UDK 528.411:519:528.11
Pregledni članak

KRITERIJI ZA OCJENU TOČNOSTI GEODETSKIH MREŽA

Mira IVKOVIĆ, Đuro BARKOVIĆ — Zagreb*

SAŽETAK. Daju se ocjene točnosti slobodnih geodetskih mreža koje su opće-prihvaćene. Točnost geodetskih mreža izražena je s pomoću lokalnih mjera točnosti, globalnih mjera točnosti te kriterijske matrice.

UVOD

Ocjenom kvalitete geodetskih mreža bavi se mnogo geodetskih stručnjaka (Baarda, 1976, 1977; Pelzer, 1977; Augath, 1982; Niemeir, 1982, 1983; Van Mierlo, 1978, 1982; Caspary, 1988; De Hens, 1982 i dr.), tako da postoji mnogo radova s tog područja. Svi oni, svojim istraživanjima, nastoje naći mjeru kojom bi se mogla izraziti kvaliteta geodetskih mreža. Postoje tri veličine na koje se može djelovati a čije promjene utječu na točnost u mreži:

1. Varijanca jedinične težine δ_0^2 može se kontrolirati izborom pribora i instrumentarija ili ponavljanjem mjerenja.
2. Konfiguracijska matrica A ovisi o geometriji mreže tj. o položaju točaka u njoj i mjerenjima koja ih povezuju.
3. Matrica težina P sadrži a priori težine mjerenja koje su funkcija vrste mjerenja i njihove preciznosti.

Promjenom ovih veličina može se prouzročiti promjena kvalitete geodetske mreže odnosno promjena u procjeni koordinata u njoj.

Mjerenja što se obavljaju u svrhu računanja koordinata geodetskih točaka stohastičke su veličine, pa su, dakako, i koordinate stohastičke veličine. Njihova normalna distribucija vjerojatnosti, opisana s pomoću kovarijancne matrice, indicira moguće varijacije oko procijenjenih vrijednosti koordinata. Osim toga različiti rezultati mogu proizići i zbog eventualne pogrešne pretpostavke o stohastičkom i matematičkom modelu mjerenja. Moguće razlike zbog učinjenih pogrešaka u mjerenju, a i ostalih pogrešnih pretpostavki, djeluju na pouzdanost mreže. Stoga je potrebno, prije analize točnosti koordinata, obaviti testiranje samih mjerenja.

Ako, dakle, mjerenja nisu točna, ne može se govoriti ni o točnosti koordinata. Točnost mjerenja definira se kao stupanj njegova približenja pravoj vrijednosti, tj.:

* Mira Ivković, dipl. inž., Đuro Barković, dipl. inž., Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 41000 Zagreb, Kačićeva 26.

$$M^2 = E[(X - P)^2], \tag{1}$$

gdje je P »prava« vrijednost mjerene veličine. Ako je sada:

$$\beta = \mu - P, \tag{2}$$

gdje je μ očekivanje stohastičke varijable, tada je:

$$M^2 = \sigma^2 + \beta^2. \tag{3}$$

Iz ovog izraza slijedi da porast σ^2 pokazuje smanjenje preciznosti, a porast M znači smanjenje točnosti, odnosno da velika preciznost ne znači i veliku točnost. Međutim, ako je $\beta = 0$, bit će $M^2 = \sigma^2$, tj. svaka mjera preciznosti je i mjera točnosti. Stoga je važno da se prije analize točnosti mreže grube pogreške mjerenja eliminiraju a sustavne pogreške reduciraju na beznačajne veličine, ako se mjera preciznosti ujedno koristi i za mjeru točnosti (Mikhail, Gracie, 1981).

TOČNOST KOORDINATA GEODETSKE MREŽE

Sve informacije o točnosti geodetske mreže daje kovarijancna matrica K_x procijenjenih parametara x. Točnost koordinata točaka mreže ovisi o obliku mreže i točnosti mjerenih veličina u njoj, te o pogreškama danih veličina. Pri preciznim radovima u inženjerskoj geodeziji mreža se izjednačuje u lokalnom koordinatnom sustavu, ili kao slobodna mreža, da bi se otklonio utjecaj pogrešaka danih veličina. Na točnost mjerenja može se utjecati izborom odgovarajućeg pribora i instrumentarija, metodom rada te ostalim uvjetima (dobri meteorološki uvjeti, dobar opažač i sl.). Oblik mreže pak ovisi o terenskim prilikama, te o veličini objekta radi kojeg se mreža projektira. Dakako, oblik ovisi i o sposobnosti geodetskog stručnjaka da u danim uvjetima projektira mrežu koja će najbolje odgovarati namjeni, ali koja će zadovoljiti i potrebnu točnost koja se u konkretnom slučaju traži.

Ako se kofaktorska matrica mjerenja označi s $Q_l = P^{-1}$ (za neovisna mjerenja), koordinate nepoznatih točaka izračunat će se u postupku izjednačenja metodom najmanjih kvadrata iz izraza:

$$x = Q_x A^T P l, \tag{4}$$

gdje je:

A — konfiguracijska matrica,

l — vektor slobodnih članova,

Q_x — kofaktorska matrica nepoznatih parametara.

Kovarijancna matrica nepoznatih koordinata dobiva se u postupku izjednačenja posrednom metodom iz izraza:

$$K_x = \sigma_0^2 Q_x = \sigma_0^2 (A^T P A)^{-1}. \tag{5}$$

Već i za male mreže kovarijancna matrica K_x sadrži mnogo brojeva različitih veličina i predznaka, iz kojih je teško bilo što zaključiti o točnosti razmatrane mreže.

Grafička interpretacija za regularnu (m, m) kovarijancnu matricu K_x može se izraziti iz kvadratne forme:

$$(x - \hat{x})\, K_x^{-1}\, (x - \hat{x}) = c \tag{6}$$

što predstavlja jednadžbu grupe elipsa (hiperelipsoid) s centrom u x, a parametar c ovisi o pretpostavljenom stupnju signifikantnosti. Iz linearne algebre je poznato da se kvadratna matrica može dekomponirati na svojstvene vrijednosti λ_i i svojstvene vektore x_i, koji se mogu naći i za kovarijancnu matricu K_x (Faddeera, 1959).

$$K_x = [x_1\, x_2 \ldots x_m] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1{}^T \\ x_2{}^T \\ \vdots \\ x_m{}^T \end{bmatrix} \tag{7}$$

Potom se iz svojstvenih vrijednosti λ_i mogu računati neke veličine koje se mogu primijeniti za ocjenu točnosti procijenjenih parametara.

LOKALNE MJERE TOČNOSTI GEODETSKE MREŽE

Razmatra li se točnost položaja svake pojedine točke u mreži, onda za dvodimenzionalne mreže ona može biti izražena s pomoću:

— standardnih devijacija za nepoznate koordinate,
— pogrešaka točaka po Helmertu,
— pogrešaka točaka po Werkmeisteru i
— elipsa pogrešaka.

Standardne devijacije koordinata točaka računaju se iz blokova kovarijancne matrice, koji odgovaraju jednoj točki, tj.:

$$\sigma_{ii} = \sqrt{(K_x)_{ii}} \quad \text{ili} \quad \sigma_{ii} = \sigma_0 \sqrt{(Q_x)_{ii}}. \tag{8}$$

S obzirom na vezu između glavnih osi elipsa pogrešaka i svojstvenih vrijednosti kovarijancne matrice, točnost položaja točaka može se izraziti i s pomoću svojstvenih vrijednosti blokova kovarijancne matrice. Pogreške točaka po Helmertu tada su zbroj svojstvenih vrijednosti, tj.:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{trag}\,(K_x)_{ii} \Rightarrow \min. \tag{9}$$

Pogreške točaka po Werkmeisterovoj definiciji izražavaju se s pomoću umnoška svojstvenih vrijednosti, odnosno:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det\,(K_x)_{ii} \Rightarrow \min. \tag{10}$$

Ovaj izraz zapravo predstavlja površinu elipse pogrešaka za koju se nastoji da bude minimalna, tj.:

$$P = \pi AB = \pi \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \Rightarrow \min.$$

Kriterij točnosti položaja točke postavljen na ovaj način ima jedan veliki nedostatak: može se dogoditi da točka s jednom vrlo velikom poluosi a drugom vrlo malom poluosi bude proglašena dobro određenom (jer ima malu površinu elipse pogrešaka).

Sljedeći kriterij za ocjenu kvalitete određivanja nove točke može biti minimalna vrijednost velike poluosi, tj.:

$$\lambda_1 \Rightarrow \min. \tag{11}$$

U ovom slučaju nema se uvida u vrijednost druge poluosi, što je također važno znati.

Zatim, točnost položaja točke može biti izražena s pomoću odnosa između glavnih poluosi njene elipse pogrešaka, odnosno s pomoću kvocijenta svojstvenih vrijednosti:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \Rightarrow 1. \tag{12}$$

Zadovoljenje ovoga kriterija znači da je elipsa pogrešaka degenerirala u kružnicu.

GLOBALNE MJERE TOČNOSTI GEODETSKE MREŽE

Ako se razmatra točnost geodetske mreže u cjelini, onda se polazi od standardnog hiperelipsoida, koji je dan matričnom jednadžbom:

$$x^T K_x^{-1} x = 1. \tag{13}$$

Osi standardnog hiperelipsoida su:

$$\sqrt{\lambda_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

tj. računaju se iz svojstvenih vrijednosti kovarijancne matrice:

$$K_x \, (K_x = Q_x, \quad \text{ako je } \sigma_0 = 1).$$

Izrazi za ocjenu točnosti izvedeni iz tako dobivenih svojstvenih vrijednosti uzimaju u obzir i korelacijsku ovisnost između točaka.

Kao mjera globalne točnosti može poslužiti maksimalna svojstvena vrijednost λ_{max} od K_x (Niemeier, 1982, Hečimović i dr. 1991). Mala vrijednost λ_{max} indicira dobru točnost nepoznatih parametara u geodetskoj mreži. Ako je pak λ_{max} znatno veća od ostalih svojstvenih vrijednosti λ_i, onda ukazuje na slabu zonu u razmatranoj mreži. Globalna ocjena točnosti nepoznatih parametara izražena s pomoću λ_{max} bila bi tada pogrešna. U tom slučaju treba primijeniti bolje kriterije, npr. aritmetičku sredinu iz svih svojstvenih vrijednosti kovarijancne matrice K_x (Mierlo, 1982), tj.:

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \lambda_1 = \frac{1}{m} \operatorname{trag}(K_x) \Rightarrow \min. \tag{14}$$

Zatim se može primijeniti geometrijska sredina od svojstvenih vrijednosti:

$$\sqrt[m]{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_m} = \sqrt[m]{\det(K_x)} \Rightarrow \min. \tag{15}$$

Mjera za točnost može biti i razlika između maksimalne i minimalne svojstvene vrijednosti, tj.:

$$\lambda_{max} - \lambda_{min} \Rightarrow 0. \qquad (16)$$

Mala razlika između maksimalne i minimalne svojstvene vrijednosti znači da hiperelipsoid teži hipersferi, a za neku geodetsku mrežu indicira da u njoj postoji homogena točnost.

KRITERIJSKA MATRICA

Bolji način ispitivanja točnosti mreže jest usporedba s »umjetnom« kovarijancnom matricom tzv. kriterijskom matricom (Grafarend, 1979; Schmitt, 1980). Kriterijska matrica mora zadovoljiti neke zahtjeve (De Hens, 1982):

a) elipse pogrešaka točaka i relativne elipse pogrešaka moraju biti kružnice,

b) relativna točnost između dviju susjednih točaka mora biti ista u svim smjerovima, odnosno kovarijancna funkcija q^2_{ij} mora ovisiti o udaljenosti između točaka tj.: $q^2_{ij} = f(l_{ij})$,

c) kriterijska matrica mora biti definirana u istom koordinatnom sustavu kao i kovarijancna matrica razmatrane mreže.

Prva mogućnost u istraživanju točnosti mreže jest usporedba njenih standardnih elipsa pogrešaka i dobivenih iz kriterijske matrice. Međutim, pri klasičnom načinu izjednačenja, dojam će biti da točnost ovisi o izboru referentnoga koordinatnog sustava, jer će se elipse razlikovati, ovisno o tom izboru. Stoga se uspoređuju kovarijancne matrice s pomoću nekih drugih veličina izračunanih iz njih.

USPOREDBA KOVARIJANCNIH MATRICA

Analiza točnosti neke geodetske mreže može se obaviti i usporedbom njene kovarijancne matrice s drugom kovarijanvnom matricom (npr. kriterijskom matricom). Želi li se obaviti ta usporedba, treba odabrati mjeru s pomoću koje će se ta analiza provesti.

Odgovarajuće kovarijancne matrice za dvije mreže koje treba usporediti su K_1 i K_2. Dakako, analizirajući samo kovarijancne matrice, teško je, bolje reći nemoguće ustanoviti koja je mreža bolja glede točnosti.

Jedan od načina usporedbe dviju kovarijancnih matrica moguće je provesti s pomoću njihove razlike:

$$K_1 - K_2.$$

Ako je dobivena razlika negativno semidefinitna matrica, tj. ako su sve njene svojstvene vrijednosti različite od nule —negativne—, može se reći da je prvi plan mjerenja mreže bolji glede točnosti.

Ako je samo

$$(K_1)_{ii} < (K_2)_{ii} \quad \forall i,$$

odnosno

$$\mathrm{trag}\,(K_1) < \mathrm{trag}\,(K_2),$$

to još ne znači, prema prethodnoj definiciji, da je K_1 bolje od K_2. Dakle, uspoređujući samo tragove kovarijancnih matrica nepoznatih parametara, za dva različita dizajna mreže ili dva različita plana mjerenja mreže, ne može se reći da je onaj s manjim tragom kovarijancne matrice bolji.

Međutim, nije potrebno računati sve svojstvene vrijednosti od $K_1—K_2$ da bi se obavila ova analiza. Dostatno je izračunati maksimalnu svojstvenu vrijednost od $K_1—K_2$, te ako je ona negativna, točnost mreže reprezentirana s kovarijancnom matricom K_1 bolja je od one izražene s kovarijancnom matricom K_2. Valja istaknuti da sve navedene veličine, koje služe kao mjera za lokalnu i globalnu točnost geodetske mreže, nisu invarijantne na izbor referentnoga koordinatnog sustava. To znači da pri klasičnom izjednačenju uspoređivanje dviju kovarijancnih matrica ima smisla samo ako su oba izjednačenja provedena u istom koordinatnom sustavu, ili ako je izjednačenje provedeno primjenom pseudoinverzije. U protivnom, ovaj način usporedbe kvalitete dviju mreža, odnosno dviju kovarijancnih matrica neće biti ispravan.

Tada treba za ocjenu točnosti upotrijebiti veličine koje su invarijantne na ne-singularne transformacije.

Iz izraza

$$K_1\,x = \mu\,K_2\,x \tag{17}$$

treba naći opće svojstvene vrijednosti koje su invarijantne na ne-singularne transformacije. Za regularnu matricu K_2 slijedi:

$$K_2^{-1}\,K_1\,x = \mu\,x, \tag{18}$$

a odatle Rayleov kvocijent:

$$\mu = \frac{x^{T}K_1\,x}{x^{T}K_2\,x}\ \text{odnosno}\ \mu_{max} = \max\frac{x^{T}K_1\,x}{x^{T}K_2\,x}. \tag{19}$$

Veličina μ_{max} — maksimalna opća svojstvena vrijednost — može poslužiti kao mjera za usporedbu kvalitete dviju mreža, odnosno za usporedbu dviju kovarijancnih matrica. Tada se, u slučaju da je $\mu_{max} \leq 1$, može zaključiti da je kovarijancna matrica K_1 bolja ili isto tako dobra kao i kovarijancna matrica K_2.

ZAKLJUČAK

Iz svega što je predočeno proizlazi da se u pronalaženju mjera za ocjenu točnosti geodetskih mreža pojavljuje mnogo različitih problema. Pri analizi slobodnih geodetskih mreža izjednačenih klasičnim načinom, treba voditi računa o tomu da sve navedene lokalne mjere točnosti nisu invarijantne na izbor referentnoga koordinatnog sustava. U tom slučaju može se izjednačenje provesti primjenom generalizirane inverzije. Tada lokalne mjere bolje označuju postignutu točnost nepoznatih koordinata.

Međutim, lokalne mjere točnosti ne uzimaju u obzir korelativnu ovisnost između pojedinih točaka u mreži, pa ne odražavaju pravo stanje o postignutoj točnosti. Stoga se kao bolje mjere za kvalitetu geodetske mreže primjenjuju globalne ocjene točnosti. Globalne mjere ocjene točnosti izražene su s pomoću veličina izračunanih iz svojstvenih vrijednosti cijele kovarijancne matrice K_x. Ali i globalne mjere ocjene točnosti nisu invarijantne na izbor referentnoga koordinatnog sustava, te o tomu valja voditi računa pri analizi kvalitete neke geodetske mreže.

Kao način ocjene točnosti geodetske mreže može se primjeniti i usporedba njene kovarijancne matrice s nekom drugom kovarijancnom matricom (npr. kriterijskom matricom). U tom slučaju, ako se uspoređuje točnost dviju mreža, onda se to može učiniti samo za one koje imaju isti broj točaka odnosno koje imaju kovarijancne matrice istih dimenzija (Bjerhammar, 1973) Samo tada se mogu za njih obaviti ranije navedene analize.

Pravilan izbor mjere za ocjenu točnosti geodetske mreže osobito je važan u optimiranju geodetskih mreža (Ninkov, 1989). Naime, cilj optimiranja geodetskih mreža upravo je ostvarivanje veće točnosti njenih parametara, pa tek poznavanjem mjere kojom se ta točnost izražava može se analizirati uspješnost optimiranja (Schmitt, 1981).

LITERATURA

Augath, W. (1982): Accuracy and reliability measures concerning design and qualification of densification networks, Hannover.

Baarda, W. (1977): Measures for the accuracy of geodetic networks, presented to the IAG International Symposium on Optimization of Design and Computation of Control Networks, Sopron.

Baarda, W. (1976): Reliability and precision of networks, Delft University of technology.

Bjerhammar, A. (1973): Theory of errors and generalized matrix inverses, Eelsevier scientific publishing company, Amsterdam — London — New York.

Caspary, W. F. (1988): Concept of networks and deformation analysis, Monograph 11, School of surveying, The University of New South Wales, Kensington.

De Hens, H. (1982): Quality related problems of densification networks, FIG, Proceedings, Survey Control Networks, München.

Faddeeva, V. N. (1959): Comutational methods of linear algebra, Dover Publications, Inc. New York.

Grafarend, E., Schaffrin, B. (1979): Kriterion Matrizen I Zweidimensionale homogene und isotrope Geodatische Netze, ZfV, 104, 133—149.

Hečimović, Ž., Bilajbegović, A., Bačić, Ž. (1991): Globalna točnost mreže II NVT SFRJ s obzirom na spektralne kriterije, Geodetski list, 10—12, 329—337.

Mierlo, J. van (1978): A testing procedure for analysing geodetic deformation measurements, Proceedings of the II International symposium of deformation measurements by Geodetic Methods, Bonn.

Mierlo, J. van (1982): Difficulties in defining the quality of geodetic networks, Proceedings Survey Control Networks, Aalborg.

Mikhail, E. M., Gracie, G. (1981): Adalysis and Adjustment of Survey Measurements, Van Nostrand Reinhold Company, New York.

Niemeier, W. (1983): Some aspects of the theory of errors in levelling networks, Workshop on Precise Levelling, Hannover.

Niemeier, W. (1982): Principal Component analysis and geodetic networks, München.

Ninkov, T. (1989): Optimizacija projektiranja geodetskih mreža, Naučna knjiga, Beograd.
Pelzer, H. (1977): Criteria for the reliability of geodetic networks, International Symposium, Sopron.
Schmitt, G. (1981): Optimal design of geodetic networks, Symposium on Geodetic Networks and Computations, München.
Schmitt, G. (1980): Second order design of a free distance network, considering different types of criterion matrices, Bulletin Geodesique, 4.

CRITERIONS FOR ACCURACY ESTIMATION OF GEODETIC NETWORKS

The paper reviews various type of measures to express the accuracy in free geodetic networks. The accuracy of geodetic networks has been expressed by means of global measures, local measures and a criterion matrix.

Primljeno: 1992-07-07