INSTITUT DE FRANCE
Académie des sciences

Comptes Rendus
Mathématique

Naoufel Battikh

Formes différentielles non commutatives et Algèbres de Gerstenhaber

Volume 361 (2023), p. 31-44

https://doi.org/10.5802/crmath.386

Comptes Rendus
Mathématique
2023, Vol. 361, p. 31-44
https://doi.org/10.5802/crmath.386

Algèbre / *Algebra*

Formes différentielles non commutatives et Algèbres de Gerstenhaber

Naoufel Battikh[*, a]

[a] Département des mathématiques, UFR des sciences, Université de Versailles-Saint-Quentin, France.
Courriel : naoufel.battikh@uvsq.fr

Résumé. In this work we show that for any topological space X having the homotopy type of a CW-complex and for any commutative ring R, the singular cohomology $H^*(X;R)$ is a Gerstenhaber algebra (see. [7]). In fact we prove that $H^*(X;R)$ satisfies the conditions of a generalization of the Gerstenhaber algebras.

Classification Mathématique (2020). 17D99, 55N10.
Manuscrit reçu le 26 novembre 2021, révisé le 6 mars 2022 et le 26 mai 2022, accepté le 29 mai 2022.

1. Introduction

Les algèbres de Gerstenhaber (*cf.* [7]) qui sont connues pour être utilisées en physique théorique (*cf.* [1] ou [11]) sont définies de la façon suivante : soit Λ^* une algèbre graduée munie de deux produits. Un premier produit

$$\begin{gathered} \Lambda^p \otimes \Lambda^q \longrightarrow \Lambda^{p+q} \\ a \otimes b \longmapsto ab \end{gathered}$$

et un deuxième produit (crochet de Lie)

$$\begin{gathered} \Lambda^p \otimes \Lambda^q \longrightarrow \Lambda^{p+q-1} \\ a \otimes b \longmapsto [a,b] \end{gathered}$$

On dit que Λ^* est une algèbre de Gerstenhaber si les deux produits satisfont les conditions suivantes :

- Associativité du premier produit : $a(bc) = (ab)c$
- Commutativité du premier produit : $ab = (-1)^{|a|\,|b|} ba$
- Commutativité du deuxième produit $[b,a] = -(-1)^{(|a|-1)(|b|-1)}[a,b]$

[*] Auteur correspondant.

- Identité de poisson : $[a, bc] = [a, b]c + (-1)^{(|a|-1)|b|} b[a, c]$ (L'identité de Poisson qu'on adoptera dans cet article sera légèrement différente de l'identité classique. Ainsi, on dira que l'identité de Poisson est vérifiée si : $[a, bc] = (-1)^{|c|}[a, b]c + (-1)^{|a||b|} b[a, c]$)
- Identité de Jacobi :

$$(-1)^{(|a|-1)(|c|-1)}[a,[b,c]] + (-1)^{(|b|-1)(|a|-1)}[b,[c,a]] + (-1)^{(|c|-1)(|b|-1)}[c,[a,b]] = 0$$

Dans [7] Gerstenhaber montre que l'algèbre de cohomologie de Hochschild est une algèbre de Gerstenhaber. Comme autres exemples, on peut citer l'algèbre sous-jacente d'une algèbre de Batalin–Vilkovisky (*cf.* [1]) ou n'importe quelle algèbre extérieure d'une algèbre de Lie.
Dans ce travail on montre que pour tout espace topologique X qui a le type d'homotopie d'un CW-complexe et tout anneau commutatif R, l'algèbre de cohomologie singulière $H^*(X; R)$ est une algèbre de Gerstenhaber. Ce résultat on le montre en utilisant les cup i-produits sur les formes différentielles non commutatives (*cf.* [2]). En effet pour un espace topologique X qui a le type d'homotopie d'un CW-complexe, Karoubi montre dans [9] que pour une algèbre de formes différentielles particulière Ω^*, la cohomologie de l'algèbre différentielle $\Omega^*(X) = \{f : X \longrightarrow \Omega^* \text{continues}\}$, est naturellement isomorphe à la cohomologie usuelle $H^*(X; R)$. Pour tout espace topologique X et tout anneau R, on définit en utilisant les cup i-produits sur les formes différentielles non commutatives, les opérations de Browder (*cf.* [4])

$$[.,.]_i : H^p(X; A) \otimes H^q(X; A) \longrightarrow H^{p+q-i}(X; A)$$

Le crochet de lie est alors égal à $[.,.]_1$. Les propriétés vérifiées dans ce cadre par une algèbre de cohomologie singulière, nous poussent à donner une généralisation de l'algèbre de Gerstenhaber et ce en posant la dé finition suivante : Soit Λ^* une algèbre graduée munie de deux produits. Un premier produit

$$\begin{aligned} \Lambda^p \otimes \Lambda^q &\longrightarrow \Lambda^{p+q} \\ a \otimes b &\longmapsto ab \end{aligned}$$

et un deuxième produit (crochet de Lie)

$$\begin{aligned} \Lambda^p \otimes \Lambda^q &\longrightarrow \Lambda^{p+q-i} \\ a \otimes b &\longmapsto [a, b]_i \end{aligned}$$

On dit que Λ^* est une algèbre de Gerstenhaber généralisée si les deux produits satisfont les conditions suivantes :

- Associativité du premier produit : $a(bc) = (ab)c$
- Commutativité du premier produit : $ab = (-1)^{|a||b|} ba$
- Commutativité du deuxième produit $[b, a]_i = -(-1)^{(|a|-1)(|b|-1)-i+1}[a, b]_i$
- Identité de poisson : $[a, bc]_i = (-1)^{|c|}[a, b]_i c + (-1)^{(|a|-i+1)|b|} b[a, c]_i$
- Identité de Jacobi :

$$(-1)^{(|a|-1)(|c|-1)} \quad [a,[b,c]_i]_i + (-1)^{(|b|-1)(|a|-1)} \quad [b,[c,a]_i]_i + (-1)^{(|c|-1)(|b|-1)} \quad [c,[a,b]_i]_i = 0$$

On montre alors que pour tout espace topologique X qui a le type d'homotopie d'un CW-complexe et tout anneau commutatif R, l'algèbre de cohomologie singulière $H^*(X; R)$ est une algèbre de Gerstenhaber généralisée.
Dans cet article, on montre aussi que pour un espace topologique X, $x \in H^p(X; \mathbb{Z}/2)$, $y \in H^q(X; \mathbb{Z}/2)$ et $z \in H^r(X; \mathbb{Z}/2)$, on a :

$$[xz, yz]_i = [x, y]_i Sq^{r-1}(z)$$

Où Sq^{r-1} est le carré se Steenrod (*cf.* [10]).

2. Rappels

Commençons par rappeler quelques résultats concernant les formes différentielles non commutatives donné s dans [5] et [9] et la définition des cup i-produits sur ces même formes ainsi que leurs propriétés données dans [2].

2.1. *Formes différentielles non commutatives*

Soient k un anneau commutatif unitaire et A une k-algèbre unitaire. Les formes différentielles étendues de degré n sont les élé ments du produit tensoriel de k-modules

$$T^n(A) = A \otimes A \otimes \cdots \otimes A$$

($n+1$ facteurs). Sur $T^*(A) = \underset{n\geq 0}{\oplus} T^n(A)$, on définit un opérateur de carré nul

$$D : T^n(A) \longrightarrow T^{n+1}(A)$$

par la formule suivante :

$$D(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = 1 \otimes a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n - a_0 \otimes 1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n + \cdots + (-1)^{n+1} a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1$$

et un produit

$$T^n(A) \otimes T^p(A) \longrightarrow T^{n+p}(A)$$

par la formule

$$(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)\left(b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_p\right) = a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_p.$$

Pour toutes formes $w \in T^n(A)$ et $\theta \in T^p(A)$, la différentielle D vérifie l'identité de Leibniz

$$D(w\theta) = D(w)\theta + (-1)^n wD(\theta).$$

On a en outre une action à droite du groupe symétrique S_{n+1} sur $T^n(A)$. En effet, en identifiant S_{n+1} à l'ensemble des permutations de $\{0, 1, \ldots, n\}$, l'action est définie par la formule suivante :

$$(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)^\sigma = a_{\sigma(0)} \otimes a_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma(n)}.$$

Pour une k-algèbre A on pose $\Omega^0(A) = A$ et $\Omega^1(A)$ le noyau de l'application

$$A \otimes A \longrightarrow A$$
$$x \otimes y \longrightarrow xy$$

Le produit tensoriel étant celui de k-modules. En fait le k-module $\Omega^1(A)$ est aussi un A-bimodules et les formes différentielles non commutatives de degré n sont les éléments du produit tensoriel de A-modules

$$\Omega^n(A) = \Omega^1(A) \underset{A}{\otimes} \Omega^1(A) \underset{A}{\otimes} \cdots \underset{A}{\otimes} \Omega^1(A) (n \text{ facteurs de } \Omega^1(A)).$$

La somme $\Omega^*(A) = \underset{n\geq 0}{\oplus} \Omega^n(A)$ est une algèbre graduée de manière évidente. Le produit de deux formes étant obtenu en juxtaposant les produits tensoriels. Considérons l'homomorphisme de k-modules

$$d : \Omega^0(A) \longrightarrow \Omega^1(A)$$

défini par la formule

$$d(a) = 1 \otimes a - a \otimes 1$$

On a alors l'isomorphisme suivant

$$A \otimes A/k \longrightarrow \Omega^1(A)$$
$$x \otimes \bar{y} \longrightarrow xdy$$

(Le produit tensoriel étant celui de k-modules). L'ensemble $\Omega^n(A)$ des formes différentielles non commutatives de degré n s'identifie alors au produit tensoriel de k-modules

$$A \otimes A/k \otimes \cdots \otimes A/k (n \text{ facteurs } A/k).$$

Une forme différentielle non commutative de degré n s'écrit donc comme combinaison linéaire de termes de la forme

$$a_0 da_1 \cdots da_n$$

et le morphisme d s'étend aux formes de degré n de $\Omega^*(A)$ par la formule

$$d(a_0 da_1 \cdots da_n) = da_0 da_1 \cdots da_n.$$

Ce morphisme est de carré nul et vérifie, pour toutes formes $w \in \Omega^n(A)$ et $\theta \in \Omega^p(A)$, l'identité de Leibniz :

$$d(w\theta) = dw\theta + (-1)^n w d\theta$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\Omega^n(A) \subset \left(A \underset{k}{\otimes} A\right) \underset{A}{\otimes} \left(A \underset{k}{\otimes} A\right) \underset{A}{\otimes} \cdots \underset{A}{\otimes} \left(A \underset{k}{\otimes} A\right) \simeq A \underset{k}{\otimes} A \underset{k}{\otimes} \cdots \underset{k}{\otimes} A = T^n(A).$$

L'algèbre différentielle graduée $\Omega^*(A)$ est donc incluse dans $T^*(A)$. D'autre part, pour tout $n \geq 0$, on a un opérateur de projection

$$J : T^n(A) \longrightarrow \Omega^n(A)$$

défini par la formule suivante

$$J(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = a_0 da_1 \cdots da_n.$$

L'opérateur J est un morphisme de k-modules qui commute avec les différentielles. Il convient de noter que ce morphisme n'est pas un morphisme de k-algèbres. Cependant on a la proposition suivante :

Proposition 1 (*cf.* [2]). *Soient A est une k-algèbre commutative, $w \in T^n(A)$ et $\theta \in T^p(A)$ avec $D(\theta) = 0$. On a alors*

$$J(w\theta) = J(w)J(\theta).$$

On définit sur les formes différentielles étendues de degré n un produit, noté #, par la formule suivante :

$$(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \# (b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_n) = a_0 b_0 \otimes a_1 b_1 \otimes \cdots \otimes a_n b_n.$$

Rappelons d'autre part, que si A est une k-algèbre commutative, une application

$$f : [n] \longrightarrow [m]$$

(où pour tout $p \in \mathbb{N}$, $[p]$ désigne l'ensemble $\{0, 1, \ldots, p\}$), induit un morphisme

$$f_* : T^n(A) \longrightarrow T^m(A)$$

défini par la correspondance

$$a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_m$$

où pour tout $j \in [m]$

$$b_j = \begin{cases} 1 \text{ si } f^{-1}(\{j\}) & \text{est vide} \\ \prod\limits_{f(i)=j}^{a_i} & \text{sinon} \end{cases}$$

On montre alors que pour toutes formes w et $\theta \in T^n(A)$, on a

$$f_*(w\#\theta) = f_*(w) \# f_*(\theta)$$

et que si $w \in T^n(A)$ et $\theta \in T^p(A)$, on a

$$w\theta = f_* (w) \# g_* (\theta).$$

L'application f étant l'inclusion de $[n]$ dans $[n+p]$ et $g : [p] \longrightarrow [n+p]$ est défini par $g(i) = i+n$. Pour alléger les notations dans ce qui suit, on notera f l'homomorphisme induit sur les formes é tendues par une application $f : [n] \longrightarrow [m]$ et pour éviter les confusions on notera J_n l'opérateur J en degré n. Rappelons enfin que sur les formes étendues de degré n on a

$$D = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \delta_i$$

où les $\delta_i : [n] \longrightarrow [n+1]$ sont les opérateurs cofaces définis par $\delta_i(j) = j$ si $i > j$ et $\delta_i(j) = j+1$ si $i \le j$ et que

$$\Omega^n (A) = \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker s_i$$

où les $s_i : [n] \longrightarrow [n-1]$ sont les opérateurs de codégénérescence définis par $s_i(j) = j$ si $i \ge j$ et $s_i(j) = j-1$ si $i < j$. Soit $n \ge 1$. Pour tout $1 \le i \le n$, considérons l'application

$$f_i : [n] \longrightarrow [n]$$

définie par la correspondance

$$j \mapsto \begin{cases} j & \text{si } j \ne i \\ i-1 & \text{si } j = i \end{cases}$$

On a alors la proposition suivante

Proposition 2 (*cf.* [2]). *Pour tout $n \ge 1$, on a*

$$J_n = \left(1 - f_n\right)\left(1 - f_{n-1}\right) \cdots \left(1 - f_1\right).$$

(Le produit des $(1 - f_i)$ étant tout simplement la composée de ces morphismes.)

2.2. *Exemples d'algèbres de formes diffé rentielles non commutatives*

Soient $s \in \mathbb{N}$, R un anneau commutatif, A_s la R-algèbre quotient $R[x_0, x_1, \ldots, x_s]/(x_0 + x_1 + \cdots + x_s = 1)$ et $\Omega^*(A_s)$ l'algèbre des formes diffé rentielles non commutatives sur A_s. Cette algèbre est engendrée non commutativement par les symboles x_α et $dx_\alpha, 0 \le \alpha \le s$ avec les relations suivantes :

$$\sum x_\alpha = 1, \sum dx_\alpha = 0 \quad \text{et} \quad x_\alpha x_\beta = x_\beta x_\alpha.$$

Soit $\bar{A}_s$ l'algèbre des fonctions de $[s]$ dans R. Cette algèbre est augmentée et le R-module $\Omega^n(\bar{A}_s)$ s'identifie à celui des fonctions $f : [s]^{n+1} \longrightarrow R$ vérifiant, $f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0$ si il existe i tel que $x_i = x_{i+1}$. Les algèbres $\Omega^*(A_s)$ et $\Omega^*(\bar{A}_s)$ sont en fait des algèbres différentielles simpliciales. Ces deux algèbres seront notées Ω^*.

Théorème 3 (*cf.* [9, p. 4285]). *Pour tout ensemble simplicial X, posons $\Omega^*(X) = Mor(X; \Omega^*)$. La cohomologie de l'algèbre différentielle graduée $\Omega^*(X)$ s'identifie alors naturellement à la cohomologie $H^*(X; R)$.*

Soit X un complexe simplicial dénombrable avec un point base $*$ (ou un complexe simplicial quelconque muni de la k-topologie (*cf.* [8, p. 52])). Le nième produit symétrique de X not é $SP^n(X)$ est le quotient topologique de X^n par l'action naturelle du groupe symétrique S_n. Le produit symétrique infini noté $SP^\infty(X)$ est la limite inductive des $SP^n(X)$. L'application $SP^n(X) \longrightarrow SP^{n+1}(X)$ étant définie par la correspondance :

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n) \mapsto (a_0, a_1, \ldots, a_n, *)$$

L'ensemble $SP^\infty(X)$ est alors un monoï de abélien topologique pour la loi induite par la juxtaposition des suites. Notons $L(X)$ le symétrisé de $SP^\infty(X)$ c'est à dire, le quotient de $SP^\infty(X)\times SP^\infty(X)$ par la relation d'é quivalence

$$(a,b)\sim(c,d)\iff \text{ il existe } e \text{ tel que } a+d+e=c+b+e$$

Notons $L(X;R)$ le produit tensoriel $L(X)\otimes R$. Le R-module $L(X;R)$ s'identifie alors au R-module libre de base X avec la relation $*=0$. Pour un anneau dénombrable R, on a le théorème suivant qui est dû à Dold et Thom [6].

Théorème 4. *Soit X un complexe simplicial dénombrable pointé. Pour tout $i\geq 0$, le groupe d'homotopie $\pi_i(L(X;R))$ est isomorphe à la cohomologie réduite $\widetilde{H}_i(X;R)$ du complexe X à valeurs dans R.*

Remarque 5. Si X est un modèle simplicial de la sphère S^n, alors $L(X;R)$ est un modèle de l'espace d'Eilenberg–Maclane $K(R,n)$.

Considérons maintenant le R-module $A=L(B^1;R)$ où $B^1=[0,1]$ et 0 est le point base de B^1. On peut alors munir A d'une structure de R-algèbre, la multiplication étant induite par celle des nombres réels. Le R-module $L(S^1;R)$ s'identifie à A/R et en utilisant l'homéomorphisme suivant :

$$B^{n+1}\simeq B^1\wedge S^1\wedge S^1\wedge\cdots S^1$$

(n facteurs S^1), on montre que le R-module des formes différentielles non commutatives de degré n, qu'on notera Ω^n, s'identifie à $L(B^{n+1};R)$ et que la différentielle $d:\Omega^n\longrightarrow\Omega^{n+1}$ est l'application composée évidente :

$$L\big(B^{n+1};R\big)\longrightarrow L\big(S^{n+1};R\big)\longrightarrow L\big(B^{n+2};R\big)$$

Théorème 6 (*cf.* [9, p. 481]). *Soient X un espace qui a le type d'homotopie d'un CW-complexe et $\Omega^n(X)=Mor(X;\Omega^n)$, l'ensemble des applications continues de X dans Ω^n. La cohomologie du complexe $\Omega^*(X)$ est alors naturellement isomorphe à la cohomologie usuelle $H^*(X;R)$.*

2.3. *Cup i-produits sur les formes différentielles non commutatives*

Soient k un anneau commutatif unitaire et A une k-algèbre unitaire. Pour tous p, $q\in\mathbb{N}$ et $i\in\mathbb{Z}$, nous allons définir un cup i-produit

$$T^p(A)\otimes T^q(A)\longrightarrow T^{p+q-i}(A)$$

Soient donc p, $q\in\mathbb{N}$, $\omega=a_0\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_p\in T^p(A)$ et $\theta=b_0\otimes b_1\otimes\cdots\otimes b_q\in T^q(A)$. Soit $i\leq\min(p,q)$. Si i est pair, on pose

$$\omega\underset{i}{\smile}\theta=\sum\varepsilon_\alpha a_0\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_{j_0}b_0\otimes b_1\otimes\cdots\otimes b_{k_0}a_{j_0+1}\otimes a_{j_0+2}\otimes\cdots\otimes a_{j_1}b_{k_0+1}$$
$$\otimes b_{k_0+2}\otimes\cdots\otimes b_{k_1}a_{j_1+1}\otimes a_{j_1+2}\otimes\cdots\otimes b_{k_{\frac{i}{2}-1}}a_{j_{\frac{i}{2}-1}+1}\otimes a_{j_{\frac{i}{2}-1}+2}\otimes\cdots\otimes a_pb_{k_{\frac{i}{2}-1}+1}\otimes b_{k_{\frac{i}{2}-1}+2}\otimes\cdots\otimes b_q.$$

Le signe ε_α est la signature de la permutation α de $\{0,1,\ldots,p+q+1\}$ qui envoie la forme

$$a_0\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_p\otimes b_0\otimes b_1\otimes\cdots\otimes b_q$$

sur

$$a_0\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_{j_0}\otimes b_0\otimes b_1\otimes\cdots\otimes b_{k_0}\otimes a_{j_0+1}\otimes a_{j_0+2}\otimes\cdots\otimes a_{j_1}\otimes b_{k_0+1}\otimes b_{k_0+2}\otimes\cdots\otimes b_{k_1}\otimes a_{j_1+1}$$
$$\otimes a_{j_1+2}\otimes\cdots\otimes b_{k_{\frac{i}{2}-1}}\otimes a_{j_{\frac{i}{2}-1}+1}\otimes a_{j_{\frac{i}{2}-1}+2}\otimes\cdots\otimes a_p\otimes b_{k_{\frac{i}{2}-1}+1}\otimes b_{k_{\frac{i}{2}-1}+2}\otimes\cdots\otimes b_q.$$

La somme est prise sur toutes les façons de choisir $\{j_0,j_1,\ldots,j_{\frac{i}{2}}\}$ et $\{k_0,k_1,\ldots,k_{\frac{i}{2}}\}$ tels que $j_0\geq 0$, pour tout $s\leq\frac{i}{2}-1$, $j_s+1<j_{s+1}$, $j_{\frac{i}{2}}=p$, $k_0>0$, pour tout $s\leq\frac{i}{2}-2$, $k_s+1<k_{s+1}$ et $k_{\frac{i}{2}}=q$.

Pour i impair, on pose

$$\omega \underset{i}{\smile} \theta = \sum \varepsilon_\alpha a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{j_0} b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_{k_0} a_{j_0+1} \otimes a_{j_0+2} \otimes \cdots \otimes a_{j_1} b_{k_0+1}$$
$$\otimes b_{k_0+2} \otimes \cdots \otimes b_{k_1} a_{j_1+1} \otimes a_{j_1+2} \otimes \cdots \otimes a_{j_{\frac{i-1}{2}}} b_{k_{\frac{i-3}{2}}+1} \otimes b_{k_{\frac{i-1}{2}-1}+2} \otimes \cdots \otimes b_q a_{j_{\frac{i-1}{2}}+1} \otimes a_{j_{\frac{i-1}{2}}+2} \otimes \cdots \otimes a_p$$

Dans ce cas $\{j_0, j_1, \ldots, j_{\frac{i-1}{2}}\}$ et $\{k_0, k_1, \ldots, k_{\frac{i-1}{2}}\}$ vérifient les conditions suivantes : $j_0 \geq 0$, pour tout $s \leq \frac{i-1}{2} - 1$, $j_s + 1 < j_{s+1}$, $j_{\frac{i-1}{2}} \leq p - 1$, $k_0 > 0$, pour tout $s \leq \frac{i-1}{2} - 1$, $k_s + 1 < k_{s+1}$ et $k_{\frac{i-1}{2}} = q$.
Pour $i < 0$ ou $i > \min(p, q)$ on pose enfin

$$\omega \underset{i}{\smile} \theta = 0.$$

Proposition 7 (*cf.* [2]). *Soient $a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_p \in T^p(A)$ et $b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_q \in T^q(A)$.*

Pour $i = 0$, on a

$$a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_p \underset{0}{\smile} b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_q = a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_p b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_q.$$

On retrouve donc le produit d'Alexander–Whitney.
Pour $i = 1$ on a la formule suivante :

$$a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_p \underset{1}{\smile} b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_q =$$
$$\sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{(p-i)(q+1)} a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_q a_{i+1} \otimes a_{i+2} \otimes \cdots \otimes a_p.$$

Pour $i = 2$ on a la formule suivante :

$$a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_p \underset{2}{\smile} b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_q =$$
$$\sum_{i=0}^{p-2} \sum q-1_{j=1} (-1)^{(p-i)(j+1)} a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_j a_{i+1} \otimes a_{i+2} \otimes \cdots \otimes a_p b_{j+1} \otimes b_{j+2} \cdots \otimes b_q.$$

Si l'algèbre A est commutative, pour toutes formes ω et $\theta \in T^n(A)$, on a

$$\omega \underset{n}{\smile} \theta = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \omega \# \theta.$$

Proposition 8 (*cf.* [2]). *Soient $\omega = a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_p \in T^p(A)$, $\theta = b_0 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_q \in T^q(A)$ et $i \leq \min(p, q)$. On a alors*

$$D\left(\omega \underset{i}{\smile} \theta\right) = D(\omega) \underset{i}{\smile} \theta + (-1)^p \omega \underset{i}{\smile} D(\theta) + (-1)^{p+q-i} \omega \underset{i-1}{\smile} \theta + (-1)^{pq+p+q} \theta \underset{i-1}{\smile} \omega$$

Proposition 9. *Soient $\omega \in \Omega^p(A)$, $\theta \in \Omega^q(A)$. Étant donné que $\Omega^*(A) \subset T^*(A)$, on définit naturellement $\omega \underset{i}{\smile} \theta$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Et on a $\omega \underset{i}{\smile} \theta \in \Omega^{p+q-i}(A)$.*

Démonstration. Soient $\omega \in \Omega^p(A)$, $\theta \in \Omega^q(A)$. Raisonnons par récurrence sur $\deg\omega + \deg\theta$. Le résultat est vrai quand $\deg\omega + \deg\theta = 0$. Pour $n+1$, si i est impair, on a :

$$\omega da \underset{i}{\smile} \theta = (\omega \otimes a) \underset{i}{\smile} \theta - (\omega a \otimes 1) \underset{i}{\smile} \theta = \left(\omega \underset{i}{\smile} \theta\right) da + (-1)^q \left(\omega \underset{i-1}{\smile} \theta a - \omega a \underset{i-1}{\smile} \theta\right)$$

D'après l'hypothèse de récurrence, toutes ces formes sont dans $\Omega^*(A)$. Si i est pair, on a :

$$\omega \underset{i}{\smile} \theta da = \omega \underset{i}{\smile} (\theta \otimes a) - \omega \underset{i}{\smile} (\theta a \otimes 1) = \left(\omega \underset{i}{\smile} \theta\right) da + \left(\omega a \underset{i-1}{\smile} \theta - \omega \underset{i-1}{\smile} \theta a\right)$$

Ces formes sont toutes dans $\Omega^*(A)$. D'où le résultat. □

D'après la proposition 2.2.3, la proposition suivante est immédiate.

Proposition 10. *Soient $\omega \in \Omega^p(A)$ et $\theta \in \Omega^q(A)$. Pour tout $i \le \min(p,q)$ on a*

$$d\left(\omega \underset{i}{\smile} \theta\right) = d\omega \underset{i}{\smile} \theta + (-1)^p \omega \underset{i}{\smile} d\theta + (-1)^{p+q-i} \omega \underset{i-1}{\smile} \theta + (-1)^{pq+p+q} \theta \underset{i-1}{\smile} \omega$$

Définition 11. *Soient I et J deux morphismes de complexes de degré p, définis sur $\Omega^*(A)$. On dira que I et J sont homotopes sur $\Omega^q(A)$ si il existe deux morphismes L_q et L_{q+1} définis sur $\Omega^q(A)$ et $\Omega^{q+1}(A)$ tels que $I - J = dL_q + L_{q+1}d$ en degré q.*

Théorème 12 (*cf.* [2]). *Soit $I : \Omega^*(A) \longrightarrow \Omega^*(A)$ un morphisme de complexes de degré p, homotope à 0 sur $\Omega^n(A)$. Le morphisme I est alors homotope à 0 sur $\Omega^q(A)$ pour tout $q \ge n$.*

Proposition 13 (*cf.* [2]). *Soit Ω^* l'algèbre de l'exemple 2.1.2. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, les applications*

$$\Omega^q \longrightarrow \Omega^{2q-i}$$
$$\omega \longmapsto \omega \underset{i}{\smile} \omega$$

induisent, pour un ensemble simplicial X, des morphismes

$$D_i : H^q(X;R) \longrightarrow H^{2q-i}(X;R)$$

*qui coincident avec les carrés de Steenrod Sq^{q-i} (*cf. *[10]).*

3. Algèbre de Gerstenhaber

Définition 14. *Une algèbre de Gerstenhaber (*cf. *[7]) est une algèbre graduée Λ^* munie de deux produits. Un premier produit*

$$\Lambda^p \otimes \Lambda^q \longrightarrow \Lambda^{p+q}$$
$$a \otimes b \longmapsto ab$$

et un deuxième produit (crochet de Lie)

$$\Lambda^p \otimes \Lambda^q \longrightarrow \Lambda^{p+q-1}$$
$$a \otimes b \longmapsto [a,b]$$

Ces deux produits doivent satisfaire les conditions suivantes :

- *Associativité du premier produit : $a(bc) = (ab)c$*
- *Commutativité du premier produit : $ab = (-1)^{|a||b|} ba$*
- *Commutativité du deuxième produit : $[b,a] = -(-1)^{(|a|-1)(|b|-1)} [a,b]$*
- *Identité de poisson : $[a,bc] = (-1)^{|c|} [a,b]c + (-1)^{|a||b|} b[a,c]$*
- *Identité de Jacobi :*

$$(-1)^{(|a|-1)(|c|-1)} \quad [a,[b,c]] + (-1)^{(|b|-1)(|a|-1)} \quad [b,[c,a]] + (-1)^{(|c|-1)(|b|-1)} \quad [c,[a,b]] = 0$$

Définition 15. *Soient k un anneau commutatif unitaire et A une k-algèbre unitaire. Soient $\omega \in \Omega^p(A)$ et $\theta \in \Omega^q(A)$. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on pose :*

$$[\omega,\theta]_i = (-1)^q \left(\omega \underset{i}{\smile} \theta - (-1)^{pq-i} \theta \underset{i}{\smile} \omega\right)$$

Proposition 16. *Pour toutes formes $\omega \in \Omega^p(A)$ et $\theta \in \Omega^q(A)$ on a l'identité suivante :*

$$d[\omega,\theta]_i = [d\omega,\theta]_i - (-1)^p [\omega, d\theta]_i$$

Démonstration. Soient donc $\omega \in \Omega^p(A)$ et $\theta \in \Omega^q(A)$. On alors

$$\begin{aligned}
d[\omega,\theta]_i &= (-1)^q\, d\left(\omega \underset{i}{\smile} \theta - (-1)^{pq-i}\theta \underset{i}{\smile} \omega\right)\\
&= (-1)^q \left(d\omega \underset{i}{\smile} \theta + (-1)^p \omega \underset{i}{\smile} d\theta + (-1)^{p+q-i}\omega \underset{i-1}{\smile} \theta + (-1)^{pq+p+q}\theta \underset{i-1}{\smile} \omega\right)\\
&- (-1)^q(-1)^{pq-i}\left(d\theta \underset{i}{\smile} \omega + (-1)^q \theta \underset{i}{\smile} d\omega + (-1)^{p+q-i}\theta \underset{i-1}{\smile} \omega + (-1)^{pq+p+q}\omega \underset{i-1}{\smile} \theta\right)\\
&= (-1)^q \left(d\omega \underset{i}{\smile} \theta - (-1)^{(p+1)q-i}\theta \underset{i}{\smile} d\omega + (-1)^p\left(\omega \underset{i}{\smile} d\theta - (-1)^{p(q+1)-i} d\theta \underset{i}{\smile} \omega\right)\right)\\
&= [d\omega,\theta]_i - (-1)^p[\omega, d\theta]_i
\end{aligned}$$

Ainsi si ω et θ sont des formes fermées, $[\omega,\theta]_i$ l'est aussi. Maintenant si on considère des formes fermées $\omega \in \Omega^p(A)$ et $\theta \in \Omega^q(A)$ et des formes quelconques $\omega_1 \in \Omega^{p-1}(A)$ et $\theta_1 \in \Omega^{q-1}(A)$, on a

$$\begin{aligned}
[\omega + d\omega_1, \theta + d\theta_1]_i &= [\omega,\theta]_i + [d\omega_1,\theta]_i + [\omega, d\theta_1]_i + [d\omega_1, d\theta_1]_i\\
&= [\omega,\theta]_i + d[\omega_1,\theta]_i - (-1)^p d[\omega,\theta_1]_i + d[\omega_1, d\theta_1]_i\\
&= [\omega,\theta]_i + d\left([\omega_1,\theta]_i - (-1)^p[\omega,\theta_1]_i + [\omega_1, d\theta_1]_i\right)
\end{aligned}$$

□

Par conséquent, pour tout espace topologique X, tout anneau commutatif R et tout $i \in \mathbb{Z}$, on a une application bilinéaire

$$[.,.]_i : H^p(X;R) \otimes H^q(X;R) \longrightarrow H^{p+q-i}(X;R)$$

Puisque les opérations $[.,.]_i$ sont à la base définies sur les formes différentielles non commutatives, on a immédiatement la proposition suivante :

Proposition 17. *Soient X, Y deux espaces, R un anneau commutatif et f un morphisme de X dans Y. En notant f_*, le morphisme induit par f en cohomologie, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc}
H^p(Y;R) \otimes H^q(Y;R) & \xrightarrow{[.,.]_i} & H^{p+q-i}(Y;R)\\
{\scriptstyle f_* \otimes f_*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f_*}\\
H^p(X;R) \otimes H^q(X;R) & \xrightarrow{[.,.]_i} & H^{p+q-i}(X;R)
\end{array}$$

Proposition 18. *Soient X un espace topologique, R un anneau commutatif, $i \in \mathbb{Z}$, $x \in H^p(X;R)$ et $y \in H^q(X;R)$. On a alors*

$$[y,x]_i = -(-1)^{(p-1)(q-1)-i+1}[x,y]_i$$

Démonstration. Soient $\omega \in \Omega^p(A)$ et $\theta \in \Omega^q(A)$. On a

$$\begin{aligned}
[\theta,\omega]_i &= (-1)^p\left(\theta \underset{i}{\smile} \omega - (-1)^{pq-i}\omega \underset{i}{\smile} \theta\right) = -(-1)^{pq-i+p}\left(\omega \underset{i}{\smile} \theta - (-1)^{pq-i}\theta \underset{i}{\smile} \omega\right)\\
&= -(-1)^{pq-i+p+q}[\omega,\theta]_i = -(-1)^{(p-1)(q-1)-i+1}[\omega,\theta]_i
\end{aligned}$$

□

Proposition 19. *Soient X un espace topologique, $x \in H^p(X;\mathbb{Z}/2)$, $y \in H^q(X;\mathbb{Z}/2)$ et $z \in H^r(X;\mathbb{Z}/2)$. On a alors :*

$$[xz, yz]_i = [x,y]_i\, Sq^{r-1}(z)$$

Où Sq^{r-1} est le carré de Steenrod.

Démonstration. Soient $\omega \in Z^p$, $\theta \in Z^q$ (Z^* désignant l'ensemble des formes fermées de l'algèbre de formes différentielles non commutatives $\Omega^n(\bar{A}_s)$ citée dans le paragraphe 2.1.2. L'algèbre $\bar{A}_s$ étant augmentée, toute forme fermée s'écrit comme combinaison linéaires de formes $da_1 da_2 \cdots da_n$). On a alors

$$[\omega da, \theta da]_i = \omega da \underset{i}{\smile} \theta da + \theta da \underset{i}{\smile} \omega da$$

Où $a \in \Omega^0$. On a aussi

$$\begin{aligned} &D\left(\omega da \underset{i}{\smile} \theta a + \theta da \underset{i}{\smile} \omega a\right) \\ &\qquad = \omega da \underset{i}{\smile} \theta da + \omega da \underset{i-1}{\smile} \theta a + \theta a \underset{i-1}{\smile} \omega da + \theta da \underset{i}{\smile} \omega da + \theta da \underset{i-1}{\smile} \omega a + \omega a \underset{i-1}{\smile} \theta da \end{aligned}$$

Supposons que i est paire (Si i est impaire, la démonstration est analogue). En utilisant le fait que pour toutes formes x et $y \in \Omega^*$, $x \underset{i}{\smile} ya = (x \underset{i}{\smile} y)a$, on a

$$\begin{aligned} &D\left(\omega da \underset{i}{\smile} \theta a + \theta da \underset{i}{\smile} \omega a\right) = D\left(\left(\omega da \underset{i}{\smile} \theta + \theta da \underset{i}{\smile} \omega\right) a\right) \\ &= \left(\omega da \underset{i}{\smile} \theta\right) da + \left(\omega da \underset{i-1}{\smile} \theta\right) a + \left(\theta \underset{i-1}{\smile} \omega da\right) a + \left(\theta da \underset{i}{\smile} \omega\right) da + \left(\theta da \underset{i-1}{\smile} \omega\right) a + \left(\omega \underset{i-1}{\smile} \theta da\right) a \end{aligned}$$

D'où on a

$$\begin{aligned} &\omega da \underset{i}{\smile} \theta da + \theta da \underset{i}{\smile} \omega da \\ &\quad = \omega da \underset{i-1}{\smile} \theta a + \theta da \underset{i-1}{\smile} \omega a + \left(\omega da \underset{i}{\smile} \theta\right) da + \left(\omega da \underset{i-1}{\smile} \theta\right) a + \left(\theta da \underset{i}{\smile} \omega\right) da + \left(\theta da \underset{i-1}{\smile} \omega\right) a \end{aligned}$$

Considérons la forme suivante :

$$\begin{aligned} &D\left(\omega a \underset{i}{\smile} \theta + \omega \underset{i}{\smile} \theta a + \theta a \underset{i}{\smile} \omega + \theta \underset{i}{\smile} \omega a\right) \\ &\qquad = \omega da \underset{i}{\smile} \theta + \omega \underset{i}{\smile} \theta da + \omega a \underset{i-1}{\smile} \theta + \theta \underset{i-1}{\smile} \omega a + \omega \underset{i-1}{\smile} \theta a + \theta a \underset{i-1}{\smile} \omega \\ &\qquad\quad + \theta da \underset{i}{\smile} \omega + \theta \underset{i}{\smile} \omega da + \omega \underset{i-1}{\smile} \theta a + \theta a \underset{i-1}{\smile} \omega + \theta \underset{i-1}{\smile} \omega a + \omega a \underset{i-1}{\smile} \theta \\ &\qquad = \omega da \underset{i}{\smile} \theta + \omega \underset{i}{\smile} \theta da + \theta da \underset{i}{\smile} \omega + \theta \underset{i}{\smile} \omega da \end{aligned}$$

L'application

$$(\omega, da) \longmapsto \omega a \underset{i}{\smile} \theta + \omega \underset{i}{\smile} \theta a + \theta a \underset{i}{\smile} \omega + \theta \underset{i}{\smile} \omega a$$

étant bien définie, les formes suivantes :

$$\omega da \underset{i}{\smile} \theta + \theta da \underset{i}{\smile} \omega \quad \text{et} \quad \omega \underset{i}{\smile} \theta da + \theta \underset{i}{\smile} \omega da$$

Ont la même classe de cohomologie. Soit alors la forme

$$\begin{aligned} &D\left(\omega \underset{i}{\smile} \theta a + \theta \underset{i}{\smile} \omega a\right) \\ &\qquad = \omega \underset{i}{\smile} \theta da + \theta \underset{i}{\smile} \omega da + \omega \underset{i-1}{\smile} \theta a + \theta a \underset{i-1}{\smile} \omega + \theta \underset{i-1}{\smile} \omega a + \omega a \underset{i-1}{\smile} \theta \\ &\qquad = D\left(\left(\omega \underset{i}{\smile} \theta + \theta \underset{i}{\smile} \omega\right) a\right) \\ &\qquad = \left(\omega \underset{i}{\smile} \theta + \theta \underset{i}{\smile} \omega\right) da + \left(\omega \underset{i-1}{\smile} \theta\right) a + \left(\theta \underset{i-1}{\smile} \omega\right) a + \left(\theta \underset{i-1}{\smile} \omega\right) a + \left(\omega \underset{i}{\smile} \theta\right) a \end{aligned}$$

Ainsi on a

$$\omega \underset{i}{\smile} \theta da + \theta \underset{i}{\smile} \omega da = \omega \underset{i-1}{\smile} \theta a + \theta \underset{i-1}{\smile} \omega a + \left(\omega \underset{i}{\smile} \theta + \theta \underset{i}{\smile} \omega\right) da + \left(\theta \underset{i-1}{\smile} \omega\right) a + \left(\omega \underset{i}{\smile} \theta\right) a$$

Donc la forme

$$\omega da \underset{i}{\smile} \theta da + \theta da \underset{i}{\smile} \omega da$$

possède la même classe de cohomologie que la forme suivante :

$$\omega da \underset{i-1}{\smile} \theta a + \theta da \underset{i-1}{\smile} \omega a + \left(\omega da \underset{i-1}{\smile} \theta\right) a + \left(\theta da \underset{i-1}{\smile} \omega\right) a + \left(\omega \underset{i-1}{\smile} \theta a\right) da$$
$$+ \left(\theta \underset{i-1}{\smile} \omega a\right) da + \left(\omega \underset{i}{\smile} \theta + \theta \underset{i}{\smile} \omega\right) (da)^2 + \left(\theta \underset{i-1}{\smile} \omega\right) ada + \left(\omega \underset{i}{\smile} \theta\right) ada$$

Soit la forme suivante :

$$\begin{aligned} D\left(\omega a \underset{i-1}{\smile} \theta + \theta a \underset{i-1}{\smile} \omega\right) &= \omega da \underset{i-1}{\smile} \theta + \omega a \underset{i-2}{\smile} \theta + \theta \underset{i-2}{\smile} \omega a + \theta da \underset{i-2}{\smile} \omega + \theta a \underset{i-2}{\smile} \omega + \omega \underset{i-2}{\smile} \theta a \\ &= D\left(\left(\omega \underset{i-1}{\smile} \theta + \theta \underset{i-1}{\smile} \omega\right) a\right) \\ &= \left(\omega \underset{i-1}{\smile} \theta\right) da + \left(\theta \underset{i-1}{\smile} \omega\right) da \end{aligned}$$

D'où on a

$$\begin{aligned} &\left(\omega da \underset{i-1}{\smile} \theta\right) a + \left(\theta da \underset{i-1}{\smile} \omega\right) a \\ &\quad = \left(\omega a \underset{i-2}{\smile} \theta\right) a + \left(\theta \underset{i-2}{\smile} \omega a\right) a + \left(\theta a \underset{i-2}{\smile} \omega\right) a + \left(\omega \underset{i-2}{\smile} \theta a\right) a + \left(\omega \underset{i-1}{\smile} \theta\right) daa + \left(\theta \underset{i-1}{\smile} \omega\right) daa \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} &D\left(\omega a \underset{i-1}{\smile} \theta a + \theta a \underset{i-1}{\smile} \omega a\right) \\ &\quad = \omega da \underset{i-1}{\smile} \theta a + \omega a \underset{i-1}{\smile} \theta da + \theta da \underset{i-1}{\smile} \omega a + \theta a \underset{i-1}{\smile} \omega da \\ &\quad = D\left(\left(\omega \underset{i-1}{\smile} \theta a + \theta \underset{i-1}{\smile} \omega a\right) a\right) \\ &\quad = \left(\omega \underset{i-1}{\smile} \theta da\right) a + \left(\omega \underset{i-2}{\smile} \theta a\right) a + \left(\theta a \underset{i-2}{\smile} \omega\right) a \\ &\qquad + \left(\theta \underset{i-1}{\smile} \omega da\right) a + \left(\theta \underset{i-2}{\smile} \omega a\right) a + \left(\omega a \underset{i-2}{\smile} \theta\right) a + \left(\omega \underset{i-1}{\smile} \theta a\right) da + \left(\theta \underset{i-1}{\smile} \omega a\right) da \end{aligned}$$

Ce qui donne l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} &\omega da \underset{i-1}{\smile} \theta a + \theta da \underset{i-1}{\smile} \omega a \\ &\quad = \left(\omega \underset{i-2}{\smile} \theta a\right) a + \left(\theta a \underset{i-2}{\smile} \omega\right) a + \left(\theta \underset{i-2}{\smile} \omega a\right) a + \left(\omega a \underset{i-2}{\smile} \theta\right) a + \left(\omega \underset{i-1}{\smile} \theta a\right) da + \left(\theta \underset{i-1}{\smile} \omega a\right) da \end{aligned}$$

La forme

$$\omega da \underset{i}{\smile} \theta da + \theta da \underset{i}{\smile} \omega da$$

a donc la même classe de cohomologie que la forme suivante :

$$\begin{aligned} &\left(\omega \underset{i-1}{\smile} \theta\right) daa + \left(\theta \underset{i-1}{\smile} \omega\right) daa + \left(\omega \underset{i}{\smile} \theta + \theta \underset{i}{\smile} \omega\right) (da)^2 + \left(\theta \underset{i-1}{\smile} \omega\right) ada + \left(\omega \underset{i}{\smile} \theta\right) ada \\ &\quad = \left(\omega \underset{i}{\smile} \theta + \theta \underset{i}{\smile} \omega\right) (da)^2 + \left(\omega \underset{i-1}{\smile} \theta + \theta \underset{i-1}{\smile} \omega\right) (daa + ada) \\ &\quad = \left(\omega \underset{i}{\smile} \theta + \theta \underset{i}{\smile} \omega\right) (da)^2 + \left(\omega \underset{i-1}{\smile} \theta + \theta \underset{i-1}{\smile} \omega\right) da^2 \\ &\quad = \left(\omega \underset{i}{\smile} \theta + \theta \underset{i}{\smile} \omega\right) (da)^2 + \left(\omega \underset{i-1}{\smile} \theta + \theta \underset{i-1}{\smile} \omega\right) da \end{aligned}$$

En effet, on a bien $a^2 = a$ puisque a est une application à valeur dans $\mathbb{Z}/2$.On aura alors :

$$\left(\omega \underset{i}{\smile} \theta + \theta \underset{i}{\smile} \omega\right)(da)^2 + \left(\omega \underset{i-1}{\smile} \theta + \theta \underset{i-1}{\smile} \omega\right) da = [\omega,\theta]_i \left(da \underset{0}{\smile} da\right) + [\omega,\theta]_{i-1}\left(da \underset{1}{\smile} da\right)$$

Raisonnons maintenant par récurrence sur n. La forme suivante :

$$\left[\omega da_1 da_2 \cdots da_n da_{n+1}, \theta da_1 da_2 \cdots da_n da_{n+1}\right]_i$$

possède la même classe de cohomologie que la forme

$$\left[\omega da_1 da_2 \cdots da_n, \theta da_1 da_2 \cdots da_n\right]_i \left(da_{n+1} \underset{0}{\smile} da_{n+1}\right) + \left[\omega da_1 da_2 \cdots da_n, \theta da_1 da_2 \cdots da_n\right]_{i-1} \left(da_{n+1} \underset{1}{\smile} da_{n+1}\right)$$

Grâce a l'hypothèse de récurrence, cette dernière forme aura la même classe de cohomologie que la forme

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j+k=i} [\omega,\theta]_j \left(da_1 da_2 \cdots da_n \underset{k}{\smile} da_1 da_2 \cdots da_n\right)\right)\left(da_{n+1} \underset{0}{\smile} da_{n+1}\right)\\
&\quad + \left(\sum_{j+k=i-1} (\omega,\theta)_j \left(da_1 da_2 \cdots da_n \underset{k}{\smile} da_1 da_2 \cdots da_n\right)\right)\left(da_{n+1} \underset{1}{\smile} da_{n+1}\right)\\
&= \sum_{j+k=i} [\omega,\theta]_j \Big(\left(da_1 da_2 \cdots da_n \underset{k}{\smile} da_1 da_2 \cdots da_n\right)\left(da_{n+1} \underset{0}{\smile} da_{n+1}\right)\\
&\quad + \left(da_1 da_2 \cdots da_n \underset{k-1}{\smile} da_1 da_2 \cdots da_n\right)\left(da_{n+1} \underset{1}{\smile} da_{n+1}\right)\Big)
\end{aligned}$$

Cette forme a la même classe de cohomologie que la forme

$$\sum_{j+k=i} [\omega,\theta]_j \left(da_1 da_2 \cdots da_n da_{n+1} \underset{k}{\smile} da_1 da_2 \cdots da_n da_{n+1}\right)$$

D'où la proposition. □

Proposition 20. *Les applications* $[.,.]_j$ *commutent avec la suspension des opérations cohomologiques à coefficients dans* $\mathbb{Z}/2$.

Autrement dit, pour un espace topologique X, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
H^p(X;\mathbb{Z}/2)\otimes & & H^q(X;\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{[.,.]_{i-1}} & H^{p+q-i+1}(X;\mathbb{Z}/2)\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
H^{p+1}(X;\mathbb{Z}/2)\otimes & & H^{q+1}(X;\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{[.,.]_{i}} & H^{p+q-i+2}(X;\mathbb{Z}/2)
\end{array}$$

Les morphismes verticaux étant les suspensions.

Démonstration. Soient $\omega \in Z^p$, $\theta \in Z^q$ et $\gamma \in Z^1$. On a vu dans la démonstration précédente que la forme

$$\left[\omega\gamma, \theta\gamma\right]_i$$

possédait la même classe de cohomologie que la forme

$$[\omega,\theta]_i \gamma^2 + [\omega,\theta]_{i-1}\gamma$$

Or pour un générateur u de $H^1\left(S^1;\mathbb{Z}/2\right)$ représenté par un morphisme $S^1 \longrightarrow Z^1$ qu'on notera aussi γ, la forme γ^2 est cohomologiquement nulle. D'où la proposition. □

Proposition 21. *Soit X un espace, R un anneau commutatif, $x \in H^p(X;R)$, $y \in H^q(X;R)$ et $z \in H^r(X;R)$. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a l'identité de Jacobi suivante :*

$$(-1)^{(p-1)(r-1)}\left[x,\left[y,z\right]_i\right]_i + (-1)^{(p-1)(q-1)}\left[y,[z,x]_i\right]_i + (-1)^{(q-1)(r-1)}\left[z,\left[x,y\right]_i\right]_i = 0$$

Démonstration. Soient $\theta \in Z^q$ et $\gamma \in Z^r$. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a le morphisme suivant :

$$\alpha_i : \Omega^* \longrightarrow \Omega^{*+q+r-2i}$$

(Ω^* étant toujours l'une des algèbres de formes différentielles non commutatives citées dans le paragraphe 2.1.2) défini par la correspondance

$$\omega \longmapsto (-1)^{(p-1)(r-1)}\left[\omega,\left[\theta,\gamma\right]_i\right]_i + (-1)^{(p-1)(q-1)}\left[\theta,\left[\gamma,\omega\right]_i\right]_i + (-1)^{(q-1)(r-1)}\left[\gamma,\left[\omega,\theta\right]_i\right]_i$$

Ce morphisme est un morphisme de complexes. En effet, pour tout $\omega \in \Omega^p$ on a,

$$\begin{aligned} d\left(\alpha_i(\omega)\right) &= (-1)^{(p-1)(r-1)}\left[d\omega,\left[\theta,\gamma\right]_i\right]_i + (-1)^{(p-1)(q-1)+q+r}\left[\theta,\left[\gamma,d\omega\right]_i\right]_i \\ &\quad + (-1)^{(q-1)(r-1)+r+1}\left[\gamma,\left[d\omega,\theta\right]_i\right]_i \\ &= (-1)^{r+1}\alpha_i(d\omega) \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $\omega \in \Omega^0$. Si $i \geq 1$ $\alpha_i(\omega) = 0$ et si $i = 0$, on a

$$\alpha_0(\omega) = (-1)^{q+r-1}\begin{pmatrix} \omega\theta\gamma - (-1)^{qr}\omega\gamma\theta - \theta\gamma\omega + (-1)^{qr}\gamma\theta\omega + \theta\gamma\omega - \theta\omega\gamma - \\ (-1)^{qr}\gamma\omega\theta + (-1)^{qr}\omega\gamma\theta + (-1)^{qr}\gamma\omega\theta - (-1)^{qr}\gamma\theta\omega - \omega\theta\gamma + \theta\omega\gamma \end{pmatrix} = 0$$

Ainsi, et en utilisant le théorème 2.2.6, on montre que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, le morphisme α_i est homotope à 0 sur Ω^*. D'où la proposition. □

Proposition 22. *Soit X un espace, R un anneau commutatif, $x \in H^p(X;R)$, $y \in H^q(X;R)$ et $z \in H^r(X;R)$. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a l'identité de Poisson suivante :*

$$\left[x,yz\right]_i = (-1)^r\left[x,y\right]_i z + (-1)^{(p-i)q+q}\, y\left[x,z\right]_i$$

Démonstration. Soient $\theta \in Z^q$ et $\gamma \in Z^r$.Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a le morphisme suivant :

$$\beta_i : \Omega^* \longrightarrow \Omega^{*+q+r-i}$$

défini, pour une forme $\omega \in \Omega^p$, par la correspondance

$$\omega \longmapsto \left[\omega,\theta\gamma\right]_i - (-1)^r\left[\omega,\theta\right]_i\gamma - (-1)^{(p-i)q+q}\theta\left[\omega,\gamma\right]_i$$

Pour tout $\omega \in \Omega^p$, on a alors

$$d\beta_i(\omega) = \left[d\omega,\theta\gamma\right]_i - (-1)^r\left[d\omega,\theta\right]_i\gamma - (-1)^{(p-i)q+q}\theta\left[d\omega,\gamma\right]_i = \beta_i(d\omega)$$

Ainsi β_i est un morphisme de complexes. Supposons que $\omega \in \Omega^0$. Si $i \geq 1$ $\beta_i(\omega) = 0$ et si $i = 0$, on a

$$\begin{aligned} \beta_0(\omega) &= \left[\omega,\theta\gamma\right]_0 - (-1)^r\left[\omega,\theta\right]_0\gamma - (-1)^q\theta\left[\omega,\gamma\right]_0 \\ &= (-1)^{q+r}\left(\omega\theta\gamma - \theta\gamma\omega\right) - (-1)^r(-1)^q(\omega\theta\gamma - \theta\omega\gamma) - (-1)^q(-1)^r(\theta\omega\gamma - \theta\gamma\omega) = 0 \end{aligned}$$

Ces morphismes β_i sont donc nul sur Ω^0. En utilisant le théorème 2.2.6, on montre qu'ils sont homotopes à 0 sur Ω^*. D'où la proposition. □

Notation 23. *Pour tout espace topologique X, tout anneau commutatif R, on notera $[.,.]$ l'application bilinéaire*

$$[.,.]_1 : H^p(X;R) \otimes H^q(X;R) \longrightarrow H^{p+q-1}(X;R)$$

Proposition 24. *D'après les propositions précédentes, si X est un ensemble simplicial ou un espace topologique qui a le type d'homotopie d'un CW-complexe et R est un anneau commutatif, l'algèbre de cohomologie $H^*(X;R)$ muni du cup produit et du produit $[.,.]$ est une algèbre de Gerstenhaber.*

Remarque 25. Dans [3], il est montré que l'algèbre des formes différentielles non commutatives est une algèbre de Gerstenhaber–Voronov. Ce qui induit une structure d'algèbre de Gerstenhaber sur l'algèbre des formes différentielles non commutatives.

Cependant, cette structure, ne passe pas à l'algèbre de cohomologie singulière.

Définition 26. *Les constatations précédentes nous poussent naturellement à définir une algèbre de Gerstenhaber généralisée de la façon suivante : Soit une algèbre graduée Λ^* munie de deux produits. Un premier produit*

$$\begin{aligned}\Lambda^p \otimes \Lambda^q &\longrightarrow \Lambda^{p+q}\\ a\otimes b &\longmapsto ab\end{aligned}$$

et pour tout $i \in \mathbb{Z}$, un deuxième produit

$$\begin{aligned}\Lambda^p \otimes \Lambda^q &\longrightarrow \Lambda^{p+q-i}\\ a\otimes b &\longmapsto [a,b]_i\end{aligned}$$

Ces deux produits doivent satisfaire les conditions suivantes :

- *Associativité du premier produit : $a(bc) = (ab)c$*
- *Commutativité du premier produit : $ab = (-1)^{|a||b|}\, ba$*
- *Commutativité du deuxième produit $[b,a]_i = -(-1)^{(|a|-1)(|b|-1)-i+1}\,[a,b]_i$*
- *Identité de poisson : $[a,bc]_i = (-1)^{|c|}\,[a,b]_i\, c + (-1)^{(|a|-i+1)|b|}\, b\,[a,c]_i$*
- *Identité de Jacobi :*

$$(-1)^{(|a|-1)(|c|-1)}\,[a,[b,c]_i]_i + (-1)^{(|b|-1)(|a|-1)}\,[b,[c,a]_i]_i + (-1)^{(|c|-1)(|b|-1)}\,[c,[a,b]_i]_i = 0$$

Proposition 27. *D'après les résultats précédents, si X est un ensemble simplicial ou un espace topologique qui a le type d'homotopie d'un CW-complexe et R est un anneau commutatif, l'algèbre de cohomologie $H^*(X;R)$ est une algèbre de Gerstenhaber généralisée.*

Références

[1] G. A. Batalin, Igor A. et Vilkovisky, « Gauge algebra and quantization », *Phys. Lett., B* **102** (1981), nº 1, p. 27-31.

[2] N. Battikh, « Cup i-produits sur les formes différentielles non commutatives et carrés de Steenrod », *J. Algebra* **313** (2007), nº 2, p. 531-553.

[3] N. Battikh, H. Issaoui, « Structures of Gerstenhaber–Voronov algebra on non-commutuative differential forms », *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova* **141** (2019), p. 165-183.

[4] W. Browder, « Homology operations and loop spaces », *Ill. J. Math.* **4** (1960), p. 347-357.

[5] A. Connes, « Noncommutative differential geometry », *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* **62** (1985), p. 41-144.

[6] A. Dold, R. Thom, « Une généralisation de la notion d'espace fibré. Application aux produits symétriques infinis », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **242** (1956), p. 1680-1682.

[7] M. Gerstenhaber, « The cohomology structure of an associative ring », *Ann. Math.* **78** (1963), p. 267-288.

[8] B. Gray, *Homotopy theory. An introduction to algebraic topology*, Pure and Applied Mathematics, vol. 64, Academic Press Inc., 1975.

[9] M. Karoubi, « Formes différentielles non commutatives et cohomologie à coefficients arbitraires », *Trans. Am. Math. Soc.* **347** (1995), nº 11, p. 4277-4299.

[10] J. P. May, « A general algebraic approach to Steenrod operations », in *The Steenrod Algebra and its Applications*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 168, Springer, 1970, p. 153-231.

[11] C. Roger, « Gerstenhaber and Batalin–Vilkovsky algebras », *Arch. Math., Brno* **45** (2009), nº 4, p. 301-324.