al principio y dicha velocidad de reacción disminuye a medida que avanza el tiempo, pero no es esto lo realmente interesante, si no el hecho de que la velocidad de reacción esta intrínsecamente relacionada con el orden de la derivada ya que a medida que α se acerca a 1 la velocidad va disminuyendo significativamente, es decir, la deriva fraccionaria es inversamente proporcional a la desaparición del reactivo.

4.0.6. Ecuaciones químicas de segundo orden

Al igual que en las ecuaciones químicas de primer orden se busca en las ecuaciones químicas de segundo orden describir las velocidades de reacción con la que desaparece un reactivo $[R_i]$.

Un caso particular de reacciones de segundo orden está descrito por:

$$\begin{cases} \frac{d[A]}{dt} = -k[A]^2 \\ [A(0)] = [A]_0. \end{cases}$$

Escribiendo el problema de valor inicial en su versión fraccionaria donde $0 < \alpha < 1$ se tiene:

$$\begin{cases} D_{a^+,t}^\alpha [A] = -k[A]^2 \\ [A(0)] = [A]_0. \end{cases} \quad (4.9)$$

A continuación se procede a hallar la solución de dicho problema.

Sea $[U] = [A]^{1-r}$ donde $r = 2$. Luego:

$$\begin{aligned} [A] &= [U]^{-1} \\ \frac{d[A]}{d[U]} &= -[U]^{-2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (4.9) se tiene que:

$$\begin{aligned} -[U]^{-2} D_{a^+,t}^\alpha [U] &= -k[U]^{-2} \\ D_{a^+,t}^\alpha [U] &= k. \end{aligned}$$

Para resolver la ecuación diferencial anterior se hará uso de la transformada de Laplace de la α -ésima deriva de Caputo. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [D_{a^+,t}^\alpha [U]] &= \mathcal{L} [k] \\ s^\alpha [U(s)] - s^{\alpha-1} [U(0)] &= \frac{k}{s}. \end{aligned}$$

Como $[A(0)] = [A]_0 = [U(0)]^{-1} \Rightarrow [U(0)] = [A]_0^{-1}$, así:

$$s^\alpha [U(s)] - [A]_0^{-1} s^{\alpha-1} = \frac{k}{s}$$

$$[U(s)] = \frac{k}{s^\alpha + 1} + \frac{[A]_0^{-1}}{s}.$$

Aplicando Transformada de Laplace Inversa resulta:

$$[U] = \frac{kt^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{1}{[A]_0}.$$

Recuperando la variable $[A]$ a partir de la relación establecida anteriormente $[A] = [U]^{-1}$:

$$\begin{aligned} [A]^{-1} &= \frac{kt^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{1}{[A]_0} \\ &= \frac{[A]_0 kt^\alpha + 1}{[A]_0 \Gamma(\alpha + 1)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$[A] = \frac{[A]_0 \Gamma(\alpha + 1)}{[A]_0 kt^\alpha + 1}. \quad (4.10)$$

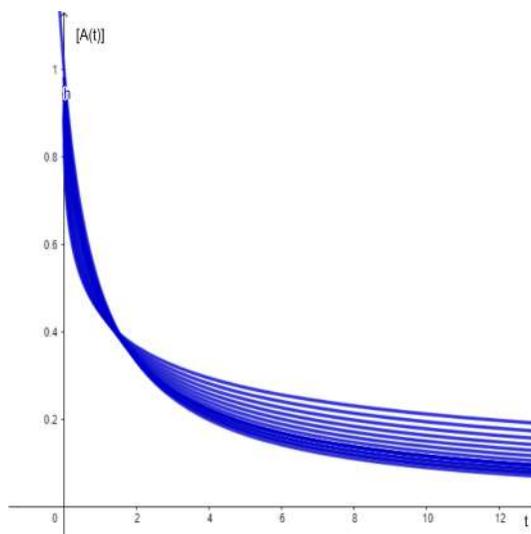


Figura 4.2: Gráfica de (4.10)

La gráfica (4.2) al igual que (4.1) muestra la desaparición de un reactivo R_i en un determinado intervalo de tiempo. Se cumple la relación de proporcionalidad entre la derivada y la velocidad de desaparición del reactivo la cual es inversamente proporcional. Nótese además que para fines práctico, conociéndose el orden de la reacción química a partir de datos experimentales, es posible predecir la tasa de descomposición de los reactivos con cualquier función $[A(t)]$ resultante en (4.10) cuando se considera α muy próximo a 1, en vista de que su convergencia es muy buena. Básicamente no es necesario emplear regresión lineal ya que bastaría con tomar una función ideal $[A(t)]$ para cierto α que se aproxime a los datos experimentales.

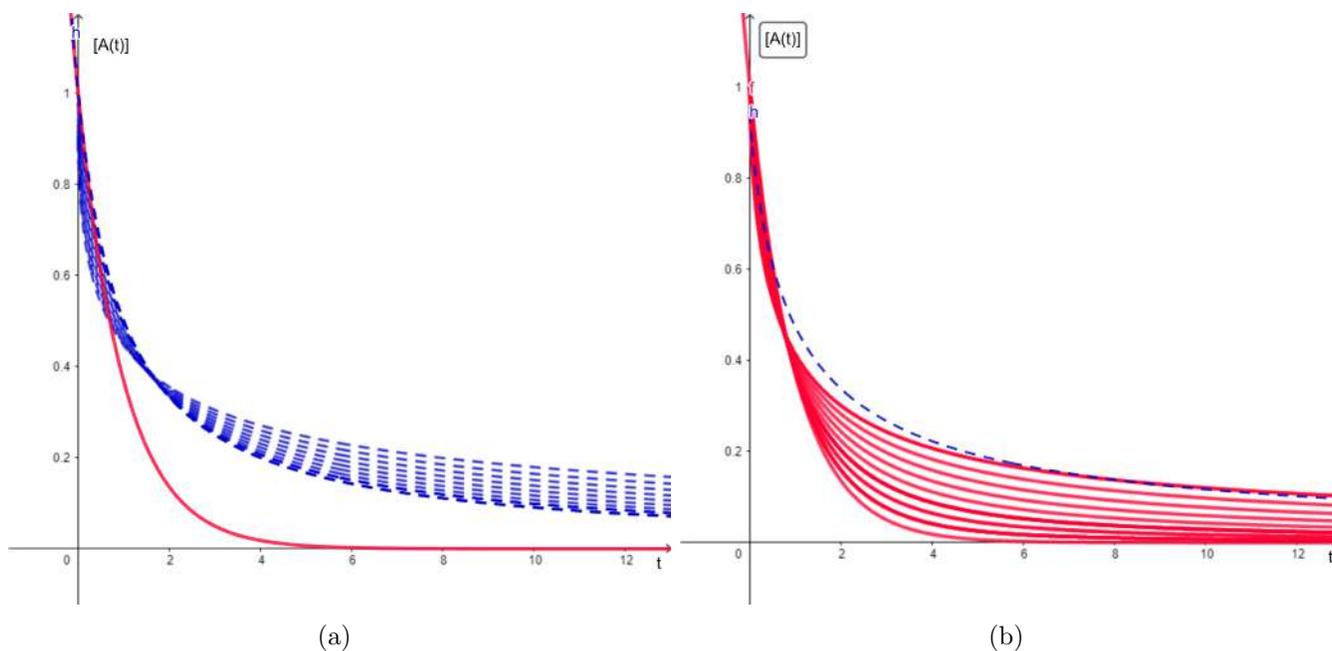


Figura 4.3: Velocidad de descomposición de relación de primer orden vs segundo orden

Observando las gráficas (4.3a) y (4.3b) se puede inferir que las reacciones químicas de primer orden se descomponen más rápido que las reacciones de segundo orden, este hecho resulta curioso ya que se mantiene ese criterio incluso para cualquier orden de derivación donde $\frac{1}{5} < \alpha < 1$. La función punteada representa la cantidad de reactivo de segundo orden en un determinado instante de tiempo y la función no punteada representa la cantidad de reactivo de primer orden.

4.0.7. Ley de la Dinámica

“ El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime”.

En este apartado se hará una revisión a una de las grandes leyes de la naturaleza propuesta por una de las mentes mas brillante que jamas haya existido;el gran físico-matemático Sir Isaac Newton.

Entre las distintas interpretaciones de fuerza que presenta Newton en su obra maestra *Philosophiae naturalis principia mathematica*, se puede extraer el concepto de fuerza partiendo del hecho de que el cambio en el movimiento es una forma de describir la variación en la «cantidad de movimiento».

Se entiende entonces que el movimiento de un objeto está descrito por su momentum:

$$P = mV.$$

Así m es la masa del objeto y V su velocidad. Por lo tanto la segunda Ley de Newton o Ley de la Dinámica se puede expresar matemáticamente como:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

donde $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^K \mathbf{F}_i$ es la fuerza neta resultante al considerar todas las contribuciones de las distintas fuerzas que intervienen en dicho movimiento.

Consideremos el problema de valor inicial en su versión fraccionaria.

Sean $X \in L^1(t_0, t)$ y $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$. Con $P = mD_{0+,t}^\beta[X(t)]$ se tiene:

$$\begin{cases} D_{0+,t}^\alpha[P] = \sum_{k=0}^m F \\ X(0) = x_0 \\ X'(0) = v_0. \end{cases}$$

Expresando el Momentum en términos de la velocidad, donde la velocidad está dada por la variación de la posición con respecto al tiempo para un orden arbitrario β , considerando además que el cuerpo se encuentra en caída libre (Sin efectos de fuerzas externas). Así la fuerza neta del cuerpo esta dada por su peso. Luego, es posible expresar la dinámica en caída libre del cuerpo de la siguiente manera.

$$D_{0+,t}^\alpha \left[mD_{0+,t}^\beta[X(t)] \right] = -mg,$$

aplicando la propiedad 3 de la Proposición 6 y considerando las condiciones iniciales se tiene:

$$\begin{aligned} D_{0+,t}^{\alpha+\beta}[X(t)] - \sum_{k=1}^1 D_{0+,t}^{\beta-k}[X(t)] \Big|_{t=0} \frac{t^{-\alpha-\kappa}}{\Gamma(1-\alpha-\alpha)} &= -g \\ D_{0+,t}^{\alpha+\beta}[(t)] - \frac{x_0}{\Gamma(-\beta)\Gamma(-\alpha)} t^{-\alpha-\beta} &= -g. \end{aligned}$$

Aplicando la transformada de Laplace para la Derivada Fraccionaria de Caputo.

$$\begin{aligned} S^{\alpha+\beta} X_s - \sum_{k=0}^1 s^{\alpha+\beta-k-1} X^{(k)}_{(0)} &= \frac{x_0}{\Gamma(-\beta)\Gamma(-\alpha)} \frac{\Gamma(-\alpha-\beta+1)}{S^{-\alpha-\beta+1}} - \frac{g}{s} \\ s^{\alpha+\beta} X(s) - x_0 S^{\alpha+\beta-1} - v_0 s^{\alpha+\beta} &= \frac{x_0}{\Gamma(-\beta)\Gamma(-\alpha)} \frac{\Gamma(-\alpha-\beta+1)}{s^{-\alpha-\beta+1}} - \frac{g}{s}. \end{aligned}$$

Una vez realizada la Transformada Inversa de Laplace y simplificado las expresiones se obtienen las ecuaciones de Movimiento Fraccionarias de la Posición y la Velocidad de un cuerpo en caída libre.

$$X(t) = \left(\frac{\Gamma(-\beta - \alpha + 1)}{\Gamma(-\beta)\Gamma(-\alpha)} + 1 \right) x_0 + v_0 t - \frac{g}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} t^{\alpha + \beta}. \quad (4.11)$$

$$D_{0+,t}^\beta [X(t)] = \frac{v_0}{(1 - \beta)\Gamma(1 - \beta)} t^{1 - \beta} - \frac{g}{\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha. \quad (4.12)$$

La ecuación (4.11) describe la posición de una partícula en función del tiempo en cada instante t . La ecuación (4.12) describe la velocidad de una partícula en función del tiempo en cada instante t .

Ejemplo 7.

Se deja caer un cuerpo desde cierta altura, al cabo de 10s el cuerpo toca el piso. Hallar las velocidades que registra el cuerpo y las alturas en que se encuentra a partir de las Ecuaciones de Movimiento Fraccionarias transcurridos $t = 10s$ considerando $\alpha = \beta$, $0 < \alpha < 1$.

Como el cuerpo se deja caer y se contabiliza su recorrido a partir del instante que desciende, entonces: $x_0 = 0$, $v_0 = 0$.

Se puede ver claramente el comportamiento de las variables posición y tiempo en la siguiente tabla:

α	0,2	0,4	0,6	0,8	0,99	1	1,2
tiempo (s)	10	10	10	10	10	10	10
velocidad (m/s)	16,91	27,74	43,66	66,38	93,98	98	140,96
posición (m)	27,74	66,38	140,96	272,90	455,17	490	825,72

Observación 6.

Nótese que $\alpha = 0,99$ representa el 99% de la derivada total, es decir, un margen de error de 1% con respecto al total porcentual; asumiendo que la derivada total corresponde a la determinada por $\alpha = 1$. Pese a que la relación porcentual entre la derivada fraccionaria y la total es mínima, la relación porcentual entre las velocidades y posiciones transcurridos los 10s si es significativa. Se puede apreciar que la magnitud de la rapidez transcurrido los 10s para $\alpha = 0,99$ y $\alpha = 1$ es de 93,98m/s y 98m/s respectivamente, es decir, un margen de error alrededor de 4%. En el caso de la magnitud del recorrido en el intervalo de tiempo establecido, para $\alpha = 0,99$ y $\alpha = 1$ es de 455,17m y 490m respectivamente, esto implica un error de aproximadamente 7%. Esta proporción

porcentual aumenta si se toma la derivada para valores de α mas pequeños, lo cual aceptamos como normal ya que se ha hecho énfasis particular en esta investigación que las funciones convergen a la función f clásica a medida que α tiende a valores enteros, particularmente a 1, sin embargo, resalta un hecho particular el cual se puede apreciar en la tabla, el error porcentual de las magnitudes es superlativo para la variable posición con respecto a la velocidad en cada orden de derivación α . En otras palabras, ¿si se toma un valor α próximo al valor entero mas cercano para así obtener la función que describe la posición de un objeto en cualquier intervalo de tiempo sería una buena aproximación de la función clásica?, ¡no es correcto!. Lo que parece indicar esta situación es que la derivada fraccionaria es una buena aproximación cuando se aplica una vez. La función que describe la posición de un cuerpo en determinado instante de tiempo viene de una ecuación diferencial de orden dos en el sentido clásico y de dos parámetros de derivación en el caso fraccionario y su solución se obtiene al integrar dos veces o equivalente a aplicar transformada de Laplace dada dos condiciones iniciales, una para la función y otra para su derivada. El hecho de considerar dos parámetros es lo que aumenta el error en los resultados generando una clara distinción entre los datos obtenidos del calculo clásico y los del calculo fraccionario.

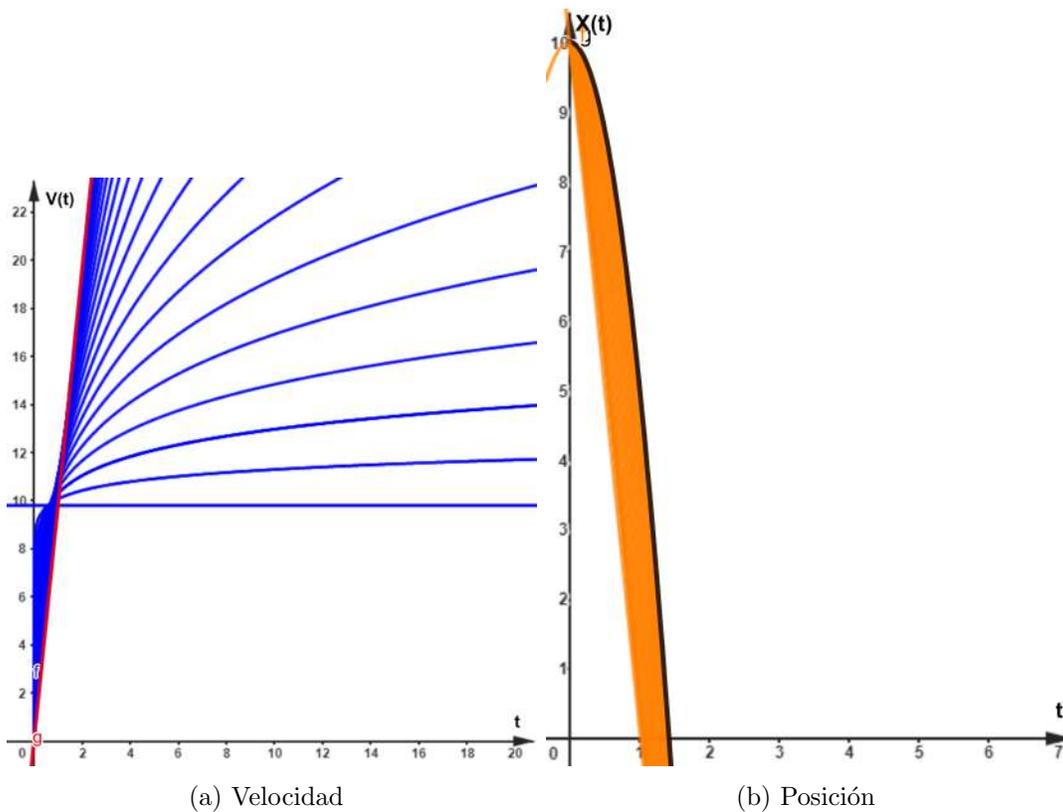


Figura 4.4: Gráficas de la familia de velocidades y Posiciones Fraccionarias

La gráfica (4.4a) muestra la convergencia de la velocidad a medida que α tiende 1. Cuando el orden

de derivación es cercano al orden clásico las funciones de velocidad asociadas a dichos valores de α se aproximan de manera precisa a la derivada de orden entero, es decir, cuando $\alpha = 1$. La gráfica (4.4b) representa la familia de funciones que convergen a la función asociada a $\alpha = 1$, estas funciones aunque presentan una geometría uniforme no son buenas aproximaciones de la función principal. En la gráfica (4.4b) también se consideró valores de $\alpha > 1$ lo cual desvela un hecho muy particular. Gráficamente y numéricamente puede analizarse que la posición o el espacio recorrido de un cuerpo sufre una contracción espacial a medida que transcurre el tiempo, lo cual genera una paradoja de causalidad ya que podría transcurrir mucho tiempo y no haber o experimentar un cambio mínimo de posición. Para evitar problemas de interpretación y evadir paradojas temporales y espaciales se recomienda tomar valores de α inferior al orden entero y no superior.

4.0.8. Ecuación de Calor

Sea $u(x, t) : D \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, la función que determina la temperatura de una barra metálica de longitud L en cualquier posición x_0 en un instante de tiempo t_0 . La dinámica de la temperatura de la barra en función de la posición y el tiempo en una dimensión esta dada por :

$$\begin{cases} k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

Consideremos la Ecuación diferencial parcial de la Distribución del calor en su versión Fraccionaria equivalente en un caso específico:

$$\begin{cases} k \mathcal{D}_{0+,x}^\beta [u(x, t)] = \mathcal{D}_{0+,t}^\alpha [u(x, t)] \\ U(x, 0) = e^{-|x|}, \end{cases}$$

tal que $0 < \alpha \leq 1$ y $0 < \beta \leq 2$.

Ahora procedes a calcular la Transformada de Fourier asociada a dicha ecuación asumiendo $\bar{w} = iw$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} [\mathcal{D}_{0+,x}^\alpha [u(x, t)]] &= \mathfrak{F} [\mathcal{D}_{0+,t}^\alpha [u(x, t)]] \\ k \bar{w}^\beta U(w, t) &= \mathcal{D}_{0+,t}^\alpha [U(w, t)]. \end{aligned}$$

El resultado obtenido es una ecuación diferencial fraccionaria que depende únicamente de la variable t . Esto implica que podemos asumir que w es constante, por tal razón la ecuación diferencial anterior es de la forma (4.7) y su solución es del tipo (4.8).

Así :

$$U(w, t) = c(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k\bar{w}^{\beta}t^{\alpha})^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}. \quad (4.13)$$

Ahora tomamos en consideración la condición inicial y la propiedad 2 de la proposición (20), así procedemos a calcular la transformada de Fourier asociada a dicha condición.

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= e^{-|x|} \\ \mathfrak{F}[u(x, 0)] &= \mathfrak{F}[e^{-|x|}] \\ U(\omega, 0) &= \frac{2}{1 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Haciendo $t = 0$ en (4.13) e igualando con $U(\omega, 0)$ se obtiene:

$$U(\omega, 0) = c(\omega) = \frac{2}{1 + \omega^2},$$

luego:

$$U(\omega, t) = \frac{2}{1 + \omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k\bar{w}^{\beta}t^{\alpha})^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}.$$

Teniendo presente que se conserva la linealidad entre la serie y la integral, la solución general está dada por la Transformada Inversa de Fourier de la siguiente manera.

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n + 1)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(k\bar{w}^{\beta})^n}{i + w^2} e^{iwx} dw.$$

El resultado anterior representa al conjunto de funciones que determina la distribución de la temperatura en una barra metálica para determinados valores de α y k .

4.0.9. Ecuación de Black-Scholes

En el mundo financiero es de gran relevancia la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes, la cual se define de la siguiente manera.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} V = r_f V - r_f S_t \frac{\partial}{\partial S_t} V - r_f S_t^2 \frac{\partial^2}{\partial S_t^2} V \\ V(T, S_T) = f(S_T). \end{cases} \quad (4.14)$$

Donde :

1. $V(T, S_T)$: precio de un derivado.
2. S_T : derivado financiero.
3. t : instante de tiempo en el que se desea conocer el precio del derivado.
4. r_f : tasa de interés libre de riesgo.
5. T : instante de tiempo en el que se vence el derivado.
6. $f(S_T)$: valor del derivado en el instante de vencimiento T .

Mediante esta ecuación es posible encontrar o aproximar la función que determina el valor de un derivado, a partir de condiciones iniciales y de frontera.

Observe que la ecuación (4.14) es un caso particular de (3.19). A continuación procedemos a escribir el problema en la versión fraccionaria y proceder a encontrar su solución mediante la Transformada de Mellin.

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{-,t}^\alpha[V] = r_f V - r_f S_t^\alpha \mathcal{D}_{-,s}^\alpha[V] - r_f S_t^{\alpha+1} \mathcal{D}_{-,s}^{\alpha+1}[V] \\ V(S_t, T) = f(S_t). \end{cases} \quad (4.15)$$

Teniendo en consideración el resultado obtenido en (3.19), la Transformada de Mellin de esta ecuación es :

$$\mathcal{D}_{-,t}^\alpha[F(m, t)] = \underbrace{\left(r_f - r_f \frac{\Gamma(m + \alpha)}{\Gamma(m)} - r_f \frac{\Gamma(m + \alpha + 1)}{\Gamma(m)} \right)}_{K(m)} F(m, t).$$

Realizando el cambio de variable :

$$k(m) = r_f - r_f \frac{\Gamma(m + \alpha)}{\Gamma(m)} - r_f \frac{\Gamma(m + \alpha + 1)}{\Gamma(m)},$$

se tiene:

$$\mathcal{D}_{-,t}^\alpha[F(m, t)] = k(m)F(m, t), \quad 0 < t < T.$$

El resultado anterior es una ecuación diferencial fraccionaria que depende únicamente de la variable t . En este sentido m que representa la variable independiente en el dominio de Mellin es constante

en este caso específico, por tal razón, la ecuación diferencial anterior es de la forma (4.7) y su solución es del tipo (4.8).

Así :

$$V(m, t) = r(m) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k(t-T)^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}. \quad (4.16)$$

Considerando la condición inicial, pasando del dominio de S_t al dominio m para establecer la Transformada de Mellin de la condición inicial y aplicando Transformada inversa encontramos que la solución general del problema (4.15) es de la forma:

$$V(S_t, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} S_t^{-m} F(m) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k(t-T)^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n + 1)} dm.$$

El operador de Mellin es lineal respecto a la serie, por lo tanto la solución esta dada por :

$$V(S_t, t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-T)^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n + 1)} \int_{-\infty}^{\infty} S_t^{-m} F(m) k^n dm.$$

La expresión anterior corresponde a la solución del problema (4.15). Para encontrar la forma explícita de la solución es necesario recurrir a métodos numéricos de inversión de la Transformada de Mellin.

Capítulo 5

Conclusiones

- Es reconfortante poder ayudar a esclarecer los "misterios" que subyacen al análisis fraccionario, pero lejos de conocer a cabalidad su real importancia cada vez aparecen nuevas interrogantes interesantes pero retadoras que exigen precisar en la interpretación física y práctica de estos resultados. Es claro que para fines pragmáticos es necesario saber que sentido tiene una medio derivada; así como otros ordenes arbitrarios distintos de los comúnmente estudiados en el análisis clásico.
- Será fundamental trabajar en una definición de Integral Fraccionaria que contemple soluciones a problemas como Integrales de funciones de la forma:

$$f(x) = \frac{a}{x^n} \quad a \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}^+,$$

así como otras funciones que resultan imposibles derivar bajo la definición de R-L. También se abre una importante área de investigación como lo son los Métodos Numéricos para conversión de operadores integro- diferenciales y como herramienta de aproximación para soluciones de funciones no enteras.

- En problemas que involucren ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales enteras siempre será necesario trabajar con la transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Caputo, pero en aquellos casos donde no hayan condiciones iniciales enteras se recomienda emplear la transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville específicamente en funciones polinomiales y trigonométricas; esto debido a que dicha definición hereda en gran medida todas las propiedades que resultan del cálculo clásico.
- Es de suma importancia que el lector comprenda que esta nueva visión del cálculo alguna vez iniciado por Isaac Newton y Gottfried Leibniz se escabulle de la concepción

tradicional y explora nuevos panoramas, destruye paradigmas, contempla posibilidades que no necesariamente están bajo los parámetros clásicos y va más allá de lo convencional exigiendo una redefinición del análisis clásico.

- La búsqueda de nuevos saberes y aprendizajes debe ser la consigna para avanzar en esta aventura del pensamiento denominada “ Cálculo Fraccionario” . Contemplar la idea de que las diferentes definiciones de derivadas e integrales fraccionarias surgen de una misma definición general, las cuales resultarían al establecerse ciertos parámetros límites no debe considerarse utópico, ya que de existir una definición general o conexión de las diversas derivadas e integrales esclarecería el panorama analítico y derrumbaría la incertidumbre respecto a la singularidad de estos operadores.
- Indagar sobre la efectividad de las construcciones matemáticas en términos de los operadores integro-diferenciales será crucial para potenciar el desarrollo de esta línea de investigación, comprender el comportamiento de las funciones obtenidas bajo parámetros arbitrarios y como estas pueden ayudar en una más amplia interpretación de fenómenos físicos que resultan complejos bajo la luz del cálculo clásico seguirá siendo la clave de estas investigaciones.

5.1. Sugerencias y recomendaciones

- Para fines algebraicos e inversión de transformadas como Laplace y Fourier se recomienda emplear la función de Mittag-Leffler. Esta función es de gran utilidad a la hora de resolver problemas que en principio son de alta complejidad.
- En caso de no precisarse condiciones iniciales en las ecuaciones diferenciales fraccionarias no homogéneas cuya función f adicional sea exponencial es preferible emplear Integral fraccionaria o Transformadas de la Derivada de Caputo ya que en este caso se ajusta mejor la familia de funciones resultantes a las obtenidas en el cálculo clásico.
- La derivada en dos parámetros arbitrarios no parece ser muy apropiada, habría que considerar un solo parámetro y dejar la otra derivada fija. Por ejemplo:

Consideremos la versión fraccionaria de la segunda Ley de Newton:

$$D_{0+,t}^{\alpha} \left[m D_{0+,t}^{\beta} [X(t)] \right] = -mg.$$

Parece pertinente establecer:

$$D_{0+,t}^\alpha [mD_{0+,t}^1[X(t)]] = -mg,$$

también:

$$D_{0+,t}^1 [mD_{0+,t}^\beta[X(t)]] = -mg.$$

Esta nueva forma de abordar la ecuación diferencial garantiza que el error porcentual respecto a la posición se reduzca significativamente. Se entiende que la función que determina la velocidad de un cuerpo en cualquier instante de tiempo no sufre fundamentales efectos debido a que está asociada con la primera derivada pero para funciones como la posición si es notorio el efecto. Por ende es recomendable considerar la observación presentada.

De la tabla anterior surgen las siguientes inquietudes:

1). ¿Existe alguna relación de proporcionalidad entre las velocidades V_n y V_{n-1} ? , es decir:

$$\frac{V_n}{V_{n-1}} = \eta.$$

2). Será posible hallar la función que minimiza la acción a partir de una secuencia de datos determinados por valores arbitrarios de α ?

3). ¿Que sentido físico tienen los resultados obtenidos de velocidad y posición para $\alpha \neq 1$?

Estas interrogantes serán respondidas de manera específica en próximas investigaciones, ya que resulta de gran interés hacer énfasis en los resultados que pueda arrojar el estudio de dichas interrogantes.

Bibliografía

- [1] B. Acay, E. Bas, T. Abdeljawad, Fractional economic models based on market equilibrium in the frame of different type kernels, *Chaos, Solitons and Fractals* 130 (2020) 109438.
- [2] D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, J. J. Trujillo, *Fractional Calculus Models and Numerical Methods*, World Scientific Publishing Company, 2012.
- [3] V. Buensaquillo, A Pérez, A. Rugeles, *Cálculo Fraccional*, *Revista Ciencias*, 4 (1) (2014).
- [4] S. Butera. M. Di Paola. Fractional differential equations solved by using Mellin transform, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 19(2014), 2220 – 2227.
- [5] S. Butera, M. Di Paola, Mellin transform approach for the solution of coupled systems of fractional differential equations, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 20 (2015), 32 – 38.
- [6] R. G. Campos. A. Huet. Numerical inversion of the Laplace transform and its application to fract fonal diffusion, *Applied Mathematics and Computation* 327 (2018).
- [7] E. Capelas de Oliveira, S. Jarosz, J. Vaz Jr. Fractional calculus via Laplace transform and its application in relaxation processes, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 69(2019), 58 – 72.
- [8] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations*, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer 2004.
- [9] K. Diethelm, A. D. Freed, *On the Solution of Nonlinear Fractional-Order Equations used in the Modeling of Viscoplasticity*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1999, pp. 217-224.
- [10] M. M. El-Borai, Some probability densities and fundamental solutions of fractional evolutions equations, *Chaos Solitons Fractals* 14(2002)433 – 440.
- [11] A. M. A. El-Sayed, Fractional-order diffusion-wave equation, *Internat. J. Theoret. Phys.* 35 (2) (1996), 311-322.

- [12] U. N. Katugampola, Mellin transforms of generalized fractional integrals and derivatives, *Applied Mathematics and Computation* 257(2015), 566 – 580.
- [13] K. Kaur, N. Jindal, K. Singh, Riesz fractional order derivative in Fractional Fourier Transform domain: An insight, *Digital SignalProcessing*93(2019)58-69.
- [14] L. Kexue, P. Jigen, Laplace transform and fractional differential equations, *Applied Mathematics Letters* 24(2011), 2019 – 2023.
- [15] S. Kumara, A. Yildirim, Y. Khan, L. Wei, A fractional model of the diffusion equation and its analytical solution using Laplace transform, *Scientia Iranica B* (2012) 19 (4), 1117 – 1123.
- [16] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier Science B.V. Amsterdam, 2006.
- [17] C. Li, F. Zeng. *Numerical Methods for Fractional Calculus*, CRC Press. 2015.
- [18] M. Z. Mohamed, T. M. Elzaki, Applications of new integral transform for linear and nonlinear fractional partial differential equations, *Journal of King Saud University - Science* (2018).
- [19] M. Ortigueira, *Fractional Calculus for Scientists and Engineers*, *Lecture Notes in Electrical Engineering* 84. Springer, 2011.
- [20] K. S. Miller, B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Differential Equations*, John Wiley, New York, 1993.
- [21] I. Podlubny, *Fractional Differential Equation*, Academic Press, San Diego, 1999.
- [22] S. G. Samko, A. A. Kilbas y O. I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives*. Gordon and Breach, Amsterdam, 1993.
- [23] J. M. Sánchez, Genesis y Desarrollo del Cálculo Fraccional, *Revista Pensamiento Matemático*, Universidad Politécnica de Madrid, 1 (2011).
- [24] R. Schumer, D.A. Benson, Eulerian derivative of the fractional advection-dispersion equation, *J. Contaminant* 48(2001), 69 – 88.
- [25] P.W, Atkins. *Química física 6ta edición* (1999), 765 – 779.
- [26] Alex Sepúlveda. *Apuntes de análisis fraccionario* (2020), 1 – 40.
- [27] H. Shenga, Y. Li, Y. Chen, Application of numerical inverse Laplace transform algorithms in fractional calculus, *Journal of the Franklin Institute* 348(2011), 315-330.

- [28] J. Zhang, X. Fu, H. Morris, Construction of indicator system of regional economic system impact factors based on fractional differential equations, *Chaos, Solitons and Fractals* 128(2019), 25 – 33.
- [29] Peter V. O'Neill, *Matemáticas avanzadas para ingeniería*, 6ta edición (2008).