C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 348 (2010) 47–51

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Partial Differential Equations

A remark on the stabilization of the 1-d wave equation

Une remarque sur la stabilisation de l'équation des ondes 1-d

Serge Nicaise [a], Julie Valein [b]

[a] *Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, LAMAV, FR CNRS 2956, Institut des Sciences et Techniques de Valenciennes, 59313 Valenciennes cedex 9, France*
[b] *Institut Elie Cartan Nancy (IECN), Nancy-université & INRIA (Project-Team CORIDA), 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy cedex, France*

ARTICLE INFO

Article history:
Received 23 June 2009
Accepted after revision 25 November 2009
Available online 24 December 2009

Presented by Gilles Lebeau

ABSTRACT

We consider the wave equation on an interval of length 1 with an interior damping at ξ and with Dirichlet boundary condition at the two ends. It is well known that, if ξ is rational, the energy does not decay to 0. In this case, we prove that the energy decays exponentially to a constant which we identify.

RÉSUMÉ

Nous considérons l'équation des ondes sur un intervalle de longueur 1 avec un amortissement en un point ξ intérieur et avec la condition au bord de Dirichlet aux deux extrémités. Il est bien-connu que, si ξ est rationnel, l'énergie ne tend pas vers 0. Dans ce cas, nous prouvons que l'énergie décroît exponentiellement vers une constante que l'on explicitera.

Version française abrégée

Nous considérons l'équation des ondes sur un intervalle de longueur 1 avec un amortissement interne en ξ, en d'autres termes nous étudions la solution y du système suivant :

$$\begin{cases} y_{tt} - y_{xx} + \alpha\delta_\xi y_t(\xi,t) = 0, & 0<x<1,\ t>0, \\ y(0,t) = y(1,t) = 0, & t>0, \\ y(t=0) = y^{(0)}, \quad y_t(t=0) = y^{(1)}, & 0<x<1, \end{cases} \tag{1}$$

où $(y^{(0)}, y^{(1)}) \in V \times L^2(0,1)$, $V = H_0^1(0,1)$, $\xi \in (0,1)$ et α est une constante positive. Il est facile de vérifier (voir [4,6]) que ce système (1) est bien posé dans l'espace d'énergie $V \times L^2(0,1)$. Plus précisément, pour tout $(y^{(0)}, y^{(1)}) \in V \times L^2(0,1)$, il existe une solution unique $y \in C((0,T),V) \cap C^1((0,T),L^2(0,1))$ de (1).

L'énergie de la solution du système (1) est donnée par

$$E(y,t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\left|y_t(x,t)\right|^2 + \left|y_x(x,t)\right|^2\right) \mathrm{d}x$$

et vérifie la loi de dissipation suivante :

E-mail addresses: Serge.Nicaise@univ-valenciennes.fr (S. Nicaise), Julie.Valein@iecn.u-nancy.fr (J. Valein).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2009.11.015

$$\frac{\mathrm{d}E(y,t)}{\mathrm{d}t} = -\alpha\left|y_t(\xi,t)\right|^2. \tag{2}$$

Ceci implique évidemment que l'énergie est décroissante.

Il est bien-connu que (voir [4] et [6]) $\lim_{t\to\infty} E(y,t) = 0$ pour toutes données initiales dans $V \times L^2(0,1)$ si et seulement si

$$\xi \notin \mathbb{Q}. \tag{3}$$

De plus, comme il est prouvé dans [4] et [6], une estimée d'observabilité pour le système conservatif associé

$$\begin{cases} \phi_{tt} - \phi_{xx} = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ \phi(0,t) = \phi(1,t) = 0, & t > 0, \\ \phi(t=0) = y^{(0)}, \quad \phi_t(t=0) = y^{(1)}, & 0 < x < 1, \end{cases} \tag{4}$$

où les données initiales sont suffisamment régulières, implique la décroissance polynomiale de la solution de (1). En outre, cette estimée d'observabilité est vérifiée si $\xi \in \mathcal{S}$, où $\mathcal{S}$ est l'ensemble des irrationnels ρ tels que si $[0, a_1, \dots, a_n, \dots]$ est le développement de ρ en fraction continue, alors la suite (a_n) est bornée. Par conséquent si $\xi \in \mathcal{S}$, le système (1) est polynomialement stable pour des données initiales suffisamment régulières.

La condition d'irrationalité n'est pas utilisable en pratique, et si ξ est rationnel, l'énergie ne tend pas vers 0. Les questions naturelles qui se posent sont alors les suivantes :

si ξ est rationnel, quelle est la limite de l'énergie et quel est alors le type de décroissance ?

L'objectif de cette Note est de répondre à ces questions.

Dans la suite de cette Note, ξ est un nombre rationnel fixé tel que $\xi = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux.

Nous écrivons les données initiales dans la base des vecteurs propres du système (4) :

$$y^{(0)} = \sum_{k\geqslant 1} a_k \sin(k\pi\,\cdot), \qquad y^{(1)} = \sum_{k\geqslant 1} b_k \sin(k\pi\,\cdot),$$

où $(ka_k), (b_k) \in l^2(\mathbb{N}^*)$. Les vecteurs propres qui empêchent d'avoir la décroissance vers 0 de l'énergie sont ceux vérifiant

$$\sin(k\pi\xi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{l}{\xi} \in \mathbb{N}^*, \quad \text{pour } l \in \mathbb{N}^*.$$

Soit A_ξ l'ensemble des entiers définis par

$$A_\xi = \left\{k \in \mathbb{N}^*;\ k = \frac{l}{\xi},\ l \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Nous décomposons les données initiales comme suit

$$y^{(0)} = y_d^{(0)} + y_{nd}^{(0)}, \qquad y^{(1)} = y_d^{(1)} + y_{nd}^{(1)},$$

où

$$y_d^{(0)} = \sum_{k\notin A_\xi} a_k \sin(k\pi\,\cdot), \qquad y_{nd}^{(0)} = \sum_{k\in A_\xi} a_k \sin(k\pi\,\cdot), \qquad y_d^{(1)} = \sum_{k\notin A_\xi} b_k \sin(k\pi\,\cdot), \qquad y_{nd}^{(1)} = \sum_{k\in A_\xi} b_k \sin(k\pi\,\cdot).$$

Alors la solution y de (1) peut se décomposer en

$$y = y_d + y_{nd},$$

où y_d (respectivement y_{nd}) est la solution de (1) avec données initiales $(y_d^{(0)}, y_d^{(1)})$ (respectivement $(y_{nd}^{(0)}, y_{nd}^{(1)})$).

Le résultat principal de cette Note est le suivant :

Théorème 0.1. *Supposons que $\xi \in \mathbb{Q}$. Alors l'énergie de la solution y de (1) avec données initiales $(y^{(0)}, y^{(1)}) \in V \times L^2(0,1)$ tend exponentiellement vers l'énergie de la solution y_{nd} de (1) avec données initiales $(y_{nd}^{(0)}, y_{nd}^{(1)})$ au temps $t = 0$. En d'autres termes, il existe des constantes positives C et α telles que la solution y de (1) avec données initiales $(y^{(0)}, y^{(1)})$ satisfait*

$$\left|E(y,t) - E(y_{nd},0)\right| \leqslant CE(y,0)e^{-\alpha t}, \quad \forall t > 0.$$

Ce résultat est confirmé par des tests numériques présentés dans [2].

1. Introduction and main result

We consider the wave equation in an interval of length 1 with an interior damping at ξ, in other words we study the solution y of the following system

$$\begin{cases} y_{tt} - y_{xx} + \alpha\delta_\xi y_t(\xi,t) = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ y(0,t) = y(1,t) = 0, & t > 0, \\ y(t=0) = y^{(0)}, \quad y_t(t=0) = y^{(1)}, & 0 < x < 1, \end{cases} \tag{5}$$

where $(y^{(0)}, y^{(1)}) \in V \times L^2(0,1)$, $V = H_0^1(0,1)$, $\xi \in (0,1)$ and α is a fixed positive constant. It is easy to check (see [4,6]) that this system (5) is well-posed in the energy space $V \times L^2(0,1)$. More precisely, for any $(y^{(0)}, y^{(1)}) \in V \times L^2(0,1)$, there exists a unique solution $y \in C((0,T),V) \cap C^1((0,T),L^2(0,1))$ of (5).

The energy of the solution of system (5) is given by

$$E(y,t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\left|y_t(x,t)\right|^2 + \left|y_x(x,t)\right|^2\right) \mathrm{d}x$$

and obeys the following dissipation law

$$\frac{\mathrm{d}E(y,t)}{\mathrm{d}t} = -\alpha\left|y_t(\xi,t)\right|^2. \tag{6}$$

This implies that the energy is decreasing.

It is well known that (see [4] and [6]) $\lim_{t\to\infty} E(y,t) = 0$ for any initial data in $V \times L^2(0,1)$ if and only if

$$\xi \notin \mathbb{Q}. \tag{7}$$

Moreover, as it was proved in [4] and [6], an observability estimate for the corresponding conservative system

$$\begin{cases} \phi_{tt} - \phi_{xx} = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ \phi(0,t) = \phi(1,t) = 0, & t > 0, \\ \phi(t=0) = y^{(0)}, \quad \phi_t(t=0) = y^{(1)}, & 0 < x < 1, \end{cases} \tag{8}$$

where the initial data are smooth enough, implies the polynomial decay property of the solution of (5). Moreover, the observability estimate holds if $\xi \in \mathcal{S}$, where $\mathcal{S}$ is the set of irrational numbers ρ such that if $[0, a_1, \ldots, a_n, \ldots]$ is the expansion of ρ as a continued fraction, then the sequence (a_n) is bounded. Therefore if $\xi \in \mathcal{S}$, the system (5) is polynomially stable for smooth enough initial data.

The irrationality condition cannot be used in practice and if ξ is rational, the energy does not decay to 0. The natural questions are then:

if ξ is rational, what is the limit of the energy and how it goes to this limit?

The aim of this Note is to answer at these questions.

In the remainder of this Note, ξ is a fixed rational number such that $\xi = \frac{p}{q}$ with $p, q \in \mathbb{N}^*$ coprime.

We write the initial data in the basis of eigenvectors of system (8):

$$y^{(0)} = \sum_{k\geqslant 1} a_k \sin(k\pi\,\cdot), \qquad y^{(1)} = \sum_{k\geqslant 1} b_k \sin(k\pi\,\cdot),$$

where $(ka_k), (b_k) \in l^2(\mathbb{N}^*)$. The eigenvectors which are the reason of the non-decrease to 0 of the energy are those such that

$$\sin(k\pi\xi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{l}{\xi} \in \mathbb{N}^*, \quad \text{for } l \in \mathbb{N}^*.$$

Let A_ξ be the set of integer defined by

$$A_\xi = \left\{k \in \mathbb{N}^*;\ k = \frac{l}{\xi},\ l \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Now we split up the initial data as

$$y^{(0)} = y_d^{(0)} + y_{nd}^{(0)}, \qquad y^{(1)} = y_d^{(1)} + y_{nd}^{(1)},$$

where

$$y_d^{(0)} = \sum_{k\notin A_\xi} a_k \sin(k\pi\,\cdot), \qquad y_{nd}^{(0)} = \sum_{k\in A_\xi} a_k \sin(k\pi\,\cdot), \qquad y_d^{(1)} = \sum_{k\notin A_\xi} b_k \sin(k\pi\,\cdot), \qquad y_{nd}^{(1)} = \sum_{k\in A_\xi} b_k \sin(k\pi\,\cdot).$$

Then y solution of (5) can be decomposed as

$$y = y_d + y_{nd},$$

where y_d (respectively y_{nd}) is the solution of (5) with initial data $(y_d^{(0)}, y_d^{(1)})$ (respectively $(y_{nd}^{(0)}, y_{nd}^{(1)})$). The solution of the conservative system (8) can be decomposed in the same manner by

$$\phi = \phi_d + \phi_{nd}.$$

The main result of this Note is the following:

Theorem 1.1. *Assume that $\xi \in \mathbb{Q}$. Then the energy of the solution y of (5) with initial data $(y^{(0)}, y^{(1)}) \in V \times L^2(0,1)$ tends exponentially to the energy of the solution y_{nd} of (5) with initial data $(y_{nd}^{(0)}, y_{nd}^{(1)})$ at time 0, in other words, there exist positive constants C and α such that the solution y of (5) with initial data $(y^{(0)}, y^{(1)})$ satisfies*

$$\left|E(y,t) - E(y_{nd},0)\right| \leqslant C E(y,0) e^{-\alpha t}, \quad \forall t > 0.$$

2. Proof of Theorem 1.1

Note that

$$E(y,t) = E(y_d,t) + E(y_{nd},t) + \int_0^1 (y_{d,t} y_{nd,t} + y_{d,x} y_{nd,x})\,\mathrm{d}x.$$

Then, Cauchy–Schwarz's inequality yields

$$\begin{aligned}\left|E(y,t) - E(y_{nd},t)\right| &\leqslant E(y_d,t) + \left(\int_0^1 y_{d,t}^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\left(\int_0^1 y_{nd,t}^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac12} + \left(\int_0^1 y_{d,x}^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\left(\int_0^1 y_{nd,x}^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\\ &\leqslant E(y_d,t) + \left(\int_0^1 \left(y_{d,t}^2 + y_{d,x}^2\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\left(\int_0^1 \left(y_{nd,t}^2 + y_{nd,x}^2\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac12}.\end{aligned}$$

Therefore

$$\left|E(y,t) - E(y_{nd},t)\right| \leqslant E(y_d,t) + 2E(y_d,t)^{\frac12} E(y_{nd},t)^{\frac12}. \tag{9}$$

The solution ϕ_{nd} of the conservative system (8) with initial data $(y_{nd}^{(0)}, y_{nd}^{(1)})$ is given by

$$\phi_{nd}(x,t) = \sum_{k\in A_\xi}\left(a_k\cos(k\pi t) + \frac{b_k}{k\pi}\sin(k\pi t)\right)\sin(k\pi x),$$

and its energy $E(\phi_{nd},t)$ is constant. Then, since $\sin(k\pi\xi) = 0$ for all $k \in A_\xi$, we have

$$\phi_{nd,t}(\xi,t) = 0.$$

Consequently by uniqueness, ϕ_{nd} is the solution of the dissipative system (5) with initial data $(y_{nd}^{(0)}, y_{nd}^{(1)})$, i.e. $\phi_{nd} = y_{nd}$. The energy $E(y_{nd},t)$ is then constant:

$$E(y_{nd},t) = E(y_{nd},0), \quad \forall t > 0. \tag{10}$$

Similarly, the solution ϕ_d of the conservative system (8) with initial data $(y_d^{(0)}, y_d^{(1)})$ is given by

$$\phi_d(x,t) = \sum_{k\notin A_\xi}\left(a_k\cos(k\pi t) + \frac{b_k}{k\pi}\sin(k\pi t)\right)\sin(k\pi x).$$

As, for $k \notin A_\xi$, $|\sin(k\pi\xi)| = |\sin(k\pi\frac{p}{q})| = |\sin((k+nq)\pi\frac{p}{q})| \neq 0$ for all $n \in \mathbb{Z}$, $|\sin(k\pi\xi)|$ can take at most q values. Thus

$$\left|\sin(k\pi\xi)\right| \geqslant \beta, \quad \forall k \notin A_\xi,$$

where $\beta = \min\{|\sin(\pi\xi)|, |\sin(2\pi\xi)|, \ldots, |\sin((q-1)\pi\xi)|\} > 0$. Following for instance [4,6], by using Ingham's inequality (see [5]), we obtain the following observability inequality for the solution ϕ_d of (8) with initial data $(y_d^{(0)}, y_d^{(1)})$.

$$\int_0^T \left|\frac{\partial\phi_d}{\partial t}(\xi, t)\right|^2 \mathrm{d}t \geqslant C\big(\|y_d^{(0)}\|_V^2 + \|y_d^{(1)}\|_{L^2(0,1)}^2\big),$$

which leads to the exponential stability of $E(y_d, t)$: there exist positive constants C' and ω such that the solution y_d of (5) with initial data $(y_d^{(0)}, y_d^{(1)})$ satisfies

$$E(y_d, t) \leqslant C' E(y_d, 0) e^{-\omega t}, \quad \forall t > 0 \tag{11}$$

(see [1,4,6] for more details).

Therefore, (9), (10) and (11) lead to

$$\big|E(y, t) - E(y_{nd}, 0)\big| \leqslant E(y, 0)\big(C' + 2\sqrt{C'}\big)e^{-\frac{\omega}{2}t}, \quad \forall t > 0,$$

since $E(y_d, 0) \leqslant E(y, 0)$ and $E(y_{nd}, 0) \leqslant E(y, 0)$, which finishes the proof of Theorem 1.1.

Remark 1. Note that the energy $E(y, t)$ tends exponentially to the energy at time 0 of the projection of the solution on the vectorial space $Span\{\sin(k\pi\cdot); k \notin A_\xi\}$. Thus if the projection of the initial data on that space is zero, the energy of the corresponding solution decays exponentially to zero.

Remark 2. This result can be adapted to the wave equation on 1-d networks with edges of rational length (we refer to [6] for instance) or for other equations (like beam equation for example, see [3]).

References

[1] K. Ammari, A. Henrot, M. Tucsnak, Asymptotic behaviour of the solutions and optimal location of the actuator for the pointwise stabilization of a string, Asymptot. Anal. 28 (3–4) (2001) 215–240.
[2] K. Ammari, M. Jellouli, Méthode numérique pour la décroissance de l'énergie d'un réseau de cordes, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, submitted for publication.
[3] K. Ammari, M. Tucsnak, Stabilization of Bernoulli–Euler beams by means of a pointwise feedback force, SIAM J. Control Optim. 39 (4) (2000) 1160–1181.
[4] K. Ammari, M. Tucsnak, Stabilization of second order evolution equations by a class of unbounded feedbacks, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 6 (2001) 361–386.
[5] A.E. Ingham, Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series, Math. Z. 41 (1) (1936) 367–379.
[6] S. Nicaise, J. Valein, Stabilization of the wave equation on 1-D networks with a delay term in the nodal feedbacks, Netw. Heterog. Media 2 (3) (2007) 425–479 (electronic).