C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 350 (2012) 333–337

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Combinatoire

Sous-tournois isomorphes à W_5 dans un tournoi indécomposable

Subtournaments isomorphic to W_5 in an indecomposable tournament

Houmem Belkhechine [a], Imed Boudabbous [b], Kaouthar Hzami [c]

[a] *Université de Carthage, Institut préparatoire aux études d'ingénieurs de Bizerte, Bizerte, Tunisie*
[b] *Université de Sfax, Institut préparatoire aux études d'ingénieurs de Sfax, Sfax, Tunisie*
[c] *Université de Gabès, Institut supérieur d'informatique et de multimédia de Gabès, Gabès, Tunisie*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 7 juin 2011
Accepté après révision le 16 mars 2012
Disponible sur Internet le 31 mars 2012

Présenté par le Comité de rédaction

RÉSUMÉ

Considérons un tournoi $T=(S,A)$. À chaque partie X de S est associé le sous-tournoi $T(X)=(X, A\cap(X\times X))$ de T induit par X. On dit que le tournoi T abrite un tournoi T' lorsque T' est isomorphe à un sous-tournoi de T. Une partie X de S est un intervalle de T lorsque pour tous $a,b\in X$ et $x\in S\setminus X$, $(a,x)\in A$ si et seulement si $(b,x)\in A$. Par exemple, $\emptyset$, $\{x\}$ $(x\in S)$ et S sont des intervalles de T, appelés intervalles triviaux. Un tournoi, dont tous les intervalles sont triviaux, est indécomposable. En 2003, B.J. Latka a caractérisé la classe $\mathcal{T}$ des tournois indécomposables n'abritant pas un certain tournoi W_5 à 5 sommets. Dans cet article, nous nous intéressons, dans le cas d'un tournoi indécomposable T, à l'ensemble $W_5(T)$ des sommets $x\in S$ pour lesquels il existe une partie X de S telle que $x\in X$ et $T(X)$ est isomorphe à W_5. Nous montrons que pour un tournoi indécomposable T n'appartenant pas à la classe $\mathcal{T}$, $|W_5(T)|\geqslant|S|-2$, et que $|W_5(T)|\geqslant|S|-1$ lorsque $|S|$ est pair. À l'aide d'exemples, nous vérifions aussi que cet énoncé est optimal.

ABSTRACT

We consider a tournament $T=(V,A)$. For each subset X of V is associated the subtournament $T(X)=(X, A\cap(X\times X))$ of T induced by X. We say that a tournament T' embeds into a tournament T when T' is isomorphic to a subtournament of T. A subset X of V is an interval of T provided that for $a,b\in X$ and $x\in V\setminus X$, $(a,x)\in A$ if and only if $(b,x)\in A$. For example, $\emptyset$, $\{x\}$ $(x\in V)$ and V are intervals of T, called trivial intervals. A tournament is indecomposable if all its intervals are trivial. In 2003, B.J. Latka characterized the class $\mathcal{T}$ of the indecomposable tournaments into which a certain tournament W_5 on 5 vertices does not embed. In the case of an indecomposable tournament T, we study the set $W_5(T)$ of vertices $x\in V$ for which there exists a subset X of V such that $x\in X$ and $T(X)$ is isomorphic to W_5. We prove the following: for any indecomposable tournament T, if $T\notin\mathcal{T}$, then $|W_5(T)|\geqslant|V|-2$ and $|W_5(T)|\geqslant|V|-1$ if $|V|$ is even. By giving examples, we also verify that this statement is optimal.

Adresses e-mail : houmem@gmail.com (H. Belkhechine), imed.boudabbous@fsegs.rnu.tn (I. Boudabbous), hzamikawthar@gmail.com (K. Hzami).

1631-073X/$ – see front matter
http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2012.03.012

Abridged English version

A *tournament* $T = (V(T), A(T))$ (or (V, A)) consists of a finite set V of *vertices* together with a set A of ordered pairs of distinct vertices, called *arcs*, such that for all $x \neq y \in V$, $(x, y) \in A$ if and only if $(y, x) \notin A$. $|T|$ means the cardinality of $V(T)$, which is called the *order* of the tournament T. With each subset X of V, is associated the *subtournament* $T(X) = (X, A \cap (X \times X))$ of T induced by X. For $X \subseteq V$ (resp. $x \in V$), the tournament $T(V \setminus X)$ (resp. $T(V \setminus \{x\})$) is denoted by $T - X$ (resp. $T - x$). Two tournaments $T = (V, A)$ and $T' = (V', A')$ are *isomorphic*, which is denoted by $T \simeq T'$, when there exists an *isomorphism* from T onto T', i.e., a bijection f from V onto V' such that for all $x, y \in V$, $(x, y) \in A$ if and only if $(f(x), f(y)) \in A'$. If T' is isomorphic to a subtournament of T, then we say that T' *embeds* into T. Otherwise, we say that T *omits* T'. For all $x \neq y \in V$, the notation $x \to y$ signifies $(x, y) \in A$. For all $x \in V$ and $Y \subseteq V \setminus \{x\}$, the notation $x \to Y$ (resp. $Y \to x$) signifies $x \to y$ (resp. $y \to x$) for all $y \in Y$. For $x \in V$, we set $N^+_T(x) = \{y \in V\colon\ x \to y\}$. The *dual* of the tournament $T = (V, A)$ is the tournament $T^\star = (V, A^\star)$, where $A^\star = \{(x, y)\colon\ (y, x) \in A\}$.

Given a tournament $T = (V, A)$, a subset I of V is an *interval* [9,11,16] (or a *clan* [5]) of T provided that for every $x \in V \setminus I$, $x \to I$ or $I \to x$. For example, $\emptyset$, V, and $\{x\}$, where $x \in V$, are intervals of T, called *trivial* intervals. A tournament is then said to be *indecomposable* [11,16] (or *primitive* [5]) if all its intervals are trivial.

In this Note we are interested, with the case of the indecomposable tournaments T, in the subtournaments of T which are isomorphic to the tournament W_5 defined on $\{0, \ldots, 4\}$ by $A(W_5 - 4) = \{(i, j)\colon\ 0 \leqslant i < j \leqslant 3\}$ and $N^+_{W_5}(4) = \{0, 2\}$. In 2003, B.J. Latka characterized the indecomposable tournaments omitting W_5. In order to present these tournaments, we introduce some notations and tournaments. For $n \in \mathbb{N}$, we set $\mathbb{N}_n = \{0, \ldots, n\}$, $2\mathbb{N}_n = \{2i\colon\ i \in \mathbb{N}_n\}$ and for a finite subset X of $\mathbb{N}$, we denote by $\underline{X}$ the tournament defined on X by $A(\underline{X}) = \{(i, j) \in X \times X\colon\ i < j\}$. We now introduce the tournaments T_{2n+1} and U_{2n+1} defined on $\mathbb{N}_{2n}$, where $n \geqslant 2$, in the following manner:

(i) $A(T_{2n+1}) = \{(i, j)\colon\ j - i \in \{1, \ldots, n\} \bmod 2n + 1\}$.
(ii) $U_{2n+1}(\mathbb{N}_n) = \underline{\mathbb{N}_n}$, $U_{2n+1}(\mathbb{N}_{2n} \setminus \mathbb{N}_n) = (\underline{\mathbb{N}_{2n} \setminus \mathbb{N}_n})^\star$ and for all $i \in \mathbb{N}_{n-1}$, $\mathbb{N}_n \setminus \mathbb{N}_i \to i + n + 1 \to \mathbb{N}_i$.

We also consider the *Paley* tournament P_7 defined on $\mathbb{N}_6$ by $A(P_7) = \{(i, j)\colon\ j - i \in \{1, 2, 4\} \bmod 7\}$ and we set $B_6 = P_7 - 6$.

Theorem 0.1. *(See [12].) Up to isomorphisms, the indecomposable tournaments on at least 5 vertices and omitting W_5 are the tournaments B_6, P_7, T_{2n+1} and U_{2n+1}, where $n \geqslant 2$.*

Many classes of tournaments defined by means of embedding, involving inevitable configurations or morphological descriptions, have been studied by several authors [1,10,12,13]. We are interested here in the cardinality of the set $W_5(T)$ of the vertices x of an indecomposable tournament T for which there exists a subset X of 5 vertices of $V(T)$ such that $x \in X$ and $T(X) \simeq W_5$. So, notice that almost all tournaments $T = (V, A)$ satisfy $W_5(T) = V$. It is an elementary exercise to show that. Note also that if T satisfies a certain *extension axiom*, it satisfies $W_5(T) = V$. The extension axioms are introduced in [7,8], as a first order logic sentences, for the study of 0–1 laws. These axioms are an important tool in the study of the random aspects of finite structures, each of these axioms is satisfied by almost all these structures [4,7,8]. We recall these axioms in the case of tournaments. A tournament $T = (V, A)$ is *r-existentially closed* (or r-e.c. [2]), where $r \in \mathbb{N}$, means that T satisfies the *r-extension axiom*: for all subset X of r vertices of V and for all $Y \subseteq X$, there is a vertex $x \in V \setminus X$ such that $N^+_{T(X \cup \{x\})}(x) = Y$. For $r \in \mathbb{N}$, almost all tournaments are r-e.c. [2,7,8]. Noting that every 4-e.c. tournament T satisfies $W_5(T) = V(T)$, we deduce that almost all tournaments T satisfy $W_5(T) = V(T)$. As we are interested in indecomposable tournaments, which is the case of almost all tournaments [6], we deduce the following fact:

Fact 0.2. Almost all the indecomposable tournaments T satisfy $W_5(T) = V(T)$.

Note that these facts extend in a natural way when one considers a tournament other than W_5.

In this paper, we focus on the tournament W_5, we establish the following theorem and we verify that it is optimal.

Theorem 0.3. *Let T be an indecomposable tournament. If W_5 embeds into T, then $|W_5(T)| \geqslant |T| - 2$. If, moreover, $|T|$ is even, then $|W_5(T)| \geqslant |T| - 1$.*

With Theorem 0.1, we obtain the following alternative statement of Theorem 0.3: *Let T be an indecomposable tournament of order $\geqslant 5$ such that $T \not\simeq B_6$, P_7, T_{2n+1} or U_{2n+1} for $n \geqslant 2$. Then $|W_5(T)| \geqslant |T| - 2$. If, moreover, $|T|$ is even, then $|W_5(T)| \geqslant |T| - 1$.*

By constructing examples, we verify that Theorem 0.3 is optimal. By Fact 0.2, we only construct for each integer $m \geqslant 6$, an indecomposable tournament T of order m with $|W_5(T)| = m - 1$ and, when m is odd, another indecomposable tournament T' of order m with $|W_5(T')| = m - 2$. We then introduce the tournaments Q_{2n+3} and R_{2n+3} defined on $\mathbb{N}_{2n+2}$, where $n \geqslant 2$, in the following manner:

– $Q_{2n+3}(\mathbb{N}_{2n}) = T_{2n+1}$, $N^+_{Q_{2n+3}}(2n + 1) = \{1, \ldots, n\} \cup \{2n + 2\}$ and $N^+_{Q_{2n+3}}(2n + 2) = \mathbb{N}_{2n}$.
– $R_{2n+3} - \{2n + 1\} = Q_{2n+3} - \{2n + 1\}$ and $N^+_{R_{2n+3}}(2n + 1) = \{0, 2n + 2\}$.

The tournaments Q_{2n+3}, R_{2n+3} and $R_{2n+3} - \{2n+2\}$ form the required constructions:

Proposition 0.4. *For $n \geqslant 2$, the tournaments Q_{2n+3}, R_{2n+3} and $R_{2n+3} - \{2n+2\}$ are indecomposable and satisfy*: $W_5(Q_{2n+3}) = \mathbb{N}_{2n+2} \setminus \{0, n+1\}$, $W_5(R_{2n+3}) = \mathbb{N}_{2n+2} \setminus \{n\}$ *and* $W_5(R_{2n+3} - \{2n+2\}) = \mathbb{N}_{2n+1} \setminus \{n\}$.

We end by posing the following problems, motivated by Theorem 0.3, Fact 0.2 and Proposition 0.4.

Problem 0.5. Characterize the indecomposable tournaments T such that $|W_5(T)| = |T| - 2$.

Problem 0.6. Characterize the indecomposable tournaments T such that $|W_5(T)| = |T| - 1$.

1. Introduction

Un *tournoi* $T = (S(T), A(T))$ (ou (S, A)) est constitué d'un ensemble fini S de *sommets* et d'un ensemble A de couples de sommets distincts, appelés *arcs*, tels que pour tous $x \neq y \in S$, $(x, y) \in A$ si et seulement si $(y, x) \notin A$. L'*ordre* du tournoi T, noté $|T|$, est le nombre de ses sommets. À chaque partie X de S est associé le *sous-tournoi* $T(X) = (X, A \cap (X \times X))$ de T induit par X. Pour $X \subseteq S$ (resp. $x \in S$), le tournoi $T(S \setminus X)$ (resp. $T(S \setminus \{x\})$) est noté $T - X$ (resp. $T - x$). Deux tournois $T = (S, A)$ et $T' = (S', A')$ sont *isomorphes* et on note $T \simeq T'$, lorsqu'il existe un *isomorphisme* de T sur T', c'est-à-dire une bijection f de S sur S' telle que pour tous $x, y \in S$, $(x, y) \in A$ si et seulement si $(f(x), f(y)) \in A'$. On dit que T *abrite* T' lorsque T' est isomorphe à un sous-tournoi de T, sinon on dit que T *omet* T'. Pour tous $x \neq y \in S$, la notation $x \to y$ signifie $(x, y) \in A$. Pour tout $x \in S$ et pour tout $Y \subseteq S \setminus \{x\}$, la notation $x \to Y$ (resp. $Y \to x$) signifie $x \to y$ (resp. $y \to x$) pour tout $y \in Y$. Pour tout $x \in S$, on pose $V_T^+(x) = \{y \in S\colon\ x \to y\}$. Le tournoi *dual* du tournoi $T = (S, A)$ est le tournoi $T^\star = (S, A^\star)$, où $A^\star = \{(x, y)\colon\ (y, x) \in A\}$.

Étant donné un tournoi $T = (S, A)$, une partie I de S est un *intervalle* [9,11,16] (ou un *clan* [5]) de T lorsque pour tout $x \in S \setminus I$, on a $x \to I$ ou $I \to x$. Par exemple, $\emptyset$, $\{x\}$ où $x \in S$, et S sont des intervalles de T, appelés les intervalles *triviaux*. Un tournoi est *indécomposable* [11,16] (ou *primitif* [5]) si tous ses intervalles sont triviaux et il est *décomposable* dans le cas contraire.

Dans cet article, on s'intéresse, dans le cas d'un tournoi indécomposable T, aux sous-tournois de T isomorphes au tournoi W_5 défini sur $\{0, \ldots, 4\}$ comme suit : $A(W_5 - 4) = \{(i, j)\colon\ 0 \leqslant i < j \leqslant 3\}$ et $V_{W_5}^+(4) = \{0, 2\}$. Notons que le tournoi W_5 n'est autre que le tournoi W_{2n+1}, défini au paragraphe 2, en prenant $n = 2$. En 2003, B.J. Latka a caractérisé la classe des tournois indécomposables omettant W_5. De nombreuses classes de tournois définis à l'aide de l'abritement, donnant lieu à des configurations inévitables ou à des descriptions morphologiques, ont été étudiées par plusieurs auteurs [1,10,12,13]. Nous nous intéressons ici au cardinal de l'ensemble $W_5(T)$ des sommets x d'un tournoi indécomposable T pour lesquels il existe une partie X à 5 sommets de $S(T)$ telle que $x \in X$ et $T(X) \simeq W_5$. Notons alors que presque tous les tournois $T = (S, A)$ vérifient $W_5(T) = S$. La preuve est un simple exercice. Signalons par ailleurs que, lorsqu'un tournoi T vérifie un certain *axiome d'extension*, il vérifie $W_5(T) = S(T)$. Les axiomes d'extensions sont introduits dans [7,8] comme des formules logiques closes du premier ordre, afin d'établir que la logique du premier ordre admet une loi 0–1. Ces axiomes forment un outil important dans l'étude des aspects aléatoires des structures finies, chacun de ces axiomes étant vérifié par presque toutes ces structures [4,7,8]. Nous rappelons ces axiomes dans le cas des tournois. Un tournoi $T = (S, A)$ est *r-existentiellement clos* (ou r-e.c. [2]), où $r \in \mathbb{N}$, lorsqu'il vérifie l'*axiome de r-extension* : pour toute partie X à r sommets de S et pour tout $Y \subseteq X$, il existe $x \in S \setminus X$ tel que $V_{T(X \cup \{x\})}^+(x) = Y$. Pour $r \in \mathbb{N}$, presque tous les tournois sont r-e.c. [2,7,8]. En remarquant que lorsqu'un tournoi T est 4-e.c., on a $W_5(T) = S(T)$, on déduit que presque tous les tournois T vérifient $W_5(T) = S(T)$. Comme nous nous intéressons aux tournois indécomposables, ce qui est le cas de presque tous les tournois [6], nous déduisons le fait suivant :

Fait 1.1. Presque tous les tournois indécomposables T vérifient $W_5(T) = S(T)$.

Signalons que ces faits s'étendent naturellement, lorsqu'on considère un tournoi autre que W_5.

Dans cet article, nous nous intéressons au tournoi W_5, nous établissons le théorème suivant et nous vérifions qu'il est optimal.

Théorème 1.2. *Soit T un tournoi indécomposable. Si T abrite W_5, alors $|W_5(T)| \geqslant |T| - 2$. Si de plus $|T|$ est pair, alors $|W_5(T)| \geqslant |T| - 1$.*

2. Les tournois critiques et théorème de Latka

Étant donné un tournoi indécomposable T à au moins 5 sommets, on dit que le tournoi T est *critique* si pour tout sommet x de T, le tournoi $T - x$ est décomposable. Les tournois critiques sont un des outils de notre preuve du Théorème 1.2. De plus, une partie importante de ces tournois forme la classe des tournois indécomposables d'ordre > 7 et omettant W_5

dûe à B.J. Latka [12]. En 1993, J.H. Schmerl et W.T. Trotter ont caractérisé les tournois critiques [16]. Afin de décrire ces tournois, rappelons d'abord qu'un tournoi *transitif* est un tournoi omettant le tournoi $C_3 = (\{0, 1, 2\}, \{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\})$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathbb{N}_n = \{0, \ldots, n\}$, $2\mathbb{N}_n = \{2i\colon\ i \in \mathbb{N}_n\}$ et pour toute partie finie X de $\mathbb{N}$, on désigne par $\underline{X}$ le tournoi transitif défini sur X par $A(\underline{X}) = \{(i, j) \in X \times X\colon\ i < j\}$. Nous introduisons maintenant les tournois T_{2n+1}, U_{2n+1} et W_{2n+1} définis sur $\mathbb{N}_{2n}$, où $n \geqslant 2$, de la façon suivante :

(i) $A(T_{2n+1}) = \{(i, j)\colon\ j - i \in \{1, \ldots, n\} \bmod 2n + 1\}$.
(ii) $U_{2n+1}(\mathbb{N}_n) = \underline{\mathbb{N}_n}$, $U_{2n+1}(\mathbb{N}_{2n} \setminus \mathbb{N}_n) = (\underline{\mathbb{N}_{2n} \setminus \mathbb{N}_n})^\star$ et pour tout $i \in \mathbb{N}_{n-1}$, $\mathbb{N}_n \setminus \mathbb{N}_i \to i + n + 1 \to \mathbb{N}_i$.
(iii) $W_{2n+1}(\mathbb{N}_{2n-1}) = \underline{\mathbb{N}_{2n-1}}$ et $V^+_{W_{2n+1}}(2n) = 2\mathbb{N}_{n-1}$.

Rappelons alors les résultats suivants concernant les tournois critiques.

Proposition 2.1. *(Voir [16].) À des isomorphismes près, les tournois critiques sont les tournois T_{2n+1}, U_{2n+1} et W_{2n+1}, où $n \geqslant 2$.*

Lemme 2.2. *(Voir [16].) À des isomorphismes près, les sous-tournois indécomposables à au moins 5 sommets de T_{2n+1} (resp. U_{2n+1}, W_{2n+1}), où $n \geqslant 2$, sont les tournois T_{2m+1} (resp. U_{2m+1}, W_{2m+1}), où $2 \leqslant m \leqslant n$. En particulier, pour tous entiers $p, q, l \geqslant 2$, les tournois T_{2p+1}, U_{2q+1} et W_{2l+1} sont deux à deux incomparables pour l'abritement.*

Afin de rappeler la caractérisation des tournois indécomposables omettant W_5, dûe à B.J. Latka, nous introduisons, en outre, le tournoi de *Paley* P_7 défini sur $\mathbb{N}_6$ par $A(P_7) = \{(i, j)\colon\ j - i \in \{1, 2, 4\} \bmod 7\}$. Notons que pour tous $x \neq y \in \mathbb{N}_6$, $P_7 - x \simeq P_7 - y$ et posons $B_6 = P_7 - 6$.

Théorème 2.3. *(Voir [12].) À des isomorphismes près, les tournois indécomposables à au moins 5 sommets et omettant W_5 sont les tournois B_6, P_7, T_{2n+1} et U_{2n+1}, où $n \geqslant 2$.*

Avec cette caractérisation, le Théorème 1.2 s'énonce alors comme suit : *Soit T un tournoi indécomposable d'ordre $\geqslant 5$ et tel que $T \not\simeq B_6$, P_7, T_{2n+1} ou U_{2n+1} pour $n \geqslant 2$. On a $|W_5(T)| \geqslant |T| - 2$. Si de plus $|T|$ est pair, alors $|W_5(T)| \geqslant |T| - 1$.*

3. Les tournois minimaux

Les tournois minimaux interviennent dans notre preuve du Théorème 1.2. Ces tournois ont été introduits en 1998 par A. Cournier et P. Ille [3] de la façon suivante. Étant donné un tournoi indécomposable $T = (S, A)$ et deux sommets distincts $x \neq y \in S$, T est *minimal* pour x et y (ou $\{x, y\}$-minimal) si pour toute partie propre X de S ($X \neq S$) telle que $\{x, y\} \subset X$ ($|X| \geqslant 3$), $T(X)$ est décomposable. On dit qu'un tournoi T est minimal lorsqu'il existe $x \neq y \in S(T)$ tels que T est $\{x, y\}$-minimal. A. Cournier et P. Ille ont caractérisé les tournois minimaux. Afin de rappeler cette caractérisation, nous introduisons les tournois F_n et G_n suivants :

(i) Pour $n \geqslant 4$, F_n est défini sur $\mathbb{N}_{n-1}$ comme suit : pour $i, j \in \mathbb{N}_{n-1}$, $(i, j) \in A(F_n)$ si et seulement si $j = i + 1$ ou $i \geqslant j + 2$.
(ii) Pour $n \geqslant 6$, G_n est défini sur $\mathbb{N}_{n-1}$ comme suit : $G_n(\mathbb{N}_{n-3}) = F_{n-2}$, $V^+_{G_n}(n - 2) = \{n - 3\}$ et $V^+_{G_n}(n - 1) = \{n - 2\}$.

Proposition 3.1. *(Voir [3].) À des isomorphismes près, les tournois minimaux d'ordre $\geqslant 3$ sont C_3, U_5, W_5, F_n, G_n et $G^\star_n$, où $n \geqslant 6$.*

Corollaire 3.2. *Étant donné un tournoi minimal T d'ordre $n \geqslant 6$, on a $|W_5(T)| \geqslant n - 1$. Plus précisément, $|W_5(F_n)| = n$ pour $n \geqslant 5$, $|W_5(G_6)| = 5$ et $|W_5(G_n)| = n$ pour $n \geqslant 7$.*

4. Preuve et optimalité du Théorème 1.2

Rappelons d'abord le résultat suivant concernant les tournois indécomposables.

Lemme 4.1. *(Voir [15].) Soit $T = (S, A)$ un tournoi indécomposable. Si X est une partie de S telle que $|X| \geqslant 3$, $|S \setminus X| \geqslant 4$ et $T(X)$ est indécomposable, alors il existe deux sommets distincts x et y de $S \setminus X$ tels que $T - \{x, y\}$ est indécomposable.*

Nous disposons maintenant de tous les outils nous permettant de donner une courte preuve du Théorème 1.2, à condition de le vérifier d'abord pour les tournois d'ordre 8, ce qui constitue l'étape la plus longue de la preuve.

Proposition 4.2. *Étant donné un tournoi indécomposable T d'ordre 8, on a $|W_5(T)| \geqslant 7$.*

À des isomorphismes près, le nombre de tournois à 8 sommets est égal à 6880, dont 3785 tournois indécomposables T [14], mais notre vérification, faite à la main, est non exhaustive et de taille raisonnable : Nous supposons par l'absurde, qu'il existe $x \neq y \in S(T)$ tels que $\{x, y\} \cap W_5(T) = \emptyset$. Nous partons alors d'un sous-tournoi $\{x, y\}$-minimal T' de T. D'après la Proposition 3.1 et le Corollaire 3.2, $T' \simeq C_3$ ou U_5. Lorsque $T' \simeq C_3$, d'après le Lemme 4.1 et le Théorème 2.3, le tournoi T abrite B_6. Nous obtenons des contradictions en utilisant, en outre, des résultats sur les tournois indécomposables $T = (S, A)$, portant sur une partition appropriée de $S \setminus X$, induite par une partie $X \subset S$ telle que $T(X)$ est indécomposable [5].

Preuve du Théorème 1.2. Le résultat étant trivial pour $|T| \leqslant 7$, en utilisant la Proposition 4.2, on prend $|T| = n \geqslant 9$. Supposons d'abord que n est pair. Supposons par l'absurde que $|W_5(T)| \leqslant n - 2$ et considérons deux sommets distincts x et y de T, tels que $\{x, y\} \cap W_5(T) = \emptyset$. Soit X une partie de $S(T)$ minimale (pour l'inclusion), telle que $\{x, y\} \subset X$ ($|X| \geqslant 3$) et $T(X)$ est indécomposable. Le tournoi $T(X)$ est $\{x, y\}$-minimal. D'après la Proposition 3.1 et le Corollaire 3.2, $T(X) \simeq C_3$ ou U_5. En utilisant plusieurs fois le Lemme 4.1, il existe une partie Y à 8 sommets de $S(T)$ telle que $X \subset Y$ et $T(Y)$ est indécomposable. Contradiction par la Proposition 4.2. Supposons maintenant que n est impair. Si T est critique, d'après le Lemme 2.2, $T \simeq W_n$ et donc $|W_5(T)| = n$. Si T n'est pas critique, considérons un sommet x de T, tel que $T - x$ est indécomposable. Le tournoi $T - x$ est d'ordre pair et abrite W_5 d'après le Théorème 2.3. D'après ce qui précède, $|W_5(T - x)| \geqslant n - 2$, et donc $|W_5(T)| \geqslant n - 2$. $\square$

Nous vérifions enfin, à l'aide d'exemples, que le Théorème 1.2 est optimal. En tenant compte du Fait 1.1, on se contente de construire pour chaque entier $m \geqslant 6$, un tournoi indécomposable T d'ordre m avec $|W_5(T)| = m - 1$ et, lorsque m est impair, un autre tournoi indécomposable T' d'ordre m avec $|W_5(T')| = m - 2$. Nous introduisons alors les tournois Q_{2n+3} et R_{2n+3} définis sur $\mathbb{N}_{2n+2}$, où $n \geqslant 2$, de la façon suivante :

- $Q_{2n+3}(\mathbb{N}_{2n}) = T_{2n+1}$, $V^+_{Q_{2n+3}}(2n + 1) = \{1, \ldots, n\} \cup \{2n + 2\}$ et $V^+_{Q_{2n+3}}(2n + 2) = \mathbb{N}_{2n}$.
- $R_{2n+3} - \{2n + 1\} = Q_{2n+3} - \{2n + 1\}$ et $V^+_{R_{2n+3}}(2n + 1) = \{0, 2n + 2\}$.

Les tournois Q_{2n+3}, R_{2n+3} et $R_{2n+3} - \{2n + 2\}$ forment les constructions requises :

Proposition 4.3. *Pour $n \geqslant 2$, les tournois Q_{2n+3}, R_{2n+3} et $R_{2n+3} - \{2n + 2\}$ sont indécomposables et vérifient* : $W_5(Q_{2n+3}) = \mathbb{N}_{2n+2} \setminus \{0, n + 1\}$, $W_5(R_{2n+3}) = \mathbb{N}_{2n+2} \setminus \{n\}$ *et* $W_5(R_{2n+3} - \{2n + 2\}) = \mathbb{N}_{2n+1} \setminus \{n\}$.

Nous terminons par poser les problèmes suivants, motivés par le Théorème 1.2, le Fait 1.1 et la Proposition 4.3.

Problème 4.4. Caractériser les tournois indécomposables T tels que $|W_5(T)| = |T| - 2$.

Problème 4.5. Caractériser les tournois indécomposables T tels que $|W_5(T)| = |T| - 1$.

Références

[1] H. Belkhechine, I. Boudabbous, Tournois indécomposables et leurs sous-tournois indécomposables à 5 sommets, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006) 685–688.
[2] A. Benato, K. Cameron, On an adjacency property of almost all tournaments, Discrete Math. 306 (2006) 2327–2335.
[3] A. Cournier, P. Ille, Minimal indecomposable graphs, Discrete Math. 183 (1998) 61–80.
[4] H.-D. Ebbinghauss, J. Flum, Finite Model Theory, Springer Monographs in Mathematics, 1999.
[5] A. Ehrenfeucht, G. Rozenberg, Primitivity is hereditary for 2-structures, Theoret. Comput. Sci. 3 (70) (1990) 343–358.
[6] P. Erdös, E. Fried, A. Hajnal, C. Milner, Some remarks on simple tournaments, Algebra Universalis 2 (1972) 238–245.
[7] R. Fagin, Probabilities on finite models, J. Symbolic Logic 41 (1976) 50–58.
[8] R. Fagin, Finite-model theory – a personal perspective, Theoret. Comput. Sci. 116 (1993) 3–31.
[9] R. Fraïssé, L'intervalle en théorie des relations, ses généralisations, filtre intervallaire et clôture d'une relation, in : M. Pouzet, D. Richard (Eds.), Orders, Description and Roles, North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 313–342.
[10] C. Gnanvo, P. Ille, La reconstruction des tournois sans diamants, Z. Math. Logik Grundlag. Math. 38 (1992) 283–291.
[11] P. Ille, Indecomposable graphs, Discrete Math. 173 (1997) 71–78.
[12] B.J. Latka, Structure theorem for tournaments omitting N_5, J. Graph Theory 42 (2003) 165–192.
[13] G. Lopez, C. Rozy, Reconstruction of binary relations from their restrictions of cardinality 2, 3, 4 and $(n - 1)$, I, Z. Math. Logik Grundlag. Math. 38 (1992) 27–37.
[14] V.J. Mueller, J. Nesetril, J. Pelant, Either tournaments or algebras ?, Discrete Math. 11 (1975) 37–66.
[15] M.Y. Sayar, Partially critical tournaments and partially critical supports, Contrib. Discrete Math. 6 (2011) 52–76.
[16] J.H. Schmerl, W.T. Trotter, Critically indecomposable partially ordered sets, graphs, tournaments and other binary relational structures, Discrete Math. 113 (1993) 191–205.