C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 351 (2013) 43–46

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Équations aux dérivées partielles

Un résultat de compacité sur la densité dans les équations de Navier–Stokes compressibles en domaine variable

A compactness result about density in compressible Navier–Stokes equations in variable domain

Pierre Orenga, Anne Tomasi

CNRS UMR 6134, Università di Corsica Pasquale Paoli, 20250 Corte, France

I N F O   A R T I C L E

Historique de l'article :
Reçu le 5 juin 2012
Accepté après révision le 5 décembre 2012
Disponible sur Internet le 9 février 2013

Présenté par le Comité de rédaction

R É S U M É

Nous présentons un résultat de convergence de (ρ_n^γ) vers ρ^γ dans le cas des équations de Navier–Stokes compressibles isentropiques (Lions, 1996 [6]) dans un domaine variable en temps. Le point essentiel est de montrer la convergence p.p. de la densité. En suivant la démonstration de P.L. Lions, nous montrons que $r = \overline{\rho \log \rho} - \rho \log \rho$ (resp. $r = \rho - (\overline{\rho^\theta})^{1/\theta}$) est nul. Dans le cas du problème à frontière variable, la principale difficulté provient de la condition aux limites non homogène sur $u \cdot \mathbf{n}$.

A B S T R A C T

We present the convergence of (ρ_n^γ) to ρ^γ in compressible isentropic Navier–Stokes equations (Lions, 1996 [6]) in a domain which changes with time. The essential point is to show the convergence a.e. of the density. Following the proof of P.L. Lions, we prove that $r = \overline{\rho \log \rho} - \rho \log \rho$ (resp. $r = \rho - (\overline{\rho^\theta})^{1/\theta}$) is equal to zero. In the case of a moving bondary problem, the main difficulty comes from the non homogeneous boundary condition on $u \cdot \mathbf{n}$.

1. Introduction

On s'intéresse à l'écoulement d'un fluide compressible qui occupe un domaine variable dans un espace de dimension N ($N = 2$ ou $N = 3$) entre les instants $t = 0$ et $t = T$. On note Ω_t le domaine occupé par le fluide à l'instant t, γ_t sa frontière, $Q = \bigcup_{t\in[0;T]}(\{t\} \times \Omega_t)$ et $\Sigma = \bigcup_{t\in[0;T]}(\{t\} \times \gamma_t)$ (voir Fig. 1).

On suppose le déplacement de la frontière connu tel que Q est un ouvert de $\mathbb{R}^{N+1}$ de classe $\mathcal{C}^{0,1}$, et à chaque instant t, Ω_t est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^{1,1}$ [4]. Ainsi, pour presque tout $t \geqslant 0$ et $x \in \gamma_t$, on peut définir $\mathbf{N}$ le vecteur normal à Σ en (t, x) et $\mathbf{n}$ le vecteur normal à γ_t en x.

Ce type de problème a été récemment étudié par E. Feireisl et al. dans [2] et [3], en considérant un domaine cylindrique $D \supset Q$. Dans l'objectif de pouvoir étendre plus tard notre résultat à une frontière inconnue, nous avons choisi une approche permettant la résolution uniquement dans Q.

Notre objectif est de montrer la convergence du terme de pression dans les équations de Navier–Stokes compressibles isentropiques en adaptant la démonstration de [6].

Adresses e-mail : orenga@univ-corse.fr (P. Orenga), atomasi@univ-corse.fr (A. Tomasi).

1631-073X/$ – see front matter
http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2012.12.003

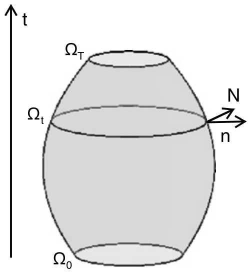

Fig. 1. Évolution du domaine.

Théorème 1.1. *Soit Q un ouvert tel que décrit ci-dessus. Soit $u \in (L^2(0,T;H^1(\Omega_t)))^N \cap (L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t)))^N$ tel que $(1,u)\cdot\mathbf{N}=0$. Soit $r \in L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^N)) \cap \mathcal{C}^0([0,T];L^2_W(\mathbb{R}^N))$ vérifiant :*

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \operatorname{div} ru \leqslant 0 \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(Q)$$

Alors $r=0$ p.p. sur Q.

Remarque 1. Quand la frontière est fixe, le théorème 1.1 permet de généraliser le résultat obtenu par P.L. Lions [6] (avec $u=0$ au bord) au cas où $u\cdot\mathbf{n}=0$ au bord.

2. Preuve formelle (ou dans le cas où $\frac{\partial r}{\partial t} + \operatorname{div} ru \in L^1(Q_t)$)

Dans ce cas, on peut appliquer la formule de Green dans L^1_{div} [1]. Soit $t>0$. On note $Q_t = \bigcup_{0\leqslant\tau\leqslant t}(\{\tau\}\times\Omega_\tau)$, $\Sigma_t = \bigcup_{0\leqslant\tau\leqslant t}(\{\tau\}\times\gamma_\tau)$ et $\theta=(1,u)\in\mathbb{R}^{N+1}$. On a alors : $\operatorname{Div}_{(\tau,x)} r\theta \overset{def}{=} \frac{\partial r}{\partial\tau} + \operatorname{div} ru$ [7].

Donc, si $\operatorname{Div}_{(\tau,x)} r\theta \in L^1(Q_t)$, on a :

$$\int_{Q_t} \operatorname{Div}_{(\tau,x)} r\theta = \int_{\Sigma_t\cup\Omega_0\cup\Omega_t} r\theta\cdot\mathbf{N} = \int_{\Omega_0} r\theta\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \int_{\Omega_t} r\theta\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \int_{\Sigma_t} r\theta\cdot\mathbf{N} = \int_{\Omega_t} r \leqslant 0$$

Or $r\geqslant 0$ p.p. sur Q, donc nécessairement $r=0$ p.p. sur Ω_t, pour tout $t>0$. Quand les conditions sur r et u ne permettent pas d'obtenir $\operatorname{Div}_{(\tau,x)} r\theta \in L^1(Q_t)$. Il est donc nécessaire d'utiliser d'autres arguments, présentés ci-après.

3. Preuve du théorème

Pour montrer que $r=0$ p.p. sur Ω_t, nous adaptons la démonstration [6]. Nous avons besoin des propriétés de la fonction distance d'un point du domaine à la frontière, en particulier $\nabla d\cdot\mathbf{s}=0$ sur Σ (où $\mathbf{s}$ représente un vecteur tangent à la surface Σ).

Si $\varphi \in \mathcal{C}^0([0,t];L^2_W(\Omega_\tau)) \cap L^2(0,t;H^1_0(\Omega_\tau))$, on peut appliquer la formule de Green à :

$$\int_{Q_t} \operatorname{Div}_{(\tau,x)}(r\theta)\varphi \overset{def}{=} \int_{Q_t} \frac{\partial r}{\partial\tau}\varphi + \int_{Q_t} \operatorname{div}(ru)\varphi$$

Soit $\xi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, telle que $\xi_{|]-\infty;\frac{1}{2}]}=0$ et $\xi_{|[1;\infty[}=1$. On note d la fonction distance à la frontière à τ fixé : $d(\tau,x)=dist(x,\gamma_\tau)$. On pose pour $\epsilon>0$, $\varphi_\epsilon=\xi(\frac{d}{\epsilon})$.

Alors $\varphi_\epsilon \in \mathcal{C}^0([0,t];H^1_0(\Omega_\tau)) \subset \mathcal{C}^0([0,t];L^2_W(\Omega_\tau)) \cap L^2(0,t;H^1_0(\Omega_\tau))$.

$$\int_{Q_t} \operatorname{Div}_{(\tau,x)}(r\theta)\varphi_\epsilon = \int_{\Sigma_t\cup\Omega_0\cup\Omega_t} r\theta\cdot\mathbf{N}\varphi_\epsilon - \int_{Q_t} r\theta\cdot\nabla_{(\tau,x)}\varphi_\epsilon = \int_{\Omega_t} r(t)\xi\left(\frac{d}{\epsilon}\right) - \int_{Q_t} r\frac{\theta\cdot\nabla_{(\tau,x)}d}{\epsilon}\xi'\left(\frac{d}{\epsilon}\right)$$

$$\left|\int_{Q_t} r\frac{\theta\cdot\nabla_{(\tau,x)}d}{\epsilon}\xi'\left(\frac{d}{\epsilon}\right)\right| \leqslant \int_{Q_t}|r|\frac{|\theta\cdot\nabla_{(\tau,x)}d|}{\epsilon}\left|\xi'\left(\frac{d}{\epsilon}\right)\right|$$
$$\leqslant \int_0^t\int_{d\leqslant\epsilon}|r|\frac{|\theta\cdot\nabla_{(\tau,x)}d|}{\epsilon}\left|\xi'\left(\frac{d}{\epsilon}\right)\right|$$
$$\leqslant \int_0^t\int_{\Omega_\tau}|r|\frac{|\theta\cdot\nabla_{(\tau,x)}d|}{d}\left|\xi'\left(\frac{d}{\epsilon}\right)\right|\mathbb{1}_{d\leqslant\epsilon}$$

Puisque $Q\in\mathcal{C}^{0,1}(0,t;\mathcal{C}^{1,1}(\Omega_\tau))$, on a $(\tau,x)\mapsto d(\tau,x)\in\mathcal{C}^{0,1}(0,t;\mathcal{C}^{1,1}(\Omega_\tau))\subset H^1(Q_t)$ et $\nabla_{(\tau,x)}d\in(L^2(0,t;\mathcal{C}^{0,1}(\Omega_\tau)))^{N+1}$.

De plus $\theta\in(L^2(0,t;H^1(\Omega_\tau)))^{N+1}$, d'où $\theta\cdot\nabla_{(\tau,x)}d\in L^1(0,t;H^1(\Omega_\tau))$. Montrons qu'en fait, $\theta\cdot\nabla_{(\tau,x)}d\in L^1(0,t;H^1_0(\Omega_\tau))$.

Pour presque tout $0\leqslant\tau\leqslant t$ et $x\in\gamma_\tau$, Σ est localement $\mathcal{C}^1$, donc d aussi [5]. On peut alors définir sa dérivée suivant n'importe quelle direction tangentielle $\mathbf{s}$: $\nabla_{(\tau,x)}d\cdot\mathbf{s}$. Comme $d=0$ sur Σ, p.p. $(\tau,x)\in\Sigma_t$, $\nabla_{(\tau,x)}d\cdot\mathbf{s}=0$, d'où p.p. $0\leqslant\tau\leqslant t$, $\nabla_{(\tau,x)}d\cdot\mathbf{s}=0$ dans $H^{1/2}(\gamma_\tau)$. Puisque par hypothèse p.p. $0\leqslant\tau\leqslant t$, $\theta\cdot\mathbf{N}=0$ dans $H^{1/2}(\gamma_\tau)$, on obtient p.p. $0\leqslant\tau\leqslant t$, $\theta\cdot\nabla_{(\tau,x)}d=0$ dans $H^{1/2}(\gamma_\tau)$, (i.e.) $\theta\cdot\nabla_{(\tau,x)}d\in L^1(0,t;H^1_0(\Omega_\tau))$. On en déduit, $\frac{\theta\cdot\nabla_{(\tau,x)}d}{d}\in L^1(0,t;L^2(\Omega_\tau))$.

L'utilisation de ce résultat et le fait que $r\in L^\infty(0,t;L^2(\Omega_\tau))$ nous permettent d'écrire :

$$\left|\int_{Q_t} r\frac{\theta\cdot\nabla_{(\tau,x)}d}{\epsilon}\xi'\left(\frac{d}{\epsilon}\right)\right| \leqslant \int_0^t\int_{\Omega_\tau}|r|\frac{|\theta\cdot\nabla_{(\tau,x)}d|}{d}\left|\xi'\left(\frac{d}{\epsilon}\right)\right|\mathbb{1}_{d\leqslant\epsilon}$$
$$\leqslant \|\xi'\|_\infty\int_0^t\int_{\Omega_\tau}|r|\frac{|\theta\cdot\nabla_{(\tau,x)}d|}{d}\mathbb{1}_{d\leqslant\epsilon}$$
$$\leqslant \|\xi'\|_\infty\int_0^t\|r\|_{L^2(\Omega_\tau)}\left\|\frac{\theta\cdot\nabla_{(\tau,x)}d}{d}\right\|_{L^2(\Omega_\tau)}$$
$$\leqslant \|\xi'\|_\infty\|r\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega_\tau))}\left\|\frac{\theta\cdot\nabla_{(\tau,x)}d}{d}\right\|_{L^1(0,t;L^2(\Omega_\tau))}$$

Donc, par convergence dominée :

$$\lim_{\epsilon\to0}\int_0^t\int_{\Omega_\tau}|r|\frac{|\theta\cdot\nabla d|}{d}\mathbb{1}_{d\leqslant\epsilon}=0 \quad\text{et}\quad \lim_{\epsilon\to0}\int_{Q_t}r\frac{\theta\cdot\nabla d}{\epsilon}\xi'\left(\frac{d}{\epsilon}\right)=0$$

De plus, $\lim_{\epsilon\to0}\int_{\Omega_t}r(t)\xi(\frac{d}{\epsilon})=\int_{\Omega_t}r(t)$. D'où le résultat.

4. Application

On note u la vitesse du fluide considéré et ρ sa masse volumique. Elles vérifient :

$$\frac{\partial\rho u}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho u\otimes u)-\mu\Delta u+a\nabla\rho^\gamma=\rho f,\qquad \frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho u)=0\quad\text{dans } Q \tag{1}$$

avec la condition $\theta\cdot\mathbf{N}=0$ sur Σ (non perte de fluide [7]).

On suppose que $u\in(L^2(0,T;H^1(\Omega_t)))^N\cap(L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t)))^N$. On suppose également $\rho\geqslant0$, $\rho\in L^\infty(0,T;L^\gamma(\Omega_t))\cap\mathcal{C}^0([0,T];L^p(\Omega_t))$ pour tout $1\leqslant p<\gamma$, alors $\rho\log\rho\in L^2(0,T;L^2(\Omega_t))\cap\mathcal{C}^0([0,T];L^2_W(\mathbb{R}^N))$.

Corollaire 4.1. *Si (ρ_n,u_n) est une suite de solutions approchées du système (1), alors (ρ_n^γ) converge faiblement vers ρ^γ dans $L^1(Q)$.*

La preuve suit la démonstration de [6, pp. 21–29]. Selon le cas, on pose $r=\overline{\rho\log\rho}-\rho\log\rho$ ou $r=\rho-(\overline{\rho^\theta})^{1/\theta}$ ($\overline{\rho\log\rho}$ et $\overline{\rho^\theta}$ étant les limites faibles respectives de $(\rho_n\log\rho_n)$ et (ρ_n^θ) dans $L^1(Q)$). r vérifiant ainsi les hypothèses du théorème 1.1, nous établissons la convergence faible de $(\rho_n\log\rho_n)$ vers $\rho\log\rho$ et celle de ρ_n^θ vers ρ^θ. Le reste de la preuve est inchangé : grâce à un argument de convexité et à la convergence faible de (ρ_n) vers ρ dans $L^1(Q)$, on en déduit que (ρ_n) converge p.p. vers ρ. La suite (ρ_n) étant bornée dans $L^\gamma(Q)$, on obtient que ρ_n converge vers ρ dans $L^{\gamma-\epsilon}$, et donc que (ρ_n^γ) converge vers ρ^γ dans $L^1(Q)$.

Références

[1] F.J. Chatelon, P. Orenga, On a non-homogeneous shallow-water problem, Mathematical Modeling and Numerical Analysis 31 (1997) 27–55.
[2] E. Feireisl, J. Neustupa, J. Stebel, Convergence of a Birkman-type penalization for compressible fluid flows, Journal of Differential Equations 250 (2011) 596–606.
[3] E. Feireisl, O. Kreml, S. Nečasová, J. Neustupa, J. Stebel, Weak solutions to the barotropic Navier–Stokes system with slip boundary conditions in time dependent domains, Journal of Differential Equations 254 (2013) 125–140.
[4] F. Flori, C. Morelli, P. Orenga, Convergence of a Lagrangian scheme for a compressible Navier–Stokes model defined on a domain depending on time, Nonlinear Analysis 61 (2005) 759–780.
[5] R.L. Foote, Regularity of the distance function, Proceedings of the American Mathematical Society 92 (1984) 153–155.
[6] P.L. Lions, Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Compressible Models, vol. 2, Oxford Science Publication, 1996.
[7] M. Peybernes, Analyse de problèmes mathématiques des fluides de type bi-couche et à frontière libre, Thèse de doctorat à l'Università di Corsica, 2006.