



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com



Probabilités

Asymptotique des valeurs extrêmes pour les marches aléatoires affines



Extreme-value asymptotics for affine random walks

Yves Guivarc'h^a, Émile Le Page^b^a IRMAR, université de Rennes-1, campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France^b LMBA, UMR CNRS 6205, Université de Bretagne-Sud, campus de Tohannic, 56017 Vannes, France

I N F O A R T I C L E

Historique de l'article :

Reçu le 4 juillet 2013

Accepté après révision le 24 septembre 2013

Disponible sur Internet le 14 octobre 2013

Présenté par Jean-Pierre Kahane

R É S U M É

Nous considérons l'espace Euclidien \mathbb{R}^d et une marche aléatoire affine X_n sur \mathbb{R}^d , gouvernée par une probabilité λ portée par le groupe affine $H = \text{Aff}(\mathbb{R}^d)$. Nous supposons que le sous-groupe de H engendré par le support de λ est « grand » et que la convolution par λ sur \mathbb{R}^d admet une unique probabilité stationnaire η dont le support est non borné. Nous montrons la convergence en loi de certains processus ponctuels associés aux valeurs extrêmes de X_n . Les paramètres des lois limites s'expriment à l'aide d'une mesure homogène Λ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, qui décrit l'allure à l'infini de η et qui dépend essentiellement de la projection de λ sur le groupe linéaire de \mathbb{R}^d . En particulier, les valeurs extrêmes normalisées de $|X_n|$ suivent une loi de Fréchet, qui dépend simplement de Λ .

© 2013 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

A B S T R A C T

We consider the Euclidean space \mathbb{R}^d and an affine random walk X_n on \mathbb{R}^d , governed by a probability λ supported on the affine group $H = \text{Aff}(\mathbb{R}^d)$. We assume that the subgroup of H generated by the support of λ is “large” and that convolution by λ on \mathbb{R}^d has a unique stationary probability η such that its support is unbounded. We show the convergence in law of certain point processes associated with the extreme values of X_n . The parameters of the limit laws are expressed in terms of a homogeneous measure Λ on $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, which describes the shape at infinity of η , and which depends essentially on the projection of λ on the linear group of \mathbb{R}^d . In particular, the normalized extreme values of $|X_n|$ follow a Fréchet law depending on Λ in a simple way.

© 2013 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Soit H (resp. G) le groupe affine (resp. linéaire) de l'espace euclidien $V = \mathbb{R}^d$, λ (resp. μ) une probabilité sur H (resp. G), de projection μ sur G , \mathbb{P} la mesure produit $\lambda^{\otimes \mathbb{N}}$ sur $H^{\mathbb{N}}$. On considère la relation de récurrence stochastique :

$$X_{n+1} = A_{n+1}X_n + B_{n+1}, \quad X_0 = x \in V \quad (1)$$

où la suite $(A_n, B_n)_{n \geq 1}$ est distribuée suivant \mathbb{P} .

On note S_n le produit de matrices aléatoires $A_n \cdots A_1$ et on suppose que l'hypothèse (H) décrite ci-dessous est satisfaite par λ . Le produit scalaire de $x, y \in V$ est noté $\langle x, y \rangle$ et on pose $|x| = \langle x, x \rangle^{1/2}$; l'image de la mesure η sur V par la dilatation

Adresses e-mail : yves.guivarch@univ-rennes1.fr (Y. Guivarc'h), emile.le-page@univ-ubs.fr (É. Le Page).

$x \rightarrow tx$ ($t > 0$) est notée $t.\eta$. Sous l'hypothèse (H), on sait [7] que la relation (1) admet une unique solution stationnaire, dont la loi η est « homogène à l'infini » de degré $\alpha > 0$, c'est-à-dire que, en convergence vague sur $V \setminus \{0\}$, on a la relation :

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} t^{-\alpha}(t.\eta) = c\sigma^\alpha \otimes \ell^\alpha = \Lambda \tag{2}$$

où $c > 0$, σ^α est une probabilité sur la sphère unité \mathbb{S}^{d-1} et ℓ^α est la mesure sur \mathbb{R}_+ définie par $\ell^\alpha(dr) = \frac{dr}{r^{\alpha+1}}$.

Pour $u_n = n^{1/\alpha}$, on considère la suite de processus ponctuels sur $[0, 1] \times V \setminus \{0\}$ définie par $N_n = \sum_{i=1}^n \delta_{(n^{-1}i, u_n^{-1}X_i)}$ et on s'intéresse à la convergence vague de N_n ainsi qu'à ses conséquences pour les deux suites de variables aléatoires :

$$M_n = \sup\{|X_i|; 1 \leq i \leq n\}, \quad N_n^0 = \sum_{i=1}^n \delta_{n^{-1}i} 1_{\{|X_i| > u_n\}}.$$

Sous certaines hypothèses, en particulier de densité pour λ , la convergence en loi de $u_n^{-1}M_n$ et N_n^0 a été montrée en [13]. En utilisant la relation (2) et les méthodes développées en [2], nous étendons et précisons ces propriétés sous (H). On note T (resp. Σ) le sous-semigroupe fermé de G (resp. H) engendré par le support de μ (resp. λ) ; pour $g \in G$, on note $r(g)$ le rayon spectral de g et on pose $\gamma(g) = \sup(|g|, |g^{-1}|)$. On dira que T satisfait la condition i-p (resp. est non arithmétique) si T est fortement irréductible et contient un élément ayant une unique valeur propre dominante (resp. $r(T)$ contient deux éléments de rapport irrationnel). Pour $d > 1$, la condition i-p implique que T est non arithmétique et, si T est Zariski-dense, la condition i-p est valide. On supposera ici que l'hypothèse (H) suivante est satisfaite (cf. [7]) :

- (1) Σ n'a pas de point fixe dans V ,
- (2) il existe $\alpha > 0$ tel que $k(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|S_n|^\alpha)^{1/n} = 1$,
- (3) il existe $\delta > 0$ tel que $\mathbb{E}(|A|^\alpha \gamma^\delta(A) + |B|^{\alpha+\delta}) < \infty$,
- (4) Si $d > 1$, T satisfait la condition i-p et si $d = 1$, T est non arithmétique.

Les conditions précédentes impliquent, en particulier (cf. [10]), que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}(\text{Log}|S_n|) < 0$ et que la relation (1) a une unique solution stationnaire à support non borné.

L'espace borélien $V^{\mathbb{Z}}$, muni du décalage bilatère τ , possède une mesure markovienne $\widehat{\mathbb{P}}$ associée à la mesure λ -stationnaire η , qui est τ -invariante et ergodique ; cette mesure satisfait des propriétés de mélange multiple qui sont essentielles pour l'étude ci-dessous des valeurs extrêmes de X_n .

La relation (2) implique l'existence du « processus des extrêmes normalisés » Y_n ($n \in \mathbb{Z}$) de X_n . Ce processus est défini en [2] par ses lois conjointes : la loi de (Y_{-n}, \dots, Y_m) est la limite ($t \rightarrow \infty$) de la loi sous $\widehat{\mathbb{P}}$ de $t^{-1}(X_{-n}, \dots, X_m) \in V^{n+m+1}$ conditionnellement à $|X_0| > t$. Si Λ_1 est la restriction normalisée de Λ à $\{|v| > 1\}$, on montre que la loi de (Y_{-n}, \dots, Y_m) est égale à $\int 1_{[1, \infty[}(|S_n v|) \delta_{(v, \dots, S_{n+m} v)} d\mathbb{P}(\omega) d\Lambda_1(v)$. Soit r_n la suite d'entiers $r_n = [n^\delta]$, $s < \alpha$ et C_n la suite des processus ponctuels $C_n = \sum_{i=1}^{r_n} \delta_{u_n^{-1}X_i}$ conditionnés à $M_{r_n} > u_n$. On a alors, en se basant sur le Théorème 4.5 de [2], le Théorème 1.

Théorème 1. *La restriction de C_n à $V \setminus \{0\}$ converge en loi sous $\widehat{\mathbb{P}}$ vers un processus ponctuel $C = \sum_{j=1}^\infty \delta_{Z_j}$, dont la loi est égale à celle de $\sum_{i \in \mathbb{Z}} \delta_{Y_i}$ conditionnellement à $\sup_{i \leq 1} |Y_i| \leq 1$.*

D'après [2], on a alors : $\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\mathbb{E}}(\sum_{i=1}^{r_n} 1_{|u_n, \infty[}(|X_i|)/M_{r_n} > u_n) = \theta^{-1} < \infty$ où $\theta = \widehat{\mathbb{P}}(\sup_{i \geq 1} |Y_i| \leq 1)$ est l'indice d'extrémalité du processus stationnaire X_n (cf. [14]). Le nombre θ^{-1} donne la multiplicité moyenne asymptotique des agrégats d'extrêmes normalisés du processus X_n . D'après [5] et [6], l'opérateur markovien P sur V défini par (1) possède, pour ε petit, un trou spectral dans l'espace des fonctions holdériennes d'ordre ε et à croissance polynomiale de degré au plus $\alpha - \varepsilon$. La propriété de mélange multiple déjà mentionnée en est un corollaire, qui s'exprime alors sous la forme suivante ; ses conséquences ont été étudiées en [2]. Pour une fonction positive f de classe C^1 et à support compact dans $[0, 1] \times V \setminus \{0\}$, pour $i \in [1, n]$ et $(v, \omega) \in V \times V^{\mathbb{Z}}$ notons :

$$f_{i,n}(v, \omega) = \exp(-f(n^{-1}i, u_n^{-1}\langle v, X_i \rangle)).$$

Proposition 2. *Soit $f_{i,n}$ comme ci-dessus et $r_n = [n^\delta]$, $k_n = [r_n^{-1}n]$ avec $0 < s < \frac{1}{2}$. Alors :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \widehat{\mathbb{P}} \left(\prod_{i=1}^n f_{i,n} \right) - \prod_{k=1}^{k_n} \widehat{\mathbb{P}} \left(\prod_{i=(k-1)r_n+1}^{kr_n} f_{i,n} \right) \right| = 0.$$

Le Théorème 4.5 de [2] implique alors le Théorème 3.

Théorème 3. *Pour tout $v \in V$ et $X_0 = v$, la suite N_n restreinte à $V \setminus \{0\}$ converge en loi sous \mathbb{P} vers un processus ponctuel N . Pour $t > 0$, la loi de N^t , restriction de N à $[0, 1] \times \{|y| > t\}$, est égale à celle de $\sum_{i=1}^{v_t} \sum_{j=1}^\infty \delta_{(U_i, tZ_{ij})}$ où v_t suit une loi de Poisson de paramètre $t^{-\alpha}c\theta$, où U_i est uniforme sur $[0, 1]$, où Z_{ij} a même loi que $Z_j 1_{\{Z_j > 1\}}$, où les variables aléatoires v_t, U_i, Z_{ij} sont indépendantes et la suite des mesures aléatoires $\{\sum_{j=1}^\infty \delta_{(U_i, Z_{ij})}\}_{i \geq 1}$ est i.i.d.*

On rappelle (cf. [4,14]) que la loi de Fréchet Φ_α^p , d'indice α et de paramètre p , est définie par $\Phi_\alpha^p(0, t) = \exp(-pt^{-\alpha})$. On a alors les corollaires suivants, qui généralisent les résultats de [13] :

Corollaire 4. Soit ζ la variable aléatoire $\sum_{i=1}^{\infty} 1_{\{|Y_i|>1\}}$. Alors, le processus ponctuel N_n^0 converge en loi sous \mathbb{P} vers $N^0 = \sum_{i=1}^v n_i \delta_{U_i}$ où v suit la loi de Poisson de paramètre $c\theta$, n_i est une suite de variables aléatoires i.i.d à valeurs entières et n_1 vaut $k \geq 1$ avec probabilité $\frac{1}{\theta}(\mathbb{P}(\zeta + 1 = k) - \mathbb{P}(\zeta = k))$ et v, n_i, U_j sont indépendantes.

Corollaire 5. Pour tout $v \in V$ et $X_0 = v$, la loi de $u_n^{-1}M_n$ sous \mathbb{P} converge vers la loi de Fréchet Φ_α^p avec $p = c\theta$.

Une conséquence du Corollaire 5 est la « loi du logarithme » pour X_n :

Corollaire 6. Pour tout $v \in V$ et $X_0 = v$, on a $\mathbb{P} - p.p.$:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Log } |X_n|}{\text{Log } n} = \frac{1}{\alpha}.$$

Les résultats précédents restent valides si l'on remplace $|X_i|$ par $|\langle X_i, v \rangle|$ avec $v \neq 0$. Le Théorème 3 permet d'obtenir des lois limites pour certaines fonctionnelles du processus X_n . C'est le cas, si $\alpha < 1$, de la convergence vers une loi stable de $n^{-1/\alpha}(X_1 + \dots + X_n)$. Dans le cadre du Théorème 3, ces sommes ont été étudiées en [1,5,6]. Comme observé en [2] (Remarque 4.8), le Théorème 4.8 de [2] permet de retrouver, grâce au Théorème 3, les résultats de [5] et [6] pour $\alpha < 1$.

Pour des systèmes dynamiques hyperboliques, des résultats de convergence vers une loi de Poisson analogues au Corollaire 4 ont été établis en [3] et [8]. La « loi du logarithme » pour les excursions du flot géodésique au voisinage des pointes des quotients de volume fini de l'espace hyperbolique a été établie en [16]. Comme observé en [15], dans le cadre de la surface modulaire, c'est une conséquence de la loi de Fréchet. Pour l'étude de situations connexes plus générales, on renvoie à [9], [12] et [11].

Références

- [1] K. Bartkiewicz, A. Jakubowski, T. Mikosch, O. Winterberger, Stable limits for sums of dependent infinite variance random variables, *Probab. Theory Relat. Fields* 150 (2011) 337–372.
- [2] B. Basrak, J. Segers, Regularly varying time series, *Stoch. Process. Appl.* 119 (2009) 1055–1080.
- [3] P. Collet, Statistics of closest returns for some non uniformly hyperbolic systems, *Ergod. Theory Dyn. Syst.* 21 (2001) 401–420.
- [4] M. Fréchet, Sur la loi de probabilité de l'écart maximum, *Ann. Soc. Math. Pol.* 6 (1927) 93–116.
- [5] Z. Gao, Y. Guivarc'h, E. Le Page, Stable laws and spectral gap properties for affine random walks, *Ann. Inst. Henri Poincaré* (2013), à paraître, AIHP 1210-013 R1 A0.
- [6] Y. Guivarc'h, E. Le Page, On spectral properties of a family of transfer operators and convergence to stable laws for affine random walks, *Ergod. Theory Dyn. Syst.* 28 (2008) 423–446.
- [7] Y. Guivarc'h, E. Le Page, Spectral gap properties and asymptotics of stationary measures for affine random walks, arXiv:1204.6004, 2013.
- [8] M. Hirata, Poisson law for Axiom A diffeomorphisms, *Ergod. Theory Dyn. Syst.* 13 (1993) 533–556.
- [9] J. Jaerish, M. Kesseböhmer, B.O. Stratmann, Fréchet law and Erdős–Philipp law for maximal cuspidal windings, arXiv:1109.3583, 2012.
- [10] H. Kesten, Random difference equations and renewal theory for products of random matrices, *Acta Math.* 131 (1973) 207–248.
- [11] M.S. Kirseböm, Extreme value theory for random walks on homogeneous spaces, arXiv:1304.1006, 2013.
- [12] D.Y. Kleinbock, G.A. Margulis, Logarithm laws for flows on homogeneous spaces, *Invent. Math.* 138 (1999) 451–494.
- [13] C. Klüppelberg, S. Pergamentchikov, Extremal behaviour of models with multivariate random recurrence representation, *Stoch. Process. Appl.* 117 (2007) 432–456.
- [14] M.R. Leadbetter, G. Lindgren, H. Rootzen, *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes*, Springer, Berlin, 1983.
- [15] M. Pollicott, Limiting distributions for geodesic excursions on the modular surface, *Contemp. Math.* 484 (2008) 177–185.
- [16] D. Sullivan, Disjoint spheres, approximation by imaginary quadratic numbers and the logarithm law for geodesics, *Acta Math.* 149 (1982) 215–237.