C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 348 (2010) 815–819

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Statistique

Estimation non paramétrique du mode conditionnel dans le cas spatial

Nonparametric estimation of conditional mode in the spatial case

Ahmedoune Ould Abdi [a], Aliou Diop [a], Sophie Dabo-Niang [b], Sidi Ali Ould Abdi [a]

[a] *Laboratoire LERSTAD, UFR SAT, BP 234, université Gaston-Berger, Saint-Louis, Sénégal*
[b] *Laboratoire EQUIPPE, maison de la recherche, université Lille 3, BP 60149, 59653 Villeneuve d'Ascq cedex, France*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 27 janvier 2010
Accepté après révision le 21 juin 2010

Présenté par Paul Deheuvels

RÉSUMÉ

Soit le processus spatial multidimensionnel $(Z_{\mathbf{i}} = (X_{\mathbf{i}}, Y_{\mathbf{i}}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R},\ \mathbf{i} \in \mathbb{Z}^N)$. Nous étudions l'estimateur à noyau du mode conditionnel de la variable $Y_{\mathbf{i}}$ sachant $X_{\mathbf{i}}$. Nous établissons les consistances en moyenne d'ordre $2r$ $(r \in \mathbb{N}^*)$ et presque complète de l'estimateur, sous des conditions générales.

ABSTRACT

Let $(Z_{\mathbf{i}} = (X_{\mathbf{i}}, Y_{\mathbf{i}}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R},\ \mathbf{i} \in \mathbb{Z}^N)$ be a multivariate spatial process, and consider a kernel estimation of the conditional mode of $Y_{\mathbf{i}}$ given $X_{\mathbf{i}}$. We establish a $2r$ $(r \in \mathbb{N}^*)$ mean and almost complete consistency results of the kernel estimator under some general conditions.

Abridged English version

In nonparametric estimation, a crucial problem consists in analyzing and describing the influence of a vector X of co-variates on some real-valued response variable Y. The most traditional approach is based on the mean regression function $r(x) = E(Y|X = x)$ which clearly carries a relevant information on the dependence of Y on X. However, in most practical cases, mean regression only gives a limited information on the dependence structure under study. The conditional mean regression analysis ignores some essential features of the dependence of Y on X, which can be taken into account by conditional mode analysis (e.g. Collomb et al. [5]). For example, when the conditional density of Y given X is for instance either asymmetric or has several modes, the method based on the estimation of the conditional mode becomes more pertinent than the standard regression function.

Conditional mean regression estimation for spatial real data has been considered in several papers, some key references are: Carbon et al. [3,4], Biau and Cadre [1], Lu and Chen [12,13], Hallin et al. [9,10], Carbon et al. [1], Dabo-Niang and Yao [6]. In this Note, we are interested in nonparametric conditional mode estimation for spatial data.

Let $\mathbb{Z}^N$, $N \geqslant 1$, denote the integer lattice points in the N-dimensional Euclidean space. A point $\boldsymbol{i} = (i_1, \ldots, i_N)$ in $\mathbb{Z}^N$ will be referred to as a **site** and may also include a time component.

An extensive literature has been devoted to nonparametric estimation of the conditional mode of an independent sample or a continuous time process, see for example Salha and Ahmed [15] for some references.

Adresses e-mail : ahmedouneabdi@yahoo.fr (A. Ould Abdi), alioudiop52@yahoo.fr (A. Diop), esseide@yahoo.fr (S.A. Ould Abdi).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2010.06.017

Extending classical results on nonparametric conditional mode estimation for dependent random variables to spatial conditional mode estimation for multivariate data is far from being trivial. This is due to the absence of any canonical ordering in the space, and of obvious definition of tail sigma-fields.

Consider $(Z_{\mathbf{i}} = (X_{\mathbf{i}}, Y_{\mathbf{i}}),\ \mathbf{i} \in \mathbb{Z}^N,\ N \geqslant 1)$ be a $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$-valued measurable strictly stationary spatial process ($d \geqslant 1$), with same distribution as (X, Y) and defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Assume that the process under study $(Z_{\mathbf{i}})$ is observed over a rectangular domain $\mathcal{I}_{\mathbf{n}} = \{\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_N) \in \mathbb{Z}^N,\ 1 \leqslant i_k \leqslant n_k,\ k = 1, \ldots, N\}$, $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_N) \in \mathbb{Z}^N$. We will write $\mathbf{n} \to \infty$, if $\min\{n_k\} \to \infty$ and $|\frac{n_j}{n_k}| < C$ for a constant C such that $0 < C < \infty$, for all j, k such that $1 \leqslant j, k \leqslant N$. In the sequel, all the limits are considered when $\mathbf{n} \to \infty$. For $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_N) \in \mathbb{Z}^N$, we set $\hat{\mathbf{n}} = n_1 \ldots n_N$.

In the remaining of this Note, x is a fixed point in $\mathbb{R}^d$, N_x (resp. $\|x\|$) will denote a neighborhood of x (resp. the Euclidean norm of x) and Γ will be a fixed compact set of $\mathbb{R}$. Assume that a regular version of the conditional probability of Y given X exists and admits a bounded probability density and that the marginal density f_X of X exists. We denote by f^x the conditional density of Y given $X = x$. We are interested in estimating the conditional mode denoted by θ. Saying that, it is implicitly assumed that the compact set Γ is chosen such that the mode θ is uniquely defined. More precisely, we will assume that

$$\exists \zeta > 0, \quad f^x \uparrow \text{ on } (\theta - \zeta, \theta) \quad \text{and} \quad f^x \downarrow \text{ on } (\theta, \theta + \zeta). \tag{1}$$

In the sequel, let $\Gamma = (\theta - \zeta, \theta + \zeta)$. Note that condition (1) ensures that the problem of maximizing f^x over Γ has an unique solution which is exactly θ, that is $f^x(\theta) = \sup_{y \in \Gamma} f^x(y)$.

The conditional density f^x can be estimated by the following estimator (see for example Youndjé [17]):

$$\hat{f}^x(y) = \begin{cases} \dfrac{h_H^{-1} \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{I}_{\mathbf{n}}} K(\frac{x - X_{\mathbf{i}}}{h_K}) H(\frac{y - Y_{\mathbf{i}}}{h_H})}{\sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{I}_{\mathbf{n}}} K(\frac{x - X_{\mathbf{i}}}{h_K})} & \text{if } \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{I}_{\mathbf{n}}} K(\frac{x - X_{\mathbf{i}}}{h_K}) \neq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \tag{2}$$

where K and H are kernel densities, $h_K = h_{K,\mathbf{n}}$ (resp. $h_H = h_{H,\mathbf{n}}$) is a sequence of positive real numbers which converges to 0.

A natural kernel estimate $\hat{\theta}$ of the conditional mode θ is defined as

$$\hat{f}^x(\hat{\theta}) = \sup_{y \in \Gamma} \hat{f}^x(y). \tag{3}$$

Note that the estimate $\hat{\theta}$ is not necessarily unique, and if this is the case, all the remaining of our paper will concern any value $\hat{\theta}$ satisfying (3).

The main results obtained with the assumptions stated in Section 2 are:

Theorem 1. *Under conditions H_0, H_1, H_3, H_4, H_5, (4), (7), (11) and*

(i) (5) *and* H_6 *or*
(ii) (6) *and* H_7, *we have*

$$|\hat{\theta} - \theta| \xrightarrow{a.co} 0,$$

where a.co means almost completely.

Theorem 2. *Under conditions H_0–H_5, (4), (7), (11) and*

(i) (5) *and* H_8 *or*
(ii) (6) *and* H_9, *we have*

$$\|\hat{\theta} - \theta\|_{2r} = O\big(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}\big) + O\left(\left(\frac{1}{\hat{\mathbf{n}} h_K^d h_H^4}\right)^{1/2}\right),$$

where $\|\hat{\theta} - \theta\|_{2r} = (E(\hat{\theta} - \theta)^{2r})^{1/2r}$ and b_1, b_2 are the constants given in assumption H_2.

1. Introduction

En statistique non paramétrique, le mode conditionnel s'avère parfois être un outil plus adapté pour la prévision que la régression. Par exemple, si la densité conditionnelle est bimodale ou dissymétrique, le mode conditionnel prévoit mieux que la régression (voir Collomb et al. [5]).

L'estimation non paramétrique de la fonction classique de régression pour des données spatiales a été considérée dans plusieurs travaux. Des références clés sont : Carbon et al. [3,4], Biau et Cadre [1], Lu et Chen [12,13], Hallin et al. [9,10], Lahiri [11], Carbon et al. [2], Dabo-Niang and Yao [6]. Dans ce papier, on s'intéresse à l'estimation du mode conditionnel pour des données spatiales.

La littérature sur l'estimation non paramétrique du mode conditionnel est très abondante lorsque les données sont indépendantes ou dépendantes de manière temporelle, voir par exemple Salha et Ahmed [15] pour des références. Étendre certains de ces résultats d'estimation du mode conditionnel au cadre spatial est loin d'être trivial. Ceci est dû en partie à l'absence d'un ordre canonique dans l'espace.

2. Résultats

Soient $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs et $N \geqslant 1$ un entier naturel. Un point $\boldsymbol{i} = (i_1, \ldots, i_N)$ dans $\mathbb{Z}^N$ sera appelé **site**. On s'intéresse à un processus spatial $(Z_{\mathbf{i}} = (X_{\mathbf{i}}, Y_{\mathbf{i}}), \mathbf{i} \in \mathbb{Z}^N)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mesurable et strictement stationnaire.

On suppose que la variable $Z_{\mathbf{i}}$ a la même loi que le couple (X, Y) et que le processus $(Z_{\mathbf{i}})$ est observé sur une région rectangulaire $\mathcal{I}_{\mathbf{n}} = \{\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_N) \in \mathbb{Z}^N,\ 1 \leqslant i_k \leqslant n_k,\ k = 1, \ldots, N\}$, $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_N) \in \mathbb{Z}^N$.

On écrit $\mathbf{n} \to \infty$ si $\min\{n_k\} \to \infty$ et $|\frac{n_j}{n_k}| < C$ pour une constante C telle que $0 < C < \infty$ pour tous j, k tels que $1 \leqslant j, k \leqslant N$. Pour $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_N) \in \mathbb{Z}^N$, on pose $\hat{\mathbf{n}} = n_1 \ldots n_N$.

On suppose qu'une version régulière de la probabilité conditionnelle de Y sachant X existe et admet une densité de probabilité bornée. On fixe un point $x \in \mathbb{R}^d$ et on note par f^x la densité de Y sachant $X = x$. On suppose aussi que la densité marginale f_X de X existe, on note par $f_{X,Y}$ la densité jointe de (X, Y).

On s'intéresse à l'estimation du mode conditionnel de la densité f^x à l'aide des observations $(Z_{\mathbf{i}}, \mathbf{i} \in \mathcal{I}_{\mathbf{n}})$, sous une condition de dépendance spatiale mesurée en termes de α-mélange. On considère le coefficient de mélange du champ $(Z_{\mathbf{i}},\ \mathbf{i} \in \mathbb{Z}^N)$, défini par : il existe une fonction $\varphi(t) \downarrow 0$ quand $t \to \infty$, telle que pour tous sous-ensembles E, E' de $\mathbb{Z}^N$ de cardinaux finis,

$$\alpha\big(\mathcal{B}(E), \mathcal{B}(E')\big) = \sup_{B \in \mathcal{B}(E), C \in \mathcal{B}(E')} \big|P(B \cap C) - P(B)P(C)\big| \leqslant \psi\big(\mathrm{Card}(E), \mathrm{Card}(E')\big)\varphi\big(\mathrm{dist}(E, E')\big), \tag{4}$$

où $\mathcal{B}(E)$ (resp. $\mathcal{B}(E')$) est la σ-algèbre engendrée par $(Z_{\mathbf{i}},\ \mathbf{i} \in E)$ (resp. $(Z_{\mathbf{i}},\ \mathbf{i} \in E')$), $\mathrm{Card}(E)$ (resp. $\mathrm{Card}(E')$) le cardinal de E (resp. E'), $\mathrm{dist}(E, E')$ est la distance euclidienne entre E et E' et $\psi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}^+$ est une fonction symétrique, positive et croissante en chaque variable. On suppose aussi que ψ vérifie

$$\psi(n, m) \leqslant C \min(n, m), \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \tag{5}$$

ou

$$\psi(n, m) \leqslant C(n + m + 1)^{\tilde{\beta}}, \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \tag{6}$$

pour un certain $\tilde{\beta} \geqslant 1$ et $C > 0$. On suppose que le processus vérifie la condition suivante de mélange polynomial :

$$\varphi(t) \leqslant C t^{-\mu}, \quad \mu > 0,\ t \in \mathbb{R}_+^*. \tag{7}$$

On note $\|.\|$ (resp. $\|.\|_p$) la norme euclidienne (resp. la norme L_p). Pour une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on note par $g^{(j)}$ la dérivée d'ordre j de g. Soient ε un réel positif arbitrairement petit et $u_{\mathbf{n}} = \prod_{i=1}^N (\log n_i)(\log\log n_i)^{1+\varepsilon}$. Il est clair que $\sum 1/(\hat{\mathbf{n}} u_{\mathbf{n}}) < \infty$ où la sommation porte sur l'ensemble des sites $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_N)$ tels que $n_i \geqslant 2$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant N$. Dans la suite C est une constante positive pouvant varier de ligne en ligne.

Par souci de simplicité, on suppose qu'il existe un compact Γ de $\mathbb{R}$ sur lequel le mode θ de f^x existe et est unique :

$$\exists \zeta > 0, \quad f^x \text{ est croissante sur } (\theta - \zeta, \theta) \quad \text{et} \quad f^x \text{ est décroissante sur } (\theta, \theta + \zeta), \tag{8}$$

$\Gamma = (\theta - \zeta, \theta + \zeta)$.

Cette condition assure l'unicité de la solution θ du problème de maximisation de f^x sur Γ. Le mode de f^x sur Γ est alors θ.

L'estimateur de la densité conditionnelle f^x considéré est le suivant :

$$\hat{f}^x(y) = \begin{cases} \dfrac{h_H^{-1} \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{I}_{\mathbf{n}}} K\big(\frac{x - X_{\mathbf{i}}}{h_K}\big) H\big(\frac{y - Y_{\mathbf{i}}}{h_H}\big)}{\sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{I}_{\mathbf{n}}} K\big(\frac{x - X_{\mathbf{i}}}{h_K}\big)} & \text{si } \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{I}_{\mathbf{n}}} K\big(\frac{x - X_{\mathbf{i}}}{h_K}\big) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{9}$$

où K et H sont des noyaux, h_K et h_H des réels positifs qui dépendent de $\mathbf{n}$ et tendent vers 0.

L'estimateur à noyau du mode conditionnel θ est naturellement défini comme la variable aléatoire $\hat{\theta}$ qui maximise sur Γ l'estimateur à noyau $\hat{f}^x$ de f^x, c'est-à-dire,

$$\hat{f}^x(\hat{\theta}) = \sup_{y \in \Gamma} \hat{f}^x(y). \tag{10}$$

Notons que cet estimateur $\hat{\theta}$ n'est pas nécessairement unique et si c'est le cas, dans tout ce qui suit, $\hat{\theta}$ désigne toute valeur vérifiant (10).

Les hypothèses suivantes H_0–H_3 sont des conditions de régularité sur le modèle, H_4 et H_5 sont des hypothèses classiques sur les noyaux.

H_0 : Les densités $f_{X,Y}$ et f_X sont respectivement continues sur $\mathbb{R}^{d+1}$ et $\mathbb{R}^d$, $f_X(x) > 0$.

H_1 : $f^x(.)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et est telle que $f^{x^{(2)}}(\theta) < 0$.

Si $f^{x^{(2)}}(\theta) = 0$ alors on peut utiliser une condition du genre : $f^x(.)$ est de classe $\mathcal{C}^j$, $f^{x^{(k)}}(\theta) = 0$ pour $1 \leqslant k < j$ et $f^{x^{(j)}}(\theta(x)) < 0$.

H_2 : On suppose qu'il existe un voisinage fixé de x noté N_x et deux constantes positives b_1 et b_2 (non nécessairement uniques) tels que : $\forall (x_1, x_2) \in N_x \times N_x$, $\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\left| f^{x_1^{(1)}}(y_1) - f^{x_2^{(1)}}(y_2) \right| \leqslant C\left(\|x_1 - x_2\|^{b_1} + |y_1 - y_2|^{b_2} \right).$$

H_3 : On suppose que la densité conditionnelle $f^{(X_{\mathbf{i}}, X_{\mathbf{j}})}$ de $(Y_{\mathbf{i}}, Y_{\mathbf{j}})$ sachant $(X_{\mathbf{i}}, X_{\mathbf{j}})$ existe et est uniformément bornée en $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$.

Par simplicité, on suppose la condition suivante sur le noyau K (voir par exemple Devroye [7]).

H_5 : Il existe C_1 et C_2, $0 < C_1 < C_2 < \infty$: $C_1 \mathbb{I}_{[0,1]}(\|t\|) < K(t) < C_2 \mathbb{I}_{[0,1]}(\|t\|)$.

H_5 : H est un noyau de Lipschitz, symétrique, de classe $\mathcal{C}^2$ et on suppose qu'il existe une constante b suffisamment grande telle que $\int (H^{(2)}(t))^2 \,\mathrm{d}t < \infty$ et $\int |t|^b H(t) \,\mathrm{d}t < \infty$. La dérivée $H^{(j)}$ $(j = 1, 2)$ est Lipschitzienne et bornée.

Soient $r \geqslant 1$ un entier donné, $\tilde{\beta}$ et μ les nombres réels donnés respectivement par les conditions (6) et (7).

H_6 : $\hat{\mathbf{n}} h_K^{\mu_1} h_H^{\mu_2} \log \hat{\mathbf{n}}^{\mu_3} u_{\mathbf{n}}^{\mu_4} \to +\infty$ avec $\mu > 5N$.

H_7 : $\hat{\mathbf{n}} h_K^{\mu'_1} h_H^{\mu'_2} \log \hat{\mathbf{n}}^{\mu'_3} u_{\mathbf{n}}^{\mu'_4} \to +\infty$ avec $\mu > N(2\tilde{\beta} + 4)$, où

$$\mu_1 = \frac{d(N+\mu)}{\mu - 5N}, \qquad \mu_2 = \frac{\mu + 3N}{\mu - 5N}, \qquad \mu_3 = \frac{2N - \mu}{\mu - 5N}, \qquad \mu_4 = \frac{-2N}{\mu - 5N},$$
$$\mu'_1 = \frac{d(2N+\mu)}{\mu - N(2\tilde{\beta}+4)}, \qquad \mu'_2 = \frac{\mu + 4N}{\mu - N(2\tilde{\beta}+4)}, \qquad \mu'_3 = \frac{N - \mu}{\mu - N(2\tilde{\beta}+4)}, \qquad \mu'_4 = \frac{-2N}{\mu - N(2\tilde{\beta}+4)}.$$

H_8 : $\hat{\mathbf{n}} h_K^{\mu_5} h_H^{\mu_6} \log \hat{\mathbf{n}}^{\mu_7} u_{\mathbf{n}}^{\mu_8} \to +\infty$, où pour $r = 1$ et $\mu > 5N$:

$$\mu_5 = \frac{d(\mu+N)}{\mu - 5N}, \qquad \mu_6 = \frac{5\mu - N}{\mu - 5N}, \qquad \mu_7 = \frac{2N - \mu}{\mu - 5N}, \qquad \mu_8 = \frac{-2N}{\mu - 5N};$$

et pour $r \geqslant 2$ et $\mu > 2N(r+1)$:

$$\mu_5 = \frac{d(\mu+N)}{\mu - 2N(r+1)}, \qquad \mu_6 = \frac{5\mu - N}{\mu - 2N(r+1)}, \qquad \mu_7 = \frac{2N - \mu}{\mu - 2N(r+1)}, \qquad \mu_8 = \frac{-2N}{\mu - 2N(r+1)}.$$

H_9 : $\hat{\mathbf{n}} h_K^{\mu'_5} h_H^{\mu'_6} \log \hat{\mathbf{n}}^{\mu'_7} u_{\mathbf{n}}^{\mu'_8} \to +\infty$, où pour $r = 1$ et $\mu > N(4 + 2\tilde{\beta})$:

$$\mu'_5 = \frac{d(\mu+2N)}{\mu - N(4+2\tilde{\beta})}, \qquad \mu'_6 = \frac{5\mu + 4N}{\mu - N(4+2\tilde{\beta})}, \qquad \mu'_7 = \frac{N - \mu}{\mu - N(4+2\tilde{\beta})}, \qquad \mu'_8 = \frac{-2N}{\mu - N(4+2\tilde{\beta})};$$

et pour $r \geqslant 2$ et $\mu > N(2r + 2\tilde{\beta} + 1)$:

$$\mu'_5 = \frac{d(\mu+2N)}{\mu - N(2r+2\tilde{\beta}+1)}, \qquad \mu'_6 = \frac{5\mu + 4N}{\mu - N(2r+2\tilde{\beta}+1)},$$
$$\mu'_7 = \frac{N - \mu}{\mu - N(2r+2\tilde{\beta}+1)}, \qquad \mu'_8 = \frac{-2N}{\mu - N(2r+2\tilde{\beta}+1)}.$$

Les hypothèses H_6–H_9 ci-dessous sont similaires à celles de Carbon et al. [4] sur les fenêtres. L'hypothèse H_8 ou H_9 implique une condition classique sur les noyaux pour l'estimation non paramétrique du mode conditionnel, c'est-à-dire $\hat{\mathbf{n}} h_K^d h_H^5 / \log \hat{\mathbf{n}} \to +\infty$. Notons aussi que H_8 (resp. H_9) implique H_6 (resp. H_7).

La condition suivante de dépendance (voir Gao et al. [8]) est utilisée. On suppose que la distribution jointe de probabilité

$$f_{X_{\mathbf{i}_1},\ldots,X_{\mathbf{i}_s}} \text{ de } (X_{\mathbf{i}_1},\ldots,X_{\mathbf{i}_s}) \text{ existe et est borné uniform ément en} \tag{11}$$

$\mathbf{i}_1,\ldots,\mathbf{i}_s$ pour $s=1,\ldots,2r-1$.

Cette condition implique celle suivante utilisée dans Tran [16] : la densité jointe $f_{(X_{\boldsymbol{i}},X_{\boldsymbol{j}})}$ de $(X_{\boldsymbol{i}},X_{\boldsymbol{j}})$ existe et vérifie

$$\left|f_{(X_{\boldsymbol{i}},X_{\boldsymbol{j}})}(u,v)-f_{X_{\boldsymbol{i}}}(u)f_{X_{\boldsymbol{j}}}(v)\right|\leqslant C$$

pour une constante C et tous u, v, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$.

Les théorèmes suivants donnent respectivement deux résultats de convergence presque complète et en moyenne d'ordre $2r$ de l'estimateur du mode conditionnel.

Théorème 1. *Sous les conditions H_0, H_1, H_3, H_4, H_5, (4), (7), (11) et*

(i) (5) *et H_6 ou*
(ii) (6) *et H_7, on a*

$$|\hat{\theta}-\theta|\xrightarrow{p.co}0,$$

où $p.co$ signifie presque complète.

Théorème 2. *Sous les conditions H_0–H_5, (4), (7), (11) et*

(i) (5) *et H_8 ou*
(ii) (6) *et H_9, on a*

$$\|\hat{\theta}-\theta\|_{2r}=O\left(h_K^{b_1}+h_H^{b_2}\right)+O\left(\left(\frac{1}{\hat{\mathbf{n}}h_K^d h_H^4}\right)^{1/2}\right),$$

où $\|\hat{\theta}-\theta\|_{2r}=(E(\hat{\theta}-\theta)^{2r})^{1/2r}$.

Des simulations et une application à des données réelles sont en cours de réalisation pour mettre nos résultats en perspective. Les détails et preuves sont dans [14].

Remerciements

Nous remercions les rapporteurs dont les remarques nous ont permis d'améliorer cette note. Ces résultats ont été obtenus grâce au soutien d'AIRES-Sud, un programme du ministère français des Affaires étrangères et européennes dont la gestion a été confiée à l'Institut de Recherche pour le Développement (IRD-DSF). Ce document a été réalisé en partie avec l'assistance financière du Ministère de la Recherche Scientifique du Sénégal.

Références

[1] G. Biau, B. Cadre, Nonparametric spatial prediction, Stat. Infer. Stoch. Proc. 7 (2004) 327–349.
[2] M. Carbon, C. Francq, L.T. Tran, Kernel regression estimation for random fields, J. Stat. Plann. Infer. 137 (3) (2007) 778–798.
[3] M. Carbon, M. Hallin, L.T. Tran, Kernel density estimation for random fields, Stat. Probab. Lett. 36 (1996) 115–125.
[4] M. Carbon, L.T. Tran, B. Wu, Kernel density estimation for random fields: the L_1 theory, J. Nonparam. Stat. 6 (1997) 157–170.
[5] G. Collomb, W. Härdle, S. Hassani, A note on prediction via conditional mode estimation, J. Stat. Plann. Infer. 15 (1987) 227–236.
[6] S. Dabo-Niang, A.F. Yao, Kernel regression estimation for continuous spatial processes, Math. Methods. Stat. 16 (2007) 298–317.
[7] L. Devroye, On the absolute everywhere convergence of nonparametric regression function estimates, Ann. Stat. 9 (1981) 1310–1319.
[8] J. Gao, Z. Lu, D. Jjøstheim, Moment inequalities for spatial processes, Stat. Probab. Lett. 78 (2008) 687–697.
[9] M. Hallin, Z. Lu, L.T. Tran, Kernel density estimation for spatial processes: the L_1 theory, J. Mult. Anal. 88 (1) (2004) 61–75.
[10] M. Hallin, Z. Lu, L.T. Tran, Local linear spatial regression, Ann. Stat. 32 (6) (2004) 2469–2500.
[11] S.N. Lahiri, Resampling methods for spatial regression models under a class of stochastic designs, Ann. Stat. 34 (4) (2006) 1774–1813.
[12] Z. Lu, X. Chen, Spatial nonparametric regression estimation: non-isotropic case, Acta Math. Appl. Sin. Engl. Ser. 18 (4) (2002) 641–656.
[13] Z. Lu, X. Chen, Spatial kernel regression estimation: weak consistency, Stat. Probab. Lett. 68 (2004) 125–136.
[14] A. Ould Abdi, A. Diop, S. Dabo-Niang, S. Ould Abdi, Consistency of a nonparametric conditional mode estimator for random fields, preprint, 2010.
[15] R. Salha, H.S. Ahmed, On the kernel estimation of the conditional mode, Asian J. Math. Stat. 2 (1) (2009) 1–8.
[16] L.T. Tran, Kernel density estimation on random fields, J. Mult. Anal. 34 (1990) 37–53.
[17] E. Youndjé, Estimation non paramétrique de la densité conditionnelle par la méthode du noyau, Thèse de Doctorat, Université de Rouen, 1993.