Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 1331–1336
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Algèbre/Analyse numérique

Une borne effective sur l'écart entre le polytope de contrôle et le graphe d'un polynôme réel sur un simplexe

Richard Leroy

IRMAR, Université Rennes 1, 263, Mathematics, Bureau 634, avenue du General Leclerc, CS 74205, 35042 Rennes cedex, France

Reçu le 19 février 2009 ; accepté après révision le 12 octobre 2009

Disponible sur Internet le 30 octobre 2009

Présenté par Haïm Brezis

Résumé

On établit dans cette Note une borne explicite sur l'écart entre le polytope de contrôle et le graphe du polynôme réel exprimé dans la base de Bernstein associée à un simplexe. Cette borne généralise les résultats connus en dimensions 1 et 2. ***Pour citer cet article : R. Leroy, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abstract

An effective bound on the gap between the control polytope and the graph of a real polynomial on a simplex. We provide in this Note an explicit bound on the gap between the control polytope and the graph of a real polynomial, expressed in the simplicial Bernstein basis. This generalizes known results in dimensions 1 and 2. ***To cite this article: R. Leroy, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abridged English version

Let $k \geqslant 1$ be a positive integer, and $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$ be a real polynomial of degree d. Let $\Delta \subset \mathbb{R}^k$ denote the standard simplex $\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k_{\geqslant 0} \mid \sum x_i \leqslant 1\}$.

For every multi-index $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{Z}^{k+1}_{\geqslant 0}$, $|\alpha|$ stands for $\alpha_0 + \cdots + \alpha_k$, and if $|\alpha| = d$, N^d_α denotes the point $(\alpha_1/d, \dots, \alpha_k/d) \in \Delta$.

f can be expressed in the Bernstein basis of degree d associated to Δ:

$$f = \sum_{|\alpha|=d} b^d_\alpha B^d_\alpha,$$

where the Bernstein polynomials of degree d are defined as follows:

$$B^d_\alpha(X_1, \dots, X_k) = \frac{d!}{\alpha_0! \cdots \alpha_k!}(1 - X_1 - \cdots - X_k)^{\alpha_0} X_1^{\alpha_1} \cdots X_k^{\alpha_k}.$$

Adresse e-mail : richard.leroy@ens-cachan.org.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2009.10.011

We now introduce the notion of control polytope.

In [3], the authors introduce the so-called standard triangulation of Δ, denoted by $T_d(\Delta)$, whose vertices are precisely the points N_α^d (note that such a triangulation is not unique in general).

The control polytope of f (of degree d, associated to Δ) is the unique continuous function $\hat{f}$, linear on each subsimplex of $T_d(\Delta)$, and satisfying the following interpolation property:

$$\forall |\alpha| = d, \quad \hat{f}\big(N_\alpha^d\big) = b_\alpha^d.$$

Our main result is the following bound on the gap between f and its control polytope:

$$\max_{x \in \Delta} \big| f(x) - \hat{f}(x) \big| \leqslant \frac{\lfloor \frac{d^2 k(k+2)}{12} \rfloor}{2d} \max_{\substack{|\gamma| = d-2 \\ 0 \leqslant i < j \leqslant k}} \big| b^d_{\gamma+e_i+e_{j-1}} + b^d_{\gamma+e_{i-1}+e_j} - b^d_{\gamma+e_{i-1}+e_{j-1}} - b^d_{\gamma+e_i+e_j} \big|,$$

where $(e_0, \ldots, e_k)$ denotes the standard basis of $\mathbb{R}^{k+1}$ (with the convention $e_{-1} = e_k$).

Remark 1. Note that this result is based on the choice of the standard triangulation in order to define the control polytope, and does not extend to the case of an arbitrary triangulation of Δ, even with vertices N_α^d. Nevertheless, as an immediate corollary, we obtain the following bound on the gap between the Bernstein coefficients of f and its graph, which does not depend on the chosen triangulation:

$$\max_{|\alpha| = d} \big| f(N_\alpha) - b_\alpha \big| \leqslant \frac{\lfloor \frac{d^2 k(k+2)}{12} \rfloor}{2d} \max_{\substack{|\gamma| = d-2 \\ 0 \leqslant i < j \leqslant k}} |b_{\gamma+e_i+e_{j-1}} + b_{\gamma+e_{i-1}+e_j} - b_{\gamma+e_{i-1}+e_{j-1}} - b_{\gamma+e_i+e_j}|.$$

We now sketch the proof. Using a convexity argument and after rescaling, it turns out that in this view, the worse case is achieved by a unique quadratic form, for which all the quantities $b_{\gamma+e_i+e_{j-1}} + b_{\gamma+e_{i-1}+e_j} - b_{\gamma+e_{i-1}+e_{j-1}} - b_{\gamma+e_i+e_j}$ are equal to 1. The study of the gap in this particular case is easy, and leads to the result.

Remark 2. Note that the result also holds for any simplex of $\mathbb{R}^k$ (one just need to apply an *ad hoc* affine transformation).

1. Introduction

Les polynômes de Bernstein sont fréquemment utilisés en modélisation et en conception assistées par ordinateur, du fait de leurs remarquables propriétés géométriques. Par exemple, les coefficients de Bernstein approchent les polynômes qu'ils représentent. La propriété de l'enveloppe convexe [6] donne une première estimation quantitative de cette approximation. Dans [1] puis [4], les auteurs améliorent l'estimation de l'approximation. Toutefois, les bornes obtenues ne sont pas optimales, et sont difficilement calculables. Plus récemment, dans [5], les auteurs obtiennent une borne précise et simple pour le cas univarié. Reif [7] simplifie et généralise la preuve au cas bivarié. Le but de cette Note est d'élargir ce résultat en dimension quelconque, dans le cadre des polynômes de Bernstein associés à un simplexe.

2. Base de Bernstein

Soit $k \geqslant 1$ un entier, et $f \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_k]$ un polynôme réel de degré d, que l'on étudie sur le simplexe standard $\Delta = \{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}_+^k \mid \sum x_i \leqslant 1\}$. Nous utiliserons dans la suite les notations suivantes :

Notation 2.1. Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^{k+1}$, on notera $|\alpha|$ la somme de ses composantes $\alpha_0 + \cdots + \alpha_k$, et si $|\alpha| = d$, N_α^d désignera le point $(\alpha_1/d, \ldots, \alpha_k/d) \in \Delta$.

Définition 2.2. La famille $(B_\alpha^d)_{|\alpha|=d}$ des polynômes de Bernstein de degré d associée à Δ est définie par

$$B_\alpha^d(X_1, \ldots, X_k) = \frac{d!}{\alpha_0! \cdots \alpha_k!}(1 - X_1 - \cdots - X_k)^{\alpha_0} X_1^{\alpha_1} \cdots X_k^{\alpha_k}.$$

Cette famille forme une base de l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à d. Ainsi, f s'exprime de manière unique sous la forme

$$f = \sum_{|\alpha|=d} b_\alpha(f, d, \Delta) B_\alpha^d,$$

où les $b_\alpha(f, d, \Delta)$ sont appelés coefficients de Bernstein de f (de degré d, sur Δ). Notons que l'on peut exprimer tout polynôme de degré d dans les bases de Bernstein de degré D pour tout $D \geqslant d$.

Exemple 1 *(Précision affine).* Si $d \leqslant 1 \leqslant D$, alors pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_k)$ vérifiant $|\alpha| = D$, on a : $b_\alpha(f, D, \Delta) = f(N_\alpha^D)$.

Exemple 2 *(Coefficients de Bernstein d'une forme quadratique).* Soit $q(X_1, \ldots, X_k)$ une forme quadratique de matrice associée $M = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant k}$, et supposons $d \geqslant 2$. Alors :

$$\forall |\alpha| = d, \quad b_\alpha(q, d, \Delta) = \frac{1}{d(d-1)} \left(q(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) - \sum_{i=1}^k m_{ii}\alpha_i \right).$$

3. Résultat principal

On définit maintenant les objets que l'on cherche à comparer.

Dans [3], les auteurs considèrent une triangulation du simplexe Δ, dont les sommets sont les points N_α^d, appelée triangulation standard de Δ et notée $T_d(\Delta)$. À tout polynôme f, on peut dès lors associer son polytope de contrôle $\hat{f}$ comme étant l'unique application continue, affine sur chaque sous-simplexe de $T_d(\Delta)$ et vérifiant la propriété d'interpolation :

$$\forall |\alpha| = d, \quad \hat{f}\big(N_\alpha^d\big) = b_\alpha(f, d, \Delta).$$

Remarque 1. Si $d \leqslant 1$, alors ces deux notions sont identiques par précision affine. On suppose par la suite $d \geqslant 2$.

Généralisant les travaux de [5] et [7], le but de cette section est l'obtention d'une borne sur l'écart entre les points de contrôle et le graphe discret d'un polynôme réel en termes de différences secondes.

Définition 3.1. Notons $(e_0, \ldots, e_k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^{k+1}$ (avec la convention $e_{-1} = e_k$). On appelle différences secondes de degré d, et on note $\nabla^2 b_{\gamma,i,j}(f, d, \Delta)$, les quantités

$$\nabla^2 b_{\gamma,i,j}(f, d, \Delta) = b_{\gamma+e_i+e_{j-1}}(f, d, \Delta) + b_{\gamma+e_{i-1}+e_j}(f, d, \Delta) - b_{\gamma+e_{i-1}+e_{j-1}}(f, d, \Delta) - b_{\gamma+e_i+e_j}(f, d, \Delta),$$

où $|\gamma| = d - 2$ et $0 \leqslant i < j \leqslant k$.

Exemple 3. Soit $q(X_1, \ldots, X_k)$ une forme quadratique de matrice associée $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant k}$. Puisque $d \geqslant 2$, on peut exprimer q dans la base de Bernstein de degré d associée à Δ. Pour tout $|\gamma| = d - 2$ et $0 \leqslant i < j \leqslant k$, on a alors :

$$\nabla^2 b_{\gamma,i,j}(q, d, \Delta) = \frac{2}{d(d-1)} (m_{i-1,j} + m_{i,j-1} - m_{i,j} - m_{i-1,j-1}),$$

avec les conventions $m_{0,j} = m_{i,0} = 0$, $m_{-1,j} = m_{k,j}$ et $m_{-1,-1} = m_{k,k}$.

On introduit les notations suivantes :

Notation 3.2. On note $\nabla^2 b(f, d, \Delta)$ le vecteur des différences secondes (dans un ordre quelconque) :

$$\nabla^2 b(f, d, \Delta) = \big(\nabla^2 b_{\gamma,i,j}(f, d, \Delta)\big)_{\substack{|\gamma|=d-2 \\ 0\leqslant i<j\leqslant k}}.$$

On désigne par $\|\nabla^2 b(f, d, \Delta)\|_\infty$ sa norme infinie : $\|\nabla^2 b(f, d, \Delta)\|_\infty = \max_{\substack{|\gamma|=d-2 \\ 0\leqslant i<j\leqslant k}} |\nabla^2 b_{\gamma,i,j}(f, d, \Delta)|$.

L'exemple suivant est fondamental pour la suite :

Exemple 4. Soit $q_d(X_1, \ldots, X_k)$ la forme quadratique associée à la matrice $N = \frac{d(d-1)}{2} M$, où $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant k}$ est la matrice symétrique définie par $m_{i,j} = i(k-j+1)$ si $i \leqslant j$.

Alors $\nabla^2 b(q_d, d, \Delta) = (1, \ldots, 1)$.

Remarque 2. La matrice M définie dans l'exemple précédent est définie positive. En effet, si P désigne la matrice dont la diagonale est formée de 1 et la surdiagonale est formée de -1, alors ${}^t PMP = (k+1)I - J$, où I désigne la matrice identité et J la matrice dont les éléments valent tous 1. La matrice $(k+1)I - J$ étant classiquement définie positive, M l'est également. En particulier, q_d est strictement convexe.

Le résultat principal de cette Note s'énonce ainsi :

Théorème 3.3. *Avec les notations précédentes, on a* : $\max_{x \in \Delta} |f(x) - \hat{f}(x)| \leqslant \frac{\lfloor \frac{d^2 k(k+2)}{12} \rfloor}{2d} \|\nabla^2 b(f, d, \Delta)\|_\infty$.

Remarque 3. Puisque $\lfloor \frac{d^2}{4} \rfloor = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor \lceil \frac{d}{2} \rceil$, on retrouve la borne dans le cas univarié donnée par [5].

De même, si $k = 1$ ou 2, alors $\frac{\lfloor \frac{d^2 k(k+2)}{12} \rfloor}{2d} \leqslant \frac{k(k+2)}{24}(d - \frac{\omega_{k+1}(d)}{d})$, où $\omega_{k+1}(d) = 0$ si $k+1$ divise d et 1 sinon. Par conséquent, le Théorème 3.3 généralise les bornes obtenues dans [7].

4. Résumé de la démonstration

La preuve fait intervenir la notion de polytope de contrôle, et l'étude de son éventuelle convexité. En dimension 1, il s'agit de la ligne brisée joignant les points de contrôle. En dimension supérieure, sa définition nécessite de choisir une triangulation du simplexe Δ. Rapelons que nous travaillons ici avec la triangulation standard introduite dans [3], et que le polytope de contrôle est défini comme suit :

Définition 4.1. Le polytope de contrôle associé à f est l'unique fonction $\hat{f}$ continue, affine sur chaque simplexe de la triangulation standard de Δ et vérifiant la propriété d'interpolation :

$$\forall |\alpha| = d, \quad \hat{f}\left(N_\alpha^d\right) = b_\alpha(f, d, \Delta).$$

Le résultat suivant (obtenu dans [3] et basé sur les travaux de [2]) caractérise la convexité du polytope de contrôle à l'aide des différences secondes :

Théorème 4.2. *Le polytope de contrôle $\hat{f}$ est convexe si et seulement si* $\nabla^2 b(f, d, \Delta) \leqslant 0$ (*où l'inégalité s'entend composante par composante*).

On peut maintenant démontrer le Théorème 3.3.

Par précision affine, le Théorème 3.3 est évident si $d \leqslant 1$. On suppose désormais $d \geqslant 2$.

On montre tout d'abord que le cas le pire est atteint pour la forme quadratique q_d définie dans l'Exemple 4 :

Lemme 4.3.

$$\forall x \in \Delta, \quad \left|(f - \hat{f})(x)\right| \leqslant (q_d - \hat{q_d})(x) \left\|\nabla^2 b(f, d, \Delta)\right\|_\infty.$$

Preuve. Soit α un multi-indice vérifiant $|\alpha| = d$.

- Puisque le degré de f vérifie $d \geqslant 2$, on a $\|\nabla^2 b(f, d, \Delta)\|_\infty \neq 0$. On peut donc supposer, sans perte de généralité, que f est normalisé de telle sorte que l'on ait $\|\nabla^2 b(f, d, \Delta)\|_\infty = 1$.

- Soit q_d la forme quadratique donnée dans l'Exemple 4 vérifiant $\nabla^2 b(q_d, d, \Delta) = (1, \dots, 1)$. On a alors $\nabla^2 b(q_d + f, d, \Delta) \geqslant 0$, donc le polygône de contrôle de $q_d + f$ est convexe. Notant g la fonction $q_d + f$, on a alors :

$$g(x) = \sum_{|\beta|=d} b_\beta(g, d, \Delta) B^d_\beta(x) = \sum_{|\beta|=d} \hat{g}\big(N^d_\beta\big) B^d_\beta(x) \geqslant \hat{g}\left(\sum_{|\beta|=d} B^d_\beta(x) N_\beta\right) = \hat{g}(x),$$

  l'inégalité étant une conséquence de la convexité de $\hat{g}$ et la dernière égalité découlant de la propriété de précision affine.

Par conséquent, on obtient la majoration $(q_d - \hat{q_d})(x) \geqslant -(f - \hat{f})(x)$. En considérant la fonction $q_d - f$, on montre de même que $(q_d - \hat{q_d})(x) \geqslant (f - \hat{f})(x)$. Finalement, on obtient bien la majoration souhaitée. □

Lemme 4.4. *Soit q_d la forme quadratique de l'Exemple* 4. *Alors* : $\max_{x\in\Delta}(q_d - \hat{q_d})(x) \leqslant \frac{\lfloor \frac{d^2k(k+2)}{12} \rfloor}{2d}$.

Preuve. D'après la Remarque 2, q_d est une application (strictement) convexe. Sur chaque sous-simplexe de $T_2(\Delta)$, $\hat{q}_d$ est affine, et donc $q_d - \hat{q}_d$ y est convexe. Son maximum est donc atteint en un sommet d'un sous-simplexe de $T_2(\Delta)$, *i.e.* en un point N^d_α.

On considère les quantités $(q_d - \hat{q}_d)(N^d_\alpha) = q_d(N^d_\alpha) - b_\alpha(q_d, d, \Delta)$ pour $|\alpha| = d$. D'après l'Exemple 2, ces quantités valent :

$$q_d\big(N^d_\alpha\big) - b_\alpha(q_d, d, \Delta) = \left(-\frac{1}{2d}\right)(\alpha_1, \dots, \alpha_k) M^t (\alpha_1, \dots, \alpha_k) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} m_{ii}\alpha_i =: h(\alpha_1, \dots, \alpha_k).$$

h est une application de classe C^∞ de $\mathbb{R}^k$ vers $\mathbb{R}$, dont la matrice hessienne, $\frac{-1}{d}M$, est définie négative d'après la Remarque 2. Ainsi, h est strictement concave. Son gradient est nul au point $(\frac{d}{k+1}, \dots, \frac{d}{k+1})$, et $h(\frac{d}{k+1}, \dots, \frac{d}{k+1}) = \frac{\lfloor \frac{d^2k(k+2)}{12} \rfloor}{2d}$ est donc l'unique maximum global de h par stricte concavité.

Or $\alpha \in \mathbb{N}^{k+1}$, donc $2d \times h(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}$, d'où finalement : $(q_d - \hat{q}_d)(N^d_\alpha) \leqslant \frac{\lfloor \frac{d^2k(k+2)}{12} \rfloor}{2d}$. □

Remarque 4. La borne du Théorème 3.3 est atteinte pour la forme quadratique q_d de l'Exemple 4, vue comme polynôme de degré d. Elle se généralise de plus immédiatement à un simplexe quelconque par transformation affine.

Remarque 5. Le Théorème 3.3 fait intervenir le polytope de contrôle associé à f, qui nécessite le choix d'une triangulation particulière de Δ, et ne se généralise pas au cas d'une triangulation de Δ quelconque (même si ses sommets sont les points N^d_α). Cependant, on obtient en corollaire immédiat la borne suivante, portant sur les coefficients de Bernstein de f, et indépendante du choix d'une triangulation de Δ :

$$\max_{|\alpha|=d} \big| f(N_\alpha) - b_\alpha \big| \leqslant \frac{\lfloor \frac{d^2k(k+2)}{12} \rfloor}{2d} \max_{\substack{|\gamma|=d-2 \\ 0\leqslant i<j\leqslant k}} |b_{\gamma+e_i+e_{j-1}} + b_{\gamma+e_{i-1}+e_j} - b_{\gamma+e_{i-1}+e_{j-1}} - b_{\gamma+e_i+e_j}|.$$

Remerciements

L'auteur tient à remercier M.F. Roy pour son aide de longue haleine, et le rapporteur anonyme de cette Note pour ses conseils pertinents.

Références

[1] E. Cohen, L.L. Schumacher, Rates of convergence of control polygons, Computer Aided Geom. Design 2 (1985) 229–235.
[2] W. Dahmen, C.A. Micchelli, Convexity of multivariate Bernstein polynomials and box spline surfaces, Stud. Sci. Hung. 23 (1988) 265–287.
[3] T. Goodman, J. Peters, Bézier nets, convexity and subdivision on higher-dimensional simplices, Computer Aided Geom. Design 12 (1) (1995) 53–65.
[4] L. Kobbelt, H. Prautzsch, Convergence of subdivision and degree elevation, Adv. Comp. Mat. 2 (1994) 143–154.

[5] D. Nairn, J. Peters, D. Lutterkort, Sharp, quantitative bounds on the distance between a polynomial piece and its Bézier control polygon, Computer Aided Geom. Design 16 (7) (1999) 613–631.
[6] H. Prautzsch, W. Boehm, M. Paluszny, Bezier and B-Spline Techniques, Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, 2002.
[7] U. Reif, Best bounds on the approximation of polynomials and splines by their control structure, Computer Aided Geom. Design 167 (6) (2000) 579–589.