C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 348 (2010) 1207–1210

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Probabilités

Processus de Lévy autosimilaires sur les groupes de Lie

Autosimilar Lévy processes on Lie groups

Mohamed Abbassi [1]

Université Paul-Sabatier, 118, route de Narbonne, Toulouse, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 17 septembre 2010
Accepté le 7 octobre 2010
Disponible sur Internet le 3 novembre 2010

Présenté par le Comité de rédaction

RÉSUMÉ

Dans cet article nous étudions la propriété d'autosimilarité globale des processus de Lévy sur les groupes de Lie.

ABSTRACT

In this Note we study the global autosimilarity property of Lévy processes on Lie groups.

1. Processus de Lévy dans les groupes de Lie

Soit $\mathbb{G}$ un groupe de Lie de dimension finie d, connexe et soit $\mathbf{g}$ son algèbre de Lie de base $(V_1,\dots,V_d)$. Soit $(Z_t^1,\dots,Z_t^d)_{t\geqslant 0}$ un processus de Lévy de dimension d dans $\mathbb{R}^d$ Q-stable, où Q est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ sont tous supérieurs à $1/2$. Le processus $Z_t^{\mathbf{g}}=\sum_{i=1}^d Z_t^i V_i$ est le processus de Lévy à gauche canonique Q-stable dans $\mathbf{g}$ par rapport à la base $(V_1,\dots,V_d)$. Pour x dans $\mathbb{G}$, on considère l'EDS suivante :

$$\mathrm{d}X_t=\sum_{i=1}^d V_i(X_t)\diamond \mathrm{d}Z_t^i,\quad X_0=x.$$

Plus précisément le processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$, solution de cette équation, est un processus à valeurs dans $\mathbb{G}$ adapté à $\mathfrak{F}_t=\sigma(Z_s;s\leqslant t)$ et vérifie,

$$f(X_t)=f(x)+\sum_{i=1}^d\int_0^t V_i f(X_s)\,\mathrm{d}Z_s^i+\frac{1}{2}\sum_{i,j}a_{ij}\int_0^t V_iV_j f(X_s)\,\mathrm{d}s$$
$$+\sum_{0\leqslant s\leqslant t}\left(f\big(\varphi_{X_{s^-1}}(\Delta Z_s)\big)-f(X_{s^-1})-\sum_{i=1}^d V_i f(X_{s^-1})\Delta Z_{s^i}\right),$$

pour tout $f\in C^\infty(\mathbb{G})$, où $a_{ij}t$ est la covariance de la partie continue du processus $(Z_t^{\mathbf{g}})_{t\geqslant 0}$, $\Delta Z_s=Z_s-Z_{s^-1}$. $\varphi_x(z)=\exp\{\sum_{i=1}^d z_iV_i\}(x)$, avec, si Y est un champ de vecteur complet dans $\mathbb{G}$, $\exp tY(x)$ est la solution de l'EDO $\mathrm{d}\varphi_t/\mathrm{d}t=Y(\varphi_t)$

Adresse e-mail : abbassi_mail@yahoo.fr.

[1] Remerciements à F. Baudoin (Purdue University, 150 N. University Street, West Lafayette, IN 47907-2067, USA ; NSF DMS 0907326) pour sa collaboration et le financement de mon séjour à l'université de Purdue.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2010.10.014

satisfaisant $\varphi_0 = x$. Le processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est appelé processus de Lévy-gauche Q-stable dans $\mathbb{G}$ par rapport à la base $(V_1, \ldots, V_d)$. Pour plus de détails, nous renvoyons à [5], p. 598. Pour $k \geqslant 1$,

- On note $\triangle^k[0,t] = \{(t_1, \ldots, t_k) \in [0,t]^k, t_1 < \cdots < t_k\}$;
- Si $I = \{(i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, d\}^k\}$ est un mot de longueur k,

$$\int\limits_{\triangle^k[0,t]} \diamond \mathrm{d}Z^I = \int\limits_{0<t_1<\cdots<t_k\leqslant t} \diamond \mathrm{d}Z_{t_1}^{i_1} \cdots \diamond \mathrm{d}Z_{t_k}^{i_k};$$

- On note $\mathfrak{C}$ le groupe des permutations ;
- Si $I = (i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, d\}^k$ est un mot, on note par V_I le commutateur de Lie définie par,

$$V_I = \big[V_{i_1}, \big[V_{i_2}, \ldots, [V_{i_{k-1}}, V_{i_k}]\ldots\big]\big]$$

  de l'ensemble des indices $\{1, \ldots, k\}$ et si $\sigma \in \mathfrak{C}$, on note pour un mot $I = (i_1, \ldots, i_k)$, σI le mot $(i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(k)})$;
- Si $\sigma \in \mathfrak{C}_k$, on note $e(\sigma)$ le cardinal de l'ensemble, $\{j \in \{1, \ldots, k-1\}, \sigma(j) > \sigma(j+1)\}$;
- Enfin, si $I = (i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, d\}^k$ est un mot, $\Lambda_I(Z)_t = \sum_{\sigma\in\mathfrak{C}_k} \frac{(-1)^{e(\sigma)}}{k^2 C_{e(\sigma)}^{k-1}} \int_{\triangle^k[0,t]} \diamond \mathrm{d}Z^{\sigma^{-1}.I}$.

Proposition 1.1. *(Voir [5], p. 601.) Si $\mathbb{G}$ est un groupe nilpotent, alors :*

$$X_t = \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{I=(i_1,\ldots,i_k)} \Lambda_I(Z)_t V_I\right), \quad t \geqslant 0.$$

Remarque 1.1. Comme le groupe $\mathbb{G}$ est nilpotent, la somme $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{I=(i_1,\ldots,i_k)} \Lambda_I(Z)_t V_I$ est finie.

2. Processus de Lévy globalement auto-similaires sur les groupes de Lie

Dans cette partie on va étudier la propriété d'auto-similarité globale de $(X_t)_{t\geqslant 0}$ dans $\mathbb{G}$ (voir Théorème 2.2 pour la définition).

Lemme 2.1. *(Voir [6].) Si $\Psi : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ est un automorphisme de groupe de Lie tel que les valeurs propres de $\mathrm{d}\Psi_{1_{\mathbb{G}}}$ (la différentielle de Ψ en $1_{\mathbb{G}}$) sont toutes de modules > 1, alors, $\mathbb{G}$ est un groupe de Lie nilpotent et simplement connexe.*

Théorème 2.2. *Il existe une famille d'automorphisme de groupe de Lie $\Delta_t : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$, $t > 0$, tel que,*

1) *L'application $t \to \Delta_t$ est continue et $\lim_{t\to 0} \Delta_t = 1_{\mathbb{G}}$;*
2) *Pour $t_1, t_2 \geqslant 0$, $\Delta_{t_1 t_2} = \Delta_{t_1}\Delta_{t_2}$;*
3) *$(X_{ct})_{t\geqslant 0} \overset{loi}{=} (\Delta_c X_t)_{t\geqslant 0}$;*

si et seulement si le groupe $\mathbb{G}$ est isomorphe à $(\mathbb{R}^d, +)$.

Démonstration. Supposons qu'il existe un isomophisme $\Psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{G}$. Il est évident de voir que l'application $\Delta_r = \Psi(r^Q)$ vérifie les propriétés 1, 2, 3 du théorème. Réciproquement, montrons d'abord que l'existence de la famille $(\Delta_t)_{t\geqslant 0}$ implique que $\mathbb{G}$ est un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe. Soit $\delta_c = \mathrm{d}\Delta_c(1_{\mathbf{G}})$ la différentielle de Δ_c en $1_{\mathbb{G}}$. Δ_c est un automorphisme d'algèbre de Lie $\mathbf{g} \to \mathbf{g}$. L'application $f : t \to \delta_{e^t}$ est une application de $\mathbb{R}$ dans l'espace des applications lineaires de $\mathbf{g}$ dans $\mathbf{g}$ qui est continue. On a de plus la propriété $f(t+s) = f(t)f(s)$. Donc il existe une application lineaire $\Phi : \mathbf{g} \to \mathbf{g}$ telle que $\delta_c = \exp(\Phi \ln c)$, $c > 0$. Si $\lambda \in Sp(\Phi)$ est une valeur propre de Φ, alors $\Re\Phi > 0$ car $\lim_{c\to 0} \Delta_c = 1_{\mathbb{G}}$. Du Lemme 2.1, on déduit que $\mathbb{G}$ est un groupe de Lie nilpotent simplement connexe.

Et de la Proposition 1.1 on déduit

$$X_t = \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{I=(i_1,\ldots,i_k)} \Lambda_I(Z)_t V_I\right), \quad t \geqslant 0.$$

De l'égalité $(X_t)_{t\geqslant 0} \overset{loi}{=} (\Delta_c X_{\frac{t}{c}})_{t\geqslant 0}$ on déduit

$$\left(\exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{I=(i_1,\ldots,i_k)} \Lambda_I(Z)_t V_I\right)\right)_{t\geqslant 0} \overset{loi}{=} \left(\exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{I=(i_1,\ldots,i_k)} \Lambda_I(Z)_{\frac{t}{c}} (\delta_c V)_I\right)\right)_{t\geqslant 0}.$$

Puisque le groupe $\mathbb{G}$ est nilpotent et simplement connexe, l'application exponentielle est une bijection, donc

$$\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{I=(i_1,\ldots,i_k)}\Lambda_I(Z)_t V_I\right)_{t\geqslant 0} =^{loi} \left(\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{I=(i_1,\ldots,i_k)}\Lambda_I(Z)_{\frac{t}{c}}(\delta_c V)_I\right)_{t\geqslant 0}.$$

L'auto-similarité du processus de Lévy implique,

$$\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{I=(i_1,\ldots,i_k)}\Lambda_I(Z)_{\frac{t}{c}}(\delta_c V)_I\right)_{t\geqslant 0} =^{loi} \left(\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{I=(i_1,\ldots,i_k)}\Lambda_I(Z)_t c^{-Q}\delta_c V_I\right)_{t\geqslant 0},$$

donc

$$\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{I=(i_1,\ldots,i_k)}\Lambda_I(Z)_t V_I\right)_{t\geqslant 0} =^{loi} \left(\sum_{k=1}^{+\infty}c^{-kQ}\sum_{I=(i_1,\ldots,i_k)}\Lambda_I(Z)_t V_I\right)_{t\geqslant 0}.$$

Puisque $c^{-Q}\delta_c = c^{-Q}\exp(\Phi \ln c)$ doit être bornée lorsque $c \to \infty$, toutes les valeurs propres de Φ doivent être inférieure à $\inf_{1\leqslant i\leqslant d}\alpha_i$.

Enfin, lorsque $c \to 0$ cela implique

$$\forall k \geqslant 2, \quad \sum_{I=(i_1,\ldots,i_k)}\Lambda_I(Z)_t V_I = 0.$$

D'après le Théorème du support pour les processus de Lévy (voir par exemple [7]) cela implique, $V_I = 0$ pour tout $k \geqslant 2$. Donc, $\mathbb{G}$ est commutatif. □

Remarque 2.1. Un résultat similaire est prouvé dans le cas d'un mouvement Brownien fractionnaire dans [2].

Si on enlève l'hypothèse que les V_i forment une base de $\mathbf{g}$ (on suppose seulement qu'ils sont linéarement indépendants), alors, il existe une classe plus générale de groupes sur lesquels il existe des processus de Lévy globalement auto-similaires : Les groupes de Carnot.

Définition 2.1. Un groupe de Carnot est un groupe de Lie simplement connexe, dont l'algèbre de Lie s'écrit sous la forme,

$$\mathcal{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_N,$$

avec $[\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j] = \mathcal{V}_{i+j}$, et $\mathcal{V}_s = 0$, pour $s > N$.

Théorème 2.3. *Soit $\mathbb{G}$ est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathbf{g}$. Soit, $V_1, \ldots, V_l \in \mathbf{g}$ linéarement indépendants. Soit $(X_t)_{t\geqslant 0}$ la solution de l'équation*

$$\mathrm{d}X_t = \sum_{i=1}^{l} V_i(X_t) \diamond \mathrm{d}Z_t^i, \quad X_0 = 1_{\mathbb{G}}.$$

On suppose qu'il existe une famille d'automorphismes de groupe de Lie $\Delta_t : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$, $t > 0$, tel que,

1) *L'application $t \to \Delta_t$ est continue et $\lim_{t\to 0}\Delta_t = 1_{\mathbb{G}}$;*
2) *Pour $t_1, t_2 \geqslant 0$, $\Delta_{t_1 t_2} = \Delta_{t_1}\Delta_{t_2}$;*
3) $(X_{ct})_{t\geqslant 0} =^{loi} (\Delta_c X_t)_{t\geqslant 0}$.

Alors le sous groupe de Lie $\mathbb{H}$ engendré par $e^{V_1}, \ldots, e^{V_l}$ est un groupe de Carnot.

Démonstration. La démonstration est très proche de celle du Théorème 2.2. Du Lemme 2.1. on déduit que $\mathbb{H}$ est un groupe nilpotent simplement connexe, et que,

$$\forall c > 0, \quad \left(\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{I=(i_1,\ldots,i_k)}\Lambda_I(Z)_t V_I\right)_{t\geqslant 0} =^{loi} \left(\sum_{k=1}^{+\infty}c^{-kQ}\sum_{I=(i_1,\ldots,i_k)}\Lambda_I(Z)_t V_I\right)_{t\geqslant 0}.$$

Pour $k \geqslant 1$, on note par $\mathcal{V}_k$ l'espace vectoriel linéaire engendré par la famille :

$$\{V_I, |I| = k\}.$$

En faisant tendre $c \to +\infty$ et $c \to 0$ on déduit que $c^{-kQ}\delta_c$ est bornée dans $\mathcal{V}_k$. Et, puisque,

$$c^{-kQ}\delta_c = \exp\big((\Phi - kQ\,Id)\ln c\big),$$

on déduit alors que

$$\mathbf{h} = \bigoplus_{k=1}^{+\infty} \mathcal{V}_k$$

où $\mathbf{h}$ est l'algèbre de Lie de $\mathbb{H}$. Donc, $\mathbb{H}$ est un groupe de Carnot. $\square$

Un résultat similaire est prouvé d'une autre manière dans [1]. Pour des exemples de processus de Lévy globalement autosimilaires sur les groupes de Carnot, nous renvoyons à [4]. Pour une étude approfondie des semi-groupes stables sur les groupes de Carnot nous renvoyons à [3].

Références

[1] D. Applebaum, Lévy processes in stochastic differential geometry, in: O. Barndorff-Nielsen, T. Mikosch, S. Resnick (Eds.), Lévy Processes: Theory and Applications, Birkhäuser, 2001, pp. 119–138.
[2] F. Baudoin, L. Coutin, Self-similarity and fractional Brownian motions on Lie groups, Stochastic Process. Appl. 117 (2007) 550–574.
[3] P. Glowacki, Stable semi-groups of measures on the Heisenberg group, Studia Math. LXXIX (1984).
[4] H. Kunita, Stable Lévy Processes on Nilpotent Lie Groups, McGraw-Hill, London, 1993.
[5] H. Kunita, Asymptotic self-similarity and short time asymptotics of stochastic flows, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 4 (1997).
[6] W. Lawton, Infinite convolution products and refinable distributions Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000) 2913–2936.
[7] T. Simon, Support theorem for jump processes, Stochastic Process. Appl. 89 (2000) 1–30.