C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 354 (2016) 799–803

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Équations aux dérivées partielles/Analyse numérique

Stabilisation de problèmes non coercifs via une méthode numérique utilisant la mesure invariante ☆

Stabilization of non-coercive problems using the invariant measure

Claude Le Bris, Frédéric Legoll, François Madiot

École nationale des ponts et chaussées and INRIA, 6 et 8, avenue Blaise-Pascal, 77455 Marne-La-Vallée cedex 2, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 23 mars 2016
Accepté le 12 mai 2016
Disponible sur Internet le 25 mai 2016

Présenté par Olivier Pironneau

RÉSUMÉ

Nous nous intéressons à un problème d'advection–diffusion non coercif où l'advection domine. Nous présentons une approche numérique possible, à notre connaissance nouvelle, basée sur l'utilisation de la mesure invariante associée au problème. Nous démontrons sur l'exemple traité que l'approche permet de définir une approximation éléments finis du problème bien posée, et ce inconditionnellement en la taille du maillage. Plusieurs variantes de l'approche sont possibles, dont une, qui s'avère stable, conduit à des résultats numériques de qualité tout à fait comparable à ceux obtenus à l'aide d'une méthode classique de stabilisation sur l'équation considérée. Ceci suggère une piste possible, générale, pour toute une classe de problèmes non coercifs.

ABSTRACT

We study an advection–diffusion equation that is both non-coercive and advection-dominated. We present a possible numerical approach, to our best knowledge new, and based on the invariant measure associated with the original equation. We show that the approach allows for an unconditionally well-posed finite-element approximation. Two variants of the approach are studied. One of them is stable, and as accurate as a classical stabilization approach. This suggests a possible general strategy, applicable to a large class of non-coercive problems.

☆ The authors thank Yves Achdou and Olivier Pironneau for helpful discussions. The work of the authors is partially supported by ONR under grant N00014-15-1-2777 and EOARD under grant FA8655-13-1-3061.

Adresses e-mail : lebris@cermics.enpc.fr (C. Le Bris), legoll@lami.enpc.fr (F. Legoll), madiotf@cermics.enpc.fr (F. Madiot).

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2016.05.008

Abridged English version

We study the advection–diffusion equation $-\Delta u + \mathbf{b} \cdot \nabla u = f$ (Eq. (1) of the French version) in the regime where the associated bilinear form is not coercive and where advection dominates. As is well-known, a classical proof of the well-posedness of this non-coercive equation proceeds by the application of the Fredholm alternative. Well-posedness is actually, using the Banach–Necas–Babuska Theorem, equivalent to the celebrated inf–sup condition and an additional condition (see (2) below and, e.g., [3] for a comprehensive exposition of the theory and general references therein for the study and approximation of (1)). The well-posedness of the Galerkin approximation of (1) follows, at least for a sufficiently small mesh size and for a suitable class of finite-element approximations. In fact, as is also well known, the inf–sup condition may be established independently, using the notion of invariant measure associated with the original equation, namely the (positive, normalized) solution σ of the adjoint equation $-\mathrm{div}\,(\nabla\sigma + \sigma\,\mathbf{b}) = 0$ (see (3) below) supplied with adequate boundary conditions. The non-coercive bilinear form $a(u, v)$ corresponding to the advection–diffusion equation (1) then reads, for a test function $v = \sigma u$, as (5). The bilinear form $(u, v) \mapsto a(u, \sigma v)$ is hence coercive. The inf–sup condition readily follows. Although the above is by now classical, the approach consisting in using the invariant measure as a tool for forcing coerciveness in an otherwise non-coercive equation does not seem to have been explored from a numerical perspective. In short, our numerical approach consists in constructing, using an auxiliary finite-element computation, an approximation of the invariant measure σ, and then in performing a Petrov–Galerkin approximation of the original advection–diffusion equation (1) using test functions approximating the product form $\sigma\, v$. The definite added value of the approach is that it provides an unconditionally well-posed approximation, irrespective of the discretization parameter – the meshsize – adopted for approximating u, provided σ itself is correctly approximated. This property may be most useful in problems where one can only afford a coarse approximation of u. Multiscale problems are prototypical examples of such a context. In addition, in the advection-dominated context, the approach enjoys particular stability properties that lead to numerical results qualitatively comparable to those obtained with classical, state-of-the-art stabilization approaches [2,4,5,7]. The results of this Note, see in particular Tables 1 and 2, show that the approach is accurate, robust, and can be made effective in terms of computational cost. Applications to several other, more general contexts, may be envisioned.

1. Introduction et motivation

Nous étudions dans cette Note la question très classique de l'approximation par éléments finis d'une équation d'advection–diffusion

$$-\Delta u + \mathbf{b} \cdot \nabla u = f, \tag{1}$$

pour des données telles que l'équation est non coercive et dominée par l'advection. Il est bien connu que l'approximation numérique classique par éléments finis est alors instable, et requiert une méthode de stabilisation. La littérature regorge de méthodes dans ce sens (cf. par exemple les célèbres contributions [2,4,5] et l'ouvrage [7]), au moins dans le cas coercif (les travaux dans le cas non coercif étant, semble-t-il, plus rares), et il est impossible de citer ici toutes les contributions, y compris récentes : nous dressons un état des lieux dans [6]. Nous présentons ici une approche à notre connaissance nouvelle, reproduisant au niveau numérique l'observation théorique essentielle fournissant une des approches possibles pour démontrer le caractère bien posé du problème. Nous obtenons ainsi une approche différente de celles de la littérature, systématiquement coercive et, dans une très large gamme de régimes, stable. Cette nouvelle approche se compare très favorablement aux approches déjà connues.

Supposons plus précisément (pour fixer les idées, mais la suite est largement adaptable à d'autres cas *modulo* des ajustements techniques que nous omettons, et qui sont précisés dans [6]) que l'équation (1) est posée sur un domaine borné régulier Ω de $\mathbb{R}^d$ et qu'on la munit de conditions au bord de Dirichlet homogènes $u = 0$ sur $\partial\Omega$. Supposons aussi que le champ $\mathbf{b}$ est donné, qu'il possède toute la régularité nécessaire pour donner un cadre rigoureux aux résultats cités ci-dessous, mais qu'il ne présente pas les propriétés classiques qui rendent le problème coercif (typiquement $\mathbf{b}$, ou sa divergence, assez petits dans une norme adéquate). Une des approches théoriques classiques pour prouver que le problème est bien posé (au sens de Hadamard) passe par l'alternative de Fredholm. Il est aussi connu que le caractère bien posé est, *via* la théorie de Banach–Nečas–Babuska, équivalent à la célèbre *condition inf–sup* (voir par exemple [3, p. 85])

$$\exists \alpha > 0 \quad \text{tel que} \quad \inf_{w \in W} \sup_{v \in V} \frac{a(w, v)}{\|w\|_W \|v\|_V} \geq \alpha > 0, \tag{2}$$

(où on a bien sûr défini ici $a(w, v) = \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v + \int_\Omega (\mathbf{b} \cdot \nabla w)\, v$ et $V = W = H^1_0(\Omega)$), à laquelle on adjoint une autre condition classique : $\forall v \in V, \ (\forall w \in W, a(w, v) = 0) \Rightarrow v = 0$. Soit afin de rendre *explicite* la constante α de (2), soit afin de fournir une preuve *autonome* du caractère bien posé, on peut aussi prouver que cette condition (2) est vérifiée par le problème (1) en considérant la mesure invariante associée au problème (1). Cette mesure est la solution σ de

$$-\mathrm{div}(\nabla\sigma + \sigma\,\mathbf{b}) = 0, \tag{3}$$

satisfaisant les propriétés $\sigma(x) \geq \underline{\sigma} > 0$ presque partout dans Ω, $|\Omega|^{-1} \int_\Omega \sigma = 1$ et une condition au bord bien choisie (pour simplifier, pensons à la condition de Neumann naturelle, mais d'autres choix peuvent éventuellement être faits, selon les conditions au bord imposées dans (1)). L'existence et l'unicité de σ convenable sont obtenues par la théorie de Fredholm. Schématiquement, la preuve de la condition inf–sup (2) repose alors sur la multiplication de (1) par la fonction produit $\sigma\, u$, et une intégration sur le domaine Ω. On écrit, à des termes de bord près qui, dans les conditions prises ci-dessus, s'annulent tous (voir le détail ci-dessous en (7)),

$$a(u, \sigma\, u) = \int_\Omega (-\Delta u + \mathbf{b} \cdot \nabla u)\, \sigma\, u = \int_\Omega \sigma\, |\nabla u|^2 - \frac{1}{2} \int_\Omega \Big(\mathrm{div}(\nabla \sigma + \sigma\, \mathbf{b}) \Big)\, u^2, \tag{4}$$

et donc, en utilisant (3),

$$a(u, \sigma\, u) = \int_\Omega \sigma\, |\nabla u|^2. \tag{5}$$

Ceci permet d'obtenir facilement (2). Il reste alors, en pratique, à utiliser une discrétisation par éléments finis qui permette de vérifier aussi cette condition inf–sup au niveau discret, au moins, « par continuité », pour un pas de maillage h assez petit. Il s'ensuit un problème discret bien posé. Tout cela est désormais classique, mais, curieusement, cette technique de transformation d'un problème non coercif en un problème modifié coercif, *via* l'utilisation de la mesure invariante σ, ne semble pas avoir été exploitée au niveau numérique (sauf dans le cas où $\mathbf{b}$ est irrotationel [1], pour lequel σ est alors analytiquement connu). L'égalité (5) suggère pourtant une approximation de type Petrov–Galerkin sur (1), usant de fonctions tests produits $\sigma\, v$, au lieu d'une approche classique Galerkin, de sorte que la coercivité (5) soit directement satisfaite au niveau discret. Il est facile de se rendre compte que, au moins dans le cas décrit ci-dessus, une telle approche est aussi une approche Galerkin sur l'équation *modifiée*

$$-\,\mathrm{div}(\sigma\, \nabla u) + (\nabla \sigma + \sigma\, \mathbf{b}) \cdot \nabla u = \sigma\, f, \tag{6}$$

où on observe que, par construction, le champ $\nabla \sigma + \sigma\, \mathbf{b}$ est, à cause de (3), à divergence nulle. D'où encore la coercivité immédiate. On comprend immédiatement l'intérêt d'une telle approche, puisqu'elle donne par nature un caractère bien posé (et, qui plus est, coercif) au problème discret associé à (1), et ce *uniformément en la taille du maillage*. Pour des problèmes coûteux où la discrétisation ne peut être que grossière, avoir un problème discret bien posé et stable est un objectif naturel. On pense ainsi, par exemple, mais pas seulement, au cas où on superposerait au problème (1) ci-dessus un aspect multiéchelle (en remplaçant l'opérateur de diffusion par un opérateur $\mathrm{div}(a(x/\varepsilon)\, \nabla \cdot)$ à coefficients rapidement oscillants, ou bien en le considérant sur un domaine Ω_ε à la géométrie complexe). Un autre avantage de l'approche est qu'on peut en faire une analyse numérique en utilisant des arguments standards. Le prix à payer pour employer une telle approche est l'approximation numérique de la mesure σ, avec la précision requise (on verra qu'il suffit en pratique d'utiliser un maillage pour σ un peu plus fin que celui pour u), puisqu'il est rare que cette mesure soit connue explicitement analytiquement.

L'objectif de cette Note est d'explorer cette piste, sur l'équation (1) spécifiquement. Les résultats numériques présentés ci-dessous montrent que, en qualité, elle est tout à fait comparable aux approches classiques (de type SUPG, GLS ou DW, cf. [7]), voire meilleure, et que, même si le calcul additionnel de la mesure invariante est un surcoût, l'approche peut aussi être rendue globalement compétitive dans plusieurs contextes (cf. la fin de la Section 2). Rien n'interdit de penser que la même approche peut être appliquée à d'autres cas, y compris potentiellement des cas non linéaires, et des cas inaccessibles à des approches plus classiques. L'analyse numérique de l'approche et les résultats résumés dans cette Note sont exposés plus en détail, et complétés, dans [6].

2. Mise en oeuvre de l'approche

2.1. *Différentes mesures possibles*

Le point clé de l'approche suggérée est bien évidemment la détermination de la mesure invariante. Il convient tout d'abord de souligner une certaine liberté dans le choix de cette mesure. En effet, le passage de la forme non coercive initiale à la forme coercive suggérée par (5) repose, via une intégration par partie, sur trois ingrédients : (i) l'annulation, grâce à l'équation adjointe (3), du terme de volume causant la non-coercivité, (ii) l'élimination des termes de bord et (iii) la positivité de la mesure invariante, ou plus exactement, son caractère isolé de zéro. Typiquement, l'intégration par partie est de la forme :

$$\int_\Omega (-\Delta u + \mathbf{b} \cdot \nabla u)\, \sigma\, v = \int_\Omega \sigma\, \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega (\nabla \sigma + \sigma\, \mathbf{b}) \cdot \nabla u\, v - \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \mathbf{n})\, \sigma\, v, \tag{7}$$

où le dernier terme disparaît au vu des conditions de Dirichlet homogènes posées sur u et donc v. Dans ce cas, et l'observation est en fait assez générale, on a donc un choix libre de la condition au bord à imposer sur la solution de (3), pourvu que la fonction σ ainsi définie existe et soit (positive et) isolée de zéro.

Deux choix au moins peuvent paraître naturels. Le premier est d'imposer la condition de Neumann associée à l'équation (3). On définit ainsi la mesure $\sigma_1 > 0$, normalisée par $|\Omega|^{-1} \int_\Omega \sigma_1 = 1$, solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\nabla\sigma_1 + \sigma_1\,\mathbf{b}) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ (\nabla\sigma_1 + \sigma_1\,\mathbf{b}) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{8}$$

dont on peut montrer qu'elle existe, sous de bonnes hypothèses de régularité de Ω et $\mathbf{b}$, par l'alternative de Fredholm suivie d'une application du principe du maximum. Ce choix peut cependant paraître surprenant car, dans le cas particulier où le champ $\mathbf{b}$ est à divergence nulle, et où le problème original (1) est donc *ipso facto* coercif, on n'a $\sigma_1 \equiv 1$ que si $\mathbf{b}\cdot\mathbf{n} \equiv 0$ sur $\partial\Omega$. On verra pourtant que ce choix de mesure est le meilleur qu'on puisse prendre dans le cas spécifique traité ici. Motivé par la discussion ci-dessus, on peut alternativement penser à choisir σ de sorte que $\sigma \equiv 1$ dès que $\operatorname{div}\mathbf{b} = 0$. D'où l'idée de considérer la mesure σ_2 solution de l'équation similaire à (8) où on a remplacé la condition de bord $(\nabla\sigma_1 + \sigma_1\,\mathbf{b})\cdot\mathbf{n} = 0$ par $(\nabla\sigma_2 + \sigma_2\,\mathbf{b})\cdot\mathbf{n} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{n} - |\partial\Omega|^{-1}\int_{\partial\Omega} \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}$ sur $\partial\Omega$. Ce choix, quoique plus consistant en un certain sens, s'avérera moins efficace dans les tests numériques menés. Retenons que, dans un cadre de travail fixé (conditions aux bord imposées pour (1), régularité des données), on peut utiliser la flexibilité dont on dispose pour définir la mesure invariante pour choisir la meilleure d'entre elles.

2.2. *Discrétisation*

Une fois la mesure invariante choisie, l'approche consiste à :

(i) si sa solution n'est pas connue explicitement analytiquement, résoudre numériquement l'équation (8) (ou une équation analogue) par une méthode d'éléments finis, pour un certain maillage de taille h, obtenant ainsi une approximation σ_h de la mesure σ. Il faut veiller à ce que cette approximation soit positive, et suffisamment précise pour ne pas hypothéquer la qualité du calcul de u. Pour ce faire, nous avons utilisé une formulation variationnelle stabilisée de (8) ;
(ii) construire une approximation Petrov–Galerkin $(U_H, V_H = \sigma_h U_H)$ de l'équation (1) (équivalente à une approximation Galerkin de (6) sur U_H), à partir d'un espace d'approximation éléments finis U_H de départ, pour une certaine taille de maillage H. Dans les tests numériques présentés dans la section suivante, U_H est l'espace des éléments finis continus $\mathbb{P}1$ sur un maillage régulier de taille H. Comme le champ $\nabla\sigma_h + \sigma_h\,\mathbf{b}$ n'est pas à divergence nulle pour $h > 0$, on utilise l'astuce classique d'antisymétrisation du terme de convection dans la formulation variationnelle de (6), afin d'assurer la coercivité au niveau discret.

Les deux tailles de maillage h et H, utilisées respectivement dans les étapes (i) et (ii), ne sont pas nécessairement identiques. Quoi qu'il en soit, l'étape (i) est un surcoût qui, bon an mal an, double le coût de (ii) pour une unique résolution de (1). Cependant, on doit garder à l'esprit que l'étape (i) n'est effectuée qu'une seule fois, à $\mathbf{b}$ donné, et ne dépend pas de f. Ainsi, dans un calcul répétitif comme dans un problème inverse, où on doit résoudre plusieurs fois le problème (1) pour des données f différentes, le surcoût de (i) devient négligeable. Il l'est de même dans le cas de la résolution de l'équation d'advection–diffusion transitoire, pour un champ $\mathbf{b}$ quant à lui indépendant du temps, où on résout, après semi-discrétisation Euler implicite en temps, une équation du type (1), appelant un unique calcul de mesure invariante à l'étape (i).

Signalons aussi que l'étape (ii) requiert souvent l'utilisation d'un préconditionneur, la matrice de rigidité issue de (5) ayant, pour une mesure σ présentant de fortes variations, un conditionnement délicat. Dans les tests pratiqués, un simple préconditionnement diagonal a suffi à rendre la résolution très efficace.

3. Résultats numériques

Après une série de calculs en dimension 1, présentés dans [6], l'approche utilisant la mesure invariante a été testée en dimension 2, pour différents choix de champs $\mathbf{b}$. Nous comparons nos approches avec une méthode classique d'éléments finis $\mathbb{P}1$ et une telle méthode stabilisée par l'approche Galerkin Least-Squares (GLS, cf. [4,5]), pour distinguer les cas stables des cas instables.

Nous commençons par considérer un champ $\mathbf{b}$ irrotationnel, c'est-à-dire, en un sens intuitif (penser à la décomposition de Helmholtz), un champ aussi éloigné que possible d'un champ à divergence nulle, pour lequel le problème serait coercif. Dans ce cas, $\mathbf{b} = \nabla\Phi$ dérive donc d'un potentiel, et la mesure σ_1 solution de (8) est alors explicitement connue : $\sigma_1 = \exp(-\Phi)$, à un facteur de normalisation près. L'objet du test est alors de vérifier (i) que la connaissance exacte de la mesure permet de construire une méthode efficace, (ii) que cette efficacité reste robuste quand on remplace σ_1 par une approximation numérique – y compris relativement grossière –, (iii) que l'approche se compare favorablement à une méthode classique. Les résultats présentés confirment cela (notons que, pour le cas de tels champs $\mathbf{b}$, la question (i) a été abordée dans [1]). Parallèlement, les mêmes questions concernant σ_2 (cette fois nécessairement numériquement approchée) amènent une réponse plus nuancée, comme les résultats le montreront de manière évidente.

Tableau 1
Erreurs relatives dans le cas non coercif instable (**b** irrotationnel, $H = 1/16$).

Méthode	$\mathbb{P}1$	$\mathbb{P}1$ GLS	$(\mathbb{P}1, \sigma_1\mathbb{P}1)$	$(\mathbb{P}1, (\sigma_1)_h\mathbb{P}1)$ $H/h = 7$	$(\mathbb{P}1, (\sigma_2)_h\mathbb{P}1)$ $H/h = 7$	$(\mathbb{P}1, (\sigma_2)_h\mathbb{P}1)$ GLS $H/h = 7$
Erreur L^2	0.208	0.214	0.200	0.207	0.195	0.226
Erreur H^1	0.479	0.0488	0.0199	0.0218	0.399	0.0536

Tableau 2
Erreurs relatives dans le cas non coercif instable (**b** « quelconque », $H = 1/16$).

Méthode	$\mathbb{P}1$	$\mathbb{P}1$ GLS	$(\mathbb{P}1, (\sigma_1)_h\mathbb{P}1)$ $H/h = 4$	$(\mathbb{P}1, (\sigma_2)_h\mathbb{P}1)$ $H/h = 4$	$(\mathbb{P}1, (\sigma_2)_h\mathbb{P}1)$ GLS $H/h = 4$
Erreur L^2	0.165	0.222	0.154	0.160	0.158
Erreur H^1	0.414	0.104	0.0221	0.0221	0.029

Un autre intérêt de ce cas irrotationnel est qu'il met en exergue un point intéressant de notre approche. Pour un tel champ $\mathbf{b} = \nabla\Phi$, non seulement σ_1 est connue explicitement, mais en plus cette mesure permet de construire une formulation qui est non seulement coercive mais inconditionnellement stable, puisque le terme de transport $\nabla\sigma_1 + \sigma_1\,\mathbf{b} = 0$ disparaît ! Cette propriété reste « quasiment » vraie pour une approximation $(\sigma_1)_h$ de σ_1, mais, sauf cas particulier, n'est plus vraie pour le choix σ_2. On comprend donc par cet argument intuitif la stabilisation automatiquement induite par l'approche *quand* la mesure est bien choisie. Dans le cas général, nous croyons que cette supériorité du choix σ_1 « stabilisant » reste globalement vraie, notamment parce qu'*intuitivement*, $\nabla\sigma + \sigma\,\mathbf{b}$ reste plus petit pour $\sigma = \sigma_1$ (vu la condition de nullité au bord) que pour $\sigma = \sigma_2$. Les tests numériques du paragraphe suivant montrent cette supériorité, bien que nous n'ayons pas d'argument théorique précis sur ce point.

Les données utilisées sont les suivantes : $(x, y) \in \Omega =]0, 1[^2 \subset \mathbb{R}^2$, $f = 1$, $\mathbf{b} = (\delta^{-1} + \lambda\cos^2(2\pi x), \delta^{-1})^T$. En jouant sur la valeur des paramètres δ et λ, on peut rendre le problème coercif ou non, stable ou instable. Pour être bref, nous ne montrons ici les résultats que dans le cas non coercif et instable ($\delta = 1/64$, $\lambda = 50.34$) et on renvoie à [6] pour les résultats complets. La mesure invariante σ_1 est connue explicitement à partir de la donnée de **b** ci-dessus, mais on l'approche aussi. La discrétisation de l'étape (i), pour déterminer une approximation de σ_1 ou de σ_2, se fait alors en éléments finis $\mathbb{P}1$ sur un maillage régulier triangulaire de taille h. Celle de l'étape (ii) s'effectue en éléments finis $\mathbb{P}1$ sur un maillage régulier de taille $H = 1/16$. Pour simplifier, on a pris ici H/h entier, mais cela n'est pas requis par l'approche.

Les résultats sont détaillés dans le Tableau 1. On mesure l'erreur relative par rapport à une solution de référence calculée sur un maillage très fin. L'erreur H^1 indiquée s'entend *hors couche limite*, comme cela est usuel pour les problèmes où l'advection domine. On observe la supériorité, l'efficacité et la stabilité de la méthode basée sur la mesure σ_1.

Nous passons ensuite au cas général. Comme cas représentatif d'un champ **b** général, non irrotationnel, on choisit de prendre $\mathbf{b} = (1 + 50.34\cos^2(2\pi x) + 64y, 64(1 - x))^T$, toutes autres données égales par ailleurs aux données du cas précédent. Ce champ **b** a été ajusté pour avoir un cas non coercif et instable. Les résultats sont détaillés dans le Tableau 2 et confirment les conclusions déjà indiquées.

Références

[1] F. Brezzi, L.D. Marini, P. Pietra, Two-dimensional exponential fitting and applications to drift-diffusion models, SIAM J. Numer. Anal. 26 (6) (1989) 1342–1355.
[2] A.N. Brooks, T. Hughes, Streamline upwind/Petrov–Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier–Stokes equations, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 32 (1–3) (1982) 199–259.
[3] A. Ern, J.-L. Guermond, Theory and Practice of Finite Elements, Applied Mathematical Sciences, vol. 159, Springer-Verlag, New York, 2004.
[4] L.P. Franca, S.L. Frey, T.J.R. Hugues, Stabilized finite element methods: I. Application to the advective–diffusive model, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 95 (1992) 253–276.
[5] C. Johnson, U. Nävert, J. Pitkäranta, Finite element methods for linear hyperbolic problems, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 45 (1984) 285–312.
[6] F. Madiot, Multiscale finite element methods for advection diffusion problems, thèse en préparation, Université Paris-Est.
[7] A. Quarteroni, A. Valli, Numerical Approximation of Partial Differential Equations, Springer Series in Computational Mathematics, vol. 23, Springer-Verlag, Berlin, 1994.