C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 349 (2011) 995–998

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Statistique

Estimation du coût quadratique quand certaines composantes du paramètre de position sont positives ☆

Quadratic loss estimation of a location parameter when a subset of its components is unknown

Idir Ouassou [a], Mustapha Rachdi [b]

[a] *Université Cadi Ayyad, École nationale des sciences appliquées, avenue Abdelkrim Khattabi, BP 575, Marrakech, Maroc*
[b] *Laboratoire AGIM, FRE 3405 CNRS, Equipe TIMB, université P. Mendès France de Grenoble, UFR SHS, BP 47, 38040 Grenoble cedex 09, France*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 24 mars 2010
Accepté après révision le 24 juin 2011
Disponible sur Internet le 9 septembre 2011

Présenté par Paul Deheuvels

RÉSUMÉ

On considère le problème d'estimation du coût quadratique $\|\delta - \theta\|^2$ d'un estimateur δ de la moyenne $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_p)$ d'une loi à symétrie sphérique lorsque l'on sait que certaines composantes θ_i de celle-ci sont positives ou nulles. En premier lieu, lorsque X est un vecteur gaussien, on s'intéresse à l'amélioration de l'estimateur sans biais λ^0 de $\|\delta - \theta\|^2$ par des estimateurs de la forme $\lambda^0(X) + h(X)$ en fournissant des conditions sur la fonction h. On étend ensuite cette problématique à un modèle distributionnel où l'on dispose d'un vecteur résiduel U : la loi de (X, U) est supposée à symétrie sphérique autour du couple $(\theta, 0)$ et l'on considère des estimateurs de coût de la forme $\lambda^0(X) + \|U\|^4 h(X)$.

ABSTRACT

We consider the problem of estimating the quadratic loss $\|\delta - \theta\|^2$ of point estimators δ of a location parameter $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_p)$ for family of symmetric distributions with known scale parameter, when a subset of the components of θ are restricted to be nonnegative and when a residual vector U is available. In the normal case, we give a class of estimators $\lambda^0(X) + h(X)$ which dominate, under the usual quadratic loss, the unbiased estimator λ^0 of $\|\delta - \theta\|^2$. In the general case when the vector (X, U) has a spherically symmetric distribution around $(\theta, 0)$, we give a class of estimators of the form $\lambda^0(X) + \|U\|^4 h(X)$.

1. Introduction

On se propose d'étudier l'estimation du coût quadratique d'un estimateur du paramètre de position d'une loi à symétrie sphérique lorsque ce dernier est soumis à certaines contraintes. Une hypothèse essentielle de notre modèle sphérique est que l'observation aléatoire est de la forme (X, U) dont la loi est à symétrie sphérique autour de $(\theta, 0)$, avec $\dim X = \dim \theta = p$ et $\dim U = \dim 0 = k$, où U est un vecteur dit résiduel.

☆ Ce travail a été financé par l'Académie des sciences Hassan II du Maroc.
Adresses e-mail : idir.ouassou@ensa.ac.ma (I. Ouassou), Mustapha.Rachdi@upmf-grenoble.fr (M. Rachdi).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2011.06.022

Le problème d'estimation du coût (sans contrainte sur le paramètre de position) a originellement été abordé par Lehmann et Scheffé [8] à travers la puissance d'un test statistique. Plus récemment Johnstone [7], Lele [9] et Fourdrinier et Wells [5] ont traité plusieurs variantes de ce problème (cf. aussi Ouassou et Rachdi [10]).

Les estimateurs δ de θ sont donnés à l'aide du coût quadratique usuel $\|\delta(X,U)-\theta\|^2$ et, plus précisément, à l'aide de son espérance $E_\theta[\|\delta(X,U)-\theta\|^2]$ qui est, par définition, le risque de δ.

Après avoir estimé θ par $\delta(X,U)$, on s'intéresse à l'évaluation du coût quadratique pour cet estimateur. Il s'agit, en fait, de donner une évaluation de $\|\delta(X,U)-\theta\|^2$ au travers d'une fonction de (X,U), soit $\lambda(X,U)$. La fonction λ ainsi retenue est dite estimateur de coût et, afin de la comparer à d'autres estimateurs du coût, une nouvelle mesure de distance entre l'estimateur de coût et le coût lui même est nécessaire. Traditionnellement, et par simplicité, on choisit $(\lambda(X,U)-\|\delta(X,U)-\theta\|^2)^2$ que l'on utilise par l'intermédiaire de son espérance qui définit ainsi une nouvelle notion de risque de l'estimateur de coût λ, qu'on note : $R(\lambda,\delta,\theta)=E_\theta[(\lambda(X,U)-\|\delta(X,U)-\theta\|^2)^2]$.

Dans cette note, nous considérons l'estimation du coût quadratique de l'estimateur des moindres carrés de la moyenne θ d'une loi à symétrie sphérique en présence d'un vecteur résiduel U quand certaines composantes du paramètre de position sont positives. Fourdrinier et Wells [5] ont déjà étudié ce problème sans hypothèse de contrainte et ont fourni une classe d'estimateurs de la forme $\lambda^0-c\|U\|^4/\|X\|^2$ qui dominent l'estimateur sans biais $\lambda^0(X)=p\|U\|^2/k$ du coût quadratique de l'estimateur minimax X. La présence du vecteur résiduel U complète, dans l'expression de ces estimateurs, l'information donnée par l'observation X sur θ.

2. Le cas gaussien

Dans ce paragraphe, le vecteur aléatoire X suit la loi normale de matrice de covariance l'identité I_p et de moyenne $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_p)$ telle qu'un nombre s de ses composantes soient positives. Pour des raisons de simplicité, on suppose que $\theta_1\geqslant 0,\ldots,\theta_s\geqslant 0$ pour $s\leqslant p$.

2.1. Estimation du coût de l'estimateur du maximum de vraisemblance

Dans ce cas, il est commode d'écrire l'estimateur du maximum de vraisemblance sous la forme :

$$\delta_0(X)=X+\gamma(X)\quad \text{où } \delta_0(X)=\big(\delta_{01}(X),\ldots,\delta_{0p}(X)\big) \text{ et } \gamma(X)=\big(\gamma_1(X),\ldots,\gamma_p(X)\big)$$

avec :

$$\delta_{0i}(X)=\begin{cases}\begin{cases}0 & \text{si } X_i<0\\ X_i & \text{si } X_i\geqslant 0\end{cases} & \text{pour } i=1,\ldots,s,\\ X_i & \text{pour } i=s+1,\ldots,p,\end{cases}\qquad \text{et}\quad \gamma_i(X)=\begin{cases}\begin{cases}-X_i & \text{si } X_i<0\\ 0 & \text{si } X_i\geqslant 0\end{cases} & \text{pour } i=1,\ldots,s,\\ 0 & \text{pour } i=s+1,\ldots,p.\end{cases}$$

Un estimateur sans biais du coût quadratique $\|\delta_0(X)-\theta\|^2$ de l'estimateur usuel $\delta_0(X)$ est :

$$\lambda^0(X)=p+\sum_{i=1}^{s}\big(X_i^2-2\big)I_{[X_i<0]}$$

où I_A désigne la fonction indicatrice de tout ensemble A.

Finalement le risque de $\delta_0(X)$ est fini et est donné par : $p+E_\theta[\sum_{i=1}^s(X_i^2-2)I_{[X_i<0]}]$.

Une classe alternative d'estimateurs qui améliorent $\lambda^0(X)$ sont de la forme :

$$\lambda^h(X)=\lambda^0(X)-h(X),$$

où h est une certaine fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. Le théorème suivant donne une condition suffisante sur la fonction h pour que l'estimateur λ^h domine l'estimateur λ^0.

Théorème 2.1. *Soit h une fonction positive deux fois faiblement différentiable sur $\mathbb{R}^p$. L'estimateur $\lambda^h(X)$ domine $\lambda^0(X)$, pour $\theta\in\mathbb{R}_+^s\times\mathbb{R}^{p-s}$, dès que*

$$h^2+2\triangle h+4sh<0. \tag{1}$$

Remarque 1. Le cas où il n'y a pas de contrainte de positivité sur les composantes du paramètre peut se traduire par le fait que $s=0$. Remarquons que, dans cette interprétation, l'inégalité (1) coïncide avec la condition donnée par Johnstone [7].

2.2. Estimation du coût d'un estimateur général

Dans ce paragraphe, on désire estimer le coût quadratique de tout estimateur δ que, sans perte de généralité, on peut toujours exprimer au travers de l'estimateur du maximum de vraisemblance $\delta_0(X)$ sous la forme $\delta(X)=\delta_g(X)=\delta_0(X)+g(X)$ pour une certaine fonction g faiblement différentiable de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$. Comme précédemment on détermine tout d'abord un estimateur sans biais de la fonction de coût $\|\delta_g(X)-\theta\|^2$ de l'estimateur $\delta_g(X)$. En effet, par une simple application du Lemme de James–Stein (cf. Stein [11]) à la fonction $\gamma+g$, on peut écrire :

$$E_\theta\big[\big\|\delta_g(X)-\theta\big\|^2\big]=p+E_\theta\big[\big\|\gamma(X)+g(X)\big\|^2+2\,\mathrm{div}(\gamma+g)(X)\big].$$

Donc un estimateur sans biais de $\|\delta_g(X)-\theta\|^2$ a pour forme $\lambda_g^0(X)=p+\|\gamma+g\|^2+2\,\mathrm{div}(\gamma+g)$.

Comme dans le paragraphe précédent, nous montrons que cet estimateur sans biais du coût quadratique peut être amélioré par une classe plus générale d'estimateurs de la forme $\lambda_g^h(X)=\lambda_g^0(X)-h(X)$ où h est une fonction vérifiant certaines conditions. Le théorème suivant donne donc une condition de domination de l'estimateur $\lambda_g^0(X)$ par $\lambda_g^h(X)$.

Théorème 2.2. *Soit h une fonction positive deux fois faiblement différentiable sur $\mathbb{R}^p$ et $p\geqslant 4$. L'estimateur $\lambda_g^h(X)$ domine l'estimateur $\lambda_g^0(X)$, pour $\theta\in\mathbb{R}_+^s\times\mathbb{R}^{p-s}$, dès que : $h^2+2\triangle h+4sh+4\langle\nabla h,g\rangle\leqslant 0$.*

3. Le cas sphérique unimodal

Une hypothèse essentielle de notre modèle sphérique est que l'observation aléatoire est de la forme (X,U) dont la loi est à symétrie sphérique autour de $(\theta,0)$, avec $\dim X=\dim\theta=p$ et $\dim U=\dim 0=k$.

Quant aux contraintes sur θ, on reprend celles du paragraphe 2 où quelques composantes de la moyenne θ sont supposées positives (i.e. $\theta_i\geqslant 0$ pour $i=1,\dots,s$ avec $s\leqslant p$).

On se propose d'étudier l'estimation du coût quadratique $\|\delta_g(X,U)-\theta\|^2$ de tout estimateur de la forme $\delta_g(X,U)=X+\gamma(X)+\|U\|^2g(X)$ de la moyenne θ, où g est une fonction faiblement différentiable de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$. Des conditions générales pour qu'un tel estimateur $\delta_g(X,U)$ domine l'estimateur $X+\gamma(X)$ sont données dans Brandwein et Strawderman [1], Brandwein et al. [2], Cellier et al. [4] et Fourdrinier et al. [6]. Le lemme suivant nous fournit alors un estimateur sans biais du coût quadratique $\|\delta_g(X,U)-\theta\|^2$ de l'estimateur $\delta_g(X,U)$.

Lemme 3.1. *Pour toute fonction $g:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^p$ faiblement différentiable et pour tout $\theta\in\mathbb{R}^p$, un estimateur sans biais de la fonction du coût $\|\delta_g(X,U)-\theta\|^2$ de l'estimateur $\delta_g(X,U)$ est égal :*

$$\lambda_g^0(X,U)=p\frac{\|U\|^2}{k}+2\frac{\|U\|^2}{k}\,\mathrm{div}\,\gamma(X)+\frac{2}{k+2}\|U\|^4\,\mathrm{div}\,g(X)+\big\|\gamma(X)+\|U\|^2g(X)\big\|^2. \tag{2}$$

Remarque 2. Le cas où il n'y a pas de contrainte de positivité sur les composantes de θ peut s'obtenir en prenant $\gamma\equiv 0$. On retrouve ainsi l'estimateur sans biais donné par [3].

Dans la suite de ce paragraphe, on montre que l'estimateur $\lambda_g^0(X,U)$ peut être amélioré par une classe plus générale d'estimateurs de la forme :

$$\lambda_g^h(X,U)=\lambda_g^0(X,U)+\|U\|^4h\big(\|X\|^2\big)$$

où $h(\cdot)$ est une fonction à valeurs réelles négatives et deux fois faiblement dérivable. Comme dans le paragraphe précédent, nous avons le théorème suivant où nous supposerons que la loi de (X,U) est unimodale c'est-à-dire qu'elle admet une densité de la forme $(x,u)\to G(\|x-\theta\|^2+\|u\|^2)$ où $G(\cdot)$ est une fonction décroissante.

Théorème 3.1. *On suppose que la distribution de (X,U) est unimodale. Si la fonction h est négative, deux fois faiblement dérivable et concave et telle que :*

$$\frac{\partial h}{\partial X_i}\big(\|X\|^2\big)\leqslant-\frac{h(\|X\|^2)}{\|X\|^2}X_i\quad \text{pour tout } i=1,\dots,p$$

alors l'estimateur $\lambda_g^h(X,U)$ domine l'estimateur sans biais $\lambda_g^0(X,U)$, pour $\theta\in\mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^{p-s}$, dès que

$$\begin{aligned}&h^2\big(\|X\|^2\big)-\frac{2}{(k+4)(k+6)}\triangle h\big(\|X\|^2\big)-\frac{8}{k+4}\,\mathrm{div}(g\cdot h)(X)+\frac{4}{k+2}h\big(\|X\|^2\big)\,\mathrm{div}\,g(X)\\&\quad-\frac{2s}{(k+4)(k-2)}\frac{h(\|X\|^2)}{\|X\|^2}\leqslant 0.\end{aligned} \tag{3}$$

Remarque 3. Dans le cas sans contrainte, c'est-à-dire $s=0$ et $\gamma\equiv 0$, on retrouve la condition de domination du théorème 3.1 dans Fourdrinier et Wells [5].

Le corollaire suivant donne un exemple de fonctions h et g vérifiant les conditions du théorème 3.1.

Corollaire 3.1. *Soit $\theta \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{p-s}$ et soit $p \geqslant 4$. Alors pour $g(X) = -\frac{d}{\|X\|^2}X$ et $h(\|X\|^2) = -\frac{c}{\|X\|^2}$ l'estimateur $\lambda_g^h(X,U)$ domine l'estimateur $\lambda_g^0(X,U)$ dès que :*

$$0 < c < \frac{4(p-4)}{k+2} + 4\left(\frac{2(p-4)}{k+4} - \frac{(p-2)}{k+2}\right)d - \frac{2s}{(k+4)(k-2)}.$$

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier l'Académie des sciences et Techniques Hassan 2 (Maroc) pour son soutien financier, et plus particulièrement les Professeurs P. Deheuvels et Y. Ouknine.

Références

[1] A.C. Brandwein, W.E. Strawderman, Generalizations of James–Stein estimators under spherical symmetry, The Annals of Statistics 19 (3) (1991) 1639–1650.
[2] A.C. Brandwein, S. Ralescu, W.E. Strawderman, Shrinkage estimators of the location parameter for certain spherically symmetric distributions, Annals of The Institute of Statistical Mathematics 45 (3) (1991) 551–563.
[3] D. Cellier, D. Fourdrinier, Shrinkage estimators under spherical symmetry for the general linear model, Journal of Multivariate Analysis 52 (2) (1995) 338–351.
[4] D. Cellier, D. Fourdrinier, C. Robert, Robust shrinkage estimators of the location parameter for elliptically symmetric distributions, Journal of Multivariate Analysis 29 (1989) 39–52.
[5] D. Fourdrinier, M.T. Wells, Estimation of a loss function for spherically symmetric distribution in the general linear model, The Annals of Statistics 23 (2) (1995) 571–592.
[6] D. Fourdrinier, I. Ouassou, W. Strawderman, Estimation of a components vector when some parameters are restricted, Journal of Multivariate Analysis 86 (2003) 14–24.
[7] I. Johnstone, On inadmissibility of some unbiased estimates of loss, in: S.S. Gupta, J.O. Berger (Eds.), Statistical Decision Theory and Related Topics IV, Academic Press, New York, 1988, pp. 361–379.
[8] E.L. Lehmann, H. Scheffé, Completeness, similar regions and unbiased estimates, Sankhyā 10 (1950) 305–340.
[9] C. Lele, Admissibility results in loss estimation, The Annals of Statistics 21 (1993) 378–390.
[10] I. Ouassou, M. Rachdi, Stein type estimation of the regression operator for functional data, Advances and Applications in Statistical Sciences 1 (2) (2009) 233–250.
[11] C. Stein, Estimation of the mean of a multivariate normal distribution, The Annals of Statistics 9 (1981) 1135–1151.