C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 348 (2010) 703–707

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Logique/Combinatoire

Inversion dans les tournois

Inversions in tournaments

Houmem Belkhechine [a], Moncef Bouaziz [b], Imed Boudabbous [c], Maurice Pouzet [d,e]

[a] *Faculté des Sciences de Gabès, Gabès, Tunisie*
[b] *Institut des technologies médicales, Tunis, Tunisie*
[c] *Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax, Sfax, Tunisie*
[d] *ICJ, mathématiques, Université Claude-Bernard Lyon 1, 69622 Villeurbanne, France*
[e] *Department of Mathematics and Statistics, The University of Calgary, Calgary, Alberta, Canada*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 27 février 2010
Accepté après révision le 25 juin 2010
Disponible sur Internet le 14 juillet 2010

Présenté par Jean-Yves Girard

Les auteurs dédient ce texte à la mémoire de Roland Fraïssé

RÉSUMÉ

Nous considérons la transformation qui inverse tous les arcs d'une partie X de l'ensemble des sommets d'un tournoi T. L'*indice* de T, noté $i(T)$, est le plus petit nombre de parties dont il faut inverser les arcs pour ramener T à un tournoi acyclique. Il apparaît que les tournois critiques et les tournois (-1)-critiques peuvent être définis au moyen d'inversions, les premiers étant d'indice un ou deux, les seconds d'indice au plus quatre. On peut voir $i(T)$ comme le minimum de la distance de T aux tournois acycliques définis sur le même ensemble de sommets ; la distance entre deux tournois T et T' peut être également interprétée comme la *dimension booléenne* d'un graphe, celui-ci étant la somme booléenne de T et T'. Sur n sommets, la distance maximale vaut $n-1$ tandis que $i(n)$, le maximum des indices des tournois à n sommets, satisfait les inégalités $\frac{n-1}{2} - \log_2 n \leqslant i(n) \leqslant n-3$ pour $n \geqslant 4$. Soit $\mathcal{I}_m^{<\omega}$ (resp. $\mathcal{I}_m^{\leqslant\omega}$), la classe des tournois finis (resp. au plus dénombrables) T tels que $i(T) \leqslant m$. La classe $\mathcal{I}_m^{<\omega}$ est déterminée par un nombre fini d'obstructions ; nous donnons une description morphologique des éléments de $\mathcal{I}_1^{<\omega}$ et décrivons ses obstructions. Nous décrivons aussi un tournoi universel de la classe $\mathcal{I}_m^{\leqslant\omega}$.

ABSTRACT

We consider the transformation reversing all arcs of a subset X of the vertex set of a tournament T. The *index* of T, denoted by $i(T)$, is the smallest number of subsets that must be reversed to make T acyclic. It turns out that critical tournaments and (-1)-critical tournaments can be defined in terms of inversions (at most two for the former, at most four for the latter). We interpret $i(T)$ as the minimum distance of T to the transitive tournaments on the same vertex set, and we interpret the distance between two tournaments T and T' as the *Boolean dimension* of a graph, namely the Boolean sum of T and T'. On n vertices, the maximum distance is at most $n-1$, whereas $i(n)$, the maximum of $i(T)$ over the tournaments on n vertices, satisfies $\frac{n-1}{2} - \log_2 n \leqslant i(n) \leqslant n-3$, for $n \geqslant 4$. Let $\mathcal{I}_m^{<\omega}$ (resp. $\mathcal{I}_m^{\leqslant\omega}$) be the class of finite (resp. at most countable) tournaments T such that $i(T) \leqslant m$. The class $\mathcal{I}_m^{<\omega}$ is determined by finitely many obstructions. We

Adresses e-mail : houmem@gmail.com (H. Belkhechine), moncef.bouaziz@laposte.net (M. Bouaziz), imed.boudabbous@fsegs.rnu.tn (I. Boudabbous), maurice.pouzet@univ-lyon1.fr (M. Pouzet).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2010.06.022

give a morphological description of the members of $\mathcal{I}_1^{<\omega}$ and a description of the critical obstructions. We give an explicit description of a universal tournament of the class $\mathcal{I}_m^{\leqslant\omega}$.

Abridged English version

Let T be a tournament. Let $V(T)$ be its vertex set and $A(T)$ be its arc set. An *inversion* of an arc $a := (x, y) \in A(T)$ consists to replace the arc a by $a^\star := (y, x)$ in $A(T)$. For a subset $X \subseteq V(T)$, let $Inv(T, X)$ be the tournament obtained from T after reversing all arcs $(x, y) \in A(T) \cap (X \times X)$. For example, $Inv(T, V(T))$ is $T^\star$, the *dual* of T. For a finite sequence $(X_i)_{i<m}$ of subsets of $V(T)$, let $Inv(T, (X_i)_{i<m})$ be the tournament obtained from T by reversing successively all the arcs in each of the subsets X_i, $i < m$, that is the tournament equal to T if $m = 0$ and to $Inv(Inv(T, (X_i)_{i<m-1}), X_{m-1})$ if $m \geqslant 1$. The *inversion index* of T, denoted by $i(T)$, is the least integer m such that there is a sequence $(X_i)_{i<m}$ of subsets of $V(T)$ for which $Inv(T, (X_i)_{i<m})$ is acyclic. This is a variant of the *Slater index* of T (the minimum number of arcs which should be reversed to make it acyclic, [11]). Our motivation originates in the study of critical tournaments. Indeed, the critical tournaments characterized in [10] can be easily defined from acyclic tournaments by means of one or two inversions whereas the (-1)-critical tournaments, characterized in [2], can be defined by means of two, three or four inversions [1]; an other interest comes from the point of view of logic. We present some general properties of the inversion index and of the class $\mathcal{I}_m$ of tournaments T having inversion index at most m, with a particular emphasis on the subclasses $\mathcal{I}_m^{<\omega}$ and $\mathcal{I}_m^{\leqslant\omega}$ made respectively of finite and at most countable members of $\mathcal{I}_m$. Part of these results are included in [1]. We use tools from the theory of relations in the vein of Fraïssé, referring to [6] for the notions of relational structure, embeddability, classes closed under embeddability, that we call here *hereditary classes*, bounds, age and free operator. We leave open the road for algorithmic considerations.

Let $\mathcal{T}_V$ be the set of tournaments T on a fixed set V of vertices. Pairs (T, T') of distinct members of $\mathcal{T}_V$ such that $T' = Inv(T, X)$ for some $X \subseteq V$ form the edges of an irreflexive and symmetric graph on $\mathcal{T}_V$. With respect to the graphic distance associated with this graph, the inversion index of $T \in \mathcal{T}_V$ is then the minimum distance of T to the acyclic members of $\mathcal{T}_V$. We define the *Boolean dimension* of a graph G (irreflexive and symmetric) as the least integer m such that G can be represented by the non orthogonality relation on the vector space $\mathbb{F}_2^m$ equipped with the ordinary scalar product.

Theorem 0.1. *The graphic distance $d(T, T')$ between two members T, T' of $\mathcal{T}_V$ is the Boolean dimension of the Boolean sum $T \dotplus T'$. If V has n elements, this distance is at most $n - 1$. It is attained if $T' = T \dotplus P$ where P is any path on V.*

For $n \in \mathbb{N}$, let $i(n)$ be the maximum of the inversion index of tournaments on n vertices.

Theorem 0.2. $\frac{n-1}{2} - \log_2 n \leqslant i(n) \leqslant n - 3$ *for all integer* $n \geqslant 4$.

If $T \in \mathcal{T}_V$ and $(X_i)_{i<m}$ is a sequence of subsets of V, we consider the pair $(T, (X_i)_{i<m})$ as a relational structure made of the set V, the binary relation $A(T)$ and the unary relations X_i for $i < m$. Let $\mathcal{O}_m$, resp. $\mathcal{O}_m^{\leqslant\omega}$, resp. $\mathcal{O}_m^{<\omega}$, be the class of these $(T, (X_i)_{i<m})$ where T is acyclic and its size is arbitrary, resp. at most countable, resp. finite. The transformation of each $(T, (X_i)_{i<m})$ into $Inv(T, (X_i)_{i<m})$ defines a free operator from $\mathcal{O}_m$ onto $\mathcal{I}_m$. With this formalism follows readily that *a tournament T belongs to $\mathcal{I}_m$ if and only if every finite subtournament of T belongs to $\mathcal{I}_m$*. The class $\mathcal{O}_m^{<\omega}$ is a Fraïssé class (it is hereditary and has the amalgamation property) hence $\mathcal{O}_m^{\leqslant\omega}$ contains a homogeneous structure with age $\mathcal{O}_m^{<\omega}$. This structure is unique up to isomorphisms. We denote it by $C(m)$. Let $W(m) := Inv(C(m))$. This tournament is universal for $\mathcal{I}_m^{\leqslant\omega}$, that is belongs to $\mathcal{I}_m^{\leqslant\omega}$ and embeds all members of $\mathcal{I}_m^{\leqslant\omega}$. For $m = 0$, $W(0) := \underline{\mathbb{Q}}$. We give an explicit description of $W(m)$ for all others values of $m \geqslant 1$. If B is a class of finite tournaments, we denote by $Forb_{\mathcal{T}}(B)$ the class of finite tournaments in which no member of B is embeddable. If $\mathcal{C}$ is a hereditary class of finite tournaments, a *bound* of $\mathcal{C}$ in the class $\mathcal{T}$ of tournaments is a finite tournament T not belonging to $\mathcal{C}$ such that for all $x \in V(T)$, the tournament $T - x$ belongs to $\mathcal{C}$. We denote by $B_{\mathcal{T}}(\mathcal{C})$ the collection of these bounds. As it is well known for arbitrary hereditary classes of finite relational structures, a hereditary class of finite tournaments is determined by its bounds; in fact $\mathcal{C} = Forb_{\mathcal{T}}(B_{\mathcal{T}}(\mathcal{C}))$. The test given in [9] and Higman theorem on words yield:

Theorem 0.3. *The class $\mathcal{I}_m^{<\omega}$ has only finitely many bounds, these bounds being considered up to isomorphisms.*

For example, the 3-cycle C_3 is, up to isomorphisms, the unique bound of the class $\mathcal{I}_0^{<\omega}$. Let $n \in \mathbb{N}$. We set $\mathbb{N}_{<n} := \{i \in \mathbb{N}\colon i < n\}$. We denote by $\underline{n}$ the tournament whose vertex set is $\mathbb{N}_{<n}$ and whose arcs are pairs (i, j) such that $0 \leqslant i < j < n$.

Theorem 0.4. *The bounds of the class $\mathcal{I}_1^{<\omega}$ are, up to isomorphisms, $B_6 := Inv(\underline{6}, (\{0, 3, 4\}, \{1, 4, 5\}))$, $C_3.\underline{2} := Inv(\underline{6}, (\{0, 2\}, \{3, 5\}))$, $D_5 := Inv(\underline{5}, (\{1, 3\}, \{0, 4\}))$, $T_5 := Inv(\underline{5}, (\{0, 2, 4\}, \{1, 3\}))$ and $V_5 := Inv(\underline{5}, (\{0, 4\}, \{2, 4\}))$. In particular, $\mathcal{I}_1^{<\omega} = Forb_{\mathcal{T}}(\{B_6, C_3.\underline{2}, D_5, T_5, V_5\})$.*

Let $(T_i)_{i\in V}$ be a family of tournaments whose vertex sets $V(T_i)$ are pairwise disjoint. If T is a tournament with vertex set V, we denote by $\sum_{i\in T} T_i$ the *lexicographical sum of the T_i's indexed by T*. When $V = \mathbb{N}_{<n}$, where $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\sum_{i\in T} T_i$ is also denoted by $T(T_0, \ldots, T_{n-1})$. It turns out that $i(\sum_{j\in T} T_j) = i(T)$ provided that the T_j's are acyclic and non empty. A tournament T is *acyclically indecomposable* if no acyclic autonomous subset of T has more than one element [5]. Since every tournament is a lexicographical sum of acyclic tournaments indexed by some acyclically indecomposable tournament T [4], *the members of $\mathcal{I}_m$ are the lexicographical sums of acyclic tournaments indexed by acyclically indecomposable members of $\mathcal{I}_m$*. Alternatively, *the bounds of $\mathcal{I}_m^{<\omega}$ in $\mathcal{T}$ are acyclically indecomposable.*

Theorem 0.5. *A tournament T with $|V(T)| \geqslant 2$ is an acyclically indecomposable member of $\mathcal{I}_1^{<\omega}$ if and only if T is isomorphic to U_{2n+1}, $\underline{2}(\underline{1}, U_{2n+1})$, $\underline{2}(U_{2n+1}, \underline{1})$ or $\underline{3}(\underline{1}, U_{2n+1}, \underline{1})$, where $n \geqslant 1$ and $U_{2n+1} := Inv(\underline{2n+1}, 2\mathbb{N}_{<n+1})$.*

1. Terminologie

Dans cette note, nous considérons essentiellement des tournois et des graphes. Nous considérons ceux-ci comme des digraphes sans boucles. Nous rappelons quelques notions concernant les digraphes et renvoyons à [3] et [6] pour la terminologie non définie. Nous rappelons qu'un *digraphe* ou *graphe dirigé* est un couple D formé d'un ensemble V, dont les éléments sont les *sommets* de D, qu'on note $V(D)$, et d'une partie, notée $A(D)$, du produit $V \times V$ dont les éléments sont les *arcs* de D. Le *dual* de D, noté $D^\star$, est le digraphe ayant mêmes sommets et pour arcs les couples (x, y) tels que $(y, x) \in A(D)$. Si X est une partie de $V(D)$ alors $D_{\restriction X} := (X, A(D) \cap (X \times X))$ est le *digraphe induit par D sur X*. Si $x \in V(D)$ nous notons $D - x$ le digraphe induit sur $V(D) \setminus \{x\}$. Un digraphe D *s'abrite* (ou se plonge) dans un digraphe D' lorsque D est isomorphe au digraphe induit par D' sur une de ses parties. Ainsi un tournoi *acyclique* ou *transitif* est un tournoi qui n'abrite pas le 3-cycle $C_3 := (\{0, 1, 2\}, \{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\})$. Nous désignons par $\mathcal{D}_V$ l'ensemble des digraphes ayant V comme ensemble de sommets. Soit $D \in \mathcal{D}_V$. Pour $x, y \in V$ nous posons $D(x, y) = 1$ si $(x, y) \in A(T)$ et sinon $D(x, y) = 0$. Une partie X de V est un *intervalle* de D lorsque $D(x, y) = D(x', y)$ et $D(y, x) = D(y, x')$ pour tout $y \in V \setminus X$ et $x, x' \in X$. Par exemple, $\emptyset$, V, et $\{x\}$ où $x \in V$ sont des intervalles de D dits *triviaux*. Le digraphe D est *indécomposable* si tous ses intervalles sont triviaux et *décomposable* dans le cas contraire. Si $(D_i)_{i\in V}$ est une famille de digraphes dont les ensembles de sommets $V_i := V(D_i)$ sont deux à deux disjoints et si D est un digraphe ayant V comme ensemble de sommets, la *somme lexicographique des D_i indexée par D* est le digraphe noté $\sum_{i\in D} D_i$ dont les sommets sont les éléments de $\bigcup_{i\in V} V_i$ et les arcs les couples (x, y) tels que ou bien (x, y) est un arc de l'un des D_i, ou bien $x \in V_i$, $y \in V_j$, avec $i \neq j \in V$, et (i, j) est un arc de D. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathbb{N}_{<n} := \{i \in \mathbb{N}\colon\ i < n\}$, $2\mathbb{N}_{<n} := \{2i\colon\ i \in \mathbb{N}_{<n}\}$, $2\mathbb{N}_{<n} + 1 := \{2i + 1\colon\ i \in \mathbb{N}_{<n}\}$, et désignons par $\underline{n}$ le tournoi ayant $\mathbb{N}_{<n}$ comme ensemble de sommets et pour arcs les couples (i, j) tels que $0 \leqslant i < j < n$. Lorsque $V = \mathbb{N}_{<n}$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, la somme $\sum_{i\in D} D_i$ est aussi notée $D(D_0, \ldots, D_{n-1})$ et $\underline{n}(D_0, \ldots, D_{n-1})$ lorsque $D = \underline{n}$.

2. Inversion et indice d'inversion

Soit T un tournoi. Une inversion d'un arc $a := (x, y) \in A(T)$ dans T consiste à remplacer l'arc a par $a^\star := (y, x)$. Pour $X \subseteq V(T)$, nous notons $Inv(T, X)$ le tournoi obtenu en inversant tous les arcs $a \in A(T) \cap (X \times X)$. Par exemple, lorsque $X = V(T)$, $Inv(T, X) = T^\star$. Si $(X_i)_{i<m}$ est une suite finie de parties de $V(T)$, nous notons $Inv(T, (X_i)_{i<m})$ le tournoi obtenu à partir de T en inversant successivement tous les arcs ayant leurs sommets dans X_i, ceci pour $i < m$. Autrement dit $Inv(T, (X_i)_{i<m}) = T$ si $m = 0$ et $Inv(Inv(T, (X_i)_{i<m-1}), X_{m-1})$ si $m \geqslant 1$. De façon équivalente, un arc $(x, y) \in A(T)$ est inversé si et seulement si le nombre d'indices i tels que $\{x, y\} \subseteq X_i$ est impair. Cette notion d'inversion donne lieu à une présentation simple des tournois critiques et des tournois (-1)-critiques. Rappelons qu'un sommet x d'un tournoi non vide, fini et indécomposable T est dit *critique* si le tournoi $T - x$ est décomposable et que T est dit *critique*, resp. (-1)-*critique*, si tous ses sommets sont critiques, resp. si un et un seul sommet de T est non critique. Les tournois critiques ont été introduits et caractérisés en [10], les (-1)-critiques en [2]. Avec la notion d'inversion, ils peuvent être décrits comme suit [1].

Théorème 2.1. *À des isomorphismes près, les tournois critiques sont les tournois*

$$\begin{aligned}
U_{2n+1} &:= Inv(\underline{2n+1}, 2\mathbb{N}_{<n+1}),\\
T_{2n+1} &:= Inv\big(\underline{2n+1}, (2\mathbb{N}_{<n+1}, 2\mathbb{N}_{<n} + 1)\big) \quad \textit{et}\\
V_{2n+1} &:= Inv\big(\underline{2n+1}, (2\mathbb{N}_{<n+1}, 2\mathbb{N}_{<n})\big),
\end{aligned}$$

où $n \geqslant 2$.

Théorème 2.2. *À des isomorphismes près, les tournois (-1)-critiques sont les tournois*

$$\begin{aligned}
&E^{2k+1}_{2n+1} := Inv\big(\underline{2n+1}, (2\mathbb{N}_{<n+1}, 2\mathbb{N}_{<k+1}, 2\mathbb{N}_{<n+1} \setminus 2\mathbb{N}_{<k+1})\big),\\
&F^{2k+1}_{2n+1} := Inv\big(\underline{2n+1}, (2\mathbb{N}_{<n+1}, 2\mathbb{N}_{<n+1} \setminus 2\mathbb{N}_{<k+1})\big),\\
&G^{2k+1}_{2n+1} := Inv\big(\underline{2n+1}, (2\mathbb{N}_{<n+1}, 2\mathbb{N}_{<n}, 2\mathbb{N}_{<k+1})\big),
\end{aligned}$$

$$H^{2k+1}_{2n+1} := Inv\big(\underline{2n+1}, (2\mathbb{N}_{<k+1}, 2\mathbb{N}_{<k}, 2\mathbb{N}_{<n+1} \setminus 2\mathbb{N}_{<k}, 2\mathbb{N}_{<n} \setminus 2\mathbb{N}_{<k})\big),$$
$$\big(F^{2k+1}_{2n+1}\big)^\star \quad \text{et} \quad \big(G^{2k+1}_{2n+1}\big)^\star,$$

où $n \geqslant 3$ *et* $k \in \{1, \ldots, n-2\}$.

Nous définissons l'*indice d'inversion* d'un tournoi T, noté $i(T)$, comme le plus petit entier m, s'il existe, pour lequel $Inv(T, (X_i)_{i<m})$ est un tournoi acyclique, sinon $i(T)$ est infini. Nous présentons quelques résultats simples concernant cette notion.

3. Dimension booléenne des graphes, distance et indice d'inversion

Soient $D, D' \in \mathcal{D}_V$; la *somme booléenne de* D *et* D' est le digraphe noté $D \dot{+} D' \in \mathcal{D}_V$ dont l'ensemble des arcs est la différence symétrique $A(D) \Delta A(D')$; autrement dit $(D \dot{+} D')(x, y) = D(x, y) + D'(x, y)$ où la somme est prise modulo 2. Ceci permet de voir $\mathcal{D}_V$ comme espace vectoriel sur le corps $\mathbb{F}_2$. Le sous-ensemble $\mathcal{G}_V$ formé des graphes (sans boucles et symétriques) est un sous-espace de $\mathcal{D}_V$ et le sous-ensemble $\mathcal{T}_V$ des tournois est un translaté de $\mathcal{G}_V$. Soit $G \in \mathcal{G}_V$. Si F est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{F}_2$ et φ une forme bilinéaire et symétrique sur F, une *représentation* de G dans (F, φ) est une application f de V dans F telle que $G(x, y) = \varphi(f(x), f(y))$ pour tous $x, y \in V$ tels que $x \neq y$. On observera que si f est une représentation alors pour tout $v \in F$, $f^{-1}(v)$ est un intervalle de G ; s'il a au moins deux éléments, c'est un stable ou une clique de G suivant que v est isotrope ou non. Noter que G a une représentation dans l'espace de dimension 0, resp. 1, si et seulement si G est un stable, resp. est la somme directe d'une clique et d'un stable. La notion de représentation donne lieu à trois notions de dimension (binaire, isotropique ou booléenne) suivant la nature de φ. La *dimension booléenne* de G est le plus petit entier m tel que G admette une représentation dans (F, φ), où $F = (\mathbb{F}_2)^m$ et $\varphi(u, v) = \sum_{i<m} u_i v_i$ modulo 2.

Proposition 3.1. *La dimension booléenne d'un graphe* G *est le plus petit nombre* m $(m \in \mathbb{N})$ *de parties* X_i, $i < m$, *de* $V(G)$ *pour lesquelles une paire* $e := \{x, y\}$ *d'éléments distincts de* $V(G)$ *est une arête de* G *si et seulement si le nombre de parties* X_i *contenant la paire* e *est impair. Si* G *a* n *sommets, sa dimension booléenne est au plus* $n-1$. *Cette valeur maximum est atteinte par n'importe quel chemin.*

Les couples (T, T') d'éléments distincts de $\mathcal{T}_V$ tels que $T' = Inv(T, X)$ pour une partie $X \subseteq V$ forment les arcs d'un graphe sans boucle et symétrique sur $\mathcal{T}_V$.

Théorème 3.2. *La distance graphique* $d(T, T')$ *entre deux tournois* $T, T' \in \mathcal{T}_V$ *est la dimension booléenne de la somme booléenne* $T \dot{+} T'$. *Si* V *a* n *éléments, cette distance est au plus* $n-1$. *Elle est atteinte si* $T' = T \dot{+} P$ *où* P *est n'importe quel chemin. L'indice d'inversion de* $T \in \mathcal{T}_V$ *est le minimum de la distance de* T *aux tournois acycliques appartenant à* $\mathcal{T}_V$.

Lemme 3.3. $i(\sum_{j \in T} T_j) = i(T)$ *pour toute famille de tournois acycliques non vides indexée par un tournoi.*

Pour $n \in \mathbb{N}$, nous désignons par $i(n)$ l'indice d'inversion maximum des tournois à n sommets. Il satisfait l'inégalité $i(n) \leqslant i(n-1) + 1$. Pour $n \geqslant 4$, on obtient $i(n) \leqslant n-3$. Pour $N \in \mathbb{N}$, $|\{T \in \mathcal{T}_{\mathbb{N}_{<n}} \colon\ i(T) < N\}| \leqslant n! 2^{n(N-1)}$, donc pour $m \in \mathbb{N}$ tel que $2^{\frac{m(m-1)}{2}} > m! 2^{m(N-1)}$, il existe un tournoi T d'ordre m tel que $i(T) \geqslant N$. Ainsi :

Théorème 3.4. *Pour tout entier* $n \geqslant 4$, $\frac{n-1}{2} - \log_2 n \leqslant i(n) \leqslant n-3$.

4. Classes de tournois d'indice borné

Soit $\mathcal{T}$ la classe des tournois. Pour $m \in \mathbb{N}$, nous notons $\mathcal{I}_m$ la classe des tournois d'indice au plus m et $\mathcal{I}_m^{<\omega}$, resp. $\mathcal{I}_m^{\leqslant\omega}$, la sous-classe de ceux qui sont finis, resp. au plus dénombrables. Nous étudions ces classes au moyen de concepts de la théorie des relations. Nous nous référons à [6] pour les notions concernant les structures relationnelles, e.g. abritement, classes closes pour l'abritement, que nous appelons ici *classes héréditaires*, bornes, âge, interprétabilité libre et opérateur libre. Si T est un tournoi et $(X_i)_{i<m}$ une suite de parties de $V(T)$, nous considérons le couple $(T, (X_i)_{i<m})$ comme une structure relationnelle faite de l'ensemble $V(T)$, de la relation binaire $A(T)$ et des relations unaires X_i, $i < m$. Soit $\mathcal{O}_m$, resp. $\mathcal{O}_m^{\leqslant\omega}$, resp. $\mathcal{O}_m^{<\omega}$, la classe des structures $(T, (X_i)_{i<m})$ dans lesquelles T est acyclique et le cardinal de $V(T)$ est arbitraire, resp. au plus dénombrable, resp. finie. Soit $\mathcal{F}_m$ la classe des tournois librement interprétables par un élément de $\mathcal{O}_m$. Cette classe contient $\mathcal{I}_m$; en fait la transformation de chaque $(T, (X_i)_{i<m}) \in \mathcal{O}_m$ en $Inv(T, (X_i)_{i<m})$ est un opérateur libre qui transforme $\mathcal{O}_m$ en $\mathcal{I}_m$. Par compacité, *un tournoi* T *appartient à* $\mathcal{I}_m$ *si et seulement si il en va de même de tout sous-tournoi fini de* T.

Une classe $\mathcal{C}$ de tournois est *héréditaire* si tout tournoi qui s'abrite dans un tournoi de $\mathcal{C}$ est encore dans $\mathcal{C}$. Si B est une classe de tournois finis, nous désignons par $Forb_{\mathcal{T}}(B)$ la classe des tournois finis n'abritant aucun élément de B. C'est une classe héréditaire ; en fait, toute classe héréditaire de tournois finis peut être obtenue de cette façon. Si $\mathcal{C}$ est une telle classe, une *borne* de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{T}$ est tout tournoi fini T minimal pour l'abritement à ne pas être dans $\mathcal{C}$. Autrement dit, $T \notin \mathcal{C}$ et $T - x \in \mathcal{C}$ pour tout $x \in V(T)$. Ainsi, si $B_{\mathcal{T}}(\mathcal{C})$ est la classe des bornes de $\mathcal{C}$ alors $\mathcal{C} = \mathit{Forb}_{\mathcal{T}}(B_{\mathcal{T}}(\mathcal{C}))$. Si $\mathcal{C}$ est une classe héréditaire de tournois finis incluse dans $\mathcal{F}_m$ alors, d'après le test obtenu en [9] et le théorème de Higman sur les mots, ses bornes, comptées à des isomorphismes près, sont en nombre fini. En particulier :

Théorème 4.1. *Les bornes de la classe $\mathcal{I}_m^{<\omega}$, comptées à des isomorphismes près, sont en nombre fini.*

Le 3-cycle C_3 est, à des isomorphismes près, l'unique borne de $\mathcal{I}_0^{<\omega}$ dans $\mathcal{T}$. Soient $D_5 := (\underline{5}, (\{1,3\}, \{0,4\}))$ et $C_3.\underline{2} := (\underline{6}, (\{0,2\}, \{3,5\}))$. Soit P_7 le tournoi de Paley défini sur $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ par $A(P_7) := \{(i,j)\colon\ j - i \in \{1,2,4\}\}$ et soit $B_6 := P_7 - 6$. Observons que B_6 est isomorphe à $\mathit{Inv}(\underline{6}, (\{0,3,4\}, \{1,4,5\}))$. Le théorème suivant découle du théorème de décomposition de Gallai [7] pour les tournois et d'un résultat de Latka [8] caractérisant les tournois finis, indécomposables et n'abritant pas V_5.

Théorème 4.2. *À des isomorphismes près, les bornes de la classe $\mathcal{I}_1^{<\omega}$ sont les tournois B_6, $C_3.\underline{2}$, D_5 et les tournois critiques T_5 et V_5. En particulier, $\mathcal{I}_1^{<\omega} = \mathit{Forb}_{\mathcal{T}}(\{B_6, C_3.\underline{2}, D_5, T_5, V_5\})$.*

Un tournoi est *acycliquement indécomposable* s'il n'a pas d'intervalle acyclique ayant plus d'un élément [5]. Tout tournoi est une somme lexicographique de tournois acycliques indexée par un tournoi acycliquement indécomposable [4]. Donc, en vertu du Lemme 3.3, *les éléments de $\mathcal{I}_m$ sont les sommes lexicographiques de tournois acycliques indexées par des tournois acycliquement indécomposables appartenant à $\mathcal{I}_m$*. De façon équivalente, *les bornes de $\mathcal{I}_m^{<\omega}$ dans $\mathcal{T}$ sont acycliquement indécomposables.*

Théorème 4.3. *Un tournoi T ayant au moins deux sommets est un élément acycliquement indécomposable de $\mathcal{I}_1^{<\omega}$ si et seulement si T est isomorphe à U_{2n+1}, $\underline{2}(\underline{1}, U_{2n+1})$, $\underline{2}(U_{2n+1}, \underline{1})$ ou $\underline{3}(\underline{1}, U_{2n+1}, \underline{1})$, où $n \geqslant 1$ et $U_{2n+1} := \mathit{Inv}(\underline{2n+1}, 2\mathbb{N}_{<n+1})$.*

La classe $\mathcal{O}_m^{<\omega}$ est une classe de Fraïssé (c'est-à-dire est héréditaire et a la propriété d'amalgamation) donc $\mathcal{O}_m^{\leqslant\omega}$ contient une structure dénombrable homogène et d'âge $\mathcal{O}_m^{<\omega}$. Cette structure étant unique à l'isomorphie près, notons la $C(m)$. Soit $W(m) := \mathit{Inv}(C(m))$. Le tournoi $W(m)$ est un tournoi dénombrable d'indice m qui abrite tous les tournois de la classe $\mathcal{I}_m^{\leqslant\omega}$. Si $m = 0$, $W(0)$ est $\underline{\mathbb{Q}}$, la chaîne des nombres rationnels. Si $m \geqslant 1$, considérons m nombres réels $\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1}$ tels que $1, \alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1}$ soient *rationnellement indépendants*, c'est-à-dire tels que pour tous nombres rationnels $\beta, \beta_0, \ldots, \beta_{m-1}$, si $\beta = \sum_{i<m} \beta_i \alpha_i$, alors pour tout $i < m$, $\beta = \beta_i = 0$. Soit $f \in 2^{\mathbb{N}_{<m}}$ (l'ensemble des applications de $\mathbb{N}_{<m}$ dans $\{0,1\}$). Posons $\alpha(f) := \sum_{i<m} f(i)\alpha_i$, $\mathbb{Q}_f := \mathbb{Q} + \alpha(f)$, $\mathbb{Q}(m) := \bigcup_{f \in 2^{\mathbb{N}_{<m}}} \mathbb{Q}_f$, où pour $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} + a := \{r + a\colon\ r \in \mathbb{Q}\}$ et soit $\underline{\mathbb{Q}}(m)$ le tournoi acyclique induit sur $\mathbb{Q}(m)$ par l'ordre naturel sur les réels. Pour tout $i < m$, posons $X_i := \bigcup_{\{f \in 2^{\mathbb{N}_{<m}}\colon\ f(i)=1\}} \mathbb{Q}_f$. Alors $C(m) = (\underline{\mathbb{Q}}(m), (X_i)_{i<m})$.

Remerciements

Les auteurs remercient A. Bondy et S. Thomassé pour leur soutien et leurs suggestions. Ils remercient l'arbitre pour son examen très fouillé, la correction des inexactitudes, ses commentaires et suggestions.

Références

[1] H. Belkhechine, Indécomposabilité des graphes et des tournois, thèse de doctorat, Université Claude-Bernard et Université de Sfax, 15 juillet 2009.
[2] H. Belkhechine, I. Boudabbous, J. Dammak, Morphologie des tournois (−1)-critiques, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I 345 (2007) 663–666.
[3] J.A. Bondy, U.S.R. Murty, Graph Theory, Graduate Texts in Mathematics, vol. 244, Springer, 2008, 651 pp.
[4] Y. Boudabbous, M. Pouzet, The morphology of infinite tournaments; applications to the growth of their profile, Europ. J. Combin. 31 (2010) 461–481.
[5] J.-F. Culus, B. Jouve, Convex circuit-free coloration of an oriented graph, Europ. J. Combin. 30 (2009) 43–52.
[6] R. Fraïssé, Theory of Relations, revised edition, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 145, Elsevier, 2000.
[7] T. Gallai, Transitiv orientierbare Graphen, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 18 (1967) 25–66.
[8] B.J. Latka, Structure theorem for tournaments omitting N_5, J. Graph Theory 42 (2003) 165–192.
[9] M. Pouzet, Un bel ordre d'abritement et ses rapports avec les bornes d'une multirelation, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 274 (1972) A1677–A1680.
[10] J.H. Schmerl, W.T. Trotter, Critically indecomposable partially ordered sets, graphs, tournaments and other binary relational structures, Discrete Math. 113 (1993) 191–205.
[11] P. Slater, Inconsistencies in a schedule of paired comparaison, Biometrika 48 (1961) 303–312.